Mình lập topic này để trao đổi kinh nghiệm sử dụng CASIO trong việc giải toán và nhiều ứng dụng khác trong việc giải nhanh các bài tập Lý, Hóa ! Do những thủ thuật này đã có nhiều trong diễn đàn, trong internet hay phương tiện đại chúng khác nhưng mình sẽ tổng hợp chúng vào topic này...

Và bạn sẽ ngỡ ngàng vì những thủ thuật mà bạn chưa biết ...

(Có lẽ đây sẽ là bài post về kinh nghiệm học tập cuối cùng của mình)

CÁC THỦ THUẬT CASIO

(Bùi Thế Việt, 10 Toán 2, THPT Chuyên Thái Bình, Thái Bình)

Thủ thuật 1: Khai triển đa thức hệ số nguyên hoặc hệ số là phân số nhỏ

(Cái này áp dụng rất nhiều trong việc giải toán)

a) Hệ số nguyên

Nội dung: Ta nên nhớ một điều như sau:

Giả sử khi khai triển đa thức thì đa thức có dạng: $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$

Tại $x = 10$ thì đa thức có giá trị là $\overline{a_na_{n-1}...a_1a_0}$

Tại $x = 100$ thì đa thức có giá trị là $\overline{a_n0a_{n-1}0...0a_10a_0}$

Tại $x = 1000$ thì đa thức có giá trị là $\overline{a_n00a_{n-1}00...00a_100a_0}$ ...

Chắc bạn sẽ khó hiểu về cái này ! Nhưng hãy ấn phím trên CASIO và làm theo các bước sau là bạn sẽ hiểu ngay:

Bước 1: Nhập đa thức :$9X^3 + 2X^2 + 7X + 1$

Bước 2: Ấn CALC, máy hỏi X?

Bước 3: Nhập 10 và ấn nút =. Bạn sẽ thấy kết quả là 9271. Ấn tiếp "=", máy hỏi X?

Bước 4: Nhập 100 và ấn nút =. Bạn sẽ thấy kết quả là 9020701. Ấn tiếp "=", máy hỏi X?

Bước 5: Nhập 1000 và ấn nút =. Bạn sẽ thấy kết quả là 9002007001

Vậy chắc bạn đã hiểu, nếu không hiểu Comment bên dưới

Nhưng nếu những hệ số là số nguyên âm thì sao ? Lại tìm hiểu tiếp nhé !

Bước 1: Nhập đa thức :$9X^3 - 2X^2 - 7X + 1$

Bước 2: Ấn CALC, máy hỏi X?

Bước 3: Nhập 10 và ấn nút =. Bạn sẽ thấy kết quả là 8731. Ấn tiếp "=", máy hỏi X?

Bước 4: Nhập 100 và ấn nút =. Bạn sẽ thấy kết quả là 8979301. Ấn tiếp "=", máy hỏi X?

Bước 5: Nhập 1000 và ấn nút =. Bạn sẽ thấy kết quả là 8997993001. Ấn tiếp "=", máy hỏi X?

Bước 6: Nhập 10000 và ấn nút =. Bạn sẽ thấy kết quả là 8999799930001

Nhận xét: Nếu số bạn nhập là 10^x (tức là số $\overline{100...0}$ với x số 0), hãy chia kết quả thành các khoảng x chữ số từ phải sang trái.

VD: 8997993001 thì là 8|997|993|001 hoặc 8999799930001 thì là 8|9997|9993|0001

Gọi giá trị khoảng thứ t ($t \leq n$) là k_t thì ta có:

+ Nếu k có nhiều số 9 thì hệ số $a_t = 10^x - k_t$

+ Nếu k có nhiều số 0 thì hệ số $a_t = k_t$

P/s: Mình nói hơi khó hiểu và lòng vòng, tốt nhất là nên đọc luôn cách làm bên dưới:

Cách làm:

Cách 1: (Chỉ áp dụng cho các bài có hệ số ≤ 3).

VD cần khai triển $2(x + 1)^2(x - 1) - 7(x^2 + 1) - 8$

Bước 1: Nhập đa thức ẩn X với các hệ số nguyên và không quá cồng kềnh.

