NHỊ THỨC NEWTON VÀ CÔNG THỨC TỔ HỢP

CÂU CHUYỆN VỀ NHỊ THỨC NEWTON

NGUYỄN CÔNG SỨ
(Trường Đại học Kĩ thuật Mật mã)

Để ghi nhớ công lao của Isaas Newton (1642 – 1727) trong việc tìm ra công thức khai triển nhị thức sau, được gọi là *nhị thức Newton*.

$$(1+x)^m = 1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\dots$$
$$\dots+\frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-k+1)}{k!}x^k+\dots$$
$$\dots+\frac{m(m-1)(m-2)\dots3.2}{(m-1)!}x^{m-1}+\dots$$
$$\dots+\frac{m(m-1)(m-2)\dots3.2.1}{m!}x^m \qquad (1)$$

Trên bia mộ của Newton tại tu viện Vecmintrơ người ta còn khắc hoạ hình Newton cùng với cả nhị thức Newton.

Vậy phải chăng cả loài người đã không hề biết gì về công thức khai triển nhị thức trước khi có phát minh của nhà bác học vĩ đại này ?

Theo các văn bản còn lưu giữ được từ rất lâu trước Newton, ngay từ 200 năm trước Công nguyên các nhà toán học Ấn Độ đã rất quen biết với một bảng *tam giác số học*. Trong trước tác của nhà toán học Trung Quốc Chu Sinh viết từ năm 1303 người ta tìm thấy bảng số sau.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1

Rõ ràng đó là các hệ số của công thức khai triển nhị thức Newton từ cấp 0 đến cấp 8, dù nhà toán học này đã không nói gì cho các hệ số tiếp theo cùng công thức tổng quát của chúng, nhưng theo cung cách lập bảng của ông có thể dễ dàng tìm ra được quy luật cho phép viết tiếp được các hàng mới.

Vào nửa đầu thế kỉ XV trong tác phẩm *Chìa khoá số học* viết bằng tiếng Ảrập của nhà toán học, thiên văn học Xamacan có tên là Giêm Xit–Giaxêdin Casi người ta lại gặp tam giác số học mà tác giả đã gọi tên rõ hơn là các hệ số nhị thức cùng với những chỉ dẫn về cách thành lập các hàng kế tiếp nhau của bảng ứng với các cấp liên tiếp của nhị thức. Với lối chỉ dẫn (không chứng minh) đó Casi đã cho ta khả năng khai triển nhị thức ở một cấp bất kì.

Có thể coi đó là sự phát biểu bằng văn đầu tiên trong lịch sử của định lí về nhị thức Newton.

Ở châu Âu, *tam giác số học* được tìm thấy đầu tiên trong công trình của nhà toán học người Đức Stiffel M. công bố vào năm 1544. Trong công trình này cũng dẫn ra các hệ số của nhị thức cho đến cấp 17.

Gần một trăm năm sau, hoàn toàn độc lập với nhau nhà toán học người Anh Bôritgôn (1624), nhà toán học Pháp Fermat (1636) rồi nhà toán học, triết học Pháp Pascal (1654) đã đưa ra công thức hoàn hảo về hệ số của nhị thức Newton. Đặc biệt trong công trình mang tên *Luận văn về tam giác số học* công bố vào năm 1665, Pascal đã trình bày khá chi tiết về tính chất của các hệ số trong *tam giác số học* và từ đó *tam giác số học* được sử dụng một cách rộng rãi và tên *tam giác Pascal* ra đời thay cho *tam giác số học*.

Rõ ràng về mặt lịch sử mà nói thì *tam giác số học* đã được các nhà toán học Á đông xét đến trước Pascal rất nhiều.

Vậy vai trò Newton ở đâu trong tiến trình hình thành công thức Newton ?

Năm 1676 trong bức thư thứ nhất gửi Ôden Hiarô – Chủ tịch Viện Hàn lâm Hoàng gia Anh, Newton đã đưa ra công thức (1) mà không dẫn giải cách chứng minh. Sau đó ít lâu trong bức thư thứ hai gửi đến viện Hàn lâm, Newton đã trình bày rõ ràng bằng cách nào ông đi đến công thức đó. Thì ra bằng cách này Newton đã tìm ra công thức Newton từ năm 1665 khi mà ông chỉ mới 22 tuổi. Nhưng dù vậy thì việc đưa trình công thức của mình Newton cũng không nói được điều gì mới cho các nhà toán học đương thời.

Vậy tại sao công thức không mới đó lại mang tên Newton ?

Vấn đề là ở chỗ ý tưởng của Newton không dừng lại ở việc áp dụng công thức này cho trường hợp các số mũ là số *nguyên dương* mà cho số mũ bất kì : *số dương, số âm, số nguyên và phân số*.

Chính ý tưởng mới đó có một ý nghĩa lớn lao đối với việc phát triển của toán học. Các nhà toán học đương thời thấy ngay được tầm quan trọng của công thức và công thức được áp dụng rộng rãi trong nhiều công trình nghiên cứu toán học, đặc biệt trong đại số và giải tích.

Nhân đây, cũng cần phải nói thêm rằng công thức nhị thức Newton không phải là sự đóng góp lớn nhất của Newton cho toán học. Newton đã đóng góp rất nhiều cho việc mở đầu những hướng toán học cao cấp, đó là *Các phép tính đối với các đại lượng vô cùng bé*. Và do vậy Newton được coi là người sáng lập ra ngành *Giải tích toán học*.

NHỊ THỨC NEWTON VỚI CÁC BÀI TOÁN BẤT ĐẲNG THỨC

NGÔ VĂN THÁI *(Thái Bình)*

Các bạn thân mến ! Khi học chương trình Đại số lớp 8 các bạn gặp một số hằng đẳng thức sau đây :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Các hằng đẳng thức này thường được áp dụng để giải các bài toán biến đổi đồng nhất và cũng được áp dụng để giải các bài toán bất đẳng thức.

Trong bài viết này tôi muốn nêu vài nét về nhị thức Newton với các bài toán bất đẳng thức.

1. Nhị thức Newton

Các hằng đẳng thức trên chỉ là trường hợp riêng của hằng đẳng thức tổng quát sau đây :

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \ldots$$
$$\ldots + C_n^{n-1} ab^{n-1} + C_n^n b^n \qquad (1)$$

trong đó n là số nguyên dương.

Hằng đẳng thức này được gọi là *công thức nhị thức Newton*, trong đó C_n^k $(k \in \mathbb{N}, k \le n)$ là các hệ số của nhị thức. C_n^k bằng số tổ hợp chập k của n phần tử, tức là $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ ($k! = 1.2.3...k$; quy ước $0! = 1$).

Đẳng thức (1) được chứng minh dễ dàng bằng phương pháp quy nạp toán học, trong quá trình chứng minh phải lưu ý một số tính chất của tổ hợp :

$$C_n^k = C_n^{n-k} \,;\; C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}.$$

Việc chứng minh chi tiết xin dành lại cho bạn đọc.

Từ nhị thức Newton ta có thể rút ra một số công thức thú vị chẳng hạn :

- Khi $a = b = 1$ thì

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n \qquad (2)$$

- Khi $a = -b = 1$ thì

$$0 = C_n^0 - C_n^1 + \ldots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} + (-1)^n C_n^n.$$

- $(a-b)^n = C_n^0 a^n - C_n^1 a^{n-1}b + \ldots$

$$+(-1)^{n-1} C_n^{n-1} ab^{n-1} + (-1)^n C_n^n b^n.$$

2. Từ nhị thức Newton rút ra bài toán bất đẳng thức

Bạn muốn có một bài toán về bất đẳng thức ? Bạn chỉ cần lấy bất kì một hằng đẳng thức nào đó, rồi bớt (hoặc thêm) một số hạng dương nào đó ở một vế thì sẽ được một bài toán về bất đẳng thức. Nhưng để được một bài toán về bất đẳng thức đúng và hay còn phải đòi hỏi vào khả năng say mê tìm tòi của bạn. Sau đây là một số thí dụ về các bài toán bất đẳng thức quen thuộc được rút ra từ nhị thức Newton.

★**Thí dụ 1.** Từ công thức (1) cho $a = 1$ được

$$(1+b)^n = 1 + nb + \frac{n(n-1)}{2}.b^2 + \ldots + nb^{n-1} + b^n \qquad (3)$$

Nếu b là một số không âm thì $(n+1)$ số hạng ở vế phải của (3) đều là những số không âm, do đó có thể bỏ đi bất kì một số các số hạng nào đó ở vế phải ta được vế trái không nhỏ hơn vế phải, chẳng hạn :

$$(1+b)^n \ge 1 + nb$$
$$(1+b)^n \ge 1 + nb + \frac{(n-1)n}{2}.b^2$$
$$(1+b)^n \ge 1 + nb^{n-1} + b^n, \ldots$$

★**Thí dụ 2.** Từ (3), nếu $b = \dfrac{1}{n}$ $(n > 1)$ thì

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = C_n^0 + C_n^1\left(\frac{1}{n}\right) + C_n^2\left(\frac{1}{n^2}\right) + \ldots + C_n^n\left(\frac{1}{n^n}\right).$$

Để ý rằng

$$C_n^k.\frac{1}{n^k} = \frac{n!}{k!(n-k)!n^k} = \frac{1}{k!}\left(\frac{n!}{(n-k)!.n^k}\right) < \frac{1}{k!}$$

nên

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}.$$

★**Thí dụ 3.** Viết nhị thức Newton theo hai cách sau :

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + \ldots$$
$$\ldots + C_n^{n-1} ab^{n-1} + C_n^n b^n$$
$$(a+b)^n = C_n^0 b^n + C_n^1 b^{n-1}a + \ldots$$
$$\ldots + C_n^{n-1} ba^{n-1} + C_n^n a^n.$$

Cộng theo từng vế của hai đẳng thức trên ta có

$$2(a+b)^n = C_n^0(a^n + b^n) + C_n^1(a^{n-1}b + b^{n-1}a) + \ldots$$
$$+ C_n^{n-1}(ab^{n-1} + ba^{n-1}) + C_n^n(a^n + b^n).$$

Dễ thấy khi $a \geq 0$, $b \geq 0$, $i \leq n$ thì

$$(a^{n-i} - b^{n-i})(a^i - b^i) \geq 0$$

nên $\quad a^n + b^n \geq a^{n-i}b^i + a^i b^{n-i}.$

Do đó với $a \geq 0$, $b \geq 0$ thì

$$2(a+b)^n \leq C_n^0(a^n + b^n) + C_n^1(a^n + b^n) + \ldots$$
$$+ C_n^{n-1}(a^n + b^n) + C_n^n(a^n + b^n)$$

$\Leftrightarrow 2(a+b)^n \leq 2^n.(a^n + b^n)$ hay $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^n \leq \dfrac{a^n+b^n}{2}$.

3. Áp dụng nhị thức Newton để chứng minh các bài toán bất đẳng thức

✪**Bài toán 1.** *Với $-1 \leq x \leq 1$, n là số nguyên dương, chứng minh rằng*

$$2^n \geq (1-x)^n + (1+x)^n.$$

Chứng minh. Ta thấy

$$2^n = (1 - x + 1 + x)^n = ((1-x) + (1+x))^n.$$

Khai triển nhị thức Newton ở vế phải ta có

$$2^n = C_n^0(1-x)^n + C_n^1(1-x)^{n-1}(1+x) + \ldots$$
$$\ldots + C_n^n(1+x)^n.$$

Vì $|x| \leq 1$ nên $(1 - x)$, $(1 + x)$ đều không âm, do đó

$$2^n \geq C_n^0(1-x)^n + C_n^n(1+x)^n$$
$$= (1-x)^n + (1+x)^n. \ \square$$

✪**Bài toán 2.** *Cho $x_1 \geq x_2 \geq 0$; $y_1 \geq y_2 \geq 0$, $n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng*

$$(x_1 + y_1)^n + (x_2 + y_2)^n \geq (x_1 + y_2)^n + (x_2 + y_1)^n.$$

Chứng minh. Vì $x_1 \geq x_2 \geq 0$ nên $x_1^m \geq x_2^m$; $m \in \mathbb{N}$. Vì $y_1 \geq y_2 \geq 0$ nên $y_1^k \geq y_2^k$; $k \in \mathbb{N}$.

Do đó $\quad (x_1^m - x_2^m)(y_1^k - y_2^k) \geq 0$

hay $\quad x_1^m y_1^k + x_2^m y_2^k \geq x_1^m y_2^k + x_2^m y_1^k.$

Lấy $m = n - k$; $n \geq k \geq 0$ ta được

$$x_1^{n-k}y_1^k + x_2^{n-k}y_2^k \geq x_1^{n-k}y_2^k + x_2^{n-k}y_1^k$$

$$\Rightarrow C_n^k(x_1^{n-k}y_1^k + x_2^{n-k}y_2^k)$$
$$\geq C_n^k(x_1^{n-k}y_2^k + x_2^{n-k}y_1^k) \qquad (4)$$

Từ bất đẳng thức (4) cho k lần lượt bằng 0, 1, 2, ..., n được $(n + 1)$ bất đẳng thức sau.

$$C_n^0(x_1^n + x_2^n) = C_n^0(x_1^n + x_2^n)$$

$$C_n^1(x_1^{n-1}y_1 + x_2^{n-1}y_2) \geq C_n^1(x_1^{n-1}y_2 + x_2^{n-1}y_1)$$

....

$$C_n^{n-1}(x_1y_1^{n-1} + x_2y_2^{n-1}) \geq C_n^{n-1}(x_1y_2^{n-1} + x_2y_1^{n-1})$$

$$C_n^n(y_1^n + y_2^n) = C_n^n(y_2^n + y_1^n).$$

Cộng theo từng vế của tất cả các bất đẳng thức trên rồi sử dụng công thức nhị thức Newton ta được

$$(x_1 + y_1)^n + (x_2 + y_2)^n \geq (x_1 + y_2)^n + (x_2 + y_1)^n.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2$ hoặc $y_1 = y_2$. $\square$

Bài toán trên tuy không khó, nó có thể được chứng minh bằng nhiều cách khác nhau, nhưng có điều tôi chưa được biết có quyển sách nào viết về nó. Nếu ta để ý, từ bài toán 2 sẽ rút ra được một số bài toán thú vị, chẳng hạn cho $x_1 = y_1 \geq 0$, $x_2 = y_2 \geq 0$ ta có ngay bài toán ở thí dụ 3.

✪**Bài toán 3.** *Chứng minh rằng nếu $x_k \geq 0$, $y_k \geq 0$ (k = 1, 2, ..., m) thì*

$$\sum_{k=1}^{m}(x_k + y_k)^n \geq m\left(\sqrt[m]{\prod_{k=1}^{m} x_k} + \sqrt[m]{\prod_{k=1}^{m} y_k}\right)^n.$$

Chứng minh. Vì $x_k \geq 0$, $y_k \geq 0$, theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\sum_{k=1}^{m} x_k^{n-j}y_k^j \geq m\sqrt[m]{\prod_{k=1}^{m} x_k^{n-j}y_k^j}.$$

Nhân hai vế của bất đẳng thức đó với C_n^j, rồi cho j lần lượt chạy từ 0, 1, 2, ..., n ta được $(n+1)$ bất đẳng thức cùng chiều, sau đó cộng theo từng vế của tất cả các bất đẳng thức đó lại, áp dụng công thức nhị thức Newton ta được bài toán cần chứng minh. ❐

✪Bài toán 4. *Cho a_1, a_2, b_1, b_2 là các số không âm. Chứng minh rằng*

$$\sqrt[n]{a_1^n+b_1^n}+\sqrt[n]{a_2^n+b_2^n}\geq\sqrt[n]{(a_1+a_2)^n+(b_1+b_2)^n}.$$

Chứng minh. Nếu hai trong bốn số a_1, a_2, b_1, b_2 bằng 0 ta được một đẳng thức. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta chứng minh được với $1\leq k\leq n$ thì

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}(a_k^n+b_k^n)}\geq\prod_{k=1}^{n}a_k+\prod_{k=1}^{n}b_k.$$

Như vậy có

$$\sqrt[n]{(a_1^n+b_1^n)^{n-k}.(a_2^n+b_2^n)^k}\geq a_1^{n-k}.a_2^k+b_1^{n-k}.b_2^k$$

Nhân hai vế của bất đẳng thức đó với C_n^k, rồi cho k lần lượt chạy từ 0, 1, 2, ..., n ta được $(n+1)$ bất đẳng thức cùng chiều, sau đó cộng theo từng vế của tất cả các bất đẳng thức đó lại và áp dụng nhị thức Newton ta được bài toán phải chứng minh. ❐

Bài toán 4 chính là trường hợp riêng của bất đẳng thức Minkowski.

MỘT THUẬT TOÁN KHAI TRIỂN NHANH TAM THỨC NEWTON

PHẠM ĐĂNG LONG
(ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

Từ trước tới nay, ta đã quen biết với *tam giác Pascal* là bảng các hệ số cho khai triển *nhị thức Newton*, cùng với các kí hiệu C_n^k hoặc $\binom{n}{k}$. Bây giờ, ta sẽ thử mở rộng các thuật toán đó cho trường hợp khai triển biểu thức $(a+b+c)^n$, và gọi là *tam thức Newton*, trong đó a, b và c là những biến số thực, n là số nguyên dương.

Để dễ hiểu, ta xét trường hợp khai triển $(a+b+c)^2$ dựa vào *tam giác Pascal* cho *nhị thức Newton* như sau :

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &= (a+(b+c))^2\\ &= \mathbf{1}.a^2.(b+c)^0+\mathbf{2}a^1.(b+c)^1\\ &\quad+\mathbf{1}.a^0.(b+c)^2\\ &= \mathbf{1}.a^2(\mathbf{1})+\mathbf{2}.a^1.(\mathbf{1}.b+\mathbf{1}.c)\\ &\quad+\mathbf{1}.a^0.(\mathbf{1}.b^2+\mathbf{2}bc+\mathbf{1}.c^2).\end{aligned}$$

Hãy chú ý tới các hệ số bên ngoài và bên trong dấu ngoặc! Các bạn thấy có gì đặc biệt không?

