

VIETES THEOREM

AND ITS APPLICATIONS

Những người thực hiện:

- Phạm Hy Hiếu
- Nguyễn Anh Tuấn
- Phan Thiện Tôn
- Nguyễn Thị Xuân Ngọc
- Nguyễn Dương Bạch Mai
- Tôn Nữ Quỳnh Trân
- Nguyễn Mai Phương
- Quách Thuỷ Tiên
- Trần Ngọc Ngân
- Phan Huỳnh Anh
- Mai Nguyễn Minh Uyên

ĐỊNH LÝ VIỆT VÀ CÁC ỨNG DỤNG

1. Ị HẮC LẠI VÀ MỞ RỘNG MỘT SỐ VẤN ĐỀ VỀ ĐA THỨC:

1.1. Ị hắc lại về đa thức:

Hàm số $P(x): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ được gọi là một đa thức nếu $P(x) \equiv \text{const}$ hoặc $P(x)$ có dạng:

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

Khi đó, $a_0, a_1, \dots, a_n$ gọi là các hệ số của đa thức. a_n được gọi là hệ số cao nhất, a_0 được gọi là hệ số tự do.

Ị ếu $a_0 = 1$ thì đa thức $P(x)$ gọi là đa thức chuẩn tắc hay đa thức mơnic. Ị ếu $a_n \neq 0$ thì đa thức $P(x)$ gọi là đa thức bậc n và ta kí hiệu: $\deg P(x) = n$. Hi ển nhiên, nếu $P(x) \equiv 0$ thì $\deg P(x) = 0$.

Đề cho gọn, đôi khi người ta còn viết:

$$P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i = \sum_{i=0}^n b_i x^{n-i}$$

Cách viết đằng sau gọi là cách viết ngược, với $(b_0, b_1, \dots, b_n) = (a_n, a_{n-1}, \dots, a_0)$.

1.2. Đa thức trên các tập số:

Cho $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$. Khi đó, $\forall i = \overline{1, n}$:

Ị ếu $a_i \in \mathbf{M}$ thì ta nói $P(x) \in \mathbf{M}[x]$

Các trường hợp riêng:

Ị ếu $a_i \in \mathbf{R}$ thì ta nói $P(x) \in \mathbf{R}[x]$

Ị ếu $a_i \in \mathbf{Q}$ thì ta nói $P(x) \in \mathbf{Q}[x]$

Ị ếu $a_i \in \mathbf{Z}$ thì ta nói $P(x) \in \mathbf{Z}[x]$

Rất rõ ràng, $\mathbf{R}[x] \supset \mathbf{Q}[x] \supset \mathbf{Z}[x]$.

1.3. Các phép tính trên đa thức:

Cho 2 đa thức sau:

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{m-1}x^{m-1} + a_mx^m$$

$$Q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_{n-1}x^{n-1} + b_nx^n$$

Trong đó, $a_mb_n \neq 0$. Ta định nghĩa một số phép toán cơ bản trên đa thức như sau:

a. Các phép tính cơ bản:

Có 3 phép tính cơ bản thường dùng đối với 2 đa thức là phép cộng, kí hiệu là $P(x) + Q(x)$; phép trừ kí hiệu là $P(x) - Q(x)$ và phép hợp, kí hiệu là $P \circ Q(x) = P(Q(x))$

VD1.3a.1: Chứng minh rằng:

a. $\deg(P(x) \pm Q(x)) \leq \max\{m; n\}$

b. $\deg(P(x).Q(x)) = m + n$

c. $\deg(P \circ Q(x)) = mn$

Lời giải: Rõ ràng ta chỉ cần xét các hệ số cao nhất a_m và b_n của 2 đa thức.

a. Ị ếu $m > n$ thì đa thức $S(x) = P(x) + Q(x)$ có dạng:

$$S(x) = a_mx^m + a_{m-1}x^{m-1} + \dots + (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \dots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$$

Vì $a_m \neq 0$ nên theo định nghĩa, $\deg S(x) = m = \max\{m; n\}$

Tương tự với $m < n$, ta cũng có $\deg S(x) = n = \max\{m; n\}$

Ị ếu $m = n$, ta có: $S(x) = (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \dots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$

Do $S(x)$ có hệ số cao nhất là $c_n = a_n + b_n$ nên $\deg S(x) \leq n = \max\{m; n\}$, đẳng thức xảy ra khi $a_n + b_n = 0$.

Từ các trường hợp vừa xét, ta có $\deg(P(x) + Q(x)) \leq \max\{m; n\}$ (đpcm).

Với trường hợp $S'(x) = P(x) - Q(x)$, ta đặt $Q'(x) = -Q(x)$ thì $S'(x) = P(x) + Q(x)$ và theo điều vừa nói trên, ta cũng có $\deg(P(x) - Q(x)) \leq \max\{m; n\}$ (đpcm).

b. Số hạng cao nhất của $P(x).Q(x)$ là $a_mb_nx^{m+n}$, mà $a_mb_n \neq 0$ nên $\deg(P(x).Q(x)) = m + n$ (đpcm).

c. Ta có: $P \circ Q(x) = P(Q(x)) = a_mQ^m(x) + a_{m-1}Q^{m-1}(x) + \dots + a_1Q(x) + a_0$, mà theo câu b thì:

$$\deg(P(x) \circ Q(x)) = \deg Q^m(x) = \deg(Q(x).Q(x) \dots Q(x)) = n \deg Q(x) = nm \text{ (đpcm).}$$

b. Phép chia đa thức:

Cho 2 đa thức $f(x)$ và $g(x) \in \mathbf{R}[x]$ sao cho $\deg f(x) \geq \deg g(x)$.

Khi đó, tồn tại duy nhất hai đa thức $P(x)$ và $R(x) \in \mathbf{R}[x]$ sao cho $\deg R(x) < \deg g(x)$ và:

$$f(x) = g(x).P(x) + R(x)$$

$P(x)$ gọi là thương và $R(x)$ gọi là dư trong phép chia đa thức $f(x)$ cho đa thức $g(x)$

Chú ý rằng nếu $\deg f(x) < \deg g(x)$ thì $P(x) \equiv 0$ và $R(x) \equiv f(x)$.

Nếu $R(x) \equiv 0$ thì ta nói rằng $f(x)$ chia hết cho $g(x)$ hay $g(x)$ chia hết $f(x)$ và kí hiệu: $f(x) : g(x)$ hay $g(x) | f(x)$.

VD1.3b.1: Tìm dư trong phép chia $f(x) = x^{2007} + x + 1$ cho $g(x) = x^2 - 1$.

Lời giải:

Đặt: $f(x) = g(x).Q(x) + R(x)$. Vì $\deg g(x) = 2$ nên $\deg R(x) < 2$, do đó $R(x)$ là đa thức bậc nhất.

Lại đặt: $R(x) = ax + b$ với $a, b \in \mathbf{R}$. Lần lượt cho $x = 1$ và $x = -1$, với chú ý $g(1) = g(-1) = 0$, ta có:

$$\begin{cases} f(1) = g(1).Q(1) + a + b \\ f(-1) = g(-1).Q(-1) - a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 3 \\ -a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$$

Vậy đa thức dư trong phép chia cần tìm là $R(x) = x + 2$

1.4. ấ nghiệm của đa thức và một số vấn đề liên quan:

a. Định nghĩa:

Cho đa thức $f(x) \in \mathbf{R}[x]$. Giá trị $x_0 \in \mathbf{R}$ của x mà tại đó $f(x_0) = 0$ được gọi là nghiệm của đa thức $f(x)$.

b. Định lý Bézout:

Cho đa thức $f(x) \in \mathbf{R}[x]$. Khi đó x_0 là một nghiệm của $f(x)$ khi và chỉ khi $f(x) : (x - x_0)$

Chứng minh:

Xét đa thức $f(x) \in \mathbf{R}[x]$ và $g(x) = x - x_0$. Theo định nghĩa phép chia đa thức, tồn tại duy nhất 2 đa thức $Q(x)$ và $R(x)$ sao cho:

$$f(x) = g(x).Q(x) + R(x) = (x - x_0).Q(x) + R(x)$$

Vì $\deg R(x) < \deg g(x) = 1$ nên $R(x) \equiv \text{const}$. Đặt $R(x) = c$, ta có:

$$f(x) = (x - x_0).Q(x) + c \Rightarrow f(x_0) = c \Rightarrow f(x) = (x - x_0).Q(x) + f(x_0)$$

Theo định nghĩa về nghiệm của đa thức, x_0 là nghiệm của $f(x)$ khi và chỉ khi $f(x_0) = 0$, tức là:

$$f(x) = (x - x_0).Q(x)$$

Đó cũng chính là đpcm.

Hệ quả 1: đa thức bậc n không là đa thức hằng thì có không quá n nghiệm.

