

Tuyển tập bất đẳng thức

L.H.P

[<beyond_infinity_299@yahoo.com>](mailto:beyond_infinity_299@yahoo.com)

Ngày 14, tháng 2, năm 2010

Lời nói đầu

The infinite! No other question has ever moved so profoundly the spirit of man.

David Hilbert

Bất đẳng thức là một phần quan trọng trong toán học sơ cấp, nó thường xuyên có mặt trong toán Olympiad và đặc biệt, luôn là một chủ đề sôi nổi trên các diễn đàn toán học trong và ngoài nước. Cùng với sự phát triển quá mạnh mẽ của bất đẳng thức, hàng loạt phương pháp (đầy sức mạnh) mới đã ra đời, giúp ta giải quyết nhanh gọn lớp lớp bất đẳng thức khó, nhưng đôi khi nghĩ lại, tôi vẫn thấy ở những lời giải đó lại mang tính kỹ thuật quá nhiều (trước đây, tôi cũng đã có một thời gian chìm đắm trong phương pháp p, q, r , S.O.S, G.L.A, và dồn biến, giải bất đẳng thức dựa trên sức mạnh và tính toán :D), điều đó làm mất đi bản sắc riêng của từng bài toán, và nhiều lúc là cả vẻ đẹp của bất đẳng thức. Chính vì đó, trong tuyển tập này, tôi xin ghi lại những bất đẳng thức khá thú vị cùng những lời giải mang tính chất cổ điển. Những bài toán đưa ra phần lớn đến từ các đề thi, các cuốn sách về bất đẳng thức (và một số là do tác giả tự sáng tác), tuy nhiên, do tính chất cá nhân của tuyển tập, tôi chỉ giới thiệu những lời giải do tác giả độc lập nghĩ ra (dù rằng có rất nhiều lời giải khác hay hơn đẹp hơn cho mỗi bài toán).

Do sau một thời gian từ bỏ bất đẳng thức (để tập trung cho một số vấn đề quan trọng khác), nên bài viết khó tránh khỏi thiếu sót, mong các bạn thông cảm. Tôi

rất muốn nghe bất kì góp ý nào của các bạn để giúp hoàn thiện hơn tuyển tập này trong lần recreated tới.

Cuối cùng, tôi xin dành tặng tuyển tập này cho bạn Phạm Nguyễn Nguyệt Lan, lớp 11A1 trường THPT chuyên Lê Quý Đôn thành phố Đà Nẵng. Chúc bạn năm mới vui vẻ, đạt được nhiều thành công trong cuộc sống.

Lê Hữu Phước

11A1 THPT Chuyên Lê Quý Đôn - Tp. Đà Nẵng

Tất cả rồi sẽ đổi thay, chỉ tình yêu và niềm tin là mãi mãi.

Bài toán 1.

Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{a+b}}{c} + \frac{\sqrt{a+c}}{b} + \frac{\sqrt{b+c}}{a} \geq 3\sqrt{\frac{2(a+b+c)}{ab+bc+ca}}$$

LỜI GIẢI.

Bổ đề 1.

$$\frac{9}{8}(a+b)(b+c)(c+a) \geq (a+b+c)(ab+bc+ca)$$

CHỨNG MINH

Bổ đề trên đúng do nó tương đương với điều sau:

$$a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 \geq 0$$



Theo bổ đề trên:

$$RHS = 3\sqrt{\frac{2(a+b+c)(ab+bc+ca)}{ab+bc+ca}} \leq \frac{9}{2}\sqrt{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{ab+bc+ca}}$$

Ta cần chứng minh:

$$2(ab+bc+ca) \left(\frac{1}{c\sqrt{(c+a)(c+b)}} + \frac{1}{b\sqrt{(b+a)(b+c)}} + \frac{1}{a\sqrt{(a+c)(a+b)}} \right) \geq 9 \quad (1)$$

Theo bất đẳng thức Cauchy Schwarz:

$$LHS_{(4)} = \sum_{cyc} c(a+b) \sum_{cyc} \frac{1}{c\sqrt{(c+a)(c+b)}} \geq \left(\sum_{cyc} \frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt[4]{(c+a)(c+b)}} \right)^2$$

Lại có, theo bất đẳng thức AM-GM:

$$\left(\sum_{cyc} \frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt[4]{(c+a)(c+b)}} \right)^2 \geq 9$$

Vậy ta có đ.p.c.m. □

Bài toán 2.

Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{a+b}}{c} + \frac{\sqrt{a+c}}{b} + \frac{\sqrt{b+c}}{a} \geq \sqrt{\frac{6(ab+bc+ca)}{abc}}$$

LỜI GIẢI.

Bất đẳng thức tương đương:

$$\left(\sqrt{\frac{ab(a+b)}{c}} + \sqrt{\frac{ac(a+c)}{b}} + \sqrt{\frac{cb(c+b)}{a}} \right)^2 \geq 6(ab+bc+ca) \quad (2)$$

Xét:

$$P := \frac{a^2b^2c}{a+b} + \frac{a^2c^2b}{a+c} + \frac{c^2b^2a}{c+b}$$

Theo bất đẳng thức Hölder:

$$LHS_{(2)}.P \geq (ab+bc+ca)^3 \geq 3abc(a+b+c)(ab+bc+ca)$$

Ta cần chứng minh:

$$abc(a+b+c) \geq 2P$$

Tuy nhiên điều này đúng do:

$$2P = abc \sum_{cyc} \frac{2ab}{a+b} \leq abc \sum_{cyc} \frac{a+b}{2} = abc(a+b+c)$$

Vậy ta có đpcm. □

Bài toán 3.

Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a+b}{c} + \frac{a+c}{b} + \frac{c+b}{a} + 2 \geq \frac{24(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^2}$$

LỜI GIẢI.