Ta xét thêm trường hợp khai triển $(a+b+c)^3$ ứng với số mũ $n=3$:

$$\begin{aligned}(a+b+c)^3 &= (a+(b+c))^3\\ &= \mathbf{1}.a^3.(b+c)^0\\ &\quad+\mathbf{3}.a^2(b+c)^1\\ &\quad+\mathbf{3}.a^1.(b+c)^2\\ &\quad+\mathbf{1}.a^0.(b+c)^3\\ &= \mathbf{1}.a^3.(\mathbf{1})\\ &\quad+\mathbf{3}.a^2.(\mathbf{1}.b+\mathbf{1}.c)\\ &\quad+\mathbf{3}.a^1(\mathbf{1}.b^2+\mathbf{2}bc+\mathbf{1}.c^2)\\ &\quad+\mathbf{1}.a^0(\mathbf{1}.b^3+\mathbf{3}.b^2.c+\mathbf{3}.bc^2+\mathbf{1}.c^3)\\ &= a^3+\mathbf{3}a^2b+\mathbf{3}a^2c+\mathbf{3}ab^2+\mathbf{6}abc\\ &\quad+\mathbf{3}ac^2+b^3+\mathbf{3}b^2c+\mathbf{3}bc^2+c^3.\end{aligned}$$

Ta có thể rút ra thuật toán tìm khai triển của $(a+b+c)^3$ như sau :

Bước 1. Viết bảng các hệ số và biến *bên trong ngoặc* :

- Các hệ số của dòng thứ i ($i = 0, 1, 2, 3$) của bảng là dòng thứ i của tam giác số Pascal.

- Các biến của dòng thứ i ($i = 0, 1, 2, 3$) của bảng tương ứng với các hệ số trên là dãy các biến của khai triển $(b+c)^i$.

- Đặt dấu cộng giữa các đơn thức trên.

Bước 2. Viết các nhân tử *bên ngoài ngoặc* :

- Các hệ số ở dòng thứ i ($i = 0, 1, 2, 3$) là dãy hệ số của dòng thứ $n = 3$ của tam giác Pascal nghĩa là dòng cuối cùng của bảng số ở bước 1.

- Các biến ở dòng thứ i ($i = 0, 1, 2, 3$) là dãy biến $a^{3-i} = a^{n-i}$.

- Đặt dấu cộng bên trái các dòng.

Bước 3. Tìm khai triển $(a + b + c)^3$:

- Nhân biểu thức trong ngoặc (ở bước 1) với các nhân tử ngoài ngoặc (ở bước 2)

- Cộng các biểu thức ở các dòng lại được kết quả.

Một cách tổng quát với số tự nhiên n tùy ý :

$$(a + b + c)^n = (a + (b + c))^n$$

$$= \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^{n-p}.(b+c)^p$$

$$= \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^{n-p}.\left(\sum_{q=0}^{p} C_p^q b^{p-q} c^q\right)$$

$$= \sum_{0 \le q \le p \le n} C_n^p C_p^q a^{n-p} b^{p-q} c^q$$

Và như vậy ta có

Thuật toán để khai triển **tam thức Newton** $(a + b + c)^n$ như sau :

Bước 1. Viết **tam giác Pascal** đến dòng thứ n, để có được các hệ số của nhị thức Newton $(b + c)^n$.

Bước 2. Ở đầu các dòng, ta viết các đơn thức là khai triển *nhị thức Newton* $(a + 1)^n$, tức là của $a^n,\ a^{n-1}, ..., a^0$.

Bước 3. Nhân lần lượt các đơn thức ở đầu dòng mỗi cột với các đơn thức còn lại trên mỗi dòng đó, rồi cộng các kết quả lại, ta thu được kết quả.

$1a^n$ **1**

$C_n^1 a^{n-1}$ **1**b **1**c

$C_n^2 a^{n-2}$ **1**b^2 **2**bc **1**c^2

$C_n^3 a^{n-3}$ **1**b^3 **3**b^2c **3**bc^2 **1**c^3

....

$1a^0$ **1**b^n $C_n^1 b^{n-1} c$ .... $C_n^{n-1} bc^{n-1}$ **1**c^n

Thí dụ. Với $n = 4$, thực hiện thuật toán nêu trên ta có

$1a^4$						1					
$4a^3$					$1b$		$1c$				
$6a^2$				$1b^2$		$2bc$		$1c^2$			
$4a^1$			$1b^3$		$3b^2c$		$3bc^2$		$1c^3$		
$1a^0$		$1b^4$		$4b^3c$		$6b^2c^2$		$4bc^3$		$1c^4$	

Kết quả cuối cùng là :

$(a + b + c)^4 =$

a^4

$+ 4a^3b + 4a^3c$

$+ 6a^2b^2 + 12a^2bc + 6a^2c^2$

$+ 4ab^3 + 12ab^2c + 12abc^2 + 4ac^3$

$+ b^4 + 4b^3c + 6b^2c^2 + 4bc^3 + c^4.$

Rõ ràng là thuật toán này rất đơn giản và dễ dàng áp dụng rộng rãi, để khai triển một *tam thức Newton* với bậc n tự nhiên tùy ý.

NHỊ THỨC NEWTON VỚI CÁC HÀM SỐ SIN VÀ COSIN

NGUYỄN CÔNG SỨ *(Hà Nội)*

Trong rất nhiều các công thức lượng giác đã biết, ta lưu ý đến hai công thức

$$\cos(A + B) = \cos A.\cos B - \sin A.\sin B \quad (1)$$

$$\sin(A + B) = \sin A.\cos B + \cos A.\sin B \quad (1')$$

Từ đó ta có

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \quad (2)$$

$$\sin 2x = 2\sin x.\cos x \quad (2')$$

Phân tích liên tiếp như thế, có thể dẫn đến

$$\cos 3x = \cos(2x + x)$$

$$= \cos^3 x - 3\sin^2 x.\cos x \quad (3)$$

$$\sin 3x = \sin(2x + x)$$

$$= 3\cos^2 x.\sin x - \sin^3 x \quad (3')$$

$$\cos 4x = \cos(3x + x)$$

$$= \cos^4 x - 6\cos^2 x.\sin^2 x + \sin^4 x \quad (4)$$

$$\sin 4x = \sin(3x + x)$$

$$= 4\cos^3 x.\sin x - 4\cos x.\sin^3 x \quad (4')$$

$$\cos 5x = \cos(4x + x)$$

$$= \cos^5 x - 10\cos^3 x.\sin^2 x + 5\cos x.\sin^4 x \quad (5)$$

$$\sin 5x = \sin(4x + x)$$

$$= 5\cos^4 x.\sin x - 10\cos^2 x.\sin^3 x + \sin^5 x \quad (5')$$

Các công thức trên và các biến đổi tương đương của chúng thường được sử dụng trong việc giải các bài tập lượng giác, đặc biệt là trong các bài thi tuyển sinh vào các trường đại học, cao đẳng và trung học chuyên nghiệp. Để làm giảm nhẹ việc nhớ các công thức trên ta có thể lưu ý tới tính quy luật được rút ra trên cơ sở viết lại các công thức đó dưới dạng bảng sau :

$\sin 2x$	=	$2\sin x\cos x$
		$\uparrow \quad \downarrow$
$\cos 2x$	=	$\cos^2 x - \sin^2 x$
$\sin 3x$	=	$3\cos^2 x.\sin x - \sin^3 x$
		$\uparrow \quad \downarrow \quad \uparrow$
$\cos 3x$	=	$\cos^3 x - 3\cos x.\sin^2 x$
$\sin 4x$	=	$4\cos^3 x.\sin x - 4\cos x.\sin^3 x$
		$\uparrow \quad \downarrow \quad \uparrow \quad \downarrow$
$\cos 4x$	=	$\cos^4 x - 6\cos^2 x.\sin^2 x + \sin^4 x$
$\sin 5x$	=	$5\cos^4 x.\sin x - 10\cos^2 x.\sin^3 x + \sin^5 x$
		$\uparrow \quad \downarrow \quad \uparrow \quad \downarrow \quad \uparrow$
$\cos 5x$	=	$\cos^5 x - 10\cos^3 x.\sin^2 x + 5\cos x.\sin^4 x$

Nếu trong mỗi ô bị chắn bởi hai đường kẻ ngang ở trên ta tiến hành liệt kê các hệ số của các hạng tử (không kể đến dấu) theo trật tự của chiều mũi tên có trong bảng, ta được

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
$$

$$1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1$$

Có thể thấy ngay rằng đây chính là tam giác số học (hay tam giác Pascal) trong công thức khai triển Newton quen thuộc của

$$(\cos x + \sin x)^m \text{ với } m = 2, 3, 4, 5.$$

Ngoài ra biểu thức trong vế phải của $\sin mx$, $\cos mx$ là hai nửa của khai triển Newton mà ứng với $\sin mx$ là các hạng tử đứng ở vị trí chẵn, còn ứng với $\cos mx$ là các hạng tử ở vị trí lẻ, chỉ khác là dấu của các hạng tử đó được gán theo trật tự luân phiên từ + đến –.

Thí dụ : Với $m = 5$ ta có

$$(\cos x + \sin x)^5 = \cos^5 x + 5\cos^4 x.\sin x + 10\cos^3 x.\sin^2 x + 10\cos^2 x.\sin^3 x + 5\cos x.\sin^4 x + \sin^5 x$$

thì theo quy luật trên ứng với $\sin 5x$ sẽ là $5\cos^4 x\sin x$, $10\cos^2 x\ \sin^3 x$, $\sin^5 x$ và ứng với $\cos 5x$ sẽ là $\cos^5 x$, $10\cos^3 x.\sin^2 x$, $5\cos x.\sin^4 x$.

Theo quy luật luân phiên của dấu ta được

$$\sin 5x = 5\cos^4 x.\sin x - 10\cos^2 x\ \sin^3 x + \sin^5 x$$

$$\cos 5x = \cos^5 x - 10\cos^3 x\ \sin^2 x + 5\cos x\ \sin^4 x.$$

Có thể chứng minh bằng quy nạp toán học cho một quy luật tổng quát sau :

Quy tắc. Nếu viết biểu thức khai triển Newton cho $(\cos x + \sin x)^m$ thì các hạng tử đứng ở vị trí lẻ được viết với dấu theo trật tự luân phiên +, –, +, –, ... sẽ cho ta biểu thức của $\cos mx$ còn các hạng tử đứng ở vị trí chẵn cùng với quy luật dấu luân phiên như trên sẽ cho ta biểu thức của $\sin mx$.

Ta hãy thử áp dụng quy tắc trên để tính $\cos 6x$ và $\sin 6x$.

Trước hết ta có

$$(\cos x + \sin x)^6 = \cos^6 x + 6\cos^5 x.\sin x + 15\cos^4 x.\sin^2 x + 20\cos^3 x\ \sin^3 x + 15\cos^2 x\ \sin^4 x + 6\cos x\ \sin^5 x + \sin^6 x$$

ở đây đứng ở vị trí lẻ sẽ là

$$\cos^6 x,\ 15\cos^4 x\ \sin^2 x,\ 15\cos^2 x\ \sin^4 x,\ \sin^6 x$$

và ở vị trí chẵn là

$6\cos^5 x\sin x,\ 20\cos^3 x\sin^3 x,\ 6\cos x\sin^5 x$

Như vậy khi gán dấu ta được

$$\cos 6x = \cos^6 x - 15\cos^4 x.\sin^2 x + 15\cos^2 x.\sin^4 x - \sin^6 x$$

$$\sin 6x = 6\cos^5 x.\sin x - 20\cos^3 x.\sin^3 x + 6\cos x.\sin^5 x.$$

Với m là một số nguyên dương bất kì ta có

$$\cos mx = \cos^m x - \frac{m(m-1)}{1.2}\cos^{m-2} x\sin^2 x + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}\cos^{m-4} x\sin^2 x - \ldots$$

$$\sin mx = \frac{m}{1}\cos^{m-1} x\sin^4 x - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\cos^{m-3} x\sin^3 x + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3.4.5}\cos^{m-5} x\sin^5 x - \ldots$$

Như vậy đó cũng là một ứng dụng thú vị của công thức khai triển Newton trong lượng giác.

Các bạn hiểu biết về số phức có thể dùng công thức Moivre :

$(\cos x + i\sin x)^n = \cos(nx) + i\sin(nx)$ và khai triển nhị thức Newton để thấy ngay kết quả trên.

VỀ CÁCH BIỂU DIỄN $\cos nx$ THEO $\cos x$

TRƯƠNG CÔNG THÀNH *(Hà Nội)*

Trên tạp chí THTT số 249 (3/1998) có bài *Nhị thức Newton với các hàm số sin và cosin* của tác giả Nguyễn Công Sứ, trong đó trình bày cách tìm công thức tổng quát biểu diễn $\cos nx$ và $\sin nx$ theo $\cos x$, $\sin x$ nhờ tam giác số trong bảng Pascal.

Bài báo này góp thêm một ý về cách xác định các hệ số của sự biểu diễn $\cos nx$ theo $\cos x$.

Một vài công thức biểu diễn đầu tiên của $\cos nx$ theo $\cos x$ là

$\cos 0x = 1 = \cos^0 x$

$\cos x = 1\cos x$

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

$\cos 4x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$

$\cos 5x = 16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x$

$\cos 6x = 32\cos^6 x - 48\cos^4 x + 18\cos^2 x - 1$

$\cos 7x = 64\cos^7 x - 112\cos^5 x + 56\cos^3 x - 7\cos x.$

Nếu chỉ xét các hệ số của các biểu thức trên ta được bảng hệ số dạng tam giác dưới đây (bỏ các cột ứng với hệ số 0), trong đó n là số hàng, k là số cột, giao giữa hàng n và cột k là hệ số $a_{n,k}$ của $\cos x$ với số mũ $m = n - 2k$.

Công thức tổng quát là

$$\cos nx = \sum_{0\le k\le \frac{n}{2}} a_{n,k}\cos^{n-2k} x$$

$$= a_{n,0}\cos^n x + a_{n,1}\cos^{n-2} x + a_{n,2}\cos^{n-4} x + \ldots$$

n \ k	0	1	2	3
0	1			
1	1			
2	2	−1		
3	4	−3		
4	8	−8	1	
5	16	−20	5	
6	32	−48	18	−1
7	64	−112	56	−7

Từ bảng hệ số một cách tự nhiên xuất hiện câu hỏi : Cấu trúc của bảng số trên như thế nào ?

Các hệ số $a_{n,k}$ trong bảng có mối liên hệ gì ?

Có thể viết nối tiếp bảng trên một cách nhanh chóng không ?

Có thể viết ngay công thức $\cos nx$ theo $\cos x$ với mỗi số n không ?

Để trả lời ta xét lần lượt như sau.

1) *Công thức xuất phát*

Từ $2\cos nx = 2\cos((n-1)x + x)$

$= 2\cos(n-1)x.\cos x - 2\sin(n-1)x.\sin x$

và $-2\sin(n-1)x.\sin x = \cos nx - \cos(n-2)x$

với mọi $n \geq 2$ ta có

$$\mathbf{\cos nx = 2\cos(n-1)x.\cos x - \cos(n-2)x} \quad (1)$$

2) *Mối liên hệ giữa các hệ số $a_{n,k}$*

Vì $\cos^{n-2k}x = \cos^{(n-1)-2k}x \,.\, \cos x$

$= \cos^{(n-2)-2(k-1)}x$ nên từ (1) có

$$\boldsymbol{a_{n,k} = 2a_{n-1,k} - a_{n-2,k-1}} \quad (2)$$

với $1 \leq k \leq \frac{n}{2}$, $n \geq 2$

và $\boldsymbol{a_{n,0} = 2a_{n-1,0}}$ với $k = 0, n \geq 2$ (2')

$\boldsymbol{a_{2k,k} = (-1)^k}$ với $n = 2k \geq 2$ (2")

Chẳng hạn : $a_{5,0} = 2a_{4,0} = 2 \times 8 = 16$;

$a_{6,3} = (-1)^3 = -1$;

$a_{7,2} = 2a_{6,2} - a_{5,1} = 2 \times 18 - (-20) = 56.$

Hệ thức (2') và (2") có thể coi là trường hợp riêng của (2) nếu đặt $a_{n,k} = 0$ với $k < 0$ hoặc $n < 2k$.

Nhờ công thức (2) bạn có thể viết tiếp bảng hệ số $a_{n,k}$.

3) *Chú ý :* Tổng các hệ số của một hàng tuỳ ý bằng 1, nghĩa là :

$$\sum_{0 \leq k \leq \frac{n}{2}} a_{n,k} = 1 \quad (3)$$

Thực vậy, (3) đúng với $n = 1, 2, 3$. Giả sử (3) đúng với mọi số không lớn hơn n thì

$$\sum_{0 \leq k \leq \frac{n}{2}} a_{n,k} = 2 \sum_{0 \leq k \leq \frac{n-1}{2}} a_{n-1,k} - \sum_{0 \leq k-1 \leq \frac{n-2}{2}} a_{n-2,k-1}$$

$$= 2 \times 1 - 1 = 1.$$

Vậy (3) đúng với n.

4) *Công thức tổng quát của $a_{n,k}$*

Có thể viết :

$$\cos 6x = \frac{6}{6}.2^5.C_6^0.\cos^6 x - \frac{6}{5}.2^3.C_5^1\cos^4 x + \frac{6}{4}.2^1.C_4^2.\cos^2 x - \frac{6}{3}.2^{-1}.C_3^3.$$

$$\cos 7x = \frac{7}{7}.2^6.C_7^0.\cos^7 x - \frac{7}{6}.2^4.C_6^1\cos^5 x + \frac{7}{5}.2^2.C_5^2.\cos^3 x - \frac{7}{4}.2^0.C_4^3.\cos x.$$

Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp rằng :

$$\boldsymbol{a_{n,k} = (-1)^k \frac{n}{n-k}.2^{n-1-2k}.C_{n-k}^k} \quad (4)$$

Dễ thấy (4) đúng với $n = 1, 2, 3$. Giả sử (4) đúng với mọi số không lớn hơn n thì

$$a_{n,k} = 2a_{n-1,k} - a_{n-2,k-1}$$

$$= (-1)^k.\frac{n-1}{n-1-k}.2^{n-1-2k}.C_{n-1-k}^k - (-1)^{k-1}\frac{n-2}{n-1-k}.2^{n-1-2k}.C_{n-1-k}^{k-1}$$

$$= (-1)^k \frac{2^{n-1-2k}}{n-1-k}\left((n-1)C_{n-1-k}^k + (n-2)C_{n-1-k}^{k-1}\right)$$

$$= (-1)^k \frac{n}{n-k}.2^{n-1-2k}C_{n-k}^k.$$

Vậy (4) đúng với n. ❒

Nhờ công thức tổng quát của $a_{n,k}$ ta có thể viết được ngay công thức biểu diễn $\cos nx$ theo $\cos x$ với mỗi n, chẳng hạn $\cos 6x$, $\cos 7x$ như ở trên.