Chứng minh:

Giả sử đa thức $f(x) \in \mathbf{R}[x]$ có $\deg f(x) = n$ và có từ $n + 1$ nghiệm trở lên, là: $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$. Theo định lý Bézout, ta có: $f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{n+1}).g(x)$, suy ra $\deg f(x) \geq n + 1 > n$, mâu thuẫn.

Từ đây ta có đpcm.

Hệ quả 2: đa thức bậc n có nhiều hơn hoặc bằng $n + 1$ nghiệm là đa thức 0.

VD1.4b.1: (Công thức nội suy Lagrange)

Cho $f(x) \in \mathbf{R}[x]$ có $\deg f(x) = n$ và $n + 1$ số thực $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$. Chứng minh rằng:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_1) \frac{(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_{n+1})}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \dots (x_1 - x_{n+1})} + f(x_2) \frac{(x - x_1)(x - x_3) \dots (x - x_{n+1})}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3) \dots (x_2 - x_{n+1})} + \dots \\ &\quad + f(x_{n+1}) \frac{(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)}{(x_{n+1} - x_1)(x_{n+1} - x_2) \dots (x_{n+1} - x_n)} = \sum_{i=1}^{n+1} f(x_i) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \end{aligned}$$

Lời giải:

Xét đa thức:

$$g(x) = f(x) - \sum_{i=1}^{n+1} f(x_i) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Ta thấy $\deg g(x) \leq n$. Cho x lần lượt nhận các giá trị $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$, ta thấy $\forall i = \overline{1, n+1}$ thì:

$$g(x_i) = f(x_i) - f(x_i) = 0$$

Suy ra $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ là $n+1$ nghiệm của $g(x)$. Theo hệ quả 2 của định lý Bézout suy ra $g(x) \equiv 0$. Từ đó:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n+1} f(x_i) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Đó là đpcm.

Chú ý rằng từ công thức nội suy Lagrange được chứng minh trong ví dụ nêu trên, ta có 2 hệ quả quan trọng:

Â ếu đa thức bậc n xác định tại $n+1$ giá trị của biến thì nó xác định hoàn toàn.

Â ếu 2 đa thức có bậc không lớn hơn n và nhận giá trị bằng nhau tại $n+1$ điểm giá trị của biến thì chúng đồng nhất với nhau.

Ở phần sau, khi chứng minh định lý Viète và một số định lý quan trọng khác, ta sẽ sử dụng các hệ quả này.

1.5. Đa thức với hệ số nguyên, sự bất khả qui và tiêu chuẩn bất khả qui Einstein:

1.5.1. Đa thức với các hệ số nguyên:

Ở phần đầu, ta đã định nghĩa đa thức $P(x) \in \mathbf{Z}[x]$ là đa thức có các hệ số nguyên (hay đa thức nguyên) nếu và chỉ nếu: $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ đồng thời $a_i \in \mathbf{Z}, \forall i = \overline{1, n}$

1.5.2. Sự bất khả qui của đa thức và tiêu chuẩn bất khả qui Einstein:

a. Định nghĩa:

Đa thức $P(x) \in \mathbf{Z}[x]$ gọi là bất khả qui trên $\mathbf{Z}[x]$ nếu và chỉ nếu $P(x)$ không phân tích được thành tích của 2 đa thức cũng thuộc $\mathbf{Z}[x]$.

b. Định lý về sự bất khả qui của đa thức:

Cho đa thức $P(x) \in \mathbf{Z}[x]$ và $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$. Khi đó, nếu tồn tại số nguyên tố p thoả mãn điều kiện $\forall k = \overline{0, n}$:

$$\begin{cases} p \nmid a_n \\ p \mid a_k, a_{k-1}, \dots, a_0 \\ p^2 \nmid a_0 \end{cases}$$

Đồng thời $P(x)$ phân tích được thành tích của 2 đa thức cũng thuộc $\mathbf{Z}[x]$ thì ít nhất một trong 2 đa thức trên có bậc không nhỏ hơn $k+1$.

Chứng minh:

Giả sử $P(x) = Q(x)K(x)$ với:

$$\begin{aligned} Q(x) &= b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0 \\ K(x) &= c_{n-m} x^{n-m} + c_{n-m+1} x^{n-m+1} + \dots + c_1 x + c_0 \end{aligned}$$

là các đa thức thuộc $\mathbf{Z}[x]$.

Ta có $a_n = b_m c_{n-m}$ là số chia hết cho p nhưng không chia hết cho p^2 nên trong 2 số b_m và c_{n-m} , có đúng một số chia hết cho p . Giả sử $b_m : p$ còn c_{n-m} thì không.

Gọi i_0 là số nhỏ nhất mà b_{i_0} không chia hết cho p với $0 < i_0 \leq m$

Vì $a_{i_0} = c_{n-m}b_{i_0} + c_{n-m+1}b_{i_0-1} + \dots$ mà a_{i_0} không chia hết cho p nên $i_0 \geq k + 1$.

Mà $m \geq i_0$ nên $m \geq k + 1$. Đó chính là đpcm.

c. Tiêu chuẩn bất khả qui Einstein:

Trong định lý trên, cho $k = n - 1$ thì ta có định lý sau:

Cho đa thức $P(x) \in \mathbf{Z}[x]$ và $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$. Khi đó, nếu tồn tại số nguyên tố p thoả mãn:

$$\begin{cases} a_n \text{ không chia hết cho } p \\ a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_0 \text{ chia hết cho } p \\ a_0 \text{ không chia hết cho } p^2 \end{cases}$$

thì đa thức $P(x)$ bất khả qui trên $\mathbf{Z}[x]$

Định lý này được gọi là tiêu chuẩn bất khả qui Einstein. ấ ó rất hữu dụng trong việc giải các bài toán Số Học trên đa thức.

1.6. Phương trình đại số và các định nghĩa liên quan:

Cho đa thức $P(x) \in \mathbf{R}[x]$ và $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$.

Khi đó, mệnh đề chứa biến: " $P(x) = 0$ " được gọi là một phương trình đại số bậc n (hay phương trình bậc n). x gọi là ẩn, các hệ số $a_0, a_1, \dots, a_n$ được gọi là các hệ số của phương trình. Các giá trị $x_1, x_2, \dots, x_k$ của x làm cho mệnh đề đúng được gọi là nghiệm của phương trình. Tập hợp các giá trị ấy gọi là tập nghiệm của phương trình. Công việc đi tìm tập nghiệm của một phương trình được gọi là giải phương trình ấy.

2. ĐẦ H LÝ VIÈTE:

2.1. Các đa thức đối xứng sơ cấp và vai trò của chúng:

Đa thức n biến $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ được gọi là đa thức đối xứng giữa n biến ấy nếu với mọi hoán vị $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ của bộ số $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, ta đều có: $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(y_1, y_2, \dots, y_n)$.

Các đa thức đối xứng là một bộ phận rất quan trọng của tập hợp các đa thức nhiều biến. Khi xét đến các đa thức đối xứng này, ta thường nói đến những đa thức đối xứng sơ cấp. Đó là các đa thức có dạng:

$$\begin{aligned} E_n^1(x) &= x_1 + x_2 + \dots + x_n = \sum_{i=1}^n x_i \\ E_n^2(x) &= x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_1 x_n + x_2 x_3 + x_2 x_4 + \dots + x_2 x_n + \dots + x_{n-1} x_n = \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j \\ &\dots \dots \dots \\ E_n^k(x) &= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k} = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \left(\prod_{j=1}^k x_{i_j} \right) \\ &\dots \dots \dots \\ E_n^n(x) &= x_1 x_2 \dots x_n = \prod_{i=1}^n x_i \end{aligned}$$

$E_n^k(x)$ gọi là hàm đa thức đối xứng bậc k tương ứng của n biến và là một tổng gồm C_n^k các số hạng bậc k . Mỗi số hạng là tích của k biến từ n biến $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ và được gọi là tích chập k của n biến phần tử. Trong một số tài liệu, biểu thức $E_n^k(x)$ còn được gọi là các đa thức Viète.

Một số đa thức đối xứng sơ cấp thường gặp là:

$$\begin{aligned} E_2^1(x) &= x_1 + x_2, E_2^2(x) = x_1 x_2 \\ E_3^1(x) &= x_1 + x_2 + x_3, E_3^2(x) = x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1, E_3^3(x) = x_1 x_2 x_3 \end{aligned}$$

Vai trò của các đa thức đối xứng sơ cấp nói trên trong Đại Số là hết sức quan trọng. Chúng ta sẽ thấy rõ điều ấy qua định lý sau đây:

Định lý cơ bản của Đại Số: Mọi đa thức đối xứng đều có thể biểu diễn được qua các đa thức đối xứng sơ cấp. Định lý này đối với trường hợp đa thức n biến $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ bản thân tôi chưa tìm ra cách chứng minh. Tôi chỉ có thể đưa ra cách chứng minh đối với trường hợp $n = 3$ và từ đó, hệ quả là trong trường hợp $n = 2$ định lý cũng vẫn đúng.