(VD $2(X+1)^2(X-1)-7(X^2+1)-8$)

Bước 2: Ấn CALC, máy hỏi X?, Ấn 1000 và ấn =

Bước 3: Máy hiện ra kết quả là một số có nhiều chữ số, tách ra từng 3 chữ số một từ phải sang trái

(VD: Máy hiện 1994997983 thì ta tách 1|994|997|983)

Bước 4: Ta lần lượt tìm hệ số $a_0, a_1, ...$ bằng cách sau:

Nhóm 3 chữ số thứ k (tính từ phải sang trái) có giá trị là M_k, chữ số hàng trăm của M_k là số 9 thì chứng tỏ hệ số của x^k sẽ là $M_k - 1000$ (số âm), và giá trị của nhóm thứ $k+1$ sẽ có giá trị là $M_{k+1}+1$ (tăng thêm 1)

Nhóm 3 chữ số thứ k (tính từ phải sang trái) có giá trị là M_k, chữ số hàng trăm của M_k là số 0 thì chứng tỏ hệ số của x^k sẽ là M_k (số dương)

(VD: Nhóm 1: |983| thì hệ số a_0 là -17 và thêm 1 vào nhóm 2

Nhóm 2: |997| thì hệ số a_1 là $-3+1=-2$ và thêm 1 vào nhóm 3

Nhóm 3: |994| thì hệ số a_2 là $-6+1=-5$ và thêm 1 vào nhóm 4

Nhóm 4: |001| thì hệ số a_3 là $1+1=2$)

Bước 5: Điền kết quả: $2(x+1)^2(x-1)-7(x^2+1)-8 = 2x^3-5x^2-2x-17$

Bước 6: Thử lại cho chắc ăn !

(Ấn $2(x+1)^2(x-1)-7(x^2+1)-8-(2x^3-5x^2-2x-17)$, gán giá trị $x=1,2,3,4,...$ mà thấy kết quả luôn =0 thì chắc là chính xác)

Nhận xét: Cách này không hay lắm, nếu làm quen thì chắc nhìn hệ số các nhóm là sẽ biết được ngày kết quả triển.

Cách 2: Áp dụng cho bậc cao, hệ số nguyên (Bậc cũng đừng cao quá, hì hì)

VD cần khai triển $2(x+1)^3(x-1)^2-7(x^2+1)^2-8$

Bước 1: Gán giá trị $x=1000$ hoặc 10000 nếu thích.

(Tại $x=1000$ thì kết quả là $1,994995982\text{x}10^{15}$)

Bước 2: Nhìn vào giá trị sau dấu phẩy, xem xét số bên cạnh nó ! Nếu số bên cạnh là 9 thì hệ số bậc cao nhất là hệ số sau dấu phẩy công 1, nếu là số 0 thì dữ nguyên.

(Sau dấu phẩy là số 1, cạnh nó là số 9, suy ra hệ số bậc cao nhất (bậc 5) là 2)

Bước 3: Viết lại đa thức, sau đó trừ đi bậc cao nhất vừa tìm.

($2(x+1)^3(x-1)^2-7(x^2+1)^2-8-2x^5$)

Bước 4: Cho $x=1000$ thì kết quả là bậc đa thức sẽ giảm, tiếp tục làm như bước 2

(Tại $x=1000$ thì giá trị nhân được là $-5,004017998\text{x}10^{12}$. Do đó bậc hạ từ 15 xuống 12 nên đa thức có hệ số bậc 4 khác 0.

Sau dấu phẩy là số -5, cạnh nó là số 0 nên hệ số bậc 4 là -5

Ấn tiếp $2(x+1)^3(x-1)^2-7(x^2+1)^2-8-2x^5+5x^4$

Gán $x=100$ thì kết quả là -4179813, tách thành $-4|17|98|13|$ ta được hệ số bậc 3 là -4, hệ số bậc 2 là -18, hệ số bậc nhất là 2, hệ số tự do là -13)

Bước 5: Ghi kết quả: $2(x+1)^3(x-1)^2-7(x^2+1)^2-8 = 2x^5-5x^4-4x^3-18x^2+2x-13$

Bước 6: Thử lại

Nhận xét: Làm nhiều mới quen, chứ cái này khó nói lắm. Cũng hay chứ nhỉ ?

b) Hệ số là phân số:

Bước 1: Tìm ước chung lớn nhất các mẫu mà ta dự đoán chúng sẽ góp mặt trong hệ số sau khi phân tích

Bước 2: Viết đa thức, có cả phân số, tất cả đa thức nhân với ước chung lớn nhất vừa tìm được

Bước 3: Làm như phần a)

P/s: Ai không hiểu cứ comment

Thủ thuật 2: Phân tích phương trình bậc 4 thành nhân tử (Cái này mình post lại)

Đối với phương trình bậc 4 dạng $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ ta chia làm 2 mảng lớn:

*** Đầu tiên là phương trình $f(x)$ có nghiệm, ta xét:

- Nếu trong trường hợp bạn phải đi thi, kiểm tra thì bạn nên sử dụng máy tính CASIO fx mà giải nhé, sau đây là hướng dẫn giải phương trình bậc 4 bằng Casio :

+Trường hợp 1: Bạn lấy máy tính, viết phương trình bậc 4 của bạn vào, ấn Shift + Solve và sau đó ấn "=" để giải phương trình bậc 4 đó:

@@1: Nếu máy tính hiện ra $X =$ một số nguyên cụ thể nào đó hoặc là số vô hạn có tuần hoàn (VD:1,3333333...)

thì bạn ấn AC, sau đó ấn RCL + X thì máy sẽ hiện lên chính xác nghiệm đó của bạn (số nguyên hoặc phân số tối giản).