Ta sẽ đưa bất đẳng thức đã cho về dạng chính tắc S.O.S:

$$\begin{aligned} LHS - 8 &= \frac{a+b}{c} + \frac{a+c}{b} + \frac{c+b}{a} - 6 \\ &= \frac{a(b^2+c^2) + b(a^2+c^2) + c(a^2+b^2) - 6abc}{abc} \\ &= \frac{a(b-c)^2 + b(a-c)^2 + c(a-b)^2}{abc} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} RHS - 8 &= 8 \left(\frac{3(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^2} - 1 \right) \\ &= 8 \frac{2(a^2+b^2+c^2) - 2(ab+bc+ca)}{(a+b+c)^2} \\ &= 8 \frac{(b-c)^2 + (a-c)^2 + (a-b)^2}{(a+b+c)^2} \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức đã cho tương đương:

$$P := S_A(b-c)^2 + S_B(a-c)^2 + S_C(a-b)^2 \geq 0$$

trong đó:

$$\begin{aligned} S_A &= \frac{(a+b+c)^2}{bc} - 8 \\ S_B &= \frac{(a+b+c)^2}{ac} - 8 \\ S_C &= \frac{(a+b+c)^2}{ab} - 8 \end{aligned}$$

Không mất tổng quát giả sử: $a \geq b \geq c$. Khi đó:

$$(a+b+c)^2 \geq (2b+c)^2 \geq 8bc$$

$$(a+b+c)^2 \geq (a+2c)^2 \geq 8ac$$

$$(a+b+c)^2 \left(\frac{1}{ac} + \frac{1}{ab} \right) \geq 4a(b+c) \cdot \frac{4}{a(b+c)} = 16$$

Vậy:

$$S_A, S_B, S_B + S_C \geq 0$$

Ta có:

$$P \geq S_B(a-c)^2 + S_C(a-b)^2 \geq (S_B + S_C)(a-b)^2 \geq 0$$

Vậy ta thu được đpcm. □

Bài toán 4.

Cho a, b, c là các số thực không âm. Chứng minh rằng:

$$\frac{a(b+c)}{b^2+bc+c^2} + \frac{b(a+c)}{a^2+ac+c^2} + \frac{c(b+a)}{b^2+ba+a^2} \geq 2 \quad (3)$$

LỜI GIẢI.

Theo bất đẳng thức Cauchy Schwarz:

$$\begin{aligned} LHS_{(3)} &= \sum_{cyc} \frac{a^2}{\frac{a(b^2+bc+c^2)}{b+c}} \\ &\geq \frac{(a+b+c)^2}{\frac{a(b^2+bc+c^2)}{b+c} + \frac{b(a^2+ac+c^2)}{a+c} + \frac{c(b^2+ba+a^2)}{b+a}} \end{aligned}$$

Ta cần chứng minh:

$$\frac{(a+b+c)^2}{\frac{a(b^2+bc+c^2)}{b+c} + \frac{b(a^2+ac+c^2)}{a+c} + \frac{c(b^2+ba+a^2)}{b+a}} \geq 2$$

tương đương:

$$(a+b+c)^2 \geq 2 \sum_{cyc} \frac{a(b^2+bc+c^2)}{b+c} \quad (4)$$

Theo bất đẳng thức Cauchy Schwarz và Schur:

$$\begin{aligned}
 RHS_{(4)} &= 4(ab + bc + ca) - 2abc \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right) \\
 &\leq 4(ab + bc + ca) - 2abc \frac{9}{2(a+b+c)} \\
 &\leq 4(ab + bc + ca) - [4(ab + bc + ca) - (a+b+c)^2] \\
 &= LHS_{(4)}
 \end{aligned}$$

Vậy ta có đ.p.c.m. □

Bài toán 5.

Cho a, b, c là các số thực không âm. Chứng minh rằng:

$$\sum_{cyc} \frac{a}{b^2 + bc + c^2} \geq \frac{4(a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2)}{(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca)^2} \quad (5)$$

LỜI GIẢI.

Theo bất đẳng thức AM-GM:

$$\begin{aligned}
 RHS_{(5)} &\leq \frac{4(a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2)}{4(ab + bc + ca)(a^2 + b^2 + c^2)} \\
 &= \frac{(a+b+c)}{(ab + bc + ca)}
 \end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy Schwarz:

$$\begin{aligned}
 LHS_{(5)} &= \sum_{cyc} \frac{a^2}{ab^2 + abc + ac^2} \\
 &\geq \frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)(ab + bc + ca)} \\
 &= \frac{(a+b+c)}{(ab + bc + ca)}
 \end{aligned}$$

Vậy ta có đ.p.c.m. □

Bài toán 6.

Cho a, b, c là các số thực không âm. Chứng minh rằng:

$$\frac{a(b+c)^2}{b^2+bc+c^2} + \frac{b(a+c)^2}{a^2+ac+c^2} + \frac{c(b+a)^2}{b^2+ba+a^2} \geq \frac{4(ab+bc+ca)}{a+b+c} \quad (6)$$

LỜI GIẢI.

Bổ đề 2.

$$\sum_{cyc} \frac{1}{a^2+ab+b^2} \geq \frac{9}{(a+b+c)^2} \quad (7)$$

¹



Theo bổ đề trên và bất đẳng thức Schur:

$$\begin{aligned} LHS_{(11)} - (a+b+c) &= \sum_{cyc} \left[a \frac{(b+c)^2}{b^2+bc+c^2} - 1 \right] \\ &= abc \sum_{cyc} \frac{1}{b^2+bc+c^2} \\ &\geq \frac{9abc}{(a+b+c)^2} \\ &\geq \frac{2(ab+bc+ca) - a^2 - b^2 - c^2}{a+b+c} \end{aligned}$$

Lại có:

$$RHS_{(11)} - (a+b+c) = \frac{2(ab+bc+ca) - a^2 - b^2 - c^2}{a+b+c}$$

Vậy ta có đ.p.c.m. □

Bài toán 7.

Cho a, b, c là các số thực không âm. Chứng minh rằng:

$$\sum_{cyc} \frac{a^2(b+c)}{b^2+bc+c^2} \geq \frac{2(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c} \quad (8)$$

¹Do chứng minh bổ đề trên mang nặng tính toán (dùng phương pháp p, q, r và kết hợp với bất đẳng thức Schur), các bạn có thể tự chứng minh hoặc đọc trong các tài liệu về bất đẳng thức khác.

LỜI GIẢI.