Chứng minh (đối với trường hợp $n = 3$):

Trong trường hợp $n = 3$, định lý được phát biểu như sau:

Mọi đa thức đối xứng $f(x, y, z)$ đều viết được dưới dạng đa thức đối xứng 3 biến Viète, tức là ở dạng:

$$f(x, y, z) = H(p, q, r)$$

Với $p = x + y + z$, $q = xy + yz + zx$ và $r = xyz$

Thật vậy, nhận xét rằng với mỗi bộ số mũ (i, j, k) cố định thì các hệ số tương ứng với $x^m y^n z^p$ với mọi hoán vị (m, n, p) của (i, j, k) đều phải bằng nhau. (Vì giả sử ngược lại, tức là các hệ số tương ứng với $x^m y^n z^p$ khác nhau thì đa thức không còn đối xứng giữa x, y, z) Do đó, ta chỉ cần chứng minh định lý cho trường hợp:

$$f(x, y, z) = x^i y^j z^k + x^i y^k z^j + x^j y^k z^i + x^j y^i z^k + x^k y^i z^j + x^k y^j z^i$$

Với $i = j = 0$ và $k = n$, ta xét biểu thức:

$$S_n = x^n + y^n + z^n$$

Khi đó, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$ ta có:

$$S_{n+1} = pS_n - qS_{n-1} + rS_{n-2}$$

Vậy bằng nguyên lý quy nạp toán học, ta suy ra với mọi đa thức có dạng $S_n = x^n + y^n + z^n$ đều có thể được biểu diễn qua các đa thức đối xứng 3 biến Viète. Từ đó, ta suy ra đa thức có dạng:

$$T_{2n}(x, y, z) = (xy)^n + (yz)^n + (zx)^n$$

Tức là ứng với bộ số mũ $i = 0, j = k = n$, các đa thức ấy cũng có thể được biểu diễn ở dạng:

$$T_{2n} = K(p', q', r')$$

Với $p' = xy + yz + zx$, $q' = (xy)(yz) + (yz)(zx) + (zx)(xy) = xyz(x + y + z)$

và $r' = (xy)(yz)(zx) = (xyz)^2$.

Xét trường hợp $i = 0, j = m > n = k$, ta có đa thức:

$$T_{m,n}(x, y, z) = x^n(y^m + z^m) + y^n(z^m + x^m) + z^n(x^m + y^m)$$

ả hưng đa thức trên có thể được viết dưới dạng:

$$T_{m,n}(x, y, z) = T_n S_{m-n} r^{m-n} T_{2n}$$

Vậy $T_{m,n}(x, y, z)$ có thể được biểu diễn thông qua p, q, r .

Cuối cùng, xét trường hợp i, j, k khác nhau đôi một. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $0 < i < j < k$.

Trong trường hợp ấy, ta có:

$$f(x, y, z) = x^i y^j z^k + x^i y^k z^j + x^j y^k z^i + x^j y^i z^k + x^k y^i z^j + x^k y^j z^i = r^i (S_{k-i} T_{j-i} - r^{k-j} T_{k+2j-i})$$

Vậy định lý được chứng minh.

ả hư vậy, có thể coi các đa thức đối xứng sơ cấp nêu trên là “chiếc cầu nối” dẫn chúng ta từ chỗ các đa thức đối xứng nói chung khó nghiên cứu về trường hợp các đa thức đối xứng sơ cấp cơ bản, thuần nhất và dễ nghiên cứu hơn nhiều. Chúng ta sẽ hiểu rõ hơn về vai trò của các đa thức đối xứng này qua định lý Viète được trình bày ở phần sau, cũng là đề tài chính của bài báo cáo này.

Đối với trường hợp 3 biến số a, b, c , người ta thường đặt $p = a + b + c$, $q = ab + bc + ca$ và $r = abc$. Từ đó mà hình thành một phương pháp chứng minh các bất đẳng thức Đại Số mang tên “ p, q, r ”. Chúng ta sẽ tìm hiểu kĩ hơn về phương pháp “ p, q, r ” ở phần sau.

Trong phương pháp này, khi $a, b, c \geq 0$, ta chú ý đến một số cơ sở sau:

- $p^3 - 4pq + 3r \geq 0$ (tương đương với $a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a)$)
- $p^4 - 5p^2q + 4q^2 + 6pr \geq 0$ (tương đương với $a^2(a - b)(a - c) + b^2(b - c)(b - a) + c^2(c - a)(c - b) \geq 0$)
- $p^3 \geq 27r$, $q^3 \geq 27r^2$ (lần lượt tương đương với $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$ và $ab + bc + ca \geq 3\sqrt[3]{(abc)^2}$)
- $pq \geq 9r$ (tương đương với $(a + b + c)(ab + bc + ca) \geq 9abc$)

VD2.1a.1: (Bulgari MO 1998)

Cho $a, b, c \geq 0$ thoả $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1+a+b} + \frac{1}{1+b+c} + \frac{1}{1+c+a} \leq \frac{1}{2+a} + \frac{1}{2+b} + \frac{1}{2+c}$$

Lời giải:

Đặt $p = a + b + c$, $q = ab + bc + ca$ và $r = abc = 1$. Ta có:

$$\begin{aligned} VT &= \frac{1}{p+1-a} + \frac{1}{p+1-b} + \frac{1}{p+1-c} \\ &= \frac{(1+a+b)(1+b+c) + (1+b+c)(1+c+a) + (1+c+a)(1+a+b)}{(p+1-a)(p+1-b)(p+1-c)} \\ &= \frac{p^2 + 4p + 3 + q}{p^2 + 2p + pq + q} \\ VP &= \frac{1}{2+a} + \frac{1}{2+b} + \frac{1}{2+c} = \frac{4p + q + 12}{4p + 2q + 9} \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$\begin{aligned} \frac{p^2 + 4p + 3 + q}{p^2 + 2p + pq + q} &\leq \frac{4p + q + 12}{4p + 2q + 9} \\ \Leftrightarrow \frac{q-3}{4p+2q+9} &\leq \frac{pq-2p-3}{p^2+2p+pq+q} \\ \Leftrightarrow (q-3)(p^2+2p+pq+q) &\leq (pq-2p-3)(4p+2q+9) \\ \Leftrightarrow (3q-5)p^2 + (p-1)q^2 + 6pq &\geq 24p + 3q + 27 \end{aligned}$$

Mặt khác do $r = 1$ và theo bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} \\ ab + bc + ca \geq 3\sqrt[3]{(abc)^2} \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} a + b + c \geq 3 \\ ab + bc + ca \geq 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Hay $p, q \geq 3$, do đó:

$$VT \geq 4p^2 + 2q^2 + 6pq \geq 12p + 6(q-1)p + 6p + 2q^2 \geq 24p + 3q + (q^2 + 6q) \geq VP$$

Vậy ta có đpcm, và đẳng thức chỉ xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Bây giờ chúng ta hãy đến với định lý Viète.

2.2. Định lý Viète:

a. Đôi nét về François Viète:

François Viète, còn được nhiều người biết đến với tên tiếng La tinh là Vieta, ông sinh năm 1540 tại Fontenay-le-Comte, Pháp. Thuở nhỏ ông học ở một trường dòng và sau đó tiếp tục học luật ở trường Đại học Poitiers ngay tại quê nhà. Ông sớm nổi bật lên bởi sự khôn ngoan, sắc sảo trong những lần tham vấn về luật pháp cho những người lỗi lạc, sau đó không lâu ông trở thành cố vấn hoàng gia cho Vua Henry III và Henry IV của Pháp. Vào những lúc rảnh rỗi, ông nghiên cứu toán học và tự xuất bản những kết quả mà ông gặt hái được. Ông được mệnh danh là cha đẻ của ngành số học hiện đại và là nhà toán học lỗi lạc nhất của thế kỷ 16.

Những câu chuyện sau sẽ phần nào mô tả một chút tính cách của ông. Trong thời gian làm việc cho vua Henry III, ông đã tìm ra chìa khóa mật mã của người Tây Ban Nha dài 500 kí tự và đọc được thư từ bí mật của quân đội kẻ thù. Vua Philipp II của Tây Ban Nha vẫn tin chắc rằng mật mã của mình là bất khả xâm phạm, không ai có thể giải mã được nên khi nghe tin đó, ông ta đã phẫn nản với Đức giáo hoàng rằng người Pháp đã sử dụng ma thuật để chống lại ông ta và điều đó trái với những bài học tốt đẹp của Chúa.