5) *Mối liên hệ giữa số $a_{n,\,k}$ với hệ số trong khai triển nhị thức Newton*

Ta cũng có thể viết :

$$\begin{aligned}\cos 6x = {} & \cos^6 x(1.C_6^0 + 1.C_6^2 + 1.C_6^4 + 1.C_6^6)\\ & -\cos^4 x(1.C_6^2 + 2.C_6^4 + 3.C_6^6)\\ & + \cos^2 x(1.C_6^4 + 3.C_6^6)\\ & - \cos^0 x\,(1.C_6^6)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 7x = {} & \cos^7 x(1.C_7^0 + 1.C_7^2 + 1.C_7^4 + 1.C_7^6)\\ & -\cos^5 x(1.C_7^2 + 1.C_7^4 + 3.C_7^6)\\ & + \cos^3 x(1.C_7^4 + 3.C_7^6)\\ & - \cos x(1.C_7^7)\end{aligned}$$

Lập bảng các hệ số của các công thức trên (bỏ các dấu cộng) rồi *quay bảng* đó ta được bảng dưới đây, trong đó thừa số bên trái của mỗi tích lập thành tam giác số Pascal.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1.C_n^0 & & & \\ & & 1.C_n^2 & & 1.C_n^2 & & \\ & 1.C_n^4 & & 2.C_n^4 & & 1.C_n^4 & \\ 1.C_n^6 & & 3.C_n^6 & & 3.C_n^6 & & 1.C_n^6\end{array}$$

Nếu các bạn biết phép tính ma trận thì có thể viết :

$$\cos 6x = [C_6^0\, C_6^2\, C_6^4\, C_6^6]\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&1\\0&1&2&1\\1&3&3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\ \cos^2 x\\ -\cos^4 x\\ \cos^6 x\end{bmatrix}$$

$$\cos 7x = [C_7^0\, C_7^2\, C_7^4\, C_7^6]\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&1\\0&1&2&1\\1&3&3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\cos x\\ \cos^3 x\\ -\cos^5 x\\ \cos^7 x\end{bmatrix}.$$

So sánh bảng số trên với công thức (4), rút ra công thức sau với $0 \le k \le \frac{n}{2}$:

$$C_k^0 C_n^{2k} + C_{k+1}^1 C_n^{2k+2} + C_{k+2}^2 C_n^{2k+4} + \ldots$$
$$= \frac{n}{n-2}.2^{n-1-2k}.C_{n-k}^k$$

hay
$$\sum_{0\le t\le \frac{n}{2}-k} C_{k+t}^t\, C_n^{2(k+t)} = \frac{n}{n-k}.2^{n-1-2k}.C_{n-k}^k \qquad (5)$$

Bạn đọc có thể chứng minh được công thức (5) hay không ?

Tương tự như trên, các bạn hãy lập bảng hệ số và tìm dạng tổng quát của hệ số trong công thức biểu diễn sinnx theo sin$x$.

MỘT SỐ BÀI TOÁN TÍNH TỔNG CHỨA CÔNG THỨC TỔ HỢP

TRẦN MẠNH HƯNG
(CĐSP TP. Hồ Chí Minh)

✪**Bài toán 1.** Đề thi tuyển sinh Đại học năm 2003, môn Toán khối B (câu V) có bài toán :

Cho n là số nguyên dương. Tính tổng

$$A = C_n^0 + \frac{2^2-1}{2}C_n^1 + \frac{2^3-1}{3}C_n^2 + \ldots + \frac{2^{n+1}-1}{n+1}C_n^n.$$

Bài này đã được giải như sau (theo đáp án của Bộ GD & ĐT). Trước hết khai triển

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n.$$

Sau đó lấy tích phân hai vế trên [1 ; 2] được

$$\frac{1}{n+1}(1+x)^{n+1}\Big|_1^2 = \left(C_n^0 x + C_n^1\frac{x^2}{2} + ... + C_n^n\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)\Big|_1^2$$

$$\Rightarrow C_n^0 + C_n^1\left(\frac{2^2-1}{2}\right) + ... + C_n^n\left(\frac{2^{n+1}-1}{n+1}\right)$$

$$= \frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{n+1}. \square$$

Cách giải này cũng tương tự cách giải câu IVa, đề 86 trong quyển *Bộ đề thi tuyển sinh vào các trường Đại học, Cao đẳng và Trung học chuyên nghiệp* trước đây.

Sau đây xin nêu một cách giải khác cho bài toán trên, sử dụng công thức $\left(\frac{n+1}{k+1}\right).C_n^k = C_{n+1}^{k+1}$ (trong đó n là số nguyên dương, k là số nguyên không âm, $k \le n$).

$$A = \frac{1}{n+1}\left((n+1)C_n^0 + (2^2-1)\frac{(n+1)C_n^1}{2} + ...\right.$$

$$\left. ... + (2^{n+1}-1)\frac{(n+1)C_n^n}{n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{n+1}\left((2-1)C_{n+1}^1 + (2^2-1)C_{n+1}^2 + ...\right.$$

$$\left. ... + (2^{n+1}-1)C_{n+1}^{n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{n+1}\left(2C_{n+1}^1 + 2^2C_{n+1}^2 + ... + 2^{n+1}.C_{n+1}^{n+1}\right.$$

$$\left. -\left(C_{n+1}^1 + C_{n+1}^2 + ... + C_{n+1}^{n+1}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{n+1}\left((2+1)^{n+1} - 1 - (2^{n+1}-1)\right) = \frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{n+1}. \square$$

Cách giải này có một số ưu điểm sau :

1) Đây là cách tính trực tiếp chỉ dùng kiến thức cơ bản của giải tích tổ hợp, không phải dùng đến các kiến thức về tích phân.

2) Việc nhân và chia tổng A với $n + 1$ do một lẽ tự nhiên là số hạng thứ $k + 1$ trong A có mẫu số là $(k + 1)$, biểu thức C_n^k có mẫu số là $k!(n-k)!$, trong đó

$k! = 1.2...k$ và $(n-k)! = \big((n+1)-(k+1)\big)!$

nên khi nhân số hạng thứ $k + 1$ trong tổng A với $n + 1$ sẽ xuất hiện biểu thức C_{n+1}^{k+1}. Đây là suy nghĩ thường gặp trong quá trình tìm lời giải bài toán.

3) Đề thi hiện nay có mục tiêu là phân loại học sinh, phát huy tính sáng tạo, không rập khuôn, không theo lối mòn trong khi giải toán. Cách giải trên phần nào đáp ứng được mục tiêu đó. Hơn nữa từ cách giải trên cũng có thể giải các bài toán khác tổng quát hơn, chẳng hạn

Bài 1. Tính tổng

$$(a-1)C_n^0 + \frac{a^2-1}{2}C_n^1 + \frac{a^3-1}{3}C_n^2 + ... + \frac{a^{n+1}-1}{n+1}C_n^n.$$

Bài 2. Tính

$$(a-b)C_n^0 + \frac{a^2-b^2}{2}C_n^1 + \frac{a^3-b^3}{3}C_n^2 + ...$$

$$+\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{n+1}C_n^n.$$

✪**Bài toán 2.** Đề thi tuyển sinh Đại học 2005, môn Toán khối A, câu IV phần 2 có bài toán về tổ hợp sau :

Tìm số nguyên dương n sao cho

$$C_{2n+1}^1 - 2.2C_{2n+1}^2 + 3.2^2.C_{2n+1}^3 - 4.2^3C_{2n+1}^4 + ...$$

$$+ (2n+1)2^{2n}C_{2n+1}^{2n+1} = 2005.$$

Trong đáp án của Bộ GD&ĐT và lời giải trên THTT số 337 (7.2005) đã giải dựa vào việc lấy đạo hàm của đa thức dạng $(x+1)^n$.

Dưới đây trình bày thêm một cách giải chỉ dùng kiến thức của giải tích tổ hợp.

Ta có $(i+1)C_{k+1}^{i+1} = (k+1)C_k^i$, trong đó i, k là các số nguyên không âm.

Từ đó

$C_{2n+1}^1 - 2.2C_{2n+1}^2 + 3.2^2.C_{2n+1}^3 - 4.2^3C_{2n+1}^4 + \dots$
$+ (2n+1)2^{2n}C_{2n+1}^{2n+1}$
$= (2n+1)C_{2n}^0 - (2n+1).2C_{2n}^1 + (2n+1)C_{2n}^2$
$- (2n+1)2^3C_{2n}^3 + \dots + (2n+1)2^{2n}C_{2n}^{2n}$
$= (2n+1)(C_{2n}^0 - 2C_{2n}^1 + 2^2C_{2n}^2 - 2^3C_{2n}^3$
$+ \dots + 2^{2n}C_{2n}^{2n})$
$= (2n+1)(1-2)^{2n} = 2n+1.$

Theo giả thiết ta có

$$2n + 1 = 2005 \Rightarrow n = 1002. \square$$

Qua hai bài toán trên ta thấy để giải bài toán tính tổng chứa công thức tổ hợp, ngoài cách sử dụng công thức đạo hàm hoặc công thức tích phân, ta còn có thể sử dụng các hệ thức về công thức tổ hợp để biến đổi các số hạng của tổng rồi rút gọn chúng cũng dẫn đến kết quả.

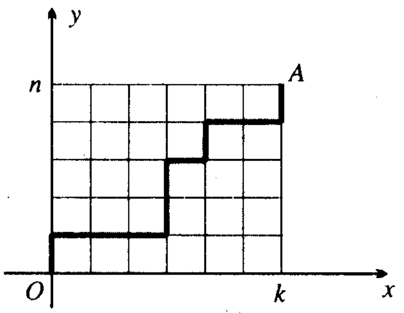
Ý NGHĨA HÌNH HỌC CỦA SỐ C_n^k VÀ ỨNG DỤNG

ĐỖ THANH HÂN
(Trường THPT chuyên Bạc Liêu)

Không ít các bài toán đại số, khi giải bằng phương pháp hình học, lời giải đã trở nên gọn và đẹp hơn. Bài viết này giới thiệu ý nghĩa hình học của số C_n^k và một số bài toán áp dụng, hi vọng qua đó giúp các bạn thêm một công cụ khi giải một số bài toán về tổ hợp.

I. Ý NGHĨA HÌNH HỌC CỦA SỐ C_{k+n}^k

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $A(k;n)$ (h.1). Ta gọi *đường đi ngắn nhất* từ điểm $O(0;0)$ đến điểm $A(k;n)$ là đường đi thỏa mãn quy tắc : Chỉ đi theo hướng dương của các trục tọa độ và chỉ được phép đổi hướng đi (đổi từ hướng dương của trục tọa độ này sang hướng dương của trục tọa độ kia) tại các điểm có tọa độ nguyên.



Hình 1

Mệnh đề. *Số đường đi ngắn nhất từ điểm $O(0;0)$ đến điểm $A(k;n)$ là C_{k+n}^k.*

Chứng minh. Mỗi đường đi ngắn nhất từ điểm $O(0;0)$ đến điểm $A(k;n)$ đều gồm $k+n$ đoạn thẳng, trong đó k đoạn ngang và n đoạn dọc (h.1) (mỗi đoạn dài 1 đơn vị). Các đường đó chỉ khác nhau bởi thứ tự kế tiếp của các đoạn ngang và đoạn dọc. Vì vậy : Số các đường đi ngắn nhất từ điểm $O(0;0)$ đến điểm $A(k;n)$ bằng số cách chọn k đoạn ngang từ $k+n$ đoạn dọc ngang, tức là bằng C_{k+n}^k (đpcm). $\square$

Chú ý. Ta có thể xét n đoạn dọc thay cho k đoạn ngang và khi đó số đường đi ngắn nhất từ điểm $O(0;0)$ đến điểm $A(k;n)$ sẽ là C_{k+n}^n, như vậy ta đã chứng minh được $C_{k+n}^k = C_{k+n}^n$.

Hệ quả 1. *Số đường đi ngắn nhất từ điểm $J(p;q)$ đến điểm $A(k;n)$ là*

$$C_{(k-p)+(n-q)}^{k-p} = C_{(k-p)+(n-q)}^{n-q}$$

với $0 \le p < k$, $0 \le q < n$; $p, q, k, n \in \mathbb{N}$.

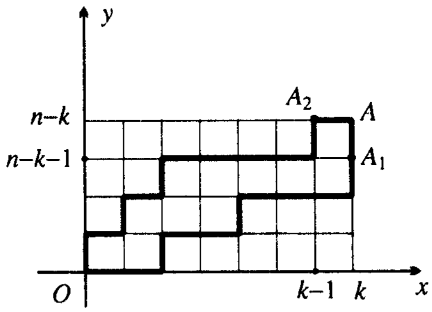
Hệ quả 2. *Số đường đi ngắn nhất từ điểm $O(0;0)$ đến điểm $A(k;n)$ đi qua điểm $J(p;q)$* bằng $C_{p+q}^p . C_{(k-p)+(n-q)}^{k-p}$.

II. MỘT SỐ BÀI TOÁN ÁP DỤNG

★**Thí dụ 1.** *Chứng minh rằng nếu* $k, n \in \mathbb{N}$, $1 \le k \le n$ *thì* $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$. (Quy tắc Pascal).

Lời giải. Số đường đi ngắn nhất từ điểm $O(0;0)$ đến điểm $A(k;n-k)$ là $C_{k+(n-k)}^k = C_n^k$ (h.2). Ta chia các đường đi đó thành hai lớp không giao nhau như sau.

- Lớp thứ nhất gồm các đường đi từ điểm O đến điểm A phải qua điểm $A_1(k;n-k-1)$, số đường đi của lớp này là $C_{k+(n-k-1)}^k = C_{n-1}^k$.



Hình 2

- Lớp thứ hai gồm các đường đi từ điểm O đến điểm A phải qua điểm $A_2(k-1;n-k)$, số đường đi của lớp này là $C_{(k-1)+(n-k)}^{k-1} = C_{n-1}^{k-1}$.

Theo quy tắc cộng, ta suy ra

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k \text{ (đpcm).} \square$$

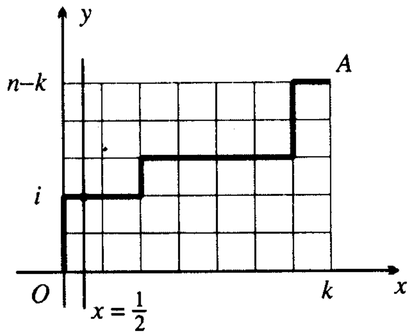
★**Thí dụ 2.** *Chứng minh rằng*

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^{k-1} + \ldots + C_{k-1}^{k-1}$$

với $1 \le k \le n$.

Lời giải. Số đường đi ngắn nhất từ điểm $O(0;0)$ đến điểm $A(k;n-k)$ là $C_{k+(n-k)}^k = C_n^k$.

Ta chia các đường đi đó thành $(n-k+1)$ lớp không giao nhau : Lớp thứ i ($i = 0, 1, 2, \ldots, n-k$) gồm các đường đi từ điểm O đến điểm A phải cắt đường thẳng $x = \dfrac{1}{2}$ tại điểm $\left(\dfrac{1}{2}; i\right)$ (h. 3).



Hình 3

Số đường đi của lớp này bằng số đường đi từ điểm $(1;i)$ đến điểm $(k;n-k)$ và bằng

$$C_{(k-1)+(n-k-i)}^{k-1} = C_{n-i-1}^{k-1}.$$

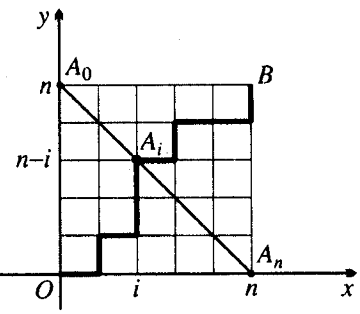
Theo quy tắc cộng suy ra $C_n^k = \sum\limits_{i=0}^{n-k} C_{n-i-1}^{k-1}$ (đpcm).$\square$

★**Thí dụ 3.** *Chứng minh rằng*

$$\left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + \ldots + \left(C_n^n\right)^2 = C_{2n}^n.$$

Lời giải. Số đường đi ngắn nhất từ điểm $O(0;0)$ đến điểm $B(n;n)$ là $C_{n+n}^n = C_{2n}^n$.

Ta chia các đường đi đó thành $(n + 1)$ lớp không giao nhau : lớp thứ i ($i = 0, 1, 2, \ldots, n$) gồm các đường đi từ điểm O đến điểm B phải qua điểm $A_i(i;n-i)$ (h. 4).



Hình 4

Số đường đi của lớp này là

$$C_{i+(n-i)}^i C_{(n-i)+[n-(n-i)]}^{n-i} = C_n^i . C_n^{n-i} = \left(C_n^i\right)^2.$$

Theo quy tắc cộng, ta suy ra

$$C_{2n}^n = \sum_{i=0}^n \left(C_n^i\right)^2 \text{ (đpcm).} \square$$

★**Thí dụ 4.** *Cho các số nguyên dương m, n, p, q với p < m, q < n. Trên mặt phẳng tọa độ lấy bốn điểm* $A(0;0)$, $B(p;0)$, $C(m;q)$, $D(m;n)$. *Xét các đường đi f ngắn nhất từ A đến D và các đường đi g ngắn nhất từ B đến C. Gọi S là số cặp đường đi (f ; g) mà f và g không có điểm chung. Chứng minh rằng*

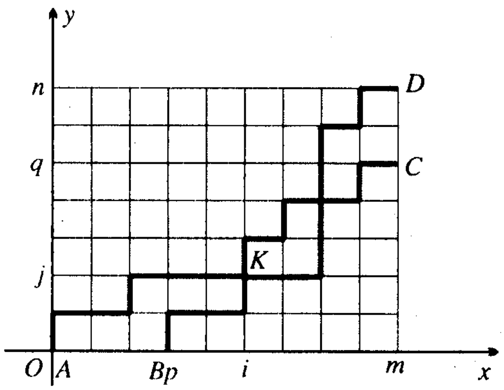
$$S = C_{m+n}^{n}.C_{m+q-p}^{q} - C_{m+q}^{q}.C_{m+n-p}^{n}.$$

(Bài thi chọn Đội tuyển Việt Nam 2003)

Lời giải. Số cặp đường đi $(f; g)$ tùy ý là

$$M = C_{m+n}^{n}.C_{q+m-p}^{q} = C_{m+n}^{n}.C_{m+q-p}^{q} \quad (1)$$

Gọi U là số cặp đường đi $(f'; g')$ với f' là đường đi ngắn nhất từ A đến C, g' là đường đi ngắn nhất từ B đến D (h. 5).



Hình 5

Số cặp đường đi $(f'; g')$ tùy ý là

$$U = C_{q+m}^{q}.C_{n+m-p}^{n} = C_{m+q}^{q}.C_{m+n-p}^{n} \quad (2)$$

Vì f' và g' luôn có ít nhất một điểm chung $K(i;j)$ với $p \le i \le m$ và $0 \le j \le q$ $(i, j \in \mathbb{N})$ nên số đường đi f' phải qua K là

$$C_{j+i}^{i}.C_{(q-j)+(m-i)}^{q-j};$$

số đường đi g' phải qua K là

$$C_{j+(i-p)}^{j}.C_{(n-j)+(m-i)}^{n-j}.$$

Vậy

$$U = C_{j+i}^{j}.C_{(q-j)+(m-i)}^{q-j}.C_{j+(i-p)}^{j}.C_{(n-j)+(m-i)}^{n-j} \quad (3)$$

Vì K cũng là điểm chung các cặp đường đi $(f; g)$ mà f và g có điểm chung, nên nếu gọi T là số cặp đường đi $(f; g)$ mà f và g có điểm chung K thì tương tự ta có

$$T = C_{j+i}^{j}.C_{(n-j)+(m-i)}^{n-j}.C_{j+(i-p)}^{j}.C_{(q-j)+(m-i)}^{q-j} \quad (4)$$

Từ (2), (3) và (4) ta có $T = U$.