Khi đó $f(x)$ có một nhân tử là $(x - X)$ (với X là nghiệm bạn vừa tính được).

Sau đó bạn sẽ phân tích thành $(x - X)(mx^3 + nx^2 + px + q)$.

Khi đó dùng máy tính để giải nghiệm phương trình bậc 3 nhé bằng cách vào Mode Mode Mode 1 rồi lần lượt ghi hệ số của nó vào nhé.

Từ đó bạn nhận được tất cả các nghiệm của $f(x)$ gồm X và 3 ngiệm của phương trình bậc 3 đó. . .

@@2: Nếu máy tính hiên ra $X =$ một số vô hạn không tuần hoàn, bạn chuyển sang Trường hợp 2(Cái này mới khó)

+Trường hợp 2:(Cái này là công thức bí mật đấy):

Khi tìm được 1 nghiệm của phương trình bậc 4 đó, bạn chuyển dữ liệu sang A bằng cách ấn Alpha X Shift Sto A

Sau đó bạn viết lại phương trình bậc 4 đó, Ấn Shift + Solve, máy hiện tiếp $X?$ bạn nhập 100 vào, ấn "=", ấn "=" để giải.

Khi đó máy sẽ tính một nghiệm nữa khác với nghiệm ban đầu.

Bạn chuyển dữ liệu nghiệm vừa tìm được sang B bằng cách ấn Alpha X Shift Sto B.

Sau đó bạn viết lại phương trình bậc 4 đó, Ấn Shift + Solve, máy hiện tiếp $X?$ bạn nhập -100 vào, ấn "=", ấn "=" để giải.

Khi đó máy sẽ tính một nghiệm nữa khác với nghiệm ban đầu.

Bạn chuyển dữ liệu nghiệm vừa tìm được sang C bằng cách ấn Alpha X Shift Sto C (Thế là đủ).

Cái này là xong nè: Ấn Alpha A + Alpha B rồi "=", nếu kết quả là số nguyên hoặc phân số thì bạn ấn tiếp Alpha A Alpha B rồi "=" để tính được tích của 2 số đó.

Khi ấy áp dụng định lý Viét đảo ta được $f(x)$ có một nhân tử là $x^2 - (A + B)x + AB$ (Hay chưa).

Còn nếu A+B không là số nguyên hoặc số vô hạn có tuần hoàn (Tức là phân số ấy) thì Bạn làm tương tự với tổng B+C, C+A từ đó tìm được nhân tử của $f(x)$

Nói không bằng làm, bạn hãy làm theo ví dụ sau, chắc bạn sẽ hiểu:

$x^4 + 3x^3 - 4x^2 - 11x + 5 = 0$

Ta ấn phím trên máy tính CASIO như sau:

Viết PT $x^4 + 3x^3 - 4x^2 - 11x + 5 = 0$ trên máy tính CASIO fx-570MS hoặc fx-570ES . Ấn shift + SOLVE

Máy hỏi X?

Ấn 10 = (Nếu là máy fx-570ES thì không cần làm tiếp, đối với máy fx-570MS thì ấn tiếp Shift SOLVE)

Sau một hồi, máy hiện X=1,791287847

Ấn AC,

Ấn Alpha X Shift STO A

———————————————————- Viết lại phương trình : $x^4 + 3x^3 - 4x^2 - 11x + 5 = 0$

Ấn shift + SOLVE

Máy hỏi X?

Ấn -10 = (Nếu là máy fx-570ES thì không cần làm tiếp, đối với máy fx-570MS thì ấn tiếp Shift SOLVE)

Sau một hồi, máy hiện X= - 2,791287847

Ấn AC,

Ấn Alpha X Shift STO B

Viết lại phương trình : $x^4 + 3x^3 - 4x^2 - 11x + 5 = 0$

Ấn shift + SOLVE

Máy hỏi X?