Khả năng xử xử khéo léo của Viète được minh họa trong câu chuyện về Françoise de Rohan, người em họ của Henry III. Bà đã hứa hôn với công tước J. de Nemours và có một con trai với ông nhưng sau đó, ông này lại cưới một người phụ nữ khác là Anne d'Este. Françoise muốn ông ta công bố là chồng hợp pháp của mình còn đứa con cùng Anne chỉ là con hoang. Viète đã tìm ra giải pháp: Nghị viện tuyên bố Françoise là vợ hợp pháp của Nemours và trao cho bà ta những quyền lợi của một công tước và đồng thời cuộc hôn nhân của Anne và Nemours bị huỷ bỏ để đảm bảo Anne và con cô ta sẽ không bị tổn hại nào về danh dự hay quyền lợi.

Khả năng toán học của Viète bắt đầu lộ diện trong sự việc sau vào mùa hè năm 1594. Nhà toán học người Bỉ A. van Roomen đưa ra thách thức cho tất cả những nhà toán học đương thời về lời giải cho một phương trình bậc 45. Đại sứ Hà Lan dâng cho vua Henry IV cuốn sách của van Roomen với lời bình luận rằng dường như nước Pháp không có một nhà toán học nào quan trọng. Nhà vua cho gọi Viète và ngay sau đó ông đã lập tức tìm ra lời giải cho bài toán, vào ngày hôm sau, ông tìm ra hơn 22 cách giải nữa.

Đáp lại Van Roomen, Viète thách thức ông giải bài toán Apollonius tìm ra cách xây dựng 1 đường tròn tiếp xúc với 3 tam giác cho trước. Khi Adrianus Romanus tìm ra lời giải sử dụng 2 hyperbolas, Viète không hài lòng lắm với lời giải đó vì nó xa lạ với hình học mà theo ông chỉ cần dùng hình học phẳng, chỉ với những đường tròn và đường thẳng. Sau đó, ông đã đưa ra lời giải tổng quát cho bài toán tiếp tuyến với một phương pháp thuần chất hình học và xuất bản một cuốn sách nhỏ với tựa đề Apollonius Gallus năm 1600 ở Paris. Adrianus cảm thấy rất hài lòng và hứng thú nên ngay sau đó ông lên đường đến Pháp để gặp Viète và có một tình bạn mật thiết với Viète.

Lấy làm ngạc nhiên vì sao một luật sư bận rộn như Viète lại có thể dành nhiều thời gian đến thế cho toán học. Theo một nhà sử học đương thời, vào năm 1620, sự suy tư dành cho toán học của Viète sâu sắc đến nỗi suốt 3 ngày liền ông ngồi trên bàn làm việc, không ăn, không ngủ, ngoại trừ ngả đầu vào khuỷu tay và thiếp đi, cũng không nghỉ ngơi một chút nào. Viète mất năm 1603, chỉ 2 tháng sau khi vua cho ông nghỉ hưu.

b. Định lý Viète:

Cho đa thức $f(x) \in \mathbf{R}[x]$ xác định như sau: $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ ($a_n \neq 0$) và bộ số thực $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ (không nhất thiết phải hoàn toàn phân biệt lẫn nhau, trong trường hợp đa thức có nhiều nghiệm bằng nhau). Khi đó, $x_1, x_2, \dots, x_n$ là n nghiệm của $f(x)$ khi và chỉ khi chúng thỏa mãn hệ điều kiện sau:

$$\begin{aligned}\frac{(-1)^{n-1}a_1}{n} &= \frac{x_2x_3 \dots x_n + x_1x_3 \dots x_n + \dots + x_1x_2 \dots x_{n-1}}{n} \geq (x_1x_2 \dots x_n)^{\frac{n-1}{n}} \\ &\Rightarrow (-1)^{n-1}a_1 \geq n((-1)^na_0)^{\frac{n-1}{n}} \\ &\Rightarrow \left(\frac{a_1}{n}\right)^n \geq a_0^{n-1}\end{aligned}$$

Đó chính là đpcm.

VD2.2b.2: Cho phương trình: $ax^4 - ax^3 + bx^2 - cx + d = 0$ (*). Biết rằng phương trình (*) có 4 nghiệm trong khoảng $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ và $a, b, c, d > 0$. Chứng minh rằng:

$$21a + 164c \geq 80b + 320d$$

Lời giải:

Gọi x_1, x_2, x_3, x_4 là 4 nghiệm của phương trình (*). Theo định lý Viète ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = \frac{b}{a} \\ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = \frac{c}{a} \\ x_1x_2x_3x_4 = \frac{d}{a} \end{cases}$$

Vì $a > 0$ nên bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$\begin{aligned}21 + 164\frac{c}{a} &\geq 80\frac{b}{a} + 320\frac{d}{a} \\ \Leftrightarrow 21 + 164(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4) \\ &\geq 80(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4) + 320(x_1x_2x_3x_4) \\ \Leftrightarrow 81(1 - 2x_1)(1 - 2x_2)(1 - 2x_3)(1 - 2x_4) &\leq (1 + 2x_1)(1 + 2x_2)(1 + 2x_3)(1 + 2x_4)\end{aligned}$$

Do giả thiết $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ nên $(1 - 2x_1), (1 - 2x_2), (1 - 2x_3), (1 - 2x_4) > 0$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\begin{aligned}(1 - 2x_1)(1 - 2x_2)(1 - 2x_3) &\leq \left(\frac{1 - 2x_1 + 1 - 2x_2 + 1 - 2x_3}{3}\right)^3 = \left(\frac{1 + 2x_4}{3}\right)^3 \\ \Rightarrow 0 < 27(1 - 2x_1)(1 - 2x_2)(1 - 2x_3) &\leq (1 + 2x_4)^3 \quad (1)\end{aligned}$$

Lý luận tương tự ta có:

$$\begin{cases} 0 < 27(1 - 2x_2)(1 - 2x_3)(1 - 2x_4) \leq (1 + 2x_1)^3 \quad (2) \\ 0 < 27(1 - 2x_3)(1 - 2x_4)(1 - 2x_1) \leq (1 + 2x_2)^3 \quad (3) \\ 0 < 27(1 - 2x_4)(1 - 2x_1)(1 - 2x_2) \leq (1 + 2x_3)^3 \quad (4) \end{cases}$$

Nhân theo vế các bất đẳng thức (1), (2), (3) và (4) rồi rút gọn, ta có:

$$81(1 - 2x_1)(1 - 2x_2)(1 - 2x_3)(1 - 2x_4) \leq (1 + 2x_1)(1 + 2x_2)(1 + 2x_3)(1 + 2x_4)$$

Và đó chính là đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi:

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{3}{8}; \frac{c}{a} = \frac{1}{16}; \frac{d}{a} = \frac{1}{256}$$

VD2.2b.3: Tồn tại hay không một tập hợp $\mathbf{M}$ gồm hữu hạn các số thực dương sao cho ứng với mỗi $n \in \mathbf{Z}^+$ đều tồn tại đa thức $f(x) \in \mathbf{M}[x]$ sao cho $\deg f(x) = n$ và $f(x)$ có đúng n nghiệm đều thuộc $\mathbf{M}$.

Lời giải:

Giả sử tồn tại tập hợp $\mathbf{M} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ trong đó $a = a_1 < a_2 < \dots < a_n = b$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Khi đó, theo giả thiết thì tồn tại đa thức:

$$P(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 + b_0 \in \mathbf{M}[x]$$

sao cho $P(x)$ có n nghiệm $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbf{M}$. Theo định lý Viète ta có:

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 = \left(-\frac{b_{n-1}}{b_n}\right)^2 - 2\frac{b_{n-2}}{b_n} < \left(-\frac{b_{n-1}}{b_n}\right)^2 + 2\frac{|b_{n-2}|}{|b_n|}$$

ảnh hưởng do $b_{n-2}, b_{n-1}, b_n \in \mathbf{M} \subset [a; b]$ nên:

$$na^2 \leq \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq \left(\frac{b}{a}\right)^2 + 2\frac{b}{a}, \forall n \in \mathbf{N}^*$$

Điều này không thể xảy ra khi ta tăng giá trị của n đến vô cùng.

Vì vậy mà không tồn tại một tập hợp $\mathbf{M}$ nào thỏa điều kiện của bài toán đưa ra cả.

VD2.2b.4: Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ có dạng như sau:

$$P(x) = x^n + \sum_{k=1}^n (-1)^k C_n^k a_k^k x^{n-k}$$

và nhận các số thực $a_1, a_2, \dots, a_n$ làm nghiệm. Ở đây, $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ là số tổ hợp chập k của n phần tử.

Lời giải:

Xét đa thức $P(x)$ thỏa điều kiện như vậy. Theo định lý Viète thì:

$$C_n^k a_k^k = E_n^k(a) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k}, \forall k = \overline{1, n}$$

(tổng này gồm C_n^k số hạng).