Vậy $S = M - U$

$= C_{m+n}^{n}.C_{m+q-p}^{q} - C_{m+q}^{q}.C_{m+n-p}^{n}$ (đpcm). □

Để kết thúc bài báo, mời các bạn thử sử dụng phương pháp trên với hai bài tập nhỏ sau :

Chứng minh rằng

1) $C_n^m C_k^0 + C_{n-1}^{m-1} C_{k+1}^1 + \ldots + C_{n-m}^0 C_{k+m}^m = C_{n+k+1}^m$

2) $C_n^0 C_m^k + C_n^1 C_m^{k-1} + \ldots + C_n^k C_m^0 = C_{m+n}^k$.

PHƯƠNG PHÁP QUỸ ĐẠO

PHAN ĐỨC THÀNH *(ĐH Vinh, Nghệ An)*

Bài này giới thiệu một trong những phương pháp có hiệu quả để giải các bài toán tổ hợp, đó là *phương pháp quỹ đạo*. Nội dung của phương pháp quỹ đạo trong các bài toán tổ hợp là chỉ ra cách giải thích hình học để đưa bài toán về việc tính số đường đi (hay số quỹ đạo) có một tính chất xác định nào đó.

Ưu điểm của phương pháp quỹ đạo là tính trực quan trong cách chứng minh.

"Bài toán con ếch" (tức bài toán số 6 trong kì thi Toán Quốc tế lần thứ 21) có thể giải bằng phương pháp quỹ đạo (xem Toán học và tuổi trẻ tháng 2/1980).

1. Một số bài toán điển hình giải bằng phương pháp quỹ đạo

Phương pháp quỹ đạo dựa trên việc tính số đường đi theo một mạng lưới kẻ ô vuông kích thước m × n đặt trong góc phần tư thứ nhất của hệ trục toạ độ Oxy.

Số đường đi ngắn nhất theo mạng lưới (tức là chỉ được đi cùng chiều với Ox hoặc Oy) từ điểm $O(0 ; 0)$ đến điểm $D(m ; n)$ bằng $C_{m+n}^{m} = C_{m+n}^{n}$.

✪Bài toán 1. *Chứng minh rằng*

$$C_{2n}^{n} = (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \ldots + (C_n^n)^2.$$

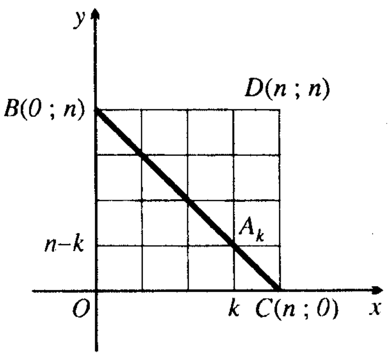
Lời giải. Ta hãy xét một mạng lưới kẻ ô vuông kích thước $n \times n$. Số đường đi ngắn nhất (theo mạng lưới) từ điểm $O(0 ; 0)$ đến điểm $D(n ; n)$ bằng C_{2n}^{n}. Chú ý rằng mỗi đường đi ấy đi qua một và chỉ một điểm $A_k(k ; n-k)$ nào đó nằm trên đường chéo BC (h.6). Số đường đi từ điểm O đến điểm A_k bằng

$$C_{k+(n-k)}^{k} = C_n^k.$$

Số đường đi từ điểm A_k đến điểm D bằng $C_{(n-k)+k}^{k} = C_n^k$. Do đó số đường đi từ điểm O đến điểm D đi qua A_k bằng $C_n^k.C_n^k = (C_n^k)^2$. Từ đó dễ dàng suy ra hệ thức phải chứng minh. ❒

Các bạn hãy chứng minh hệ thức tổng quát hơn :

$$C_n^0.C_m^k + C_n^1.C_m^{k-1} + \ldots + C_n^k.C_m^0 = C_{n+m}^k$$



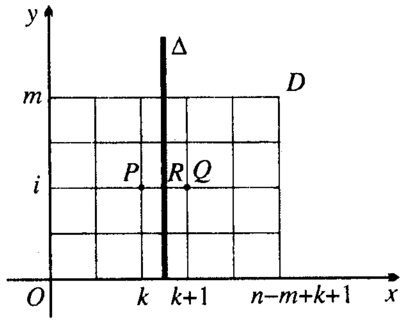
Hình 6

✪Bài toán 2. *Chứng minh rằng*

$$C_n^m.C_k^0 + C_{n-1}^{m-1}.C_{k+1}^1 + \ldots + C_{n-m}^0.C_{k+m}^m = C_{n+k+1}^m.$$

Lời giải. Ta hãy xét tất cả các đường đi ngắn nhất từ điểm $O(0 ; 0)$ đến điểm $D(n - m + k + 1 ; m)$. Số các đường đó bằng C_{n+k+1}^m.

Gọi B_i ($i = 0, 1, \ldots, m$) là lớp những đường gấp khúc cắt đường thẳng Δ có phương trình $x = k + \frac{1}{2}$ tại điểm $R\left(k + \frac{1}{2} ; i\right)$ (h.7).



Hình 7

Ta nhận thấy rằng mỗi đường gấp khúc thuộc lớp B_i gồm 3 phần :

Phần 1 : Đường gấp khúc nối điểm $O(0 ; 0)$ với điểm $P(k ; i)$.

Phần 2 : Đường nằm ngang nối điểm $P(k ; i)$ với điểm $Q(k + 1 ; i)$.

Phần 3 : Đường gấp khúc nối điểm $Q(k + 1 ; i)$ với điểm $D(n - m + k + 1 ; m)$.

Ta thấy rằng tổng số các đường gấp khúc thuộc lớp B_i là

$$C_{k+i}^{i}.C_{n-i}^{m-i}.$$

Từ đó suy ra hệ thức phải chứng minh. ❒

✪Bài toán 3. *Có m + n người sắp hàng mua vé xem kịch trong đó có n người mang tiền loại 50000 đồng và m người mang tiền loại 100000 đồng với n ≥ m. Mỗi vé giá 50000 đồng. Trước lúc bán, người bán vé không có tiền. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp m + n người mua vé để không có người nào phải chờ trả tiền thừa ?*

Lời giải. Giả sử các người mua vé đã được sắp hàng theo một cách nào đó. Ta đặt

$$e_i = \begin{cases} 1 \text{ nếu người mua vé thứ } i \text{ có } 50000 \text{ đồng} \\ -1 \text{ nếu người mua vé thứ } i \text{ có } 100000 \text{ đồng} \end{cases}$$

Khi ấy $S_k = e_1 + ... + e_k$ bằng hiệu số giữa số lượng người có tiền 50000 đồng và số lượng người có tiền 100000 đồng khi có k người sắp hàng.

Trên mạng lưới kẻ ô vuông trong hệ trục toạ độ Oxy ta vẽ các điểm $A_k(k ; S_k)$ ($k = 1, 2, ..., m + n$) và xét đường gấp khúc nối điểm $O(0 ; 0)$ với điểm $A_{m+n}(m + n ; n - m)$ mà đi qua các điểm $A_1, ..., A_{m+n-1}$. Ta gọi đường gấp khúc như vậy là một *quỹ đạo*, tương ứng với cách sắp hàng của người mua vé. Tổng số các quỹ đạo bằng C^n_{n+m}.

a) Chú ý rằng các quỹ đạo tương ứng với cách sắp hàng của người mua vé để không ai phải chờ trả tiền thừa sẽ không cắt đường thẳng $y = -1$.

Thực vậy nếu đối với k nào đấy $S_{k-1} = 0$, $S_k = -1$ thì điều đó có nghĩa là trong $k - 1$ người sắp hàng đầu tiên số lượng người có tiền 50000 đồng và số lượng người có tiền 100000 đồng là như nhau, người thứ k có 100000 đồng nên phải chờ trả tiền thừa.

b) Ta sẽ chứng minh rằng số quỹ đạo cắt đường $y = -1$ bằng C^{n+1}_{m+n}. Với mỗi quỹ đạo Q cắt đường thẳng $y = -1$ hay có một điểm chung với nó ta thiết lập tương ứng giữa Q với một quỹ đạo Q' theo cách sau : Đến giao điểm đầu tiên với đường thẳng $y = -1$ ta cho $Q' = Q$, phần còn lại của Q' là ảnh đối xứng của Q đối với đường thẳng $y = -1$. Toàn bộ quỹ đạo Q' kết thúc ở điểm $A'_{m+n}(m + n ; m - n - 2)$ là ảnh của điểm A_{m+n} đối với đường thẳng $y = -1$. Sự tương ứng đã thiết lập là một – một (hay là song ánh), do đó số quỹ đạo cắt đường thẳng $y = -1$ bằng số đường gấp khúc nối điểm O với điểm A'_{m+n}. Nếu ở đường gấp khúc này có r đoạn hướng xuống dưới và s đoạn hướng lên trên thì

$$\begin{cases} r + s = m + n \\ r - s = n + 2 - m \end{cases} \Rightarrow r = n + 1.$$

Vậy số quỹ đạo cắt đường thẳng $y = -1$ bằng C^{n+1}_{m+n}.

c) Từ kết quả ở b) suy ra rằng số quỹ đạo tương ứng với cách sắp hàng của người mua vé để không có người nào phải chờ trả tiền thừa bằng

$$C^n_{m+n} - C^{n+1}_{m+n} = \frac{n+1-m}{n+1} C^m_{m+n}. \square$$

Liên quan chặt chẽ đến bài toán 3 là bài toán về bỏ phiếu mà nhà toán học Bertrand đã xét năm 1887.

✪**Bài toán 4.** (Bài toán về bỏ phiếu).

Trong một lần bầu cử, ứng cử viên A được a phiếu bầu, ứng cử viên B được b phiếu bầu (a > b). Cử tri bỏ phiếu liên tiếp. Hỏi có bao nhiêu cách bỏ phiếu để ứng cử viên A luôn luôn dẫn đầu về số phiếu bầu cho mình ?

Lời giải. Ta đặt

$$e_i = \begin{cases} +1 \text{ nếu phiếu thứ } i \text{ bầu cho } A \\ -1 \text{ nếu phiếu thứ } i \text{ bầu cho } B \end{cases}$$

Đặt $S_k = e_1 + ... + e_k$.

Ta xét quỹ đạo với các điểm $O(0 ; 0)$, $(1 ; S_1)$, $(k ; S_k)$, ..., $(a + b ; S_{a+b})$.

Ở đây $S_{a+b} = a - b$.

Rõ ràng mỗi cách bỏ phiếu tương ứng với một quỹ đạo xác định. Mỗi quỹ đạo gồm $a + b$ đoạn thẳng trong đó có a đoạn hướng lên trên. Tổng số các quỹ đạo bằng C^a_{a+b}. Ứng cử viên A luôn dẫn đầu nếu quỹ đạo tương ứng đi qua điểm $(1 ; 1)$ và không cắt trục hoành. Số quỹ đạo như vậy bằng

$$\frac{n+1-m}{n+1} C^m_{m+n}$$

trong đó $n = a - 1$, $m = b$.

Do đó số cách bỏ phiếu phải tìm là

$$\frac{a-1+1-b}{a-1+1}C_{a+b-1}^{a-1} = \frac{a-b}{a+b}C_{a+b}^{a} \quad \square$$

✪**Bài toán 5.** *Cùng câu hỏi như bài toán 3 nhưng với giả thiết là trước khi bán vé ở người bán vé có c tiền loại 50000 đồng.*

Trong trường hợp này bài toán đưa về việc tính số quỹ đạo từ điểm $O(0\ ;\ 0)$ đến điểm $A_{m+n}\ (m+n\ ;\ n-m)$ không cắt đường thẳng $y = -(c+1)$. Rõ ràng số quỹ đạo cắt đường thẳng đó bằng số quỹ đạo từ điểm $B(0\ ; -2(c+1))$ đến điểm $A_{m+n}(n+m\ ;\ n-m)$ tức là bằng

$$C_{m+n}^{c+n+1} = C_{m+n}^{m-c-1}.$$

Số quỹ đạo cần tìm của bài toán là

$$C_{m+n}^{m} - C_{m+n}^{m-c-1}. \quad \square$$

2. Một số tính chất của quỹ đạo

Giả sử x, y là các số nguyên và $x > 0$.

Ta gọi *một quỹ đạo* từ gốc toạ độ đến điểm $D(x\ ;\ y)$ là đường gấp khúc nối các điểm $O(0\ ;\ 0), (1\ ;\ S_1), \ldots, (k\ ;\ S_k), \ldots, D(x\ ;\ S_x)$, trong đó

$$S_x = y.$$

$$S_i - S_{i-1} = e_i = \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases}$$

với $i = 1, 2, \ldots, x$.

Gọi $N[x\ ;\ y]$ là số tất cả các quỹ đạo nối điểm $O(0\ ;\ 0)$ với điểm $D(x\ ;\ y)$. Ta có

Mệnh đề 1

$$N[x, y] = \begin{cases} C_x^{\frac{x+y}{2}} \text{ nếu } x \text{ và } y \text{ cùng chẵn (hoặc lẻ)} \\ 0 \text{ trong trường hợp còn lại.} \end{cases}$$

Chứng minh. Giả sử quỹ đạo gồm p đoạn hướng lên trên và q đoạn hướng xuống dưới. Khi ấy ta có $x = p + q$, $y = p - q$.

Suy ra

$$p = \frac{x+y}{2},\ q = \frac{x-y}{2}$$

Vì p, q nguyên nên x và y phải cùng chẵn hoặc cùng lẻ. Do quỹ đạo hoàn toàn được xác định nếu chỉ ra được những đoạn nào hướng lên trên nên số quỹ đạo từ điểm $O(0\ ;\ 0)$ đến điểm $D(x\ ;\ y)$ bằng $C_x^{\frac{x+y}{2}}$. $\square$

Dễ dàng chứng minh được

Mệnh đề 2. *Giả sử A và B là hai điểm có toạ độ nguyên nằm trong góc phần tư thứ nhất, A' là điểm đối xứng của A đối với trục hoành. Khi đó số quỹ đạo từ A đến B cắt hay tiếp xúc với trục hoành bằng số quỹ đạo từ A' đến B.*

Mệnh đề 3. *Giả sử $x > 0$, $y > 0$. Khi đó số quỹ đạo từ điểm $O(0\ ;\ 0)$ đến điểm $B(x\ ;\ y)$ không có đỉnh trên trục hoành (trừ điểm O) bằng* $\frac{y}{x}.N[x,y]$.

Chứng minh. Chú ý rằng tất cả các quỹ đạo nối điểm $O(0\ ;\ 0)$ với điểm $B(x\ ;\ y)$ và không cắt trục hoành phải đi qua điểm $A(1\ ;\ 1)$. Số quỹ đạo đi từ điểm A đến điểm B bằng $N[x-1, y-1]$. Số quỹ đạo đi từ điểm A đến điểm B và cắt trục hoành bằng số quỹ đạo đi từ điểm $A'(1\ ;\ -1)$ đến điểm B tức là bằng $N[x-1, y+1]$. Do đó số quỹ đạo cần tìm bằng

$$N[x-1, y-1] - N[x-1, y+1] = \frac{y}{x}N[x, y]. \quad \square$$

Sau đây ta thiết lập một số tính chất của quỹ đạo nối điểm $O(0\ ;\ 0)$ với điểm $T(2n\ ;\ 0)$ trên trục hoành.

Ta đặt

$$B_{2n} = \frac{1}{n+1}C_{2n}^{m}.$$

Mệnh đề 4. *Trong C_{2n}^{m} quỹ đạo nối điểm $O(0\ ;\ 0)$ với điểm T có*

a) Đúng B_{2n-2} quỹ đạo nằm trên trục hoành và không có điểm chung với trục hoành (trừ các điểm O và T).

b) Đúng B_{2n} quỹ đạo không có đỉnh nằm dưới trục hoành.

Chứng minh. a) Chú ý rằng tất cả các quỹ đạo nối điểm O với điểm T nằm trên trục hoành và không có các điểm chung khác với trục hoành nhất thiết phải đi qua điểm $T_1(2n-1\ ;\ 1)$. Theo mệnh đề 3 số quỹ đạo nối điểm O với điểm T_1 và không cắt trục hoành bằng

$$\frac{1}{2n-1}N(2n-1,1) = \frac{1}{2n-1}C^{n}_{2n-1}$$

$$= \frac{1}{n}C^{n-1}_{2n-2} = B_{2n-2}.$$

b) Ta xét quỹ đạo nối điểm O với T và không có đỉnh nằm dưới trục hoành. Trong hệ toạ độ mới $X_1O_1Y_1$ với $O_1(-1\ ;\ -1)$, điểm T có toạ độ $(2n+1\ ;\ 1)$, điểm O có toạ độ $(1\ ;\ 1)$. Số quỹ đạo nối điểm O với điểm T và không có đỉnh nằm dưới trục hoành bằng số quỹ đạo nối điểm O_1 với điểm T và nằm trên trục O_1X_1. Số quỹ đạo này bằng

$$\frac{1}{2n+1}N[2n+1,1] = \frac{1}{2n+1}C^{n}_{2n+1}$$

$$= \frac{1}{n+1}C^{n}_{2n} = B_{2n}. \ \square$$

Mệnh đề 5. *Gọi $B_{2k,\,2n}$ là số quỹ đạo nối điểm O với điểm $T(2n\ ;\ 0)$ có $2k$ cạnh nằm trên trục hoành và $2n-2k$ cạnh còn lại nằm dưới trục hoành ($k = 0, 1, ..., n$).*

Khi đó

$$B_{2k,\,2n} = B_{2n} \text{ không phụ thuộc vào } k.$$

Chứng minh. Bằng quy nạp theo n.