Ấn -1 = (Nếu là máy fx-570ES thì không cần làm tiếp, đối với máy fx-570MS thì ấn tiếp Shift SOLVE)

Sau một hồi, máy hiện X= 0,4142135624

Ấn AC,

Ấn Alpha X Shift STO C

Nhận xét: Ấn Alpha B + Alpha C =

Máy hiện : -2,377074285

Ấn Alpha C + Alpha A =

Máy hiện : 2,20550141

Ấn Alpha A + Alpha B =

Máy hiện : -1

Chứng tỏ trong các tổng A+B, B+C, C+A thì chỉ thấy A+B nguyên (hoặc là một số vô hạn tuần hoàn)

Ấp tiếp Alpha A x Alpha B =

Máy hiện : -5

Chứng tỏ A, B là nghiệm của phương trình bậc 2 ẩn x : $x^2 - (A + B)x + AB = 0$

Mà A+B= -1, A.B= -5

Suy ra A, B là nghiệm của phương trình $x^2 + x - 5 = 0$

Mà A, B cũng là nghiệm của phương trình: $x^4 + 3x^3 - 4x^2 - 11x + 5 = 0$

Suy ra $x^4 + 3x^3 - 4x^2 - 11x + 5$ khi phân tích nhân tử có một nhân tử là $x^2 + x - 5$

Suy ra $x^4+3x^3-4x^2-11x+5=(x^2+x-5)(ax^2+bx+c)$

Từ đó ta phân tích thành nhân tử được

Bài tập áp dụng: $x^4+3\,x^3-4\,x^2-11\,x+5=0$

$x^4+12\,x^3+21\,x^2-24\,x+5=0$

$x^4-6\,x^3-132\,x^2+885\,x+500=0$

$10\,x^4+27\,x^3-16\,x^2-45\,x+28=0$

$10\,x^4+27\,x^3+245\,x^2+306\,x+1288=0$

$x^4+9\,x^3+20\,x^2+9\,x+1=0$

Thủ thuật 3: Phân tích đa thức bậc cao thành nhân tử (Tổng quát của thủ thuật 2)

Nhận xét: Đôi khi ta thấy những bài phương trình vô tỷ mà chỉ cần nhìn là thấy bình phương lên ra phương trình bậc cao cho nó lành (= Bước đường cùng - Nguyễn Công Hoan) nhưng chính việc khai triển nó, phân tích thành nhân tử khiến chúng ta nản. Nhưng phương pháp sau đây sẽ giúp ích phần nào điều đó.

Nội dung: Trước tiên, cần xác định bậc của đa thức, để khi phân tích thành nhân tử ta sẽ kiểm tra xem có thiếu nhân tử nào không ! VD: $(x^2+1)^2(x^2+5x+4)-21x^3-36x^2-7x+2$ có bậc là 6 Sau đó, xác định khoảng chứa nghiệm của phương trình, giống như phương trình bậc 4

Cách làm: Cách 1: Áp dụng cho những bài mà nhân tử của nó là đa thức bậc <3

Bước 1: Nhập đa thức: $(x^2+1)^2(x^2+5x+4)-21x^3-36x^2-7x+2$

Bước 2: Giải nghiệm phương trình, cho X là điểm giữa khoảng nghiệm VD: $0.414213562, -2.41421356$

Bước 3: Cố tìm xem các nghiệm ấy là nghiệm của phương trình bậc 2 hay bậc 3 nào ? VD: $x^2-x-1=0$ và $x^2+2x-1=0$

Bước 4: Viết luôn ra vở rằng PT tương đương với $(x^2-x-1)(x^2+2x-1)(...)$ với ... là một tam thức bậc 2 có dạng ax^2+bx+c. Quan trọng bây giờ là tìm a,b,c

Bước 5: Vì hệ số bậc cao nhất phương trình bậc 6 là 1 nên $a=1$, hệ số tự do bằng 6 nên $c=6$

Bước 6: Viết ra máy tính như sau: $(x^2+1)^2(x^2+5x+4)-21x^3-36x^2-7x+2-(x^2-x-1)(x^2+2x-1)(x^2+Ax+6), A$

Bước 7: Ấn Shift + Solve để giải phương trình trên theo A. Đầu tiên cho $X=1,2,3,...$ mà khi giải, ta luôn được $A=4$, do đó $b=4$

Bước 8: Viết tiếp (x^2+4x+6)

Bước 9: Thử lại

Nhận xét: Cách này hơi hạn chế

Cách 2: (Một số bài toán khi bình phương để giải phương trình bậc cao, lại ra một tam thức bậc 2 nhân với một đa thức bậc 4 hoặc bậc 3, cách này vẫn gần giống cách 1 nhưng nó giúp chúng ta tìm được nhân tử phương trình còn lại. Cách này áp dụng thủ thuật 1.)