Xét số a_k thỏa điều kiện $|a_k| = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_n|\}$

Khi đó:

$$\begin{aligned} C_n^k |a_k|^k = E_n^k(a) &= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} |a_{i_1}| |a_{i_2}| \dots |a_{i_k}| \leq C_n^k |a_k|^k, \forall k = \overline{1, n} \\ \Leftrightarrow \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} |a_{i_1}| |a_{i_2}| \dots |a_{i_k}| &= C_n^k |a_k|^k, \forall k = \overline{1, n} \end{aligned}$$

Suy ra $|a_1| = |a_2| = \dots = |a_n|$. Mặt khác, cũng theo định lý Viète: $|a_1 + a_2 + \dots + a_n| = n|a_1|$

Vì thế $a_1, a_2, \dots, a_n$ cùng dấu. Vậy $a_1 = a_2 = \dots = a_n = a$ và ta có đa thức $P(x)$ cần tìm là:

$$P(x) = (x - a)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k x^{n-k}$$

Các ví dụ trên cho ta thấy ứng dụng của định lý Viète đối với trường hợp tổng quát của đa thức bậc n và trường hợp riêng đối với $n = 4$. Song, 2 trường hợp riêng rất thường gặp của định lý Viète là:

Đối với phương trình bậc 2: $ax^2 + bx + c = 0$. x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình khi và chỉ khi:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

Đối với phương trình bậc 3: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. x_1, x_2, x_3 là 3 nghiệm của phương trình khi và chỉ khi:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}; x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = \frac{c}{a}; x_1 x_2 x_3 = -\frac{d}{a}$$

Ta sẽ xét một số bài toán ví dụ cho việc ứng dụng định lý Viète đối với phương trình bậc 2 và bậc 3 ở phần sau.

3. CÁC ỨNG DỤNG CỦA ĐẠNG THỨC VIỆT:

3.1. Định lý Viète với phương trình bậc 2:

a. Liên hệ giữa các nghiệm của một phương trình bậc 2:

Cho phương trình bậc 2: $ax^2 + bx + c = 0$. Khi đó, dựa vào định lý cơ bản của Đại Số, ta thấy mọi biểu thức đối xứng giữa x_1 và x_2 đều có thể được biểu diễn theo 2 đại lượng:

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}; P = x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

Do đó, ta có thể tính theo tham số (hoặc các hệ số cụ thể) cho trước các nghiệm của phương trình bậc 2 mà không cần phải tính cụ thể các nghiệm ấy ra. Điều này không chỉ hữu ích khi bài toán cho phương trình chứa tham số mà còn rất có ý nghĩa khi các nghiệm của phương trình tìm ra được quá phức tạp.

Ta hãy xét một số bài toán:

VD3.1a.1: Cho phương trình bậc 2: $x^2 + ax + b = 0$ có các nghiệm x_1, x_2 . Tính theo a và b các biểu thức sau:

a. $x_1^2 + x_2^2$

b. $|x_1 - x_2|$

c. $x_1^3 + x_2^3$

Lời giải:

Theo định lý Viète, ta có: $x_1 + x_2 = -a$ và $x_1 x_2 = b$. Vì thế:

a. $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = a^2 - 2b$

b. $(x_1 - x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2 = a^2 - 2b - 2b = a^2 - 4b \Rightarrow |a - b| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{a^2 - 4b}$

c. $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2) = (x_1 + x_2)((x_1 + x_2)^2 - x_1 x_2) = (-a)(a^2 - b) = ab - a^3$

VD3.1a.2: Cho phương trình $x^2 + mx + n = 0$ có $3m^2 = 16n$. Chứng minh rằng trong 2 nghiệm của phương trình, có một nghiệm bằng 3 lần nghiệm còn lại.

Lời giải:

Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình đã cho. Theo định lý Viète và giả thiết, ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -m \\ x_1 x_2 = n \\ 3m^2 = 16n \end{cases}$$

Suy ra: $3(x_1 + x_2)^2 - 16x_1 x_2 = 0 \Leftrightarrow 3x_1^2 - 10x_1 x_2 + 3x_2^2 = 0 \Leftrightarrow (3x_1 - x_2)(x_1 - 3x_2) = 0$

Tức là $x_1 = 3x_2$ hoặc $x_2 = 3x_1$.

Đó chính là đpcm.

VD3.1a.3: Cho phương trình bậc 2: $ax^2 + bx + c = 0$. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để phương trình đã cho có 1 nghiệm bằng k lần nghiệm kia là: $kb^2 = (k + 1)^2 ac$ (*).

Lời giải:

Phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$.

Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình đã cho. Khi đó, nghiệm này bằng k lần nghiệm kia khi và chỉ khi:

$$\begin{aligned} x_1 - kx_2 &= 0 \vee kx_1 - x_2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x_1 - kx_2)(kx_1 - x_2) = 0 \\ &\Leftrightarrow x_1 x_2 (k^2 + 1) - k(x_1^2 + x_2^2) = 0 \\ &\Leftrightarrow (k^2 + 1)x_1 x_2 - ((x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2)k = 0 \\ &\Leftrightarrow (k^2 + 2k + 1)x_1 x_2 = k(x_1 + x_2)^2 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (k+1)^2 \frac{c}{a} = k \frac{b^2}{a^2} \text{ (định lý Viète)}$$

$$\Leftrightarrow kb^2 = (k+1)^2 ac$$

Bây giờ, giả sử ta đã có hệ thức (*), do các biến đổi kể trên là biến đổi tương đương 2 chiều nên ta chỉ cần chứng minh rằng phương trình đã cho cũng có nghiệm. Thật vậy:

Nếu $ac < 0$ thì phương trình đã cho ắt có nghiệm.

Nếu $ac \geq 0$, từ hệ thức (*) và bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$b^2 = \frac{(k+1)^2}{k} ac \geq \frac{4k}{k} ac = 4ac \Rightarrow \text{ khi } \Delta = b^2 - 4ac \geq 0$$

Vậy từ hệ thức (*) ta suy ra được phương trình đã cho có nghiệm.

Đến đây, ta kết thúc chứng minh.

VD3.1a.4: Cho biết rằng phương trình $x^2 - (m+2)x + (2m-1) = 0$ có các nghiệm là x_1, x_2 . Lập một hệ thức giữa x_1 và x_2 độc lập với m .

Lời giải:

Ta có: $\Delta = (m+2)^2 - 4(2m-1) = m^2 + 4m + 4 - 8m + 4 = (m-2)^2 + 4 > 0$ nên phương trình đã cho luôn có nghiệm $\forall m \in \mathbf{R}$.

Theo định lý Viète ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m + 2 \\ x_1 x_2 = 2m - 1 \end{cases}$$

Suy ra: $2m = 2x_1 + 2x_2 - 4 = x_1 x_2 + 1$, tức là: $2x_1 + 2x_2 - x_1 x_2 = 5$.

Vậy hệ thức giữa x_1, x_2 độc lập với m là $2x_1 + 2x_2 - x_1 x_2 = 5$.

VD3.1a.5: Cho phương trình $x^2 + ax + 1 = 0$ có 2 nghiệm là x_1, x_2 và phương trình $x^2 + bx + 1 = 0$ có 2 nghiệm là x_3, x_4 . Chứng minh rằng: $(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)(x_1 - x_4)(x_2 - x_4) = b^2 - a^2$.

Lời giải:

Theo định lý Viète, ta có:

$$\begin{aligned} (x_1 - x_3)(x_2 - x_3)(x_1 - x_4)(x_2 - x_4) &= (x_3^2 - (x_1 + x_2)x_3 + x_1 x_2)(x_4^2 - (x_1 + x_2)x_4 + x_1 x_2) \\ &= (x_3^2 + ax_3 + 1)(x_4^2 + bx_4 + 1) \text{ (định lý Viète)} \\ &= (x_3^2 + bx_3 + 1 + (a-b)x_3)(x_4^2 + bx_4 + 1 - (a-b)x_4) \\ &= -x_3 x_4 (a-b)(a+b) \text{ (vì } x_3, x_4 \text{ là các nghiệm của PT } x^2 + bx + 1 = 0) \\ &= b^2 - a^2 \text{ (vì theo định lý Viète thì } x_3 x_4 = 1) \end{aligned}$$

Vậy $(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)(x_1 - x_4)(x_2 - x_4) = b^2 - a^2$ (đpcm).

VD3.1a.6: Cho phương trình $3x^2 + 4(m-1)x + m^2 - 4m + 1 = 0$. Tìm m để phương trình có các nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa điều kiện:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$$

Lời giải:

Phương trình có 2 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi: $\Delta' \geq 0$

$$\Leftrightarrow 4(m-1)^2 - 3(m^2 - 4m + 1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 4m + 1 \geq 0$$

Trong điều kiện ấy, theo định lý Viète, ta có:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (x_1 + x_2) \left(\frac{1}{x_1 x_2} - \frac{1}{2} \right) = 0 \\
&\Leftrightarrow x_1 + x_2 = 0 \vee x_1 x_2 = 2 \\
&\Leftrightarrow \frac{-4}{3}(m-1) = 0 \vee 3(m^2 - 4m + 1) = 2 \\
&\Leftrightarrow m = 1 \vee m = 2 + \sqrt{5} \vee m = 2 - \sqrt{5}
\end{aligned}$$

Vì tất cả các giá trị trên của m đều thoả $\Delta'_1 \geq 0$ nên $m \in \{1; 2 + \sqrt{5}; 2 - \sqrt{5}\}$

VD3.1a.7: Cho phương trình:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} = 0 \quad (1)$$

Với $a, b > 0$. Chứng minh rằng (1) có 2 nghiệm phân biệt $x_1 > x_2$ và $\frac{a}{2} < x_1 < \frac{2a}{3}$; $-\frac{2b}{3} < x_2 < -\frac{b}{3}$.