Hơn nữa chứng minh được rằng

$$B_{2k,\,2n} = \sum_{i=1}^{n} B_{2i-2}B_{2n-2i}.$$

Đối với các quỹ đạo không có đỉnh nằm dưới trục hoành đã được xét trong mệnh đề 4 (điểm b) theo mệnh đề 5 ta có

$$B_{2n,\,2n} = B_{2n}.$$

Do tính đối xứng ta có

$$B_{0,\,2n} = B_{2n}.$$

Tổng số các quỹ đạo nối điểm O với điểm T bằng $(n+1)\,B_{2n}$, từ đó suy ra ngay rằng

$$B_{2k,\,2n} = B_{2n}\ (k = 0, 1, ..., n).$$

Như vậy ta nhận được hệ thức

$$B_{2n} = \sum_{i=1}^{n} B_{2i-2}B_{2n-2i}. \ \square$$

MỘT SỐ DẠNG TOÁN SỬ DỤNG CÔNG THỨC TỔ HỢP VÀ NHỊ THỨC NEWTON

NGUYỄN ANH DŨNG *(Hà Nội)*

Các dạng toán sử dụng công thức tổ hợp, chỉnh hợp, hoán vị và nhị thức Newton khá phong phú, thường xuất hiện trong các kì thi tốt nghiệp trung học phổ thông và tuyển sinh vào Đại học và Cao đẳng. Sau đây là một số kiến thức cơ bản và dạng toán thường gặp.

I. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

Trong bài viết này ta quy ước n, k là các số nguyên dương với $1 \le k \le n$.

Cho một tập hợp T gồm n phần tử.

• Mỗi cách sắp thứ tự n phần tử của T tạo thành một hoán vị. Số hoán vị của n phần tử là $P_n = n!$.

• Mỗi cách sắp k phần tử thứ tự của T tạo thành một chỉnh hợp chập k của n phần tử. Số chỉnh hợp như thế là $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

• Mỗi cách sắp k phần tử không phân biệt thứ tự của T tạo thành một tổ hợp chập k của n phần tử. Số tổ hợp như thế là

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

• Công thức khai triển nhị thức Newton :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k .$$

• Quy ước rằng $P_0 = 0! = 1$

và $A_n^0 = C_n^0 = 1$.

• Các công thức thường dùng :

$$C_n^k = C_n^{n-k} \quad (1)$$

$$C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1} \quad (2)$$

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n \quad (3)$$

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 \ldots + C_n^{2\left[\frac{n}{2}\right]} = 2^{n-1} \quad (4)$$

$$C_n^1 + C_n^3 + \ldots + C_n^{2\left[\frac{n-1}{2}\right]+1} = 2^{n-1} \quad (5)$$

Sử dụng (2), ta chứng minh được hai công thức

$$C_n^k + 2C_n^{k+1} + C_n^{k+2} = C_{n+2}^{k+2}$$

$$C_n^k + 3C_n^{k+1} + 3C_n^{k+2} + C_n^{k+3} = C_{n+3}^{k+3}.$$

II. MỘT SỐ DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

1. Bài toán tính tổng

★Thí dụ 1. *Rút gọn biểu thức*

$$S_k = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \ldots + (-1)^k C_n^k$$

với $k \le n,\ n > 1$.

Lời giải.

• Với $k < n$, áp dụng công thức (2) và lưu ý $C_n^0 = C_{n-1}^0 = 1$, ta có

$$S_k = C_n^0 - \left(C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1\right) + \left(C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2\right)$$

$$-\left(C_{n-1}^2 + C_{n-1}^3\right) + \ldots + (-1)^k\left(C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k\right).$$

Vậy $S_k = (-1)^k C_{n-1}^k$.

• Với $k = n$ thì

$$S_n = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \ldots + (-1)^n C_n^n$$

$$= (1-1)^n = 0. \ \square$$

Lưu ý. Nhiều bạn đã mắc sai lầm khi viết

$$S_k = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \ldots + (-1)^k C_n^k$$

$$= (1-1)^n = 0 \ (!)$$

Phải xét hai trường hợp đối với k như trong lời giải trên.

★Thí dụ 2. *Tính tổng*

$$S = C_{4n}^1 + C_{4n}^3 + C_{4n}^5 + \ldots + C_{4n}^{2n-1}.$$

Lời giải. Áp dụng công thức (1), ta có

$$C_{4n}^1 = C_{4n}^{4n-1},\ C_{4n}^3 = C_{4n}^{4n-3}, \ldots,\ C_{4n}^{2n-1} = C_{4n}^{2n+1}.$$

Do đó $S = C_{4n}^{4n-1} + C_{4n}^{4n-3} + \ldots + C_{4n}^{2n+1}$.

Ta được

$$2S = C_{4n}^1 + C_{4n}^3 + C_{4n}^5 + \ldots + C_{4n}^{4n-1} = 2^{4n-1}$$

(theo công thức (5)). Vậy $S = 2^{4n-2}$. $\square$

★Thí dụ 3. *Tính tổng*

$$S = C_n^0 - 2C_n^1 + 3C_n^2 - \ldots + (-1)^n (n+1) C_n^n.$$

Lời giải. (Sử dụng phép tính đạo hàm). Xét đa thức $P(x) = x(1+x)^n$, ta có

$P(x) = C_n^0 x + C_n^1 x^2 + C_n^2 x^3 + \ldots + C_n^n x^{n+1}$, nên

$$P'(x) = C_n^0 + 2C_n^1 x + 3C_n^2 x^2 + \ldots + (n+1).C_n^n x^n;$$

$$P'(-1) = C_n^0 - 2C_n^1 + 3C_n^2 - \ldots + (-1)^n (n+1) C_n^n = S.$$

Mặt khác $P(x) = x(1+x)^n$

$$\Rightarrow \quad P'(x) = (1+x)^n + nx(1+x)^{n-1}.$$

Suy ra $S = P'(-1) = 0$. ❐

Lưu ý. Có thể tính các tổng

$$S_1 = C_n^0 + 2a.C_n^1 + 3a^2.C_n^2 + ... + (n+1)a^n C_n^n$$

$$S_2 = C_{2n}^0 + 3a^2.C_{2n}^2 + 5a^4.C_{2n}^4 + ... + (2n+1)a^{2n}C_{2n}^{2n}$$

$$S_3 = 2aC_{2n}^1 + 4a^3.C_{2n}^3 + 6a^5.C_{2n}^5 + ... + 2n.a^{2n-1}C_{2n}^{2n-1}$$

khi xét đa thức $P(x) = x(1+x)^n$ và chứng tỏ rằng $S_1 = P'(a)$.

Xét đa thức $Q(x) = x(1+x)^{2n}$ và chứng tỏ rằng

$$2S_2 = Q'(a) + Q'(-a) \ ; \ 2S_3 = Q'(a) - Q'(-a).$$

★**Thí dụ 4.** *Tính tổng*

$$S = C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + ... + \frac{1}{n+1}C_n^n$$

Lời giải. (Sử dụng phép tính tích phân). Xét đa thức $P(x) = (1+x)^n$, ta có

$P(x) = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + ... + C_n^n x^n$. Suy ra

$$\int_0^1 P(x)dx = C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + ... + \frac{1}{n+1}C_n^n = S.$$

Do đó $S = \int_0^1 (1+x)^n dx = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$. ❐

Lưu ý. Có thể tính tổng

$$S = (b-a)C_n^0 + \frac{b^2-a^2}{2}C_n^1 + \frac{b^3-a^3}{3}C_n^2 + ...$$

$$+ \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1}C_n^n$$

khi xét đa thức $P(x) = (1+x)^n$ và chứng tỏ rằng $S = \int_a^b P(x)dx$.

Ta thường gặp bài toán với một trong hai cận của tích phân là 0 hoặc 1, hoặc -1.

Trong một số trường hợp, ta phải xét đa thức $P(x) = x^k(1+x)^n$ với $k = 1, 2, ...$

2. Chứng minh hệ thức về công thức tổ hợp

★**Thí dụ 5**. *Chứng minh rằng*

$$\left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + \left(C_n^2\right)^2 + ... + \left(C_n^n\right)^2 = C_{2n}^n.$$

Lời giải. Ta có $(x+1)^n(1+x)^n = (x+1)^{2n}$. Vế trái $(x+1)^n(1+x)^n$ chính là

$$\left(C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} + ... + C_n^n\right)\left(C_n^0 + C_n^1 x + ... + C_n^n x^n\right).$$

Dễ thấy hệ số của x^n trong vế trái là

$$\left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + \left(C_n^2\right)^2 + ... + \left(C_n^n\right)^2.$$

Hệ số của x^n trong vế phải $(x+1)^{2n}$ là C_{2n}^n.

Do đó

$$\left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + \left(C_n^2\right)^2 + ... + \left(C_n^n\right)^2 = C_{2n}^n \quad ❐$$

Lưu ý. Xét đẳng thức

$$(x+1)^n(1+x)^m = (x+1)^{n+m}.$$

Tương tự trên sử dụng công thức khai triển nhị thức Newton để viết cả hai vế thành đa thức đối với *x*, đồng nhất hệ số của các số hạng cùng bậc trong hai vế, bạn có thể viết ra được nhiều hệ thức về tổ hợp.

3. Phương trình chứa công thức tổ hợp

Phương trình chứa công thức tổ hợp là phương trình có ẩn số nằm trong công thức tổ hợp, chỉnh hợp, hoán vị.

★**Thí dụ 6**. *Giải phương trình*

$$A_x^3 + 2C_{x+1}^{x-1} - 3C_{x-1}^{x-3} = 3x^2 + P_6 + 159.$$

Lời giải. Điều kiện : $x \geq 3, x \in \mathbb{N}$. Phương trình đã cho có dạng

$$\frac{x!}{(x-3)!}+\frac{2(x+1)!}{2!(x-1)!}-\frac{3(x-1)!}{2!(x-3)!}$$

$$=3x^2+6!+159$$

$$\Leftrightarrow x(x-1)(x-2)+x(x+1)-\frac{3}{2}(x-1)(x-2)$$

$$=3x^2+879$$

$$\Leftrightarrow (x-12)\left(2x^2+11x+147\right)=0.$$

Phương trình này có nghiệm $x=12$. □

Lưu ý. Khi giải phương trình chứa công thức tổ hợp ta làm như sau: Đặt điều kiện cho ẩn số; sử dụng các công thức về hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp để biến đổi, rút gọn và giải phương trình ; đối chiếu nghiệm tìm được với điều kiện của bài toán để kết luận.

★**Thí dụ 7.** *(Bài toán lập phương trình chứa công thức tổ hợp). Hãy tìm ba số hạng liên tiếp lập thành một cấp số cộng trong dãy số sau* $C_{23}^0, C_{23}^1, C_{23}^2, \ldots, C_{23}^{23}$.

Lời giải. Ba số $C_{23}^n, C_{23}^{n+1}, C_{23}^{n+2}$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng khi và chỉ khi

$$2C_{23}^{n+1}=C_{23}^n+C_{23}^{n+2}$$

$$\Leftrightarrow 4C_{23}^{n+1}=C_{23}^n+C_{23}^{n+1}+C_{23}^{n+1}+C_{23}^{n+2}$$

$$\Leftrightarrow 4C_{23}^{n+1}=C_{25}^{n+2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4.23!}{(n+1)!(22-n)!}=\frac{25!}{(n+2)!(23-n)!}.$$

Suy ra $(n+2)(23-n)=150 \Leftrightarrow n=8; n=13$.

Ta được hai cấp số cộng là $C_{23}^8, C_{23}^9, C_{23}^{10}$ và $C_{23}^{13}, C_{23}^{14}, C_{23}^{15}$. □

Lưu ý. Một số tình huống thường gặp khi lập phương trình tổ hợp là:

- Ba số a, b, c lập thành một cấp số cộng (hoặc cấp số nhân) khi và chỉ khi $2b=a+c$ (hoặc $b^2=ac$).
- Cho tập hợp A có n phần tử, số tập con của A gồm x phần tử bằng k lần số tập con của A gồm y phần tử, tương ứng với phương trình $C_n^x=kC_n^y$.

4. Tính hệ số của đa thức

★**Thí dụ 8**. *Tính số hạng không chứa x, khi khai triển* $P(x)=\left(\sqrt[3]{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^n$ *biết rằng n thoả mãn hệ thức* $C_n^6+3C_n^7+3C_n^8+C_n^9=2C_{n+2}^8$.

Lời giải. Áp dụng công thức (2), ta có

$$C_n^6+3C_n^7+3C_n^8+C_n^9$$

$$=C_n^6+C_n^7+2\left(C_n^7+C_n^8\right)+C_n^8+C_n^9$$

$$=C_{n+1}^7+2C_{n+1}^8+C_{n+1}^9=C_{n+2}^8+C_{n+2}^9=C_{n+3}^9.$$

Như vậy, giả thiết tương đương với

$$C_{n+3}^9=2C_{n+2}^8 \Leftrightarrow \frac{n+3}{9}=2 \Leftrightarrow n=15.$$

Khi đó $P(x)=\left(\sqrt[3]{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^{15}$

$$=\sum_{k=0}^{15}C_{15}^k\left(\sqrt[3]{x}\right)^{15-k}\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^k=\sum_{k=0}^{15}C_{15}^k 2^k x^{\frac{30-5k}{6}}.$$

Số hạng không chứa x tương ứng với

$$\frac{30-5k}{6}=0 \Leftrightarrow k=6.$$

Số hạng phải tìm là $C_{15}^6.2^6=320320$. □

Lưu ý. Để tính hệ số của số hạng x^α (α là một số hữu tỉ cho trước) trong khai triển nhị thức Newton của $P(x)=\left(f(x)\right)^n$, ta làm như sau:

Viết $P(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k x^{g(k)}$; số hạng chứa x^α tương ứng với $g(k)=\alpha$; giải phương trình ta tìm được k. Nếu $k\in\mathbb{N}$, $k\le n$, hệ số phải tìm là a_k; nếu $k\notin\mathbb{N}$ hoặc $k>n$, thì trong khai triển không có số hạng chứa x^α, hệ số phải tìm bằng 0.

★**Thí dụ 9**. *Hãy tìm hệ số có giá trị lớn nhất của đa thức*

$$P(x)=(2x+1)^{13}=a_0x^{13}+a_1x^{12}+...+a_{13}.$$

Lời giải. Ta có

$$P(x)=(2x+1)^{13}=\sum_{n=0}^{13}C_{13}^{n}(2x)^{13-n}.$$

Vậy $a_n=C_{13}^{n}.2^{13-n}$

$$\Rightarrow a_{n-1}=C_{13}^{n-1}.2^{14-n}\ (n=1,2,...,13)$$

Xét bất phương trình (với ẩn số n):

$$a_{n-1}\le a_n \Leftrightarrow C_{13}^{n-1}.2^{14-n}\le C_{13}^{n}.2^{13-n}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2.13!}{(n-1)!(14-n)!}\le\frac{13!}{n!(13-n)!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{14-n}\le\frac{1}{n}\Leftrightarrow n\le\frac{14}{3}\notin\mathbb{N}.$$

Do đó bất đẳng thức $a_{n-1}\le a_n$ đúng với $n\in\{1,2,3,4\}$ và dấu đẳng thức không xảy ra.

Ta được

$$a_0<a_1<a_2<a_3<a_4 \text{ và } a_4>a_5>...>a_{13}.$$

Vậy hệ số có giá trị lớn nhất là

$$a_4=C_{13}^{4}.2^{9}=366080. \ \square$$

Lưu ý. Để tìm hệ số có giá trị lớn nhất khi khai triển $(ax+b)^m$ thành một đa thức, ta làm như sau :

Tính hệ số của số hạng tổng quát ; giải bất phương trình $a_{n-1}\le a_n$ với ẩn số n ; hệ số có giá trị lớn nhất phải tìm tương ứng với số tự nhiên n lớn nhất thoả mãn bất phương trình trên.

BÀI TẬP

Bài 1. Tính các tổng

$$S=1^2C_n^1+2^2C_n^2+...+n^2C_n^n;$$

$$P=\frac{1}{2}C_{2n}^{0}+\frac{1}{4}C_{2n}^{2}+\frac{1}{6}C_{2n}^{4}+...+\frac{1}{2n+2}C_{2n}^{2n}.$$

Bài 2. Tìm hệ số có giá trị lớn nhất trong khai triển đa thức $P(x)=\left(\frac{x}{2}+\frac{2}{3}\right)^{14}$.

Bài 3. Giải bất phương trình

$$\frac{1}{2}.A_{2x}^{2}-A_{x}^{2}\le\frac{6}{x}.C_{x}^{3}+10.$$

Bài 4. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển của

$$P(x)=\left(1+x^2+\frac{1}{x^3}\right)^{8}.$$

SUY NGHĨ KHÔNG CŨ VỀ MỘT DẠNG TOÁN KHÔNG MỚI

HÀ VĂN THẮNG
(Trường THPT Yên Dũng số 1, Bắc Giang)

Sử dụng phương pháp tích phân hoặc đạo hàm đối với các bài toán về nhị thức Newton không còn xa lạ đối với giáo viên và học sinh. Trong các đề tuyển sinh vào các trường Đại học và Cao đẳng, dạng bài tập này cũng thường xuất hiện. Tuy nhiên, trong sách giáo khoa mới hiện nay phần Nhị thức Newton nằm ở lớp 11 (trước phần Đạo hàm và Tích phân). Vì vậy, có ý kiến cho rằng không thể giảng cho học sinh lớp 11 các bài tập thuộc dạng này. Trong bài viết này, tác giả xin trình bày cách giải các bài toán thuộc dạng trên bằng cách sử dụng các công thức về tổ hợp thuần tuý. Chúng ta bắt đầu với các thí dụ sau đây.

★**Thí dụ 1.** *Tính tổng*

$$S = 1C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + ... + (n-1)C_n^{n-1} + nC_n^n$$

$(n \in \mathbb{N}^*)$.

Lời giải

Cách 1. Sử dụng công thức $C_n^k = C_n^{n-k}$ với $k = 0, 1, ..., n$, ta viết lại tổng đã cho như sau:

$$S = nC_n^0 + (n-1)C_n^1 + (n-2)C_n^2 + ... + 1C_n^{n-1}.$$

Như vậy, ta có

$$S = 1C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + ... + (n-1)C_n^{n-1} + nC_n^n$$

$$S = nC_n^0 + (n-1)C_n^1 + (n-2)C_n^2 + ... + 1C_n^{n-1}$$

Cộng theo vế hai đẳng thức trên ta được

$$2S = nC_n^0 + nC_n^1 + nC_n^2 + ... + nC_n^{n-1} + nC_n^n$$

$$\Rightarrow 2S = n.2^n.$$

Vậy $S = n.2^{n-1}$. □

Cách 2. Ta có

Bổ đề 1. *Với mọi* $n, k \in \mathbb{N}^*$ *và* $n \geq k \geq 1$ *thì* $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$.