Ta có:

$$\begin{aligned} LHS_{(21)} &= \sum_{cyc} \frac{a^4}{\frac{a^2(b^2 + bc + c^2)}{b + c}} \\ &\geq \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{\frac{a^2(b^2 + bc + c^2)}{b + c} + \frac{b^2(a^2 + ac + c^2)}{a + c} + \frac{c^2(b^2 + ba + a^2)}{b + a}} \end{aligned}$$

Ta sẽ chứng minh:

$$\frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{\frac{a^2(b^2 + bc + c^2)}{b + c} + \frac{b^2(a^2 + ac + c^2)}{a + c} + \frac{c^2(b^2 + ba + a^2)}{b + a}} \geq \frac{2(a^2 + b^2 + c^2)}{a + b + c}$$

tương đương:

$$(a^2 + b^2 + c^2)(a + b + c) \geq 2 \left[\frac{a^2(b^2 + bc + c^2)}{b + c} + \frac{b^2(a^2 + ac + c^2)}{a + c} + \frac{c^2(b^2 + ba + a^2)}{b + a} \right]$$

Tiếp tục biến đổi, ta đưa bất đẳng thức về dạng:

$$a^3 + b^3 + c^3 + 2abc \left(\frac{a}{b + c} + \frac{b}{a + c} + \frac{c}{a + b} \right) \geq a^2(b + c) + b^2(a + c) + c^2(a + b)$$

Bằng bất đẳng thức Nesbitt và Schur ta dễ dàng chứng minh bất đẳng thức trên.

Vậy ta thu được đ.p.c.m. $\square$

Bài toán 8.

Cho a, b, c là các số thực không âm. Chứng minh rằng:

$$\sum_{cyc} \frac{bc(b^2 + c^2)}{a^2 + bc} \geq a^2 + b^2 + c^2 \quad (9)$$

LỜI GIẢI.

Bằng biến đổi ta đưa bất đẳng thức cần chứng minh về dạng:

$$\frac{abc[a^5 + b^5 + c^5 - abc(a^2 + b^2 + c^2)]}{(a^2 + bc)(b^2 + ac)(c^2 + ab)} \geq 0$$

Ta dễ dàng chứng minh bất đẳng thức trên từ đó thu được đ.p.c.m. $\square$

Bài toán 9.

Cho a, b, c là các số thực không âm. Chứng minh rằng:

$$\frac{\frac{a^3 - b^3}{(a+b)^3} + \frac{b^3 - c^3}{(b+c)^3} + \frac{c^3 - a^3}{(c+a)^3}}{\frac{a-b}{a+b} + \frac{b-c}{b+c} + \frac{c-a}{c+a}} \geq 0$$

LỜI GIẢI.

Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{a^3 - b^3}{(a+b)^3} &= \frac{(a-b)(a^2 + ab + b^2)}{(a+b)^3} \\ &= \frac{(a-b)[3(a+b)^2 + (a-b)^2]}{4(a+b)^3} \\ &= \frac{1}{4} \left(3 \frac{a-b}{a+b} + \left(\frac{a-b}{a+b} \right)^3 \right) \end{aligned}$$

Tương tự cho các phân thức còn lại.

Đặt $x = \frac{a-b}{a+b}$, $y = \frac{b-c}{b+c}$, $z = \frac{c-a}{c+a}$. Lại có đẳng thức sau:

$$xyz + x + y + z = 0$$

Từ đó:

$$\begin{aligned} 2[x^3 + y^3 + z^3 + 3(x+y+z)] &= 2(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz) \\ &= (x+y+z)[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2] \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương:

$$\frac{2[3(x+y+z) + x^3 + y^3 + z^3]}{x+y+z} = (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \geq 0$$

Điều này đương nhiên đúng. Vậy ta có điều phải chứng minh. $\square$

Bài toán 10.

Cho 3 số thực dương a, b, c và định nghĩa x, y, z như sau:

$$x := a + \frac{1}{b}, y := b + \frac{1}{c}, z := c + \frac{1}{a}$$

Chứng minh rằng:

$$xy + yz + zx \geq 2(x + y + z)$$

LỜI GIẢI.

Đặt $x = \frac{1}{m}, y = \frac{1}{n}, z = \frac{1}{p}$.

Từ điều kiện đề bài ta suy ra:

$$xyz \geq x + y + z + 2$$

$$\Leftrightarrow 1 \geq mn + np + pm + 2mnp$$

$$\Leftrightarrow 1 \geq \frac{m}{1+m} + \frac{n}{1+n} + \frac{p}{1+p}$$

Ta cần chứng minh:

$$m + n + p \geq 2(mn + np + pm)$$

Theo bất đẳng thức Cauchy Schwarz:

$$\begin{aligned} \frac{m}{1+m} + \frac{n}{1+n} + \frac{p}{1+p} &\geq \frac{(m+n+p)^2}{m+n+p+m^2+n^2+p^2} \\ \Rightarrow 1 &\geq \frac{(m+n+p)^2}{m+n+p+m^2+n^2+p^2} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow m + n + p \geq 2(mn + np + pm)$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. □

Bài toán 11.

Cho $a, b, c \in [-1; 1]$ thoả mãn $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2 + b^2}{(1 - a^2)(1 - b^2)} + \frac{b^2 + c^2}{(1 - b^2)(1 - c^2)} + \frac{c^2 + a^2}{(1 - c^2)(1 - a^2)} \leq \frac{9}{2}$$

LỜI GIẢI.

- **Nhận xét 1:** $ab, bc, ca \geq 0$.

Chứng minh: Ta luôn có 2 trường hợp sau đối với 3 số ab, bc, ca : hoặc cả 3 số không âm hoặc có 2 số không dương và một số dương. Rõ ràng khi trường hợp 2 xảy ra thì $ab + bc + ca < 1$ (do $a, b, c \in [-1; 1]$). Vậy chỉ có trường hợp 1 xảy ra.

- **Nhận xét 2:** $(1 - a^2)(1 - b^2) \leq (1 - ab)^2$.

Chứng minh: Bất đẳng thức trên tương đương: $(a - b)^2 \geq 0$ (hiển nhiên đúng!).