Lời giải:

ĐKXD của phương trình là: $x \neq 0; a; b$. Trong điều kiện ấy, (1) tương đương với:

$$3x^2 - 2(a-b)x - ab = 0 \quad (1')$$

Vì (1') có A, C trái dấu nên nó ắt có 2 nghiệm phân biệt cũng trái dấu, mặt khác: $x = 0; x = a; x = b$ đều không là nghiệm của (1') nên tất cả các nghiệm của (1') đều là nghiệm của (1).

Gọi $x_1 > 0 > x_2$ là 2 nghiệm phân biệt của (1)

Ta có:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_1 + b} &= \frac{1}{a - x_1} > 0 \Rightarrow a - x_1 > 0 \\
&\Rightarrow \frac{1}{a - x_1} > \frac{1}{x_1} \quad (\text{vì } \frac{1}{x_1 + b} > 0) \\
&\Rightarrow x_1 > a - x_1 \\
&\Rightarrow x_1 > \frac{a}{2}
\end{aligned}$$

Mặt khác: $b > 0$ nên:

$$\frac{1}{x_1 + b} < \frac{1}{x_1} \Rightarrow \frac{1}{a - x_1} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_1 + b} < \frac{2}{x_1} \Rightarrow x_1 < 2a - 2x_1 \Rightarrow x_1 < \frac{2a}{3}$$

Vậy ta có:

$$\frac{a}{2} < x_1 < \frac{2a}{3}$$

Lý luận tương tự ta cũng có:

$$-\frac{2b}{3} < x_2 < -\frac{b}{3}$$

Và đó chính là đpcm.

VD3.1a.8: Cho phương trình bậc 2: $(m-1)x^2 + 2mx + m+1 = 0$. Tìm m để phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 thoả điều kiện: $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 = 2m$

Lời giải:

Phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi: $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m^2 - (m-1)(m+1) \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq 0$ (đúng $\forall m \in \mathbf{R}$)

Theo định lý Viète, ta có:

$$\begin{aligned}
x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 &= 2m \\
&\Leftrightarrow x_1 x_2 (x_1 + x_2) = 2m
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \frac{-(m+1)}{m-1} \cdot \frac{-2m}{m-1} = 2m \\ &\Leftrightarrow 2m(m-1)^2 - 2m(m+1) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2m(m^2 - 2m + 1 - m - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow m^2(m-3) = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow m = 0 \text{ hoặc } m = 3 \text{ (đều thỏa điều kiện } \Delta' \geq 0)$$

Vậy $m = 0$ và $m = 3$ là các giá trị của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

VD3.1a.9:

a. Cho phương trình $x^2 - ax + 1 = 0$. Tính giá trị của biểu thức: $S = x_1^7 + x_2^7$

b. Lập một đa thức bậc 7 nhận $\alpha = \sqrt[7]{\frac{3}{5}} + \sqrt[7]{\frac{5}{3}}$ làm nghiệm.

Lời giải:

a. Kí hiệu $S_n = x_1^n + x_2^n$. Theo định lý Viète, ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = a \\ x_1 x_2 = 1 \end{cases}$$

Từ đó:

$$\begin{aligned} S_2 &= x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = a^2 - 2 \\ S_4 &= x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2 x_2^2 = (a^2 - 2)^2 - 2 = a^4 - 4a^2 + 2 \\ S_3 &= x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2) = a^3 - 3a \end{aligned}$$

Vậy:

$$\begin{aligned} S_7 &= x_1^7 + x_2^7 = (x_1^3 + x_2^3)(x_1^4 + x_2^4) - x_1^3 x_2^3 (x_1 + x_2) = (a^3 - 3a)(a^4 - 4a^2 + 2) - a \\ &= a^7 - 7a^5 + 14a^3 - 7a \end{aligned}$$

b. Đặt $x_1 = \sqrt[7]{\frac{3}{5}}$ và $x_2 = \sqrt[7]{\frac{5}{3}}$. Theo định lý Viète, ta có: $x_1 + x_2 = \alpha$ và $x_1 x_2 = 1$

$\Rightarrow$ nên x_1, x_2 là nghiệm của phương trình bậc hai $x^2 - \alpha x + 1 = 0$

Theo câu a, ta có:

$$S_7 = x_1^7 + x_2^7 = \alpha^7 - 7\alpha^5 + 14\alpha^3 - 7\alpha$$

Suy ra:

$$\alpha^7 - 7\alpha^5 + 14\alpha^3 - 7\alpha = \frac{3}{5} + \frac{5}{3} = \frac{34}{15}$$

Hãy: $15\alpha^7 - 105\alpha^5 + 210\alpha^3 - 105\alpha - 34 = 0$

Vậy đa thức cần tìm là: $f(x) = 15x^7 - 105x^5 + 210x^3 - 105x - 34$

b. Liên hệ giữa nghiệm của các phương trình bậc 2:

VD3.1b.1: Cho a, b, c đôi một khác nhau và $c \neq 0$. Biết rằng 2 phương trình sau có ít nhất một nghiệm chung:

$$x^2 + ax + bc = 0$$

$$x^2 + bx + ca = 0$$

Chứng minh rằng các nghiệm còn lại của chúng là nghiệm của phương trình $x^2 + cx + ab = 0$.

Lời giải:

Gọi x_0 là nghiệm chung của 2 phương trình đã cho. Ta có:

$$x_0^2 + ax_0 + bc = x_0^2 + bx_0 + ca \Leftrightarrow (a-b)x_0 = (a-b)c \Leftrightarrow x_0 = c \text{ (vì } a-b \neq 0)$$

Gọi x_1 là nghiệm còn lại của phương trình $x^2 + ax + bc = 0$ và x_2 là nghiệm còn lại của phương trình $x^2 + bx + ca = 0$. Theo định lý Viète, ta có:

$$\begin{cases} x_0x_1 = cx_1 = bc \\ x_0x_2 = cx_2 = ca \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = b \\ x_2 = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = b + c \\ x_1x_2 = bc \end{cases}$$

Mặt khác, cũng theo định lý Viète, vì b và c là 2 nghiệm của phương trình $x^2 + ax + bc = 0$ nên $b + c = -a$.

Vậy: $x_1 + x_2 = b + c = -a$ và $x_1x_2 = bc$ nên theo định lý Viète đảo thì chúng là 2 nghiệm của phương trình:

$$x^2 + cx + ab = 0$$

Đó chính là đpcm.

VD3.1b.2: Biết rằng phương trình $x^2 + bx + c = 0$ (1) có 2 nghiệm dương. Chứng minh rằng phương trình $cx^2 + (b - 2ac)x + 1 - ab = 0$ (2) với $a \geq 0$ cũng có 2 nghiệm đều dương.

Lời giải:

Vì phương trình (1) có 2 nghiệm dương nên: $\begin{cases} \Delta_1 \geq 0 \\ -b > 0 \\ c > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^2 - 4c \geq 0 \\ b < 0 \\ c > 0 \end{cases}$

Xét phương trình (2), ta có:

$$\Delta_2 = (b - 2ac)^2 - 4c(1 - ab) = b^2 - 4abc + 4a^2c^2 - 4c + 4abc = b^2 - 4c + 4a^2c^2 \geq b^2 - 4c \geq 0$$

Suy ra phương trình (2) cũng có nghiệm. Ta sẽ chứng minh các nghiệm ấy đều dương.

Thật vậy, theo định lý Viète thì:

$$\begin{aligned} \frac{-b + 2ac}{c} &= 2a - \frac{b}{c} > 0 (*) \text{ vì } \begin{cases} a \geq 0 \\ -b > 0 \\ c > 0 \end{cases} \\ \frac{1 - ab}{c} &> 0 (**) \text{ vì } \begin{cases} 1 > 0 \\ c > 0 \\ -ab \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Vì thế, 2 nghiệm của phương trình (2) đều dương. Đó chính là đpcm.

VD3.1b.3: Cho phương trình $x^2 + px + 1 = 0$ (1) có 2 nghiệm là a và b , đồng thời phương trình $x^2 + qx + 2 = 0$ (2) có 2 nghiệm là a và c . Chứng minh rằng: $(b - a)(b - c) = pq - 6$.