VD: Giải phương trình $(x^2+1)^2(x^2+5x+4)-21x^3-26x^2-17x-8=0$

Bước 1: Tìm các nghiệm phương trình, thấy phương trình có đúng 2 nghiệm và từ đó ta có nhân tử (x^2-x-1) (Như cách 1)

Bước 2: Ta sẽ tìm nốt nhân tử bậc 4 còn lại, cách làm như sau:

Viết lên máy tính: $\dfrac{(x^2+1)^2(x^2+5x+4)-21x^3-26x^2-17x-8}{x^2-x-1}$

Bước 3: Cho $x=1000$ thì ta được kết quả là $1,006013008\text{x}10^{12}$

Chứng tỏ hệ số bậc 4 là 1

Bước 4: Viết tiếp $\dfrac{(x^2+1)^2(x^2+5x+4)-21x^3-26x^2-17x-8}{x^2-x-1}-x^4$

Cho $x=1000$ ta được 6013008004 nên ta được phương trình bậc 4 là: $x^4+6x^3+13x^2+8x+4$

Bước 5: Viết : $(x^2-x-1)(x^4+6x^3+13x^2+8x+4)=0$

Bước 6: Chứng minh phương trình bậc 4 kia vô nghiệm (Xem thủ thuật 4)

Bước 7: Kết luận (Cái này nhiều người thiếu)

Nhận xét: Thủ thuật này làm mất đi trí óc, tư duy con người nên không khuyến cáo dùng cách này...

Thủ thuật 4: Chứng minh phương trình bậc 4 vô nghiệm: (Post lại bài mình đã post)

Thêm một phương pháp "tủ" của mình, đó là cách chứng minh phương trình bậc 4 vô nghiệm ! (Ai không hiểu gì cứ pmmmm nha, nhưng cũng hơi đau đầu đấy)

Xét PT $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ với $d>0$ và a,b,c là các hệ số.

Khi bạn giải mãi cái này mà không ra nghiệm (Can't solve), bạn hãy chứng minh phương trình vô nghiệm

Ví dụ 1: Giải phương trình: $x^4-6x^3+16x^2-22x+16=0$

Cách 1: Cách ăn may: đó chính là $f(x)$ phân tích thành 2 cái bậc 2 cộng với một hệ số tự do không âm, giống như $f(x)=x^4-6x^3+16x^2-22x+16$

Khi đó $f(x)=(x^2-2x+3)(x^2-4x+5)+1>0$

[?] Vậy tại sao lại có thể phân tích thành cái này, đó là câu hỏi khó ?

Cách làm ở đây là đặt $f(x)=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)+e$

Suy ra $f(x)=x^4+(a+c)x^3+(d+ac+b)x^2+(bc+ad)x+bd+e$

Đồng nhất với đa thức ban đầu là $f(x)=x^4-6x^3+16x^2-22x+16$

Ta có:

$$\begin{cases} a+c=-4 \\ d+ac+b=16 \\ bc+ad=-22 \\ bd+e=16 \end{cases}$$

Từ đó dễ dàng suy ra $a=-2,\ b=3,\ c=-4,\ d=5,\ e=1$ nhờ phương pháp mò (Vì đây là cách ăn may mà)

Cách 2: (Cách này ảo nhất, bây giờ tui mới phát hiện ra)

Cũng từ: $A=f(x)=x^4-6x^3+16x^2-22x+16$

Ta sẽ chứng minh $f(x)>0$ bằng cách đặt $x=y-\frac{a}{4}$, để mất đi hệ số của y^3

Đặt $x=y+\frac{3}{2}$

Biểu thức đã cho trở thành:

$$A=y^4+\frac{5y^2}{2}-y+\frac{61}{16}=y^4-2my^2+m^2+(2m+\frac{5}{2})y^2-y+\frac{61}{16}-m^2$$

(Chỗ này khá ảo, nhưng hay)

Cần tìm $m>-\frac{5}{2}$ để PT $(2m+\frac{5}{2})y^2-y+\frac{61}{16}-m^2$ vô nghiệm (khi đó nó mới $>$0)

Thì $\Delta =< 0$

Tìm bất kì số m nào thỏa mãn BĐT kia và phải thỏa mãn $m>\frac{5}{2}$

Có nhiều m thỏa mãn lắm, VD: $m = 0$ hoặc $m = -1$ hoặc $m = 1$ là đẹp mắt nhất

Chọn một cái và làm !