Theo **Nhận xét 2** ta có:

$$\sum_{cyc} \frac{a^2 + b^2}{(1 - a^2)(1 - b^2)} \geq \sum_{cyc} \frac{a^2 + b^2}{(1 - ab)^2} = \sum_{cyc} \frac{a^2 + b^2}{c^2(a + b)^2}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy Schwarz:

$$\begin{aligned} \sum_{cyc} \frac{a^2 + b^2}{c^2(a + b)^2} &\geq \sum_{cyc} \frac{1}{2c^2} \\ &\geq \sum_{cyc} \frac{1}{2ab} \\ &\geq \frac{9}{2(ab + bc + ca)} \\ &= \frac{9}{2} \end{aligned}$$

Vậy ta có đ.p.c.m. □

Bài toán 12.

Cho các số $a_i, b_i, i = \overline{1, n}$ thoả mãn $a_i, b_i \in [1001; 2002] \forall i$ và $\sum_{i=1}^n a_i^2 = \sum_{i=1}^n b_i^2$.

Chứng minh rằng:

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i^3}{b_i} \leq \frac{17}{10} \sum_{i=1}^n a_i^2$$

LỜI GIẢI.

Ta có đánh giá sau:

$$\begin{aligned} 21a_i^2 - (10\frac{a_i^3}{b_i} + 4b_i^2) &= b_i^2 \left[-10 \left(\frac{a_i}{b_i} \right)^3 + 21 \left(\frac{a_i}{b_i} \right)^2 - 4 \right] \\ &= b_i^2 \left(2 - \frac{a_i}{b_i} \right) \left(2\frac{a_i}{b_i} - 1 \right) \left(5\frac{a_i}{b_i} - 2 \right) \\ &\geq 0 \quad (\text{do } a_i, b_i \in [1001; 2002]) \end{aligned}$$

Cho i chạy từ 1 đến n sau đó cộng các bất đẳng thức lại ta có:

$$21 \sum_{i=1}^n a_i^2 \geq 10 \sum_{i=1}^n \frac{a_i^3}{b_i} + 4 \sum_{i=1}^n b_i^2 \Leftrightarrow \frac{17}{10} \sum_{i=1}^n a_i^2 \geq \sum_{i=1}^n \frac{a_i^3}{b_i}$$

Vậy ta có đ.p.c.m. □

Bài toán 13.

Cho $a, b, c \geq 0$ và hằng số thực $k \geq \log_{3/2} 2$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^k + b^k} + \frac{1}{b^k + c^k} + \frac{1}{c^k + a^k} \geq \frac{5 \cdot 2^{k-1}}{(a + b + c)^k}$$

LỜI GIẢI.

Bổ đề 3.

$$\frac{2}{x^k + y^k} + \frac{1}{x^k} + \frac{1}{y^k} \geq \frac{3 \cdot 2^k}{(x + y)^k}$$

CHỨNG MINH

Theo bất đẳng thức AM-GM:

$$\begin{aligned} \frac{2}{x^k + y^k} + \frac{x^k + y^k}{2x^k y^k} + \frac{x^k + y^k}{2x^k y^k} &\geq \frac{2}{x^k + y^k} + \frac{x^k + y^k}{2x^k y^k} + \frac{1}{x^{\frac{k}{2}} y^{\frac{k}{2}}} \\ &\geq 3 \sqrt[3]{\frac{1}{(xy)^{\frac{3k}{2}}}} \\ &\geq \frac{3 \cdot 2^k}{(x + y)^k} \end{aligned}$$



Không mất tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$. Ta có nhận xét:

$$(a + c/2)^k \geq a^k + c^k$$

$$(b + c/2)^k \geq b^k + c^k$$

Thật vậy:

Với $c = 0$, bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng.

Với $c \neq 0$, bất đẳng thức trên tương đương: $(t + 1/2)^k - t^k - 1 \geq 0$ trong đó $t = a/c \geq 1$. Xét hàm $f(t) = (t + 1/2)^k - t^k - 1$ trên $[1; +\infty)$.

$$f'(t) = k[(t + 1/2)^{k-1} - t^{k-1}] > 0.$$

Vậy $f(t)$ đồng biến trên $[1; +\infty)$.

$\Rightarrow f(t) \geq f(1) = (3/2)^k - 2 \geq (3/2)^{\log_{3/2} 2} - 2 = 0$ Nhận xét được chứng minh xong. Vậy ta có:

$$\begin{aligned} \sum_{cyc} \frac{1}{a^k + b^k} &\geq \frac{1}{(a + c/2)^k} + \frac{1}{(b + c/2)^k} + \frac{1}{a^k + b^k} \\ &\geq \frac{3 \cdot 2^k}{(a + b + c)^k} - \frac{2}{(a + c/2)^k + (b + c/2)^k} + \frac{1}{a^k + b^k} \end{aligned} \quad (10)$$

Ta cần chứng minh:

$$VP_{(10)} \geq \frac{5 \cdot 2^{k-1}}{(a + b + c)^k} \Leftrightarrow \frac{2^{k-1}}{(a + b + c)^k} + \frac{1}{a^k + b^k} \geq \frac{2}{(a + c/2)^k + (b + c/2)^k}$$

Theo bất đẳng thức Holder:

$$2^{k-1}[(a + c/2)^k + (b + c/2)^k] \geq (a + b + c)^k$$

Hiển nhiên:

$$(a + c/2)^k + (b + c/2)^k \geq (a + b)^k$$

Vậy ta có đ.p.c.m. □

Bài toán 14.

Cho a, b, c là các số thực không âm. Chứng minh rằng:

$$\frac{(ab + ac)^2}{b^2 + c^2} + \frac{(bc + ba)^2}{c^2 + a^2} + \frac{(ca + cb)^2}{a^2 + b^2} \geq 2(ab + bc + ca)$$

LỜI GIẢI.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương:

$$\begin{aligned} \sum_{cyc} \left(\frac{a^2(b+c)^2}{b^2+c^2} + (b+c)^2 \right) &\geq 2(ab + bc + ca) + \sum_{cyc} (b+c)^2 \\ \Leftrightarrow 2(a^2 + b^2 + c^2) \sum_{cyc} \frac{(b+c)^2}{b^2+c^2} &\geq 4(a+b+c)^2 \\ \Leftrightarrow \sum_{cyc} (b^2+c^2) \sum_{cyc} \frac{(b+c)^2}{b^2+c^2} &\geq \left(\sum_{cyc} (b+c) \right)^2 \end{aligned}$$

Điều này đúng theo bất đẳng thức Cauchy Schwarz. Ta có điều phải chứng minh.