Lời giải:

Điều kiện có nghiệm của 2 phương trình lần lượt là $p^2 \geq 4$ và $q^2 \geq 16$.

Dưới điều kiện ấy, theo định lý Viète ta có:

$$\begin{aligned} (b - a)(b - c) &= pq - 6 \\ \Leftrightarrow b^2 - (a + c)b + ac &= (a + b)(a + c) - 6 \\ \Leftrightarrow b^2 - 2 - 1 + ca &= b^2 + ab + bc + ca - 6 \\ \Leftrightarrow 5 - 2 &= 2 + 1 \text{ (định lý Viète)} \end{aligned}$$

Ấu hưng đẳng thức sau cùng đúng nên ta có đpcm.

VD3.1b.4: Cho các phương trình:

$$x^2 + ax + 1 = 0 \text{ (1)}$$

$$x^2 + bx + 1 = 0 \text{ (2)}$$

$$x^2 + cx + 1 = 0 \text{ (3)}$$

Biết rằng tích của 1 nghiệm của (1) với 1 nghiệm của (2) là 1 nghiệm của (3). Tính: $S = a^2 + b^2 + c^2 + abc$.

Lời giải:

Theo định lý Viète, các cặp nghiệm của cả 3 phương trình nói trên đều gồm 2 nghiệm là nghịch đảo của nhau.

Gọi $S_1 = \left\{x_1, \frac{1}{x_1}\right\}$; $S_2 = \left\{x_2, \frac{1}{x_2}\right\}$ và $S_3 = \left\{x_1x_2, \frac{1}{x_1x_2}\right\}$ lần lượt là tập nghiệm của các PT (1), (2), (3)

Lại theo định lý Viète, ta có:

$$x_1^2 + \frac{1}{x_1^2} = a^2 - 2; x_2^2 + \frac{1}{x_2^2} = b^2 - 2 \text{ và } x_1^2x_2^2 + \frac{1}{x_1^2x_2^2} = c^2 - 2$$

Suy ra:

$$(a^2 - 2)(b^2 - 2) = \left(x_1^2 + \frac{1}{x_1^2}\right)\left(x_2^2 + \frac{1}{x_2^2}\right) = x_1^2x_2^2 + \frac{1}{x_1^2x_2^2} + \frac{x_1^2}{x_2^2} + \frac{x_2^2}{x_1^2} = c^2 - 2 + \left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}\right)^2 - 2 (*)$$

Mặt khác, cũng theo định lý Viète:

$$\left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right)\left(x_2 + \frac{1}{x_2}\right) = x_1x_2 + \frac{1}{x_1x_2} + \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} \Rightarrow ab + c = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} (**)$$

Thay (**) vào (*), ta có:

$$\begin{aligned} (a^2 - 2)(b^2 - 2) &= c^2 - 4 + (ab + c)^2 \\ \Rightarrow a^2b^2 - 2(a^2 + b^2) + 4 &= c^2 - 4 + a^2b^2 + 2abc + c^2 \\ \Rightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 2abc &= 8 \\ \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + abc &= 4 \end{aligned}$$

Vậy $S = a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$.

VD3.1b.5: Giả sử 2 phương trình $x^2 + ax + b = 0$ có 2 nghiệm là x_1, x_2 và phương trình $x^2 + cx + d = 0$ có 2 nghiệm x_3, x_4 . Chứng minh rằng:

$$2(x_1 + x_3)(x_1 + x_4)(x_2 + x_3)(x_2 + x_4) = 2(b - d)^2 + 2(a + c)(bc - ad)$$

Lời giải:

Điều kiện có nghiệm của 2 phương trình trên lần lượt là: $a^2 \geq 4b$ và $c^2 \geq 4d$.

Trong điều kiện ấy, áp dụng định lý Viète, ta có:

$$\begin{aligned} 2(x_1 + x_3)(x_1 + x_4)(x_2 + x_3)(x_2 + x_4) &= 2(x_1^2 + (x_3 + x_4)x_1 + x_3x_4)(x_2^2 + (x_3 + x_4)x_2 + x_3x_4) \\ &= 2(x_1^2 - cx_1 + d)(x_2^2 - cx_2 + d) = 2(ax_1 + b + cx_1 - d)(ax_2 + b + cx_2 - d) \\ 2((a + c)x_1 + b - d)((a + c)x_2 + b - d) &= 2((a + c)^2x_1x_2 + (a + c)(b - d)(x_1 + x_2) + (b - d)^2) \\ &= 2(b - d)^2 + 2b(a + c)^2 - 2a(a + c)(b - d) = 2(b - d)^2 + 2(a + c)(ab + bc - ab + ad) \\ &= 2(b - d)^2 + 2(a + c)(bc - ad) \end{aligned}$$

Đó chính là đpcm.

c. Các bất đẳng thức và bài toán cực trị:

VD3.1c.1: Cho phương trình $x^2 - 2(m + 4)x + m^2 - 8 = 0$ có 2 nghiệm x_1, x_2 . Chứng minh rằng:

$$x_1^2 + x_2^2 \geq x_1 + x_2$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải:

Phương trình đã cho có 2 nghiệm khi và chỉ khi $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow (m^2 + 8m + 16) - m^2 + 8 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -3$.

Trong điều kiện ấy, theo định lý Viète ta có:

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 - (x_1 + x_2) &= (x_1 + x_2)^2 - (x_1 + x_2) - 2x_1x_2 \\ &= 4(m + 4)^2 - 2(m + 4) + 2(m^2 - 8) \\ &= 2m^2 + 30m + 72 \end{aligned}$$

$$= 2(m + 3)^2 + 18(m + 3) \geq 0 \text{ (vì } m \geq -3 \text{ theo điều kiện có nghiệm của phương trình)}$$

Vậy $x_1^2 + x_2^2 \geq x_1 + x_2$ (đpcm). Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $m = -3$.

VD4.1c.2: Cho phương trình $x^2 - (2m + 1)x + m^2 + m - 2 = 0$. Tìm m để phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 đồng thời $A = x_1(x_2 + 5)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải:

Ta có: $\Delta = (2m + 1)^2 - 4(m^2 + m - 2) = 9 > 0$ nên phương trình đã cho luôn có 2 nghiệm phân biệt là:

$$x_1 = \frac{2m + 1 + 3}{2} = m + 2; x_2 = \frac{2m + 1 - 3}{2} = m - 1, \text{ hoặc ngược lại}$$

Xét trường hợp 1: $x_1 = m + 2$ và $x_2 = m - 1$, theo định lý Viète ta có:

$$x_1(x_2 + 5) = x_1x_2 + 5x_1 = m^2 + m - 2 + 5(m + 2) = m^2 + 6m + 8 = (m + 3)^2 - 1 \geq -1$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $m = -3$ (thỏa $\Delta \geq 0$)

Xét trường hợp 2: $x_1 = m - 1$ và $x_2 = m + 2$, cũng theo định lý Viète ta có:

$$x_1(x_2 + 5) = x_1x_2 + 5x_1 = m^2 + m - 2 + 5(m - 1) = m^2 + 6m - 7 = (m + 3)^2 - 16 \geq -16$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $m = -3$ (thỏa $\Delta \geq 0$)

Từ kết luận của 2 trường hợp trên ta có min $A = -16$, đạt được khi và chỉ khi $m = -3$.

VD3.1c.3: Cho phương trình $x^2 - 5mx - 4m = 0$. Tìm m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 đồng thời biểu thức sau đạt giá trị nhỏ nhất:

$$A = \frac{m^2}{x_1^2 + 5mx_2 - 14m + 1} + \frac{x_2^2 + 5mx_1 - 14m + 1}{m^2}$$

Lời giải:

Phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow 25m^2 + 16m > 0 \Leftrightarrow m(25m + 16) > 0 \Leftrightarrow m > 0 \text{ hoặc } m < -\frac{16}{25}$$

Vì x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình đã cho nên:

$$x_1^2 - 5mx_1 - 14m + 1 = x_2^2 - 5mx_2 - 14m + 1 \Rightarrow x_1^2 + 5mx_2 - 14m + 1 = x_2^2 + 5mx_1 - 14m + 1$$

Từ đó, theo định lý Viète, ta có:

$$\begin{aligned} x_1^2 + 5mx_2 - 14m + 1 &= \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + 5m(x_1 + x_2) - 28m + 2) \\ &= \frac{1}{2}((x_1 + x_2)^2 + 5m(x_1 + x_2) - 2x_1x_2 - 28m + 2) \\ &= \frac{1}{2}(25m^2 + 25m^2 + 8m - 28m + 2) \\ &= 25m^2 - 10m + 1 = (5m - 1)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Suy ra:

$$\frac{m^2}{x_1^2 + 5mx_2 - 14m + 1} > 0; \frac{x_2^2 + 5mx_1 - 14m + 1}{m^2} > 0$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$A = \frac{m^2}{x_1^2 + 5mx_2 - 14m + 1} + \frac{x_2^2 + 5mx_1 - 14m + 1}{m^2} \geq 2 \sqrt{\frac{m^2}{x_1^2 + 5mx_2 - 14m + 1} \cdot \frac{x_2^2 + 5mx_1 - 14m + 1}{m^2}}$$

Suy ra $A \geq 2$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{aligned} \frac{m^2}{x_1^2 + 5mx_2 - 14m + 1} &= \frac{x_2^2 + 5mx_1 - 14m + 1}{m^2} \Leftrightarrow m^4 \\ &= (x_1^2 + 5mx_2 - 14m + 1)(x_2^2 + 5mx_1 - 14m + 1) \\ &\Leftrightarrow m^4 = (5m - 1)^4 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow m = 5m - 1 \text{ hoặc } m = -5m + 1$$

$$\Leftrightarrow m = -\frac{1}{4} \text{ (không thỏa } \Delta > 0) \text{ hoặc } m = \frac{1}{5} \text{ (thỏa } \Delta > 0)$$

Vậy $m = \frac{1}{5}$ là giá trị thỏa yêu cầu đề bài.