Thật vậy, với $n,k \in \mathbb{N}^* : n \geq k \geq 1$ thì

$$kC_n^k = k.\frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{k.n.(n-1)!}{(n-k)!k.(k-1)!}$$

$$= n.\frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} = nC_{n-1}^{k-1} \text{ (đpcm).}$$

Áp dụng Bổ đề 1 ta có

$$S = 1C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + ... + nC_n^n$$

$$= n\left(C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 + ... + C_{n-1}^{n-1}\right) = n.2^{n-1}.$$

Vậy $S = n.2^{n-1}$. □

★**Thí dụ 2.** *Tính tổng*

$$S = \frac{1}{1}C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + ... + \frac{1}{n+1}C_n^n \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

Lời giải. Trong Bổ đề 1 thay k bởi $k+1$ và n bởi $n+1$ ta có

Bổ đề 2. *Với các số tự nhiên n và k thoả mãn* $n \geq k$ *thì*

$$\frac{1}{k+1}C_n^k = \frac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1}.$$

Vì vậy, áp dụng Bổ đề 2 ta có

$$S = \frac{C_{n+1}^1 + C_{n+1}^2 + ... + C_{n+1}^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1}\left(2^{n+1} - 1\right). \ \square$$

Nhận xét. Các lời giải trên có ưu điểm là ngắn gọn, dễ trình bày và có hướng giải "tự nhiên". Quan trọng hơn cả là giáo viên có thể hướng dẫn học sinh giải ngay cả khi chưa học đạo hàm và tích phân.

★**Thí dụ 3.** *Tính tổng*

$$S = 1.2.C_n^2 + 2.3.C_n^3 + 3.4.C_n^4 + ... + (n-1)n.C_n^n$$

với $n \in \mathbb{N}$ và $n > 2$.

Lời giải. Với $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$ và $k = 2, 3, ..., n$, áp dụng Bổ đề 1 hai lần ta có

$$(k-1)kC_n^k = (k-1)nC_{n-1}^{k-1} = n(k-1)C_{n-1}^{k-1}$$

$$= n(n-1)C_{n-2}^{k-2}.$$

Bổ đề 3. *Với các số tự nhiên* $n \geq k \geq 2$, $n > 2$ *thì*

$$(k-1)kC_n^k = (n-1)nC_{n-2}^{k-2}.$$

Áp dụng Bổ đề 3 ta được

$$S = 1.2.C_n^2 + 2.3.C_n^3 + 3.4.C_n^4 + ... + (n-1)n.C_n^n$$

$$= (n-1)n\left(C_{n-2}^0 + C_{n-2}^1 + C_{n-2}^2 + ... + C_{n-2}^{n-2}\right)$$

$$= (n-1)n\,2^{n-2}. \ \square$$

★**Thí dụ 4.** *Tính tổng*

$$S = 1^2C_n^1 + 2^2C_n^2 + ... + n^2C_n^n \text{ với } n \in \mathbb{N}, n > 2.$$

Lời giải. Xét số hạng tổng quát của tổng S là $k^2C_n^k$, với $k = 2, 3, ..., n$, ta có

$$k^2C_n^k = (k-1)kC_n^k + kC_n^k = n(n-1)C_{n-2}^{k-2} + nC_{n-1}^{k-1}$$

(theo Bổ đề 3 và Bổ đề 1). Ta có

Bổ đề 4. *Với các số tự nhiên $n \geq k \geq 2$, $n > 2$ thì*

$$k^2 C_n^k = n(n-1)C_{n-2}^{k-2} + nC_{n-1}^{k-1}$$

và $1^2 C_n^1 = nC_{n-1}^0$;

Áp dụng Bổ đề (4) ta được

$$S = 1^2C_n^1 + 2^2C_n^2 + \ldots + n^2C_n^n$$

$$= n(n-1)\left(C_{n-2}^0 + C_{n-2}^1 + \ldots + C_{n-2}^{n-2}\right)$$

$$+n\left(C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 + \ldots + C_{n-1}^{n-1}\right)$$

$$= n(n-1)2^{n-2} + n.2^{n-1}$$

$$= n(n+1)2^{n-2}. \ \square$$

★ **Thí dụ 5.** *Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{2}C_{2n}^1 + \frac{1}{4}C_{2n}^3 + \ldots + \frac{1}{2n}C_{2n}^{2n-1} = \frac{2^{2n}-1}{2n+1},$$

với $n \in \mathbb{N}^*$.

Lời giải. Theo Bổ đề 2 ta có

$$\frac{1}{k+1}C_n^k = \frac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1}$$

với $k = 1, 2, \ldots, n$. Áp dụng vào bài toán ta được

$$\frac{1}{2}C_{2n}^1 + \frac{1}{4}C_{2n}^3 + \ldots + \frac{1}{2n}C_{2n}^{2n-1}$$

$$= \frac{1}{2n+1}\left(C_{2n+1}^2 + C_{2n+1}^4 + \ldots + C_{2n+1}^{2n}\right)$$

$$= \frac{1}{2n+1}\left(\left(C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^2 + C_{2n+1}^4 + \ldots + C_{2n+1}^{2n}\right) - 1\right)$$

$$= \frac{1}{2n+1}\left(2^{2n} - 1\right).$$

Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Nhận xét. Bài toán trên nằm trong đề thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng năm 2007. Trong đáp án trình bày theo cách giải tích phân khá phức tạp. Lời giải trên đây ngắn gọn hơn và tiếp cận tự nhiên hơn.

Từ các Bổ đề đã được chứng minh trong các lời giải ở phần trên, ta có thể giải được các bài tập sau đây. Xin dành cho bạn đọc.

BÀI TẬP

Tính các tổng sau đây

1. $S_1 = 1C_n^1 - 2C_n^2 + 3C_n^3 - \ldots + (-1)^n nC_n^n$

với $n \in \mathbb{N}^*$, $n > 1$.

2. $S_2 = 1C_n^0 + 2C_n^1 + 3C_n^2 + \ldots + nC_n^{n-1}$.

3. $S_3 = 1C_n^2 + 2C_n^3 + 3C_n^4 + \ldots + (n-1)C_n^n$

với $n \in \mathbb{N}^*$, $n > 2$.

4. $S_4 = 1C_n^2 - 2C_n^3 + 3C_n^4 - \ldots + (-1)^n(n-1)C_n^n$

với $n \in \mathbb{N}^*$, $n > 2$.

5. $S_5 = \frac{1}{2}C_n^1 - \frac{1}{3}C_n^2 + \frac{1}{4}C_n^3 - \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}C_n^n$

với $n \in \mathbb{N}^*$.

6. $S_6 = \frac{1}{2}C_n^0 + \frac{1}{3}C_n^1 + \frac{1}{4}C_n^2 + \ldots + \frac{1}{n+2}C_n^n$

với $n \in \mathbb{N}^*$.

7. $S_7 = \frac{2^2}{2}C_n^1 + \frac{2^3}{3}C_n^2 + \frac{2^4}{4}C_n^3 + \ldots + \frac{2^{n+1}}{n+1}C_n^n$

với $n \in \mathbb{N}^*$.

8. $S_8 = \frac{1}{1!(2n-1)!} + \frac{1}{3!(2n-3)!}$

$+ \frac{1}{5!(2n-5)!} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)!1!}$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

SUY NGHĨ VỀ MỘT LOẠI TOÁN QUEN THUỘC

ĐƯỜNG ĐỨC HÀO

(Trường THPT Hương Khê, Hà Tĩnh)

Tiếp theo bài báo *Suy nghĩ không cũ về một dạng toán không mới* đã được đăng trên Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ số 378 (tháng 12/2008) của tác giả Hà Văn Thắng (GV THPT Yên Dũng 1, Bắc Giang), tôi nhận thấy hầu hết các bài toán về tính tổng hay chứng minh các biểu thức liên quan đến công thức tổ hợp mà trước đây phải sử dụng đến công cụ tích phân hoặc đạo hàm để giải thì ta chỉ dùng các công thức biến đổi thuần tuý cũng có thể giải được các dạng toán trên. Phần này có thể áp dụng để giảng dạy cho học sinh khối 11 theo chương trình hiện hành.

I. MỘT SỐ KIẾN THỨC CẦN NHỚ

$$f_1(x) = (1+x)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k x^k;$$

$$g_1(x) = (1-x)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k (-1)^k x^k;$$

$$f_2(x) = (1+x)^{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} C_{2n+1}^k . x^k;$$

$$g_2(x) = (1-x)^{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} C_{2n+1}^k (-1)^k x^k.$$

Suy ra

$$h_1(x) = \frac{f_1(x)+g_1(x)}{2} = \sum_{k=0}^{n} C_{2n}^{2k} x^{2k};$$

$$h_2(x) = \frac{f_2(x)+g_2(x)}{2} = \sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k} x^{2k};$$

$$p_1(x) = \frac{f_1(x)-g_1(x)}{2} = \sum_{k=0}^{n} C_{2n}^{2k-1} x^{2k-1};$$

$$p_2(x) = \frac{f_2(x)-g_2(x)}{2} = \sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1} x^{2k+1};$$

$$f_1(1) = p_2(1) = 2^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k = \sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1};$$

$$h_1(1) = p_1(1) = 2^{2n-1} = \sum_{k=0}^{n} C_{2n}^{2k} = \sum_{k=1}^{n} C_{2n}^{2k-1}.$$

$$f_2(1) = 2^{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} C_{2n+1}^k$$

$$h_2(1) = 2^{2n} = \sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k}$$

Từ $f_1(1)$ và $f_2(1)$ có

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \qquad (*)$$

Bổ đề. *Với* $n, k \in \mathbb{N}^*$ *và* $n \geq k \geq 1$, *ta có*

1) $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$;

2) $\dfrac{1}{k+1}C_n^k = \dfrac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1}$

(Chứng minh các Bổ đề trong bài báo nêu trên).

II. BÀI TẬP ÁP DỤNG

★**Thí dụ 1.** *Tính tổng*

$$S_1 = \frac{1}{1.2}C_n^0 + \frac{1}{2.3}C_n^1 + \ldots + \frac{1}{(n+1).(n+2)}C_n^n.$$

Lời giải. Áp dụng Bổ đề 2 hai lần để biến đổi số hạng tổng quát của S_1 như sau :

$$\frac{1}{(k+1)(k+2)}C_n^k = \frac{1}{k+2}\left(\frac{1}{k+1}C_n^k\right)$$

$$= \frac{1}{k+2}\cdot\frac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1}$$

$$= \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{k+2}C_{n+1}^{k+1}\right) = \frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{n+2}C_{n+2}^{k+2}.$$

Từ đó và hệ thức (*) có

$$S_1 = \frac{1}{(n+1)(n+2)}\left(C_{n+2}^2 + C_{n+2}^3 + \ldots + C_{n+2}^{n+2}\right)$$

$$= \frac{1}{(n+1)(n+2)}\left(2^{n+2} - C_{n+2}^0 - C_{n+2}^1\right)$$

$$= \frac{2^{n+2} - n - 3}{(n+1)(n+2)}. \square$$

★**Thí dụ 2.** *Tính tổng*

$$S_2 = 1.2.3.C_n^3 + 2.3.4.C_n^4 + \ldots + (n-2)(n-1)nC_n^n.$$

Lời giải. Áp dụng Bổ đề 1 ba lần để biến đổi số hạng tổng quát của S_2 như sau:

$$(k-2)(k-1)kC_n^k = (k-2)(k-1)nC_{n-1}^{k-1}$$

$$= n(k-2)(k-1)C_{n-1}^{k-1} = n(k-2)(n-1)C_{n-2}^{k-2}$$

$$= n(n-1)(k-2)C_{n-2}^{k-2} = n(n-1)(n-2)C_{n-3}^{k-3}.$$

Từ đó và hệ thức (*) ta có

$$S_2 = n(n-1)(n-2)\left(C_{n-3}^0 + C_{n-3}^1 + C_{n-3}^2 + \ldots + C_{n-3}^{n-3}\right)$$

$$= n(n-1)(n-2).2^{n-3}. \square$$

★**Thí dụ 3.** *Tính tổng*

$$S_3 = \frac{1}{1.2.3}C_n^0 + \frac{1}{2.3.4}C_n^1 + \ldots + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}C_n^n.$$

Lời giải. Áp dụng Bổ đề 2 ba lần để biến đổi số hạng tổng quát của S_3 ta được

$$\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}C_n^k = \frac{1}{(k+2)(k+3)}.\frac{1}{k+1}C_n^k$$

$$= \frac{1}{(k+2)(k+3)}.\frac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1} = \frac{1}{n+1}.\frac{1}{k+3}.\frac{1}{k+2}C_{n+1}^{k+1}$$

$$= \frac{1}{n+1}.\frac{1}{k+3}.\frac{1}{n+2}C_{n+2}^{k+2} = \frac{1}{n+1}.\frac{1}{n+2}.\frac{1}{k+3}C_{n+2}^{k+2}$$

$$= \frac{1}{n+1}.\frac{1}{n+2}.\frac{1}{n+3}C_{n+3}^{k+3}.$$

Từ đó và hệ thức (*) có

$$S_3 = \frac{1}{n+1}.\frac{1}{n+2}.\frac{1}{n+3}\left(C_{n+3}^3 + C_{n+3}^4 + \ldots + C_{n+3}^{n+3}\right)$$

$$= \frac{2^{n+3} - C_{n+3}^0 - C_{n+3}^1 - C_{n+3}^2}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$= \frac{2^{n+4} - n^2 - 7n - 14}{2(n+1)(n+2)(n+3)}. \square$$

★**Thí dụ 4.** *Tính tổng*

$$S_4 = C_{2n}^0 + \frac{1}{3}C_{2n}^2 + \frac{1}{5}C_{2n}^4 + \ldots + \frac{1}{2n+1}C_{2n}^{2n}.$$

Lời giải. Áp dụng Bổ đề 2 để biến đổi số hạng tổng quát của S_4 như sau :

$$\frac{1}{2k+1}C_{2n}^{2k} = \frac{1}{2n+1}C_{2n+1}^{2k+1}.$$

Từ đó và hệ thức (*) có

$$S_4 = \frac{1}{2n+1}\left(C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^3 + C_{2n+1}^5 + \ldots + C_{2n+1}^{2n+1}\right)$$

$$= \frac{p_2(1)}{2n+1} = \frac{2^{n+1}}{2n+1}. \square$$

★**Thí dụ 5.** *Tính tổng*

$$S_5 = \frac{1}{2}C_{2n}^0 + \frac{1}{4}C_{2n}^2 + \frac{1}{6}C_{2n}^4 + \ldots + \frac{1}{2n+2}C_{2n}^{2n}.$$

Lời giải. Áp dụng Bổ đề 2 để biến đổi số hạng tổng quát của S_5 như sau:

$$\frac{1}{2k+2}.C_{2n}^{2k} = \frac{2k+1}{2k+2}.\frac{1}{2k+1}.C_{2n}^{2k}$$

$$= \frac{2k+1}{2k+2}.\frac{1}{2n+1}.C_{2n+1}^{2k+1} = \frac{2k+1}{2n+1}.\frac{1}{2k+2}.C_{2n+1}^{2k+1}$$

$$= \frac{2k+2-1}{(2n+1)(2k+2)}.C_{2n+1}^{2k+1}$$

$$= \frac{1}{2n+1}.C_{2n+1}^{2k+1} - \frac{1}{2n+1}.\frac{1}{2k+2}C_{2n+1}^{2k+1}$$

$$= \frac{1}{2n+1}C_{2n+1}^{2k+1} - \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}.C_{2n+2}^{2k+2}$$

Từ đó và các công thức $p_2(1)$, $p_1(1)$ có

$$S_5=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2n+1}C_{2n+1}^{2k+1}-\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}.C_{2n+2}^{2k+2}\right)$$

$$=\frac{2^{2n}}{2n+1}-\frac{2^{2n+1}-1}{(2n+1)(2n+2)}$$

$$=\frac{n.2^{2n+1}+1}{(2n+1)(2n+2)}.\ \square$$

★**Thí dụ 6.** *Chứng minh rằng*

$$S_6=2C_{2n}^{2}+4C_{2n}^{4}+6C_{2n}^{6}+...+2nC_{2n}^{2n}=n.2^{2n-1}.$$

Lời giải. Vận dụng Bổ đề 1 ta có

$$2kC_{2n}^{2k}=2nC_{2n-1}^{2k-1}.$$

Từ đó và công thức $p_2(1)$ có

$$S_6=2n\left(C_{2n-1}^{1}+C_{2n-1}^{3}+C_{2n-1}^{5}+...+C_{2n-1}^{2n-1}\right)$$

$$=2n.2^{2n-2}=n.2^{2n-1}.\ \square$$

★**Thí dụ 7.** *Tính tổng*

$$S_7=\frac{2^2}{2}C_{2n}^{1}+\frac{2^4}{4}C_{2n}^{3}+\frac{2^6}{6}C_{2n}^{5}+...+\frac{2^{2n}}{2n}C_{2n}^{2n-1}.$$

Lời giải. Sử dụng Bổ đề 2 ta có

$$\frac{2^{2k}}{2k}C_{2n}^{2k-1}=2^{2k}\frac{1}{2k}C_{2n}^{2k-1}=2^{2k}\frac{1}{2n+1}C_{2n+1}^{2k}.$$

Từ đó và công thức $h_2(x)$ có

$$S_7=\frac{1}{2n+1}\left(\sum_{k=1}^{n}C_{2n+1}^{2k}2^{2k}\right)$$

$$=\frac{1}{2n+1}\left(h_2(2)-C_{2n+1}^{0}\right)$$

$$=\frac{3(3^{2n}-1)}{2(2n+1)}.\ \square$$

★**Thí dụ 8.** *Chứng minh rằng*

$$S_8=1.2^2C_{2n}^{2}+2.2^4C_{2n}^{4}+3.2^6C_{2n}^{6}+...+n.2^{2n}C_{2n}^{2n}$$

$$=n(3^{2n-1}+1).$$

Lời giải. Sử dụng Bổ đề 1 ta biến đổi số hạng tổng quát như sau:

$$k.2^{2k}C_{2n}^{2k}=2^{2k-1}.2kC_{2n}^{2k}=2^{2k-1}.2n.C_{2n-1}^{2k-1}.$$

Từ đó và công thức $p_2(x)$ có

$$S_8=2n\left(C_{2n-1}^{1}2^1+C_{2n-1}^{3}2^3+...+C_{2n-1}^{2n-1}2^{2n-1}\right)$$

$$=2n\frac{(1+2)^{2n-1}-(1-2)^{2n-1}}{2}$$

$$=n(3^{2n-1}+1).\ \square$$

III. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Cho $0<a<b, n\in\mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng

$$\frac{b-a}{1}C_n^0+\frac{b^2-a^2}{2}C_n^1+\frac{b^3-a^3}{3}C_n^2$$

$$+\frac{b^4-a^4}{4}C_n^3+...+\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1}C_n^n$$

$$=\frac{(1+b)^{n+1}-(1+a)^{n+1}}{n+1}.$$

Bài 2. Cho $a>0,\ n\in\mathbb{N}^*$. Hãy tính tổng

$$1.2C_{n+1}^{1}+3.4.a^2C_{n+1}^{2}+5.6.a^4C_{n+1}^{3}$$

$$+7.8.a^6C_{n+1}^{4}+...+(2n+1)(2n+2)a^{2n}C_{n+1}^{n+1}.$$

PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TOÁN VỀ TẠO SỐ

NGUYỄN ANH DŨNG *(Hà Nội)*

Trong các kì thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng và tốt nghiệp phổ thông ta thường gặp các bài toán về tính số các số tạo thành từ một số chữ số cho trước và thỏa mãn một điều kiện nào đó.