□

Bài toán 15.

Chứng minh rằng với mọi 6 số thực dương a, b, c, x, y, z ta luôn có:

$$ax + by + cz + \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)} \geq \frac{2}{3}(a + b + c)(x + y + z)$$

LỜI GIẢI.

Biến đổi bất đẳng thức đã cho về dạng sau:

$$\begin{aligned} &\sqrt{9(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)} - (a + b + c)(x + y + z) \\ &\geq (a + b + c)(x + y + z) - 3(ax + by + cz) \end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy Schwarz:

$$\sqrt{9(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)} - (a + b + c)(x + y + z) \geq 0$$

Nếu

$$0 \geq (a + b + c)(x + y + z) - 3(ax + by + cz)$$

bất đẳng thức hiển nhiên đúng, ta chỉ xét trong trường hợp:

$$(a + b + c)(x + y + z) - 3(ax + by + cz) \geq 0$$

Bình phương 2 vế và áp dụng bất đẳng thức Aczel:

$$\begin{aligned} (LHS)^2 &\geq [3(a^2 + b^2 + c^2) - (a + b + c)^2] [3(x^2 + y^2 + z^2) - (x + y + z)^2] \\ &= \sum_{cyc} (a - b)^2 \sum_{cyc} (x - y)^2 \\ &\geq [(a - b)(x - y) + (b - c)(y - z) + (c - a)(z - x)]^2 \\ &= [(a + b + c)(x + y + z) - 3(ax + by + cz)]^2 \\ &= (RHS)^2 \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức đề bài được chứng minh hoàn toàn. $\square$

Bài toán 16.

Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng:

$$\sum_{cyc} a^2 \geq 4\sqrt{3}S + \sum_{cyc} (a - b)^2 + 16Rr \left(\sum_{cyc} \cos^2 \frac{A}{2} - \sum_{cyc} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \right)$$

LỜI GIẢI.

Đặt $p - a = x$, $p - b = y$, $p - c = z$ ($x, y, z > 0$).

Khi đó ta có các hệ thức sau:

$$\left\| \begin{aligned} a &= y + z, \quad b = z + x, \quad c = x + y, \quad p = x + y + z \\ \cos \frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{p(p - a)}{bc}}, \quad \cos \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{p(p - b)}{ac}}, \quad \cos \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{p(p - c)}{ab}} \\ Rr &= \frac{abc}{4p}, \quad S = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)} \end{aligned} \right\|$$

Biến đổi tương đương đưa bất đẳng thức cần chứng minh về dạng:

$$\sum_{cyc} \sqrt{xy(x+z)(y+z)} \geq (xy + yz + zx) + \sqrt{3xyz(x+y+z)} \quad (11)$$

Không mất tổng quát ta chuẩn hóa $x + y + z = 1$. Bất đẳng thức (11) tương đương:

$$\begin{aligned} & \left[\sum_{cyc} \sqrt{(xy)^2 + xyz} \right]^2 \geq (xy + yz + zx + \sqrt{3xyz})^2 \\ \Leftrightarrow & \sum_{cyc} \sqrt{[(xy)^2 + xyz][(yz)^2 + xyz]} \geq xyz + \sqrt{3xyz}(xy + yz + zx) \\ \Leftrightarrow & \left\{ \sum_{cyc} \sqrt{[(xy)^2 + xyz][(yz)^2 + xyz]} \right\}^2 \geq [xyz + \sqrt{3xyz}(xy + yz + zx)]^2 \\ \Leftrightarrow & \\ & 2 \sum_{cyc} [(zx)^2 + xyz] \sqrt{[(xy)^2 + xyz][(yz)^2 + xyz]} \\ & \geq xyz[xyz + 2xyz(xy + yz + zx) + (xy + yz + zx)^2 + 2\sqrt{3xyz}(xy + yz + zx)] \end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy Schwarz:

$$\begin{aligned} & 2 \sum_{cyc} [(zx)^2 + xyz] \sqrt{[(xy)^2 + xyz][(yz)^2 + xyz]} \geq 2 \sum_{cyc} [(zx)^2 + xyz](y^2xz + xyz) \\ & = 2xyz[xyz(xy + yz + zx) + 4xyz + (xy)^2 + (yz)^2 + (zx)^2] \end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\begin{aligned} & 2xyz[xyz(xy + yz + zx) + 2xyz + (xy + yz + zx)^2] \\ & \geq xyz[2xyz(xy + yz + zx) + xyz + (xy + yz + zx)^2 + 2\sqrt{3xyz}(xy + yz + zx)] \end{aligned}$$

Vậy ta có đ.p.c.m. □

Bài toán 17.

Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{b+c}{2a^2 + (b+c)^2} + \frac{c+a}{2b^2 + (c+a)^2} + \frac{a+b}{2c^2 + (a+b)^2} \leq 3$$

LỜI GIẢI.

Bất đẳng thức đã cho tương đương:

$$\begin{aligned}
\sum_{cyc} \frac{(b+c)(a+b+c)}{2a^2 + (b+c)^2} &\leq 3 \\
\sum_{cyc} \frac{4(b+c)^2 + 4a(b+c)}{2a^2 + (b+c)^2} &\leq 12 \\
\sum_{cyc} \frac{5(b+c)^2 + 4a(b+c) + 2a^2}{2a^2 + (b+c)^2} &\leq 15 \\
\sum_{cyc} \frac{2(a+b+c)^2 + 3(b+c)^2}{2a^2 + (b+c)^2} &\leq 15 \\
\sum_{cyc} \frac{2(a+b+c)^2}{2a^2 + (b+c)^2} &\leq 6 + \sum_{cyc} \left(3 - \frac{3(b+c)^2}{2a^2 + (b+c)^2} \right) \\
2(a+b+c)^2 \sum_{cyc} \frac{1}{2a^2 + (b+c)^2} &\leq 6 + \sum_{cyc} \frac{6a^2}{2a^2 + (b+c)^2}
\end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy Schwarz:

$$\begin{aligned}
\sum_{cyc} \frac{a^2}{2a^2 + (b+c)^2} &= \sum_{cyc} \frac{a^4}{2a^4 + (ab+ac)^2} \\
&\geq \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{2[a^4 + b^4 + c^4 + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + abc(a+b+c)]} \\
&\geq \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{2(a^2 + b^2 + c^2)^2} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Lại có:

$$\begin{aligned}
[2a^2 + (b+c)^2] \left(\frac{1}{2} + 1 \right) &\geq (a+b+c)^2 \\
[2b^2 + (c+a)^2] \left(\frac{1}{2} + 1 \right) &\geq (a+b+c)^2 \\
[2c^2 + (a+b)^2] \left(\frac{1}{2} + 1 \right) &\geq (a+b+c)^2
\end{aligned}$$

Suy ra:

$$\sum_{cyc} \frac{2(a+b+c)^2}{2a^2 + (b+c)^2} \leq 9$$

Từ những điều trên ta có điều phải chứng minh. $\square$

Bài toán 18.