Giả sử:

a) $m = -1$ thì $A = (y^2 + 1)^2 + \frac{3}{2}(y - \frac{1}{3})^2 + \frac{175}{48}$

Suy ra $A = (x^2 - 3x + \frac{13}{4})^2 + \frac{3}{2}(x - \frac{11}{6})^2 + \frac{175}{48} > 0$

b) $m = 0$ thì $A = y^4 + \frac{5}{2}(y - \frac{1}{5})^2 + \frac{297}{80}$

Suy ra $A = (x - \frac{3}{2})^4 + \frac{5}{2}(x - \frac{17}{10})^2 + \frac{297}{80} > 0$

c) $m = 1$ thì $A = (y^2 - 1)^2 + \frac{7}{2}(y - \frac{1}{7})^2 + \frac{419}{112}$

Suy ra $A = (x^2 - 3x + \frac{5}{4})^2 + \frac{7}{2}(x - \frac{23}{14})^2 + \frac{419}{112}$

Nhận xét: Nhưng các bạn cũng không nên lợi dụng nó quá, giống như minhtuyb đã nhận xét:

"Mình cũng chia sẻ chút chỗ này :

Khi đã ra $A = y^4 + \frac{5y^2}{2} - y + \frac{61}{16}$ thì trước khi chọn hệ số m thích hợp như trên nên kiểm tra xem tam thức bậc hai $\frac{5y^2}{2} - y + \frac{61}{16}$ có vô nghiệm hay không:

+) Nếu vô nghiệm ($\Delta < 0$) thì ta phân tích thẳng luôn: $A = y^4 + \frac{5}{2}(y - \frac{1}{5})^2 + \frac{297}{80}$, tức là chọn $m = 0$ để đỡ mất công cho phần sau

+) Nếu có nghiệm thì lại phải lục cục đi tìm m thôi "

Để không phải xét như thế, mình post một VD khác để có thể áp dụng hoàn toàn :

Ví Dụ 2: Giải phương trình $12x^4 - 108x^3 + 312x^2 + 183x + 119 = 0$

Nhận xét: Trước khi bắt tay vào giải phương trình, các bạn phải kiểm chứng rằng phương trình có nghiệm hay không !!!

Mình khuyên các bạn nên dùng Máy Tính Bỏ túi Casio để giải phương trình, nếu nó báo Can't solve thì chắc là phương trình không có nghiệm

Hướng làm: (Cái này trong nháp)

Ta thấy $12x^4 - 108x^3 + 312x^2 + 183x + 119 = 0 \Leftrightarrow x^4 - 9\,x^3 + 26\,x^2 + \frac{61}{4}\,x + \frac{119}{12} = 0$

Đặt $A = x^4 - 9\,x^3 + 26\,x^2 + \frac{61}{4}\,x + \frac{119}{12}$

Giống như phương trình bậc 4 tổng quát có dạng $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ thì bạn đặt $x = y - \dfrac{a}{4}$ rồi rút gọn lại

Vậy đặt $x = y - \frac{-9}{4}$

Suy ra

$$A = (y - \frac{-9}{4})^4 - 9(y - \frac{-9}{4})^3 + 26(y - \frac{-9}{4})^2 + \frac{61}{4}(y - \frac{-9}{4}) + \frac{119}{12}$$

$$= y^4 + 9\,y^3 + \frac{243}{8}\,y^2 + \frac{729}{16}\,y + \frac{6561}{256} - 9\,y^3 - \frac{243}{4}\,y^2 - \frac{2187}{16}\,y - \frac{6561}{64} + 26\,y^2 + 117\,y + \frac{1053}{8} + \frac{61}{4}\,y + \frac{2123}{48}$$

$$= y^4 - \frac{35}{8}\,y^2 + \frac{329}{8}\,y + \frac{76007}{768}$$

Bước tiếp theo là cộng hệ số thích hợp:

$$A = y^4 - \frac{35}{8}\,y^2 + \frac{329}{8}\,y + \frac{76007}{768}$$

$$= y^4 - 2my^2 + m^2 + \left(2\,m - \frac{35}{8}\right)y^2 + \frac{329}{8}\,y - m^2 + \frac{76007}{768}$$

Để $A > 0$ thì ta sẽ tìm $m > \frac{35}{16}$ để phương trình $\left(2\,m - \frac{35}{8}\right)y^2 + \frac{329}{8}\,y - m^2 + \frac{76007}{768} = 0$ vô nghiệm

Hay $\Delta = \frac{108241}{64} - 4\left(2\,m - \frac{35}{8}\right)\left(-m^2 + \frac{76007}{768}\right) = 8\,m^3 - \frac{35}{2}\,m^2 - \frac{76007}{96}\,m + \frac{5258029}{1536} < 0$

(Nếu bạn muốn tìm nhanh mà không mất công rút gọn biểu thức thì hãy nhập Δ vào máy tính Casio rồi ấn Calc. Máy hỏi M? Ấn thử xem với M bằng bao nhiêu thi kết quả là một số âm)

Có nhiều giá trị của m thỏa mãn BĐT đấy, ta chọn lấy cái đẹp nhất nhưng mà thỏa mãn $m > \frac{35}{16}$

VD: Ta lấy m bất kì chỉ cần thỏa mãn $\frac{51}{10} \le m \le \frac{39}{5}$ là BĐT kia đúng !!!