Trong bài này ta quy ước :

• Khi nói cho tập hợp gồm n chữ số, thì đó là các chữ số đôi một khác nhau thuộc tập hợp $\{0, 1, ..., 9\}$ với $n \le 10$.

• Một số có m chữ số thì đó là số tự nhiên có chữ số đầu khác 0.

Khi giải các bài toán loại này ta thường dùng các mệnh đề sau, trong đó ba mệnh đề đầu về thực chất là sự phát biểu theo cách khác của định nghĩa công thức chỉnh hợp và tổ hợp.

Mệnh đề. *Giả sử ta viết các chữ số theo hàng ngang và m, n là các số nguyên dương với $m \le n$ thì*

1) *Số cách viết m chữ số trong n chữ số khác nhau vào m vị trí định trước bằng A_n^m.*

2) *Số cách viết m chữ số khác nhau vào m vị trí trong n vị trí định trước bằng A_n^m (ở $n - m$ vị trí còn lại chưa xét sự thay đổi chữ số).*

3) *Số cách viết m chữ số giống nhau vào m vị trí trong n vị trí định trước bằng $C_n^{n-m} = C_n^m$.*

4) *Cho tập hợp gồm n chữ số, trong đó có chữ số 0, số các số có m chữ số tạo thành từ chúng bằng $(n-1)A_{n-1}^{m-1}$.*

Thực vậy có $n - 1$ cách chọn chữ số đầu trái khác 0, sau đó áp dụng Mệnh đề 2 ta được Mệnh đề 4.

Sau đây là một số dạng toán thường gặp.

DẠNG 1. Số tạo thành chứa các chữ số định trước

✪Bài toán 1. *Cho tập hợp gồm n chữ số, trong đó có chữ số 0, từ chúng có thể viết được bao nhiêu số có m chữ số khác nhau sao cho trong đó có k chữ số định trước (thuộc n chữ số trên) với $k < m \le n$?*

Cách giải. Số tạo thành gồm m vị trí có dạng $\overline{a_1a_2...a_m}$. Gọi tập hợp k chữ số định trước là X. Ta xét hai bài toán nhỏ theo các khả năng của giả thiết về tập hợp X và chữ số 0 như sau :

1) Giả thiết trong X chứa chữ số 0

Ta có $m - 1$ cách chọn vị trí cho chữ số 0 ; số cách viết $k - 1$ chữ số khác 0 thuộc X vào $k - 1$ vị trí trong $m - 1$ vị trí còn lại bằng A_{m-1}^{k-1} theo Mệnh đề 2 ; số cách viết $m - k$ trong số $n - k$ chữ số không thuộc X vào $m - k$ vị trí còn lại bằng A_{n-k}^{m-k} theo Mệnh đề 1.

Theo quy tắc nhân, ta được số các số tạo thành trong trường hợp thứ nhất bằng

$$S = (m-1).A_{m-1}^{k-1}.A_{n-k}^{m-k}.$$

2) Giả thiết trong X không chứa chữ số 0.

Ta tính theo các bước :

Bước 1. Tính số các số tạo thành chứa chữ số 0.

Lần lượt có $m - 1$ cách chọn vị trí cho chữ số 0 ; số cách viết k chữ số thuộc X vào k vị trí trong $m - 1$ vị trí còn lại bằng A_{m-1}^{k} theo Mệnh đề 2 ; số cách viết $m - k - 1$ trong số $n - k - 1$ chữ số khác 0 mà không thuộc X vào $m - k - 1$ vị trí còn lại bằng A_{n-k-1}^{m-k-1} theo Mệnh đề 1.

Theo quy tắc nhân, ta được số các số đó bằng :

$$S_1 = (m-1).A_{m-1}^{k}.A_{n-k-1}^{m-k-1}$$

Bước 2. Tính số các số tạo thành không chứa chữ số 0.

Số cách viết k chữ số thuộc X vào k vị trí trong m vị trí bằng A_m^k theo Mệnh đề 2 ; số cách viết $m-k$ trong số $n-k-1$ chữ số khác 0 mà không thuộc X vào $m-k$ vị trí còn lại bằng A_{n-k-1}^{m-k} theo Mệnh đề 1.

Theo quy tắc nhân, ta được số các số đó bằng

$$S_2 = A_m^k.A_{n-k-1}^{m-k}.$$

Bước 3. Theo quy tắc cộng, ta được số các số tạo thành trong trường hợp thứ hai bằng :

$$S = S_1 + S_2. \square$$

DẠNG 2. Số tạo thành không chứa hai chữ số định trước cạnh nhau

✪**Bài toán 2.** *Cho tập hợp gồm n chữ số. Từ chúng viết được bao nhiêu số có m ($m \le n$) chữ số khác nhau mà trong đó có hai chữ số định trước nào đó không đứng cạnh nhau ?*

Cách giải. Số tạo thành có dạng $\overline{a_1a_2...a_m}$ và hai chữ số định trước là x, y (thuộc n chữ số đã cho). Ta xét ba bài toán nhỏ theo các khả năng của giả thiết về chữ số x, y và chữ số 0 như sau.

1) *Giả thiết n chữ số đã cho chứa chữ số* 0 *và hai chữ số định trước x, y khác* 0.

Bước 1. Tính số các số tạo thành chưa xét đến hai chữ số định trước : Có $n-1$ cách chọn vị trí cho chữ số 0 và áp dụng Mệnh đề 2 được số các số đó bằng $S_1 = (n-1)A_{n-1}^{m-1}$.

Bước 2. Tính số các số có hai chữ số x, y cạnh nhau theo thứ tự $\overline{xy}$ và $\overline{yx}$.

• Với $\overline{a_1a_2} = \overline{xy}$. Khi đó mỗi số $\overline{a_3...a_m}$ ứng với một chỉnh hợp chập $m-2$ của $n-2$ chữ số khác x, y. Theo Mệnh đề 1, số các số đó bằng $S_2 = A_{n-2}^{m-2}$.

• Với a khác 0, x, y mà số đó chứa $\overline{xy}$. Lần lượt ta có : $n-3$ cách chọn chữ số cho a_1 khác 0, x, y ; $m-2$ cách chọn vị trí cho $\overline{xy}$; số cách chọn $m-3$ trong $n-3$ chữ số còn lại khác a_1, x, y cho $m-3$ vị trí còn lại là A_{n-3}^{m-3} theo Mệnh đề 1. Theo quy tắc nhân, số các số đó bằng

$$S_3 = (n-3).(m-2)\,A_{n-3}^{m-3}.$$

Từ hai trường hợp trên, ta được số các số có chứa $\overline{xy}$ bằng $S_2 + S_3$.

• Tương tự có $S_2 + S_3$ số với $\overline{a_1a_2} = \overline{yx}$ hoặc a_1 khác 0, x, y mà số đó chứa $\overline{yx}$.

Bước 3. Vậy số các số tạo thành trong trường hợp thứ nhất bằng

$$S = S_1 - 2.(S_2 + S_3).$$

2) *Giả thiết n chữ số đã cho chứa chữ số* 0 *và một trong hai chữ số định trước bằng* 0.

Bạn đọc tự giải theo các bước sau :

Bước 1. Tính số các số tạo thành chưa xét đến hai chữ số x, y định trước bằng

$$S_1 = (n-1).\,A_{n-1}^{m-1}.$$

Bước 2. Tính số các số có x, y cạnh nhau dạng $\overline{x0}$ và $\overline{0x}$ bằng

$$S_2 = (m-1)A_{n-2}^{m-2}\,;\; S_3 = (2m-2)\,A_{n-2}^{m-2},$$

Số các số tạo thành trong trường hợp thứ hai là $S = S_1 - (S_2 + S_3)$.

3) *Giả thiết n chữ số đã cho không có chữ số* 0.

Bạn đọc tự giải, được

$$S = A_n^m - 2(m-1).A_{n-2}^{m-2}. \square$$

DẠNG 3. Số tạo thành chứa chữ số lặp lại

Trước hết ta xét một bài toán cụ thể :

✪**Bài toán 3.** *Có bao nhiêu số tự nhiên có* 6 *chữ số sao cho trong đó có một chữ số xuất hiện ba lần, một chữ số khác xuất hiện hai lần và một chữ số khác với hai chữ số trên ?*

Lời giải. • Nếu kể cả trường hợp chữ số 0 đứng đầu, ta xét lần lượt như sau.

Có 10 cách chọn chữ số (từ 0 đến 9) xuất hiện 3 lần và có C_6^3 cách chọn 3 trong 6 vị trí cho chữ số đó. Sau đó có 9 cách chọn chữ số (khác với chữ số trên) xuất hiện 2 lần và có C_3^2 cách chọn 2 trong 3 vị trí còn lại cho chữ số đó. Tiếp theo có 8 cách chọn chữ số cho vị trí còn lại cuối cùng. Ta được số các số đó bằng $S = 10.C_6^3.9.C_3^2.8 = 720.C_6^3.C_3^2$.

- Vì vai trò của 10 chữ số 0, 1, ..., 9 như nhau nên số các số có chữ số đầu trái là 0 bằng $\frac{1}{10}S$, do đó số các số có chữ số đầu trái khác 0 thỏa mãn bài toán bằng $\frac{9}{10}S = 648.C_6^3.C_3^2$. □

✪**Bài toán 4.** *Cho tập hợp gồm n chữ số. Từ chúng viết được bao nhiêu số có m chữ số ($n \geq m \geq 3$) sao cho trong đó có một chữ số xuất hiện k lần, một chữ số khác xuất hiện q lần và một chữ số khác với hai chữ số trên với $k + q + 1 = m$?*

Cách giải. Ta xét hai bài toán nhỏ dưới đây

1) Giả thiết n chữ số đã cho có chữ số 0

Bước 1. Nếu kể cả trường hợp chữ số 0 đứng đầu, ta thấy :

Có n cách chọn chữ số xuất hiện k lần và có C_m^k cách chọn k trong m vị trí cho chữ số đó. Sau đó có $n - 1$ cách chọn chữ số xuất hiện q lần (khác với chữ số trên) và có C_{m-k}^q cách chọn q trong $m - k$ vị trí còn lại cho chữ số đó. Theo quy tắc nhân, ta tính được số các số đó bằng $S = n.C_m^k.(n-1).C_{m-k}^q.(n-2)$, trong đó $C_{m-k}^q = q+1$.

Bước 2. Vì vai trò của n chữ số như nhau nên số các số có chữ số đứng đầu khác 0 thỏa mãn bài toán bằng $\frac{(n-1).S}{n}$.

2) Giả thiết n chữ số đã cho không có chữ số 0.

Bạn đọc tự giải được

$$S = n.C_m^k.(n-1).C_{m-k}^q.(n-2).\ \square$$

Ta có thể mở rộng bài toán tổng quát cho t chữ số trong đó mỗi chữ số xuất hiện lần lượt $k_1, k_2, ..., k_t$ lần.

BÀI TẬP

Bài 1. Có bao nhiêu số tự nhiên nhỏ hơn 35400 và có 5 chữ số khác nhau ?

Bài 2. Cho các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Từ chúng viết được bao nhiêu số có 5 chữ số khác nhau sao cho số tạo thành là một số chẵn ?

Bài 3. Cho các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Từ chúng viết được bao nhiêu số có 8 chữ số khác nhau sao cho trong đó có chữ số 1 đứng liền bên trái chữ số 2 ?

MỘT SỐ LOẠI TOÁN TỔ HỢP THƯỜNG GẶP TRONG KÌ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC

NGUYỄN ANH DŨNG *(Hà Nội)*

Bài viết *Phương pháp giải các bài toán về tạo số* ở trên đã đề cập tới các bài toán tính số các số tự nhiên tạo thành, thỏa mãn một điều kiện nào đó. Trong bài này chúng tôi xin giới thiệu một số loại toán về tìm số cách chọn một tập hợp mới từ các tập hợp đã cho, hoặc tìm số cách phân chia các phần tử của một tập hợp thành các tập hợp con.

LOẠI 1. Chọn một nhóm phần tử từ các tập hợp

★**Thí dụ 1.** *Tổ một có 10 người, tổ hai có 9 người. Có bao nhiêu cách chọn một nhóm gồm 8 người sao cho mỗi tổ trên có ít nhất là 2 người?*

Lời giải. Giả sử ta chọn k người của tổ một và $8 - k$ người của tổ hai.Vì mỗi tổ có ít nhất 2 người nên $2 \le k \le 6$.

• Số cách chọn k trong số 10 người của tổ một là C_{10}^{k}. Ứng với một cách chọn trên, ta có số cách chọn $8 - k$ người trong 9 người của tổ hai là C_9^{8-k}. Theo quy tắc nhân, ta được số cách chọn nhóm 8 người như trên là $S_k = C_{10}^{k}.C_9^{8-k}$.

• Cho k lần lượt bằng 2, 3, .., 6 và áp dụng quy tắc cộng, ta được số cách chọn nhóm 8 người thỏa mãn bài toán là

$$S = S_2 + S_3 + \ldots + S_6$$
$$= C_{10}^{2}C_9^{6} + C_{10}^{3}C_9^{5} + \ldots + C_{10}^{6}C_9^{2} = 74088. \ \square$$

✪**Bài toán tổng quát 1.** *Cho tập hợp A có n phần tử, tập hợp B có m phần tử. Tính số cách chọn p phần tử từ hai tập hợp trên ($p < m + n$) và thỏa mãn một điều kiện nào đó.*

Cách giải chung

1) *Tính trực tiếp.* Giả sử ta chọn k phần tử của tập hợp A và $p - k$ phần tử của B (trường hợp giả thiết cho nhiều tập hợp hơn, ta làm tương tự). Số cách chọn là $S_k = C_n^k.C_m^{p-k}$. Cho k thay đổi phù hợp với giả thiết của bài toán và lấy tổng của tất cả các số hạng S_k tương ứng, ta được kết quả cần tìm.

2) *Tính gián tiếp.* Số cách chọn k phần tử từ A, B một cách bất kì là C_{n+m}^{k}. Kết quả phải tìm là hiệu của C_{n+m}^{k} với tổng các số hạng S_k, tương ứng với mỗi giá trị k không thỏa mãn giả thiết của bài toán.

★**Thí dụ 2.** *Người ta sử dụng ba loại sách gồm: 8 cuốn sách về Toán, 6 cuốn sách về Lí và 5 cuốn sách về Hóa. Mỗi loại đều gồm các cuốn sách đôi một khác loại nhau. Có bao nhiêu cách chọn 7 cuốn sách trong số sách trên để làm giải thưởng sao cho mỗi loại có ít nhất một cuốn?*

Lời giải. Sử dụng cách tính gián tiếp. Số cách chọn 7 trong số 19 cuốn sách một cách bất kì là C_{19}^{7}.

Các cách chọn không đủ cả ba loại sách là:

• Số cách chọn 7 trong số 11 cuốn sách Lí và Hóa là C_{11}^{7} (không có sách Toán).

• Số cách chọn 7 trong số 13 cuốn sách Hóa và Toán là C_{13}^{7} (không có sách Lí).

• Số cách chọn 7 trong số 14 cuốn sách Toán và Lí là C_{14}^{7} (không có sách Hóa).

• Số cách chọn 7 trong số 8 cuốn sách Toán là C_8^7 (không có sách Lí và Hóa).

Vì mỗi cách chọn chỉ có sách Toán, tức là không có sách Lí và Hóa thuộc cả hai phép chọn: không có sách Lí và không có sách Hóa, nên số cách chọn phải tìm là

$$C_{19}^{7} - C_{11}^{7} - C_{13}^{7} - C_{14}^{7} + C_8^7 = 44918. \ \square$$

Lưu ý. Khi tính theo phương pháp gián tiếp, mỗi số hạng ứng với trường hợp không thỏa mãn bài toán được đặt sau dấu trừ. Số hạng đồng thời thuộc hai trường hợp không thỏa mãn bài toán được đặt sau dấu cộng (bạn đọc tự suy luận cho số hạng đồng thời thuộc ba trường hợp không thỏa mãn bài toán..).

LOẠI 2. Sắp xếp thứ tự các phần tử từ một họ các tập hợp

★**Thí dụ 3.** *Có 5 viên bi xanh giống nhau, 4 viên bi trắng giống nhau và 3 viên bi đỏ đôi một khác nhau. Có bao nhiêu cách xếp số bi trên vào 12 ô theo một hàng ngang sao cho mỗi ô có một viên bi?*

Lời giải. Nếu tất cả 12 viên bi đều khác nhau thì số hoán vị chúng tạo thành là $P_{12} = 12!$. Nhưng các hoán vị của 5 bi xanh và các hoán vị của 4 bi trắng cho cùng một cách sắp xếp đối với 12 viên bi nên số cách sắp xếp phải tìm là

$$\frac{P_{12}}{P_5.P_4} = \frac{12!}{5!4!} = 166320. \square$$

✪**Bài toán tổng quát 2.** *Có tất cả n vật, trong đó có m vật giống nhau trong hộp A; k vật giống nhau trong hộp B (m + k < n). Các vật còn lại đôi một khác nhau thì số cách sắp xếp chúng thành một hàng ngang là* $\frac{n!}{m!k!}$.

★**Thí dụ 4.** *Có bao nhiêu cách sắp xếp cho 5 học sinh nam và 3 học sinh nữ ngồi quanh một bàn tròn sao cho không có hai học sinh nữ nào cạnh nhau? (nếu có hai cách xếp mà cách xếp này khi quay quanh tâm vòng tròn được cách xếp kia thì ta coi chỉ là một cách xếp).*

Lời giải. Giả sử đã xếp chỗ cho 5 học sinh nam. Vì 3 học sinh nữ không ngồi cạnh nhau nên họ được chọn 3 trong 5 vị trí xen kẽ giữa các học sinh nam, số cách chọn là A_5^3. Vì hai cách xếp vị trí cho 8 người với cùng một thứ tự quanh bàn tròn được coi là một nên ta có thể chọn trước vị trí cho một học sinh nam nào đó, số hoán vị của 4 học sinh nam còn lại vào các vị trí là 4!.

Theo quy tắc nhân, số khả năng phải tìm là $4!A_5^3 = 1440$ (cách). □

Lưu ý. Khi xếp n đối tượng theo một vòng tròn, do hai cách xếp có thể giống như nhau bởi một phép quay được coi là một, nên ta có thể định trước một vị trí cho một đối tượng bất kì trong chúng. Sau đó tính số cách xếp vị trí cho $n - 1$ đối tượng còn lại.