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{ab + c + 1/c} + \frac{1}{bc + a + 1/a} + \frac{1}{ca + b + 1/b} \leq \frac{27}{31}$$

LỜI GIẢI.

Ta có:

$$\begin{aligned} LHS &= \sum_{cyc} \frac{a}{abc + a^2 + 1} \\ &= \sum_{cyc} \left(a - \frac{a^2bc + a^3}{abc + a^2 + 1} \right) \\ &= 1 - \left(abc \sum_{cyc} \frac{a}{abc + a^2 + 1} + \sum_{cyc} \frac{a^3}{abc + a^2 + 1} \right) \end{aligned}$$

Bất đẳng thức tương đương:

$$\frac{4}{31} \leq abc \sum_{cyc} \frac{a^2}{a^2bc + a^3 + a} + \sum_{cyc} \frac{a^4}{a^2bc + a^3 + a}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy Schwarz:

$$\begin{aligned} RHS &\geq abc \frac{(a + b + c)^2}{abc \sum_{cyc} a + \sum_{cyc} a^3 + \sum_{cyc} a} + \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{abc \sum_{cyc} a + \sum_{cyc} a^3 + \sum_{cyc} a} \\ &= \frac{abc + (a^2 + b^2 + c^2)^2}{abc + (a^3 + b^3 + c^3) + 1} \end{aligned}$$

Ta sẽ chứng minh:

$$31(abc + \left(\sum_{cyc} a^2 \right)^2) \geq 4(abc + \sum_{cyc} a^3 + 1)$$

Đồng bậc hóa bất đẳng thức trên và biến đổi tương đương ta quy về chứng minh:

$$23 \sum_{cyc} a^4 + 38 \sum_{cyc} a^2b^2 \geq 21abc \sum_{cyc} a + 20 \sum_{cyc} ab(a^2 + b^2)$$

Ta lại có:

$$20 \sum_{cyc} a^4 + 20abc \sum_{cyc} a \geq 20 \sum_{cyc} ab(a^2 + b^2)$$

(bất đẳng thức Schur bậc 2)

$$3 \sum_{cyc} a^4 + 38 \sum_{cyc} a^2b^2 \geq 41abc \sum_{cyc} a$$

Cộng hai bất đẳng thức trên về theo về ta có điều phải chứng minh. $\square$

Bài toán 19.

Cho a, b, c là các số thực không âm. Chứng minh rằng:

$$(a + b + c)(\sqrt{a^2 + 2bc} + \sqrt{b^2 + 2ca} + \sqrt{c^2 + 2ab}) \geq 3\sqrt{3}(ab + bc + ca)$$

LỜI GIẢI.

Theo bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2 + 2bc} &= \frac{a^2 + 2bc}{\sqrt{a^2 + 2bc}} \\ &\geq \frac{a^2 + 2bc}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \end{aligned}$$

Tương tự ta có:

$$\begin{aligned} \sqrt{b^2 + 2ca} &\geq \frac{b^2 + 2ca}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ \sqrt{c^2 + 2ab} &\geq \frac{c^2 + 2ab}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \end{aligned}$$

Vậy:

$$LHS \geq \frac{(a + b + c)^3}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Ta sẽ chứng minh:

$$\frac{(a + b + c)^3}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \geq 3\sqrt{3}(ab + bc + ca)$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) \geq 3\sqrt[3]{(a^2 + b^2 + c^2)(ab + bc + ca)^2}$$

Điều này đúng theo bất đẳng thức AM-GM.

Ta có điều phải chứng minh. □

Bài toán 20.

Cho $x, y, z > 0$. Chứng minh rằng:

$$64x^2y^2z^2(x^2+y^2+z^2)^3(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2) \leq (x+y+z)^4(x^2+y^2)^2(y^2+z^2)^2(z^2+x^2)^2$$

LỜI GIẢI.

Ta có:

$$9(x^2 + y^2)(y^2 + z^2)(z^2 + x^2) \geq 8(x^2 + y^2 + z^2)(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)$$

Từ đó suy ra:

$$RHS \geq \frac{64}{81}(x + y + z)^4(x^2 + y^2 + z^2)^2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)^2$$

Ta sẽ chứng minh:

$$\frac{64}{81}(x+y+z)^4(x^2+y^2+z^2)^2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)^2 \geq 64x^2y^2z^2(x^2+y^2+z^2)^3(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)$$

$$\Leftrightarrow (x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)(x + y + z)^4 \geq 81x^2y^2z^2(x^2 + y^2 + z^2)$$

Theo bất đẳng thức AM-GM:

$$27(x^2 + y^2 + z^2)(xy + yz + zx)^2 \leq (x + y + z)^6$$

$$27(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)[xyz(x + y + z)]^2 \leq (xy + yz + zx)^6$$

$$(xy + yz + zx)^2 \leq 3(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)$$

Từ đó ta có:

$$\begin{aligned}
 x^2y^2z^2(x^2 + y^2 + z^2) &\leq \frac{(x + y + z)^6(xy + yz + zx)^6}{27(xy + yz + zx)^2 \cdot 27(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)(x + y + z)^2} \\
 &= \frac{(x + y + z)^4(xy + yz + zx)^4}{81 \cdot 9(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)} \\
 &\leq \frac{(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)(x + y + z)^4}{81}
 \end{aligned}$$

Vậy ta có đ.p.c.m. □

Bài toán 21.

Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$ và thoả mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{1 + a^2} + \frac{b}{1 + b^2} + \frac{c}{1 + c^2} \leq \frac{9}{10}$$

LỜI GIẢI.

Ta xét các trường hợp sau:

- **Trường hợp 1:** Nếu $a, b, c > 0$, xét hàm $f(x) = \frac{x}{1 + x^2}$ trên $(0; 1]$, tính đạo hàm bậc 2 cho ta $f''(x) = \frac{x(x^2 - 3)}{(1 + x^2)^4} < 0$ với mọi $x \in (0; 1]$. Vậy $f(x)$ là hàm lõm trên $(0; 1]$. Do đó theo bất đẳng thức Jensen ta có:

$$LHS \leq 3f\left(\frac{a + b + c}{3}\right) = \frac{9}{10}$$

- **Trường hợp 2:** Nếu a, b, c có đúng 2 số không dương: không mất tổng quát ta cho $a > 0$. Hiển nhiên ta có:

$$LHS \leq \frac{a}{1 + a^2} \leq \frac{1}{2} < \frac{9}{10}$$

- **Trường hợp 3:** Nếu a, b, c có đúng 1 số không dương, không mất tổng quát ta cho $a < 0$. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương:

$$\frac{6}{5} \leq \sum_{cyc} \frac{(1 - a)^2}{1 + a^2} \tag{12}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy Schwarz:

$$\begin{aligned} RHS_{(12)} &\geq \frac{(1-a)^2}{1+a^2} + \frac{(1+a)^2}{2+b^2+c^2} \\ &\geq \frac{(1-a)^2}{1+a^2} + \frac{(1+a)^2}{2+(1-a)^2} \\ &\geq 2 \left(1 + \frac{2a-1}{2+(1-a)^2} - \frac{a}{2+(1-a)^2} \right) \end{aligned}$$

Ta cần chứng minh:

$$\frac{a-1}{2+(1-a)^2} + \frac{2}{5} \geq 0$$

Điều này đúng do nó tương đương với:

$$2a^2 + a + 1 \geq 0$$

Từ 3 trường hợp trên ta có đ.p.c.m. □

Bài toán 22.

Cho $a, b \in \mathbb{R}, a > b$ và thỏa mãn $ab = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$P = \frac{a^4 + b^4}{a - b}$$

LỜI GIẢI.

Ta chú ý đến đẳng thức sau:

$$a^4 + b^4 = (a - b)^4 + 4ab(a - b)^2 + 2a^2b^2$$

Vậy $P = \frac{(a - b)^4 + 4(a - b)^2 + 2}{a - b}$.

Đặt $a - b = x > 0$, xét hàm $f(x) = x^3 + 4x + \frac{2}{x}$ trên $(0; +\infty)$.

Tính đạo hàm ta được: $f'(x) = \frac{3x^4 + 4x^2 - 2}{x^2}$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{\sqrt{10} - 2}{3}}$, lúc qua giá trị này, $f'(x)$ đổi dấu từ $-$ sang $+$ nên

min $f(x)$ trên $(0; +\infty)$ là $f\left(\sqrt{\frac{\sqrt{10} - 2}{3}}\right)$.

Vậy giá trị nhỏ nhất cần tìm là $f(\sqrt{\frac{\sqrt{10}-2}{3}})$ đạt được khi $x = \sqrt{\frac{\sqrt{10}-2}{3}}$. $\square$

Bài toán 23.

Cho a, b, c là các số thực đôi một phân biệt. Chứng minh rằng:

$$[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] \left[\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2} \right] \geq \frac{27}{2}$$

LỜI GIẢI.

Bổ đề 4. Với mọi $x, y \geq 0$ ta luôn có:

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \geq \frac{8}{(x+y)^2}$$

CHỨNG MINH

Thật vậy, theo bất đẳng thức AM-GM:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} &\geq \frac{2}{xy} \\ &\geq \frac{8}{(x+y)^2} \end{aligned}$$

▼

Không mất tổng quát giả sử $a \geq b \geq c$. Khi đó theo bổ đề trên ta có:

$$\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} \geq \frac{8}{(a-c)^2}$$

Lại có do bất đẳng thức Cauchy Schwarz:

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 \geq \frac{(a-c)^2}{2}$$

Vậy nên:

$$\begin{aligned} LHS &\geq \frac{9}{(a-c)^2} \cdot \frac{3(a-c)^2}{2} \\ &= \frac{27}{2} \end{aligned}$$

Bất đẳng thức đề bài được chứng minh hoàn toàn. $\square$

Bài toán 24.

Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{2a+b}{2a+c} + \frac{2b+c}{2b+a} + \frac{2c+a}{2c+b} \geq 3$$

LỜI GIẢI.

Nhân hai vế bất đẳng thức cần chứng minh cho $2(a+b+c)$ ta được:

$$\begin{aligned} \sum_{cyc} \frac{2(a+b+c)(2a+b)}{2a+c} &\geq 6(a+b+c) \\ \Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{b^2+ab+ac}{2a+c} &\geq a+b+c \end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy Schwarz:

$$\begin{aligned} \sum_{cyc} \frac{b^2+ab+ac}{2a+c} &= \sum_{cyc} \frac{(b^2+ab+ac)^2}{(2a+c)(b^2+ab+ac)} \\ &\geq \frac{(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca)^2}{\sum_{cyc} (2a+c)(b^2+ab+ac)} \\ &= \frac{(a+b+c)^4}{4(a+b+c)(ab+bc+ca) - 9abc} \end{aligned}$$

Lại có theo bất đẳng thức Schur bậc 1:

$$(a+b+c)^3 \geq 4(a+b+c)(ab+bc+ca) - 9abc$$

Từ đó suy ra:

$$\sum_{cyc} \frac{b^2+ab+ac}{2a+c} \geq a+b+c$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. $\square$

Bài toán 25.

Cho a, b, c là 3 cạnh của một tam giác nhọn. Chứng minh rằng:

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)(a^3+b^3+c^3) \geq 4(a^6+b^6+c^6)$$

LỜI GIẢI.

Do a, b, c là 3 cạnh của một tam giác nhọn nên a^2, b^2, c^2 là 3 cạnh của một tam giác.