(Cách tìm m nhanh mà không phải mò !... Vào mode EQN, ấn cách hệ số của PT bậc 3 vào lần lượt a, b, c rồi máy sẽ tính được 3 nghiệm, rồi lập bảng xét dấu là xong)

Cho $m = 6$ hay $m = 7$ thì ta được:

Nếu $m = 6$ thì $\left(2\,m - \frac{35}{8}\right)y^2 + \frac{329}{8}\,y - m^2 + \frac{76007}{768} = \frac{61}{8}\,y^2 + \frac{329}{8}\,y + \frac{48359}{768} = \frac{61}{8}\,\left(y + \frac{329}{122}\right)^2 + \frac{352115}{46848}$

Do đó $A = (y^2 - 6)^2 + \frac{61}{8}\,\left(y + \frac{329}{122}\right)^2 + \frac{352115}{46848} = (x^2 - \frac{9}{2}\,x - \frac{15}{16})^2 + \frac{61}{8}\,\left(x + \frac{109}{244}\right)^2 + \frac{352115}{46848} > 0$

Nếu $m = 7$ thì $\left(2\,m - \frac{35}{8}\right)y^2 + \frac{329}{8}\,y - m^2 + \frac{76007}{768} = \frac{77}{8}\,y^2 + \frac{329}{8}\,y + \frac{38375}{768} = \frac{77}{8}\,\left(y + \frac{47}{22}\right)^2 + \frac{51013}{8448}$

Do đó $A = (y^2 - 7)^2 + \frac{77}{8}\,\left(y + \frac{47}{22}\right)^2 + \frac{51013}{8448} = (x^2 - \frac{9}{2}\,x - \frac{31}{16})^2 + \frac{77}{8}\,\left(x - \frac{5}{44}\right)^2 + \frac{51013}{8448} > 0$

Do đó có nhiều cách chứng minh phương trình bậc 4 vô nghiệm, nhưng lời giải thì rất ngắn gọn:

Lời giải 1: (cái làm làm luôn vào bài)

Ta có: $12x^4 - 108x^3 + 312x^2 + 183x + 119 = 0$

$\Leftrightarrow 12\,\left(x^2 - \frac{9}{2}\,x - \frac{15}{16}\right)^2 + \frac{183}{2}\,\left(x + \frac{109}{244}\right)^2 + \frac{352115}{3904} = 0$

Vô lý do VT > 0 với mọi x

Lời giải 2: Ta có: $12x^4 - 108x^3 + 312x^2 + 183x + 119 = 0$

$\Leftrightarrow 12\,\left(x^2 - \frac{9}{2}\,x - \frac{31}{16}\right)^2 + \frac{231}{2}\,\left(x - \frac{5}{44}\right)^2 + \frac{51013}{704} = 0$

Vô lý do VT > 0 với mọi x

Nhận xét: 2 lời giải trên thật ngắn gọn, nhưng lại phải có một "công trình" nghiên cứu như trên, nhưng còn với phương trình bậc 6, 8, ... thì lại phải làm một hướng khác ! Vì dụ ở dưới sẽ giúp bạn thành thạo hơn !!!

Thủ thuật 5: (Vật lý) Tổng hợp lực (Cái này mình thích lắm)

Nội dung: Áp dụng đặc điểm số phức

Cách làm:

Cho các vecto lực: $\overrightarrow{F_0}, \overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}, ..., \overrightarrow{F_n}$ biết góc tạo bởi $\overrightarrow{F_0}$ với các $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, ...\overrightarrow{F_n}$ là $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$

Hợp lực của nó và góc tạo bởi vecto hợp lực với $\overrightarrow{F_0}$ được tính như sau:

Bước 1: Ấn Shift + MODE, ấn $\bigtriangledown$, chọn CMPLX, chọn $r\angle\theta$

Bước 2: Vào Mode, chọn CMPLX

Bước 3: Ấn như sau: $F_0\angle 0 + F_1\angle\alpha_1 + F_2\angle\alpha_2 + ... + F_n\angle\alpha_n$

Ấn = là ta được kết quả !