LOẠI 3. Phân chia tập hợp các phần tử thành các tập hợp con

★**Thí dụ 5.** *Có bao nhiêu cách chia* 100 *đồ vật giống nhau cho* 4 *người sao cho mỗi người được ít nhất một đồ vật?*

Lời giải. Giả sử 100 đồ vật được xếp thành một hàng ngang, giữa chúng có 99 khoảng trống. Đặt một cách bất kì 3 vạch vào 3 trong số 99 khoảng trống đó, ta được một cách chia 100 đồ vật ra thành 4 phần để lần lượt gán cho 4 người. Khi đó mỗi người được ít nhất một đồ vật và tổng số đồ vật của 4 người bằng 100, thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

Vậy số cách chia là $C_{99}^3 = 156849$ (cách). □

Lưu ý. Bằng cách giải tương tự như trên, ta có thể chứng minh rằng, phương trình

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = m \qquad (1)$$

có tính chất :

- Với $1 \le n \le m; m, n \in \mathbb{N}$ thì số nghiệm của phương trình (1) trong tập hợp các số nguyên dương là C_{m-1}^{n-1}.
- Với $n \ge 1; m, n \in \mathbb{N}$ thì số nghiệm của phương trình (1) trong tập hợp các số tự nhiên là C_{m+n-1}^{n-1}.

Hướng dẫn giải. Trong phương trình (1) đặt $y_i = x_i + 1$ với i = 1, 2, ..., n ta chuyển về phương trình $y_1 + y_2 + ... + y_n = m + n$ với $y_i \ge 1$, rồi áp dụng kết quả nêu trên.

★**Thí dụ 6.** *Có bao nhiêu cách chia* 8 *đồ vật đôi một khác nhau cho ba người sao cho có một người được* 2 *đồ vật và hai người còn lại, mỗi người được* 3 *đồ vật?*

Lời giải. Giả sử có ba người là A, B, C.

- Với cách chọn người A được hai đồ vật, ta có : Số cách chọn 2 trong 8 đồ vật cho người A được 2 đồ vật là C_8^2; sau đó, số cách chọn 3 trong 6 đồ vật còn lại cho người B được 3 đồ vật là C_6^3; 3 đồ vật còn lại dành cho người C.

Chú ý rằng đổi thứ tự người B và người C không cho cách chọn mới.

• Lần lượt cho người B, người C được hai đồ vật thì theo quy tắc nhân, số cách chia phải tìm là $3.C_8^2C_6^3 = 1680$ (cách). □

Lưu ý. Khi giải bài toán trên, nhiều bạn cho đáp số sai là $C_8^2C_6^3$ hoặc $3!C_8^2C_6^3$.

Trường hợp thứ nhất, bạn đã coi vai trò của người được 2 đồ vật và người được 3 đồ vật như nhau(!). Trường hợp thứ hai, bạn đã coi vai trò của hai người cùng được 3 đồ vật khác nhau(!).

BÀI TẬP (trắc nghiệm)

Hãy khoanh tròn vào các câu trả lời đúng với các bài tập sau:

Bài 1. Phương trình $x + y + z = 100$ có bao nhiêu nghiệm trong tập hợp các số tự nhiên?

A. $C_{99}^2 = 4851$ B. $C_{101}^2 = 5050$

C. $C_{102}^2 = 5151$ D. $C_{103}^2 = 5253$.

Bài 2. Đem chia hết 10 đồ vật đôi một khác nhau cho hai người, sao cho mỗi người được ít nhất 1 đồ vật. Hỏi số cách chia?

A. C_{10}^2 B. $2^{10} - 1$

C. 2^{10} D. $2^{10} - 2$.

Bài 3. Có 5 cuốn sách Toán giống nhau, 7 cuốn sách Lí giống nhau và 8 cuốn sách Hóa giống nhau. Đem làm giải thưởng cho 10 học sinh, mỗi người được 2 cuốn sách khác loại. Tính số cách nhận giải thưởng của 10 học sinh trên.

A. 1310 B. 2520

C. 417 D. 2085.

Bài 4. Có 5 cuốn sách giáo khoa giống nhau và 3 cuốn sách tham khảo đôi một khác nhau. Đem làm giải thưởng cho 7 học sinh, mỗi người được 1 cuốn sách. Tính số cách nhận giải thưởng của của các học sinh trên.

A. 336 B. 274

C. 246 D. 546.

Bài 5. Có bao nhiêu cách chia 6 người ra thành 3 nhóm, mỗi nhóm 2 người, trong các trường hợp sau:

a) Phân biệt thứ tự các nhóm là: nhóm 1, nhóm 2, nhóm 3.

A. $C_6^2C_4^2 = 90$ B. $3!C_6^2C_4^2 = 540$

C. $\dfrac{C_6^2C_4^2}{3!} = 15$ D. $3.C_6^2C_4^2 = 270$.

b) Không biệt thứ tự của các nhóm.

A. $C_6^2C_4^2 = 90$ B. $3!C_6^2C_4^2 = 540$

C. $\dfrac{C_6^2C_4^2}{3!} = 15$ D. $3.C_6^2C_4^2 = 270$.

Bài 6. Có bao nhiêu cách chia 6 đồ vật đôi một khác nhau cho 3 người sao cho mỗi người được ít nhất một đồ vật?

A. 360 B. 495

C. 540 D. 600.

MỘT BÀI TOÁN VỀ PHÂN HOẠCH MỘT TẬP HỢP

TRẦN TUYẾT THANH
(Học viện Phòng không Không quân Sơn Tây, Hà Nội)

Trước hết ta hãy bắt đầu bằng bài toán đơn giản của sách giáo khoa *Giải tích 12* (sách chỉnh lí hợp nhất năm 2000).

✪Bài toán 1. (Bài tập 17 phần b, trang 169 – Giải tích 12).

Có bao nhiêu cách phân phối 5 đồ vật khác nhau cho 3 người, sao cho mỗi người nhận được ít nhất một đồ vật ?

Lời giải của bài toán này đã được trình bày trong cuốn sách *Bài tập Giải tích 12* theo ý tưởng xét các khả năng phân tích số tự nhiên 5 thành tổng của ba số nguyên dương :

$5 = 1 + 1 + 3 = 1 + 2 + 2 = 1 + 3 + 1$

$= 2 + 1 + 2 = 2 + 2 + 1 = 3 + 1 + 1.$

Ứng với mỗi khả năng trên tìm số cách chia tương ứng và theo nguyên lí cộng ta được số cách chia theo yêu cầu bài toán là 150.

Phân tích lời giải. Lời giải theo ý tưởng trên thực hiện sẽ khá phức tạp khi số đồ vật cho trước là khá lớn và số người được chia cũng khá lớn. Bài viết này xin được trình bày phương pháp giải bài toán tổng quát của bài toán 1.

✪**Bài toán 2.** *Có bao nhiêu cách phân phối n đồ vật khác nhau cho k người sao cho mỗi người nhận được ít nhất một đồ vật ($n, k \in \mathbb{N}^+$)?*

Để giải quyết Bài toán 2 chúng ta cần một số kiến thức bổ sung về sự phân hoạch một tập hợp.

1. Các khái niệm

Các tập hợp *khác rỗng* $A_1, A_2, ..., A_k$ được gọi là *một phân hoạch* của tập hợp A nếu :

$$\begin{cases} A = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k \\ A_i \cap A_j = \varnothing \ \forall i, j \in \{1, 2, ..., k\}, i \neq j. \end{cases}$$

Mỗi tập con A_i ($i = 1, 2, ..., k$) được gọi là *một thành phần* của phân hoạch.

Kí hiệu $|A|$ là số các phần tử của tập hợp A (lực lượng của tập A) và $S(n, k)$ là số tất cả các phân hoạch của tập A gồm n phần tử thành k tập khác rỗng với các số n, k nguyên dương và $k \leq n$.

Dễ thấy $S(n, 1) = S(n, n) = 1$.

2. Công thức truy hồi của S(n, k)

Chứng minh rằng $S(n, k)$ thỏa mãn hệ thức sau :

$$S(n + 1, k) = k.S(n, k) + S(n, k - 1) \quad (1)$$

với $k \leq n$.

Lời giải. Giả sử A là tập hợp với $|A| = n + 1$; $A = \{a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1}\}$. Gọi P là tập tất cả các phân hoạch của tập A thành k tập khác rỗng thì ta có

$$|P| = S(n + 1, k) \quad (2)$$

• P_1 là tập tất cả các phân hoạch của tập A thành k thành phần khác rỗng sao cho $\{a_{n+1}\}$ là một thành phần của phân hoạch đó.

• P_2 là tập tất cả các phân hoạch của tập A thành k thành phần khác rỗng sao cho $\{a_{n+1}\}$ không là một thành phần của các phân hoạch đó. Khi đó $\begin{cases} P = P_1 \cup P_2 \\ P_1 \cap P_2 = \varnothing. \end{cases}$

• Tính $|P_1|$:

Vì $\{a_{n+1}\}$ là một thành phần của mỗi phân hoạch trong P_1, nên mỗi phân hoạch trong P_1 tương ứng với đúng một phân hoạch của tập $A \setminus \{a_{n+1}\} = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ thành $k - 1$ thành phần khác rỗng, do đó

$$|P_1| = S(n, k - 1) \quad (3)$$

• Tính $|P_2|$:

Xét một phân hoạch nào đó của P_2, chẳng hạn $\alpha = \{A_1, A_2, ...A_k\}$ với $a_{n+1} \in A_1$. Khi đó $A_1 \setminus \{a_{n+1}\} \neq \varnothing$ do $\{a_{n+1}\}$ không là một thành phần trong phân hoạch của P_2. Vì vậy $\alpha_1 = \{A_1 \setminus \{a_{n+1}\}, A_2, ... A_k\}$ tạo thành một phân hoạch gồm k thành phần khác rỗng của tập $A \setminus \{a_{n+1}\}$. Xét tương tự khi $a_{n+1} \in A_i$ ($i = 2, 3, ..., k$).

Ngược lại nếu $\beta = \{B_1, B_2, ... B_k\}$ là một phân hoạch của tập $A \setminus \{a_{n+1}\}$ thành k thành phần khác rỗng thì :

$$\begin{cases} \beta_1 = \{B_1 \cup \{a_{n+1}\}, B_2, ..., B_k\} \\ \beta_2 = \{B_1, B_2 \cup \{a_{n+1}\}, ..., B_k\} \\ ... \\ \beta_k = \{B_1, B_2, ..., B_k \cup \{a_{n+1}\}\} \end{cases}$$

là các phân hoạch của tập A thành k thành phần trong P_2 và do vậy ta có

$$|P_2| = k.S(n, k) \qquad (4)$$

Từ (2), (3), (4) và theo nguyên lí cộng $|P| = |P_1| + |P_2|$ ta có

$$S(n+1, k) = k.S(n, k) + S(n, k-1).$$

Công thức được chứng minh. □

Trở lại bài toán 2, ta thấy phép chia theo yêu cầu bài toán là một phép chọn qua hai bước :

Bước 1. Số cách chia n đồ vật khác nhau thành k phần sao cho mỗi phần có ít nhất một đồ vật, chính là số tất cả các phân hoạch của tập A gồm n phần tử thành k tập khác rỗng, theo định nghĩa ở trên số cách chia của bước này là $S(n, k)$.

Bước 2. Vì mỗi thành phần đem phân phối cho người khác nhau thì coi là khác nhau nên ứng với mỗi cách chia ở bước thứ nhất ta đem hoán vị các phần cho nhau thì được $k!$ cách phân phối đồ vật cho k người.

Theo nguyên lí nhân suy ra số cách chia của bài toán 2 là $k!S(n, k)$.

3. Tính giá trị S(n, k)

Từ $S(n, 1) = S(n, n) = 1$ và từ công thức truy hồi của $S(n, k)$ ta thấy $S(n, k)$ có những tính chất giống như đối với công thức tổ hợp C_n^k nên ta cũng xây dựng được tam giác số để tìm giá trị của $S(n, k)$ $(1 \le k \le n)$ tương tự như tam giác số Pascal đối với C_n^k. Trong bảng dưới đây dòng thứ n là dãy số

$$S(n, 1), S(n, 2), ..., ..., S(n, n-1), S(n, n)$$

1					
1	1				
1	3	1			
1	7	6	1		
1	15	25	10	1	
1	31	90	65	15	1

Nhìn vào bảng giá trị của $S(n, k)$ ta thấy $S(5, 3) = 25$, vì vậy số cách chia của bài toán 1 là

$$3!S(5, 3) = 6.25 = 150 \text{ (cách)}.$$

Cuối cùng để giải quyết trọn vẹn vấn đề đã đặt ra, ta tìm công thức tổng quát của $S(n, k)$ tính theo n và k.

4. Công thức tổng quát của S(n, k)

Chứng minh rằng

$$S(n, k) = \frac{1}{k!}\sum_{j=1}^{k}(-1)^{k-j}\, C_k^j . j^n \qquad (5)$$

với các số nguyên dương n, k và $k \le n$.

Lời giải. Chứng minh quy nạp theo n.

- Với $n = 1$ thì $k = 1$ và có $S(1, 1) = (-1)^0.1 = 1$ đúng theo định nghĩa.
- Giả sử công thức (5) được chứng minh đúng cho n và mọi số nguyên dương $k \le n$. Ta cần chứng minh công thức (5) cũng đúng cho $n + 1$ và mọi số nguyên dương $k \le n + 1$.

Ta chứng minh với $k \le n$ thì

$$S(n+1, k) = \frac{1}{k!}\sum_{j=1}^{k}(-1)^{k-j}\, C_k^j . j^{n+1} \qquad (6)$$

Thật vậy áp dụng bổ đề và với $k \le n$ ta có

$$S(n+1, k) = k.S(n, k) + S(n, k-1)$$

$$= k\,\frac{1}{k!}\sum_{j=1}^{k}(-1)^{k-j}\, C_k^j\, j^n +$$

$$+ \frac{1}{(k-1)!}\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^{k-1-j}\, C_{k-1}^j\, j^n$$

$$= \frac{1}{k!}\left(k\sum_{j=1}^{k}(-1)^{k-j}\, C_k^j\, j^n\right.$$

$$\left. + k\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^{k-1-j}\, C_{k-1}^j\, j^n\right)$$

$$= \frac{1}{k!}\left(k\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^{k-j}\, j^n.\left(C_k^j - C_{k-1}^j\right)\right.$$

$$\left. + (-1)^{k-k}\, C_k^k\, k^{n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{k!}\left(k\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^{k-j}C_{k-1}^{j-1}j^n + (-1)^{k-k}C_k^k k^{n+1}\right)$$

$$(\text{do } C_k^j = C_{k-1}^j + C_{k-1}^{j-1})$$

$$= \frac{1}{k!}\left(\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^{k-j}\left(\frac{k}{j}C_{k-1}^{j-1}\right)j^{n+1} + (-1)^{k-k}C_k^k k^{n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{k!}\left(\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^{k-j}C_k^j j^{n+1} + (-1)^{k-k}C_k^k k^{n+1}\right)$$

$$(\text{do } kC_{k-1}^{j-1} = jC_k^j)$$

$$= \frac{1}{k!}\sum_{j=1}^{k}(-1)^{k-j}C_k^j j^{n+1}.$$

Vậy (6) được chứng minh.

Với $k = n + 1$ ta còn cần chứng minh :

$$1 = S(n+1, n+1)$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\sum_{j=1}^{n+1}(-1)^{n+1-j}C_{n+1}^j.j^{n+1} \quad (7)$$

Từ (6), (7) theo nguyên lí quy nạp toán học với các số nguyên dương k, n mà $k \le n$ có

$$S(n,k) = \frac{1}{k!}\sum_{j=1}^{k}(-1)^{k-j}C_k^j j^n.$$

Các công thức tính số phân hoạch của một tập hợp $S(n, k)$ sẽ còn giúp ích cho các bạn giải nhiều bài toán tổ hợp khác.

VỀ VIỆC CHỨNG MINH CÔNG THỨC SỐ CÁC PHÂN HOẠCH CỦA MỘT TẬP HỢP

LA VĂN THỊNH
(K49, AIT, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

Trong bài viết *Một bài toán về phân hoạch một tập hợp* của tác giả *Trần Tuyết Thanh* ở trên có nêu công thức của $S(n, k)$ là số tất cả các phân hoạch của tập hợp A gồm n phần tử thành k tập khác rỗng với k, n nguyên và $n \ge k > 0$. Khi nêu công thức còn hệ thức (7) chưa được chứng minh (với $n \ge 1$ bất kì) như sau :

$$\frac{1}{(n+1)!}\sum_{j=1}^{n+1}(-1)^{n+1-j}.C_{n+1}^j.j^{n+1} = 1$$

Dưới đây là chứng minh của tôi cho công thức trên.

Trước hết, ta phân tích đa thức

$$P(x) = \frac{x^n}{(x-1)(x-2)...(x-(n+1))}$$

thành tổng các đa thức có dạng $\frac{a_i}{x-i}$, với a_i là hằng số, $i = 1, 2, ..., n + 1$. Tức là :

$$P(x) = \frac{a_1}{x-1} + \frac{a_2}{x-2} + ... + \frac{a_{n+1}}{x-(n+1)}.$$

Quy đồng vế phải và đồng nhất các hệ số ở hai vế ta được

$$x^n = a_1(x-2)...(x-n-1) + ...$$

$$+ a_j(x-1)...(x-j+1)(x-j-1)...(x-n-1) + ...$$

$$+ a_{n+1}(x-1)...(x-n) \quad (*)$$

$$\Rightarrow a_1 + a_2 + ... + a_{n+1} = 1 \quad (**)$$

Cho $x = j$, $j = 1, 2, \ldots, n+1$ trong (*) ta được

$$j^{n+1} = j.a_j(j-1)(j-2)\ldots 1(-1)\ldots(j-(n+1))$$

$$= a_j(j(j-1)\ldots 1)((n+1)-j)(n-j)\ldots 1)(-1)^{n+1-j}$$

$$= (-1)^{n+1-j}.a_j.(j!)((n+1)-j)!$$

$$\Rightarrow \frac{(-1)^{n+1-j}.C_{n+1}^j.j^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{(-1)^{n+1-j}.j^{n+1}}{j!((n+1)-j)!} = a_j.$$

Từ đó và từ (**) có

$$\frac{1}{(n+1)!}\sum_{j=1}^{n+1}(-1)^{n+1-j}.C_{n+1}^j j^{n+1} = \sum_{j=1}^{n+1} a_j = 1.$$

Vậy công thức (7) được chứng minh.

Như vậy công thức

$$S(n, k) = \frac{1}{k!}\sum_{j=1}^{k}(-1)^{k-j} C_k^j . j^n$$

được chứng minh trọn vẹn. ❐