Theo bất đẳng thức Cauchy Schwarz:

$$(a + b + c)(a^3 + b^3 + c^3) \geq (a^2 + b^2 + c^2)^2$$

Vậy nên:

$$(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2)(a^3 + b^3 + c^3) \geq (a^2 + b^2 + c^2)^3$$

Ta cần chứng minh:

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2 + c^2)^3 &\geq 4(a^6 + b^6 + c^6) \\ \Leftrightarrow (a^2 + b^2 - c^2)(c^2 + a^2 - b^2)(b^2 + c^2 - a^2) &\geq 0 \end{aligned}$$

Điều này đúng do a^2, b^2, c^2 là 3 cạnh của một tam giác.

Ta có điều phải chứng minh. □

Bài toán 26.

Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3 + \frac{(a - c)^2}{ab + bc + ca}$$

LỜI GIẢI.

Ta sẽ chứng minh một bất đẳng thức chặt hơn sau:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3 + \frac{\max\{(a - c)^2, (b - c)^2, (a - b)^2\}}{ab + bc + ca}$$

2

²Lý do để ta chứng minh bất đẳng thức này thay cho bất đẳng thức ban đầu là để ta có thể giả sử và xét trường hợp thuận lợi hơn khi mà bất đẳng thức đề bài có 3 biến a, b, c mà vai trò giữa chúng không thực sự rõ ràng.

- **Trường hợp 1:** Nếu $a \geq b \geq c$. Bất đẳng thức tương đương:

$$\frac{(a-b)^2}{ab} + \frac{(b-c)(a-c)}{ac} \geq \frac{(a-c)^2}{ab+bc+ca} \quad (13)$$

Theo bất đẳng thức Cauchy Schwarz:

$$\begin{aligned} LHS_{(13)} &\geq \frac{(a-b)^2}{ab} + \frac{(b-c)^2}{ac+bc} \\ &\geq \frac{(a-c)^2}{ab+bc+ca} \\ &= RHS_{(13)} \end{aligned}$$

- **Trường hợp 2:** Nếu $a \leq b \leq c$. Bất đẳng thức tương đương:

$$\frac{(b-c)^2}{bc} + \frac{(b-a)(c-a)}{ab} \geq \frac{(a-c)^2}{ab+bc+ca} \quad (14)$$

Theo bất đẳng thức Cauchy Schwarz:

$$\begin{aligned} LHS_{(14)} &\geq \frac{(b-c)^2}{bc} + \frac{(b-a)^2}{ab+ac} \\ &\geq \frac{(a-c)^2}{ab+bc+ca} \\ &= RHS_{(14)} \end{aligned}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. □

Bài toán 27.

Cho $a, b, c > 0$ và đặt $\mathcal{M} = \max\{(a^3 - b^3)^2, (b^3 - c^3)^2, (c^3 - a^3)^2\}$. Chứng minh rằng:

$$\mathcal{M} \leq a^6 + b^6 + c^6 - 3a^2b^2c^2 \leq 2\mathcal{M}$$

LỜI GIẢI.

Không mất tổng quát giả sử: $a \geq b \geq c$. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương:

$$\begin{aligned}
(a^3 - c^3)^2 &\leq a^6 + b^6 + c^6 - 3a^2b^2c^2 \leq 2(a^3 - c^3)^2 \\
\Leftrightarrow 0 &\leq b^6 + 2a^3c^3 - 3a^2b^2c^2 \leq (a^3 - c^3)^2 \\
\Leftrightarrow 0 &\leq (b^2 - ac)^2(b^2 + 2ac) \leq (a^3 - c^3)^2
\end{aligned}$$

Ta có:

$$(b^2 - ac)^2 \leq a^2(a - c)^2$$

Từ đó:

$$\begin{aligned}
(b^2 - ac)^2(b^2 + 2ac) &\leq a^2(a - c)^2(a^2 + 2bc) \\
&\leq (a - c)^2 \frac{(2a^2 + 2ac)^2}{4} \\
&= (a - c)^2(a^2 + ac)^2 \\
&\leq (a - c)^2(a^2 + ac + c^2)^2 \\
&= (a^3 - c^3)^2
\end{aligned}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. □

Bài toán 28.

Cho a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 4$$

Chứng minh rằng:

$$\sqrt[3]{\frac{a^3 + b^3}{2}} + \sqrt[3]{\frac{b^3 + c^3}{2}} + \sqrt[3]{\frac{c^3 + d^3}{2}} + \sqrt[3]{\frac{d^3 + a^3}{2}} \leq 2(a + b + c + d) - 4$$

LỜI GIẢI.

Theo bất đẳng thức AM-GM:

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{\frac{a^3 + b^3}{2}} &= 2\sqrt[3]{\frac{a + b}{4} \cdot \frac{a + b}{4} \cdot \frac{a^2 - ab + b^2}{a + b}} \\
&\leq \frac{2}{3} \left(\frac{a + b}{4} + \frac{a + b}{4} + \frac{a^2 - ab + b^2}{a + b} \right) \\
&\leq a + b - \frac{2ab}{a + b}
\end{aligned}$$

Hoàn toàn tương tự ta có:

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{\frac{b^3 + c^3}{2}} &\leq b + c - \frac{2bc}{b + c} \\ \sqrt[3]{\frac{c^3 + d^3}{2}} &\leq c + d - \frac{2cd}{c + d} \\ \sqrt[3]{\frac{d^3 + a^3}{2}} &\leq d + a - \frac{2da}{d + a}\end{aligned}$$

Vậy:

$$LHS \leq 2(a + b + c + d) - \frac{2ab}{a + b} - \frac{2bc}{b + c} - \frac{2cd}{c + d} - \frac{2da}{d + a}$$

Ta sẽ chứng minh:

$$2 \leq \frac{ab}{a + b} + \frac{bc}{b + c} + \frac{cd}{c + d} + \frac{da}{d + a}$$

Theo bất đẳng thức AM-HM:

$$\begin{aligned}RHS &= \frac{1}{1/a + 1/b} + \frac{1}{1/b + 1/c} + \frac{1}{1/c + 1/d} + \frac{1}{1/d + 1/a} \\ &\geq \frac{16}{2(1/a + 1/b + 1/c + 1/d)} \\ &= 2\end{aligned}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. □

to be continued ...

Chúc mừng năm mới