Nhận xét: Mình nghĩ là thủ thuật 5 giúp rất nhiều trong những bài toán về lực, động lượng, điện tích, ...

Thủ thuật 6: Phân tích đa thức chứa căn thức thành nhân tử (Cái này thì hơi khó hiểu, làm nhiều sẽ quen)

Nội dung: Có khá nhiều cách và cũng khá nhiều trường hợp để sử dụng thủ thuật này, mình chỉ nêu vài thủ thuật chính, nhưng đảm bảo sẽ giúp ích cho các bạn rất rất nhiều

Cách 1: (Đối với đa thức chứa một căn thức bậc nhất, có dạng $f(x) = g(x) + h(x)\sqrt{ax+b}$ (VD: $f(x) = 2x^2 - 3x + 2 - x\sqrt{3x-2}$)

Bước 1: Đặt $t = \sqrt{ax+b}$ (tức $t =$ cái căn thức) ($t = \sqrt{3x-2}$)

Bước 2: Viết đa thức theo t (Do $t = \sqrt{ax+b}$ nên $x = \frac{t^2-b}{a}$)

$(f(x) = 2\left(\frac{1}{3}t^2 + \frac{2}{3}\right)^2 - t^2 - \left(\frac{1}{3}t^2 + \frac{2}{3}\right)t)$

Bước 3: Áp dụng thủ thuật 1 để phân tích thành nhân tử

$(f(x) = \frac{1}{9}(t-1)(t-2)(2t^2+3t+4))$

Bước 4: Thế $t = \sqrt{ax+b}$ vào nhân tử vừa tìm được

$(f(x) = \frac{1}{3}\left(\sqrt{3x-2}-1\right)\left(\sqrt{3x-2}-2\right)\left(2x+\sqrt{3x-2}\right))$

Bước 5: Viết luôn kết quả và xem giải.

Nhận xét: Cách này khá ảo diệu, nhưng rất dễ lộ liễu phương pháp. Để tránh người khác khó hiểu hay tò mò về phương pháp này thì tốt hơn hãy làm như sau: (VD $f(x) = 2x^2 - 3x + 2 - x\sqrt{3x-2}$)

Đặt $t = \sqrt{3x-2}$ ta được $t^2 = 3x - 2$

Khi đó $f(x) = 2x^2 - xt - t^2 = (2x+t)(x-t)$

Suy ra ...

(Thực ra nó chính là phương pháp hằng số biến thiên)

Cách 2: (Đối với đa thức chứa ít căn thức, thường là một hoặc hai hoặc ba căn thức, biểu thức trong căn là một đa thức bậc cao)

Nội dung: Khó nói nhưng dễ hiểu !!!

Phần 1: Nghiệm vô tỷ

Lưu ý: Chỉ nghiệm vô tỷ mới áp dụng đấy

Cách làm: VD như phương trình vô tỷ này: $x^2 + 1 - (x+1)\sqrt{x^2-2x+3} = 0$ (theo provotinhvip)

Bước 1: Viết vào CASIO, giải phương trình này, ta được các nghiệm $1 \pm \sqrt{2}$

Bước 2: Tính giá trị biểu thức trong căn: $\sqrt{x^2-2x+3} = 2$

Bước 3: Suy ra sẽ có nhân tử $(\sqrt{x^2-2x+3} - 2)$

Bước 4: Do kiểu gì cũng có nhân tử $(\sqrt{x^2-2x+3} - 2)$ nên đến đây là rất dễ rồi còn gì !!!

Bước 5: Đọ kết quả

VD2: $6x^3 - 18x^2 + 8x + 4 + (3x^2 - 6x - 4)\sqrt{x^2-2x+7} = 0$

Bước 1: Giải nghiệm, cũng được $x = 1 + \sqrt{2}$

Bước 2: Tính giá trị của căn: $\sqrt{x^2-2x+7} = 2\sqrt{2}$

Bước 3: Vì đa thức hệ số hữu tỷ nên chắc chắn nhân tử cũng hữu tỷ, suy ra $\sqrt{x^2-2x+7} = 2\sqrt{2} = 2x - 2$ Bước 4: Suy ra sẽ có nhân tử $\sqrt{x^2-2x+7} - 2x + 2$ Bước 5: Trừ đa thức, làm tiếp ta được phương trình tương đương với:

$$\left(\sqrt{x^2-2x+7} - 2x + 2\right)\left(\left(\sqrt{x^2-2x+7} + 2x - 2\right)^2 + 1\right) = 0$$

Bước 6: OK?