VD3.1c.4: Cho phương trình $x^2 - 2(m-3)x + m - 13 = 0$. Tìm m để phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 và biểu thức sau đạt giá trị lớn nhất: $A = x_1x_2 - (x_1^2 + x_2^2)$.

Lời giải:

Phương trình đã cho có 2 nghiệm x_1, x_2 khi và chỉ khi:

$$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow (m-3)^2 - m + 13 \geq 0 \Leftrightarrow m^2 - 7m + 22 > 0 \text{ (đúng } \forall m \in \mathbf{R})$$

Theo định lý Viète ta có:

$$A = x_1x_2 - (x_1^2 + x_2^2) = 3x_1x_2 - (x_1 + x_2)^2 = 3(m-13) - 4(m-3)^2 = -4m^2 + 27m - 75$$

$$= -\left(2m - \frac{27}{4}\right)^2 - \frac{471}{16} \leq -\frac{471}{16}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $m = \frac{27}{8}$ (thỏa $\Delta' \geq 0$)

Vậy $\max A = -\frac{471}{16}$, đạt được khi và chỉ khi $m = \frac{27}{8}$

VD3.1c.5: Cho phương trình $(m^2 + m + 1)x - (m^2 + 2m + 2)x - 1 = 0$. Tìm m để phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 sao cho $S = x_1 + x_2$ đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.

Lời giải:

Phương trình đã cho có: $\Delta = (m^2 + 2m + 2)^2 + 4(m^2 + m + 1) > 0, \forall m \in \mathbf{R}$ nên nó luôn có nghiệm.

Theo định lý Viète, ta có:

$$S = x_1 + x_2 = \frac{m^2 + 2m + 2}{m^2 + m + 1}$$

$$\Leftrightarrow Sm^2 + Sm + S = m^2 + 2m + 2 \Leftrightarrow (S-1)m^2 + (S-2)m + S-2 = 0 (*)$$

Tập giá trị của S là tập hợp các giá trị của biểu thức đó làm cho phương trình (*) có nghiệm, tức là:

$$\Delta^{(*)} \geq 0 \Leftrightarrow (S-2)^2 - 4(S-2)(S-1) \geq 0 \Leftrightarrow (S-2)(S-2-4S+4) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2} \leq S \leq 2$$

Rõ ràng khi $m = 0$ thì $S = 2$ và khi $m = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ thì $S = \frac{3}{2}$ (các giá trị trên thỏa $\Delta \geq 0$)

Vậy $\max S = 2$ và $\min S = \frac{3}{2}$, đạt được lần lượt tại $m = 2$ và $m = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

d. Các bài toán số học:

VD3. 1d. 1: Cho phương trình bậc hai $x^2 - 3x - \frac{1}{2} = 0$ có các nghiệm x_1, x_2 . Kí hiệu như sau:

$$S_n = x_1^n + x_2^n, \forall n \in \mathbf{N}^* \text{ và } n \geq 2. \text{ Chứng minh rằng } S_n = 3S_{n-1} + \frac{1}{2}S_{n-2}$$

Lời giải:

Theo định lý Viète, ta có:

$$S_0 = x_1^0 + x_2^0 = 2; S_1 = x_1 + x_2 = 3; S_2 = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 3^2 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 10$$

Suy ra:

$$S_2 = 3S_1 + \frac{1}{2}S_0$$

Vậy đpcm đúng tại $n = 2$.

Giả sử tại đpcm đúng tại $n = k$ đúng tại $n = k$, tức là:

$$S_k = 3S_{k-1} + \frac{1}{2}S_{k-2}$$

Theo định lý Vi ết, ta cũng có:

$$3S_k = (x_1 + x_2)(x_1^k + x_2^k) = x_1^{k+1} + x_2^{k+1} + x_1x_2(x_1^{k-1} + x_2^{k-1}) = S_{k+1} + \frac{-1}{2}S_{k-1}$$

Suy ra:

$$S_{k+1} = 3S_k + \frac{1}{2}S_{k-1}$$

Tức là đpcm cũng đúng với $n = k + 1$. Vậy theo nguyên lý qui nạp toán học thì $\forall n \in \mathbf{N}^*$ và $n \geq 2$:

$$S_n = 3S_{n-1} + \frac{1}{2}S_{n-2}$$

VD3.1d.2: Cho phương trình $x^2 - 6x + 1 = 0$ có các nghiệm x_1, x_2 . Kí hiệu: $S_n = x_1^n + x_2^n, \forall n \in \mathbf{N}^*$. Chứng minh rằng S_n là một số nguyên $\forall n \in \mathbf{N}$. Tính S_{n+1} theo S_n và $S_{n-1}, \forall n \in \mathbf{N}^*$. Tìm số dư phép chia S_{3108} cho 5

Lời giải:

Theo định lý Vi ết, ta có: $S_0 = x_1^0 + x_2^0 = 2; S_1 = x_1 + x_2 = 6$ nên S_0 và S_1 là các số nguyên.

Mặt khác, cũng theo định lý Vi ết, ta có: $x_1x_2 = 1$, suy ra:

$$S_n = x_1^n + \frac{1}{x_1^n}, \forall n \in \mathbf{N}^*$$

Giả sử S_k là số nguyên $\forall k = \overline{1, n}$, ta có:

$$S_1S_n = (x_1 + x_2)S_n = (x_1 + x_2)(x_1^n + x_2^n) = \left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right)\left(x_1^n + \frac{1}{x_1^n}\right) = x_1^{n+1} + \frac{1}{x_1^{n+1}} + x_1^{n-1} + \frac{1}{x_1^{n-1}}$$

Suy ra: $6S_n = S_{n+1} + S_{n-1}, \forall n \in \mathbf{N}^*$. Mà $6S_n$ và S_{n-1} là các số nguyên (theo giả thiết qui nạp) nên S_{n+1} cũng là số nguyên.

Vậy theo nguyên lý qui nạp, ta có S_n là số nguyên $\forall n \in \mathbf{N}^*$. Mặt khác, trong quá trình qui nạp, ta cũng đã chứng minh được: $6S_n = S_{n+1} + S_{n-1}$, tức là: $S_{n+1} = 6S_n - S_{n-1}$.

Công thức trên chính là cách tính S_{n+1} theo S_n và S_{n-1} .

Bây giờ ta tìm số dư của S_{3108} khi chia cho 5. Ta có:

$$S_{n+1} = 6S_n - S_{n-1} \equiv S_n - S_{n-1} \pmod{5}$$

$$\text{Suy ra: } S_{n+1} \equiv S_n - S_{n-1} \equiv (S_{n-1} - S_{n-2}) - S_{n-1} \equiv -S_{n-2} \pmod{5}$$

$$\text{Trong đồng dư thức trên, thay } n + 1 \text{ bởi } n - 2 \text{ thì ta có: } S_{n-2} \equiv -S_{n-5} \pmod{5}$$

$$\text{Từ đó: } S_{n+1} \equiv S_{n-5} \pmod{5}$$

$$\text{Lại thay } n + 1 \text{ bởi } n \text{ thì } S_n \equiv S_{n-6} \pmod{5}. \text{ Mà } 3108 : 6 \text{ nên } S_{3108} \equiv S_0 \equiv 2 \pmod{5}.$$

Do đó, số dư trong phép chia cần tìm là 2.

VD3.1d.3: Tìm số hạng tổng quát của dãy số Fibonacci được xác định như sau:

$$F_1 = F_2 = 1; F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \forall n \in \mathbf{N}^*$$

Lời giải:

Gọi a, b là các số thoả điều kiện: $a + b = 1; ab = -1$.

Theo định lý Vi ết, $a; b$ là 2 nghiệm của phương trình bậc 2: $x^2 - x - 1 = 0 (*)$

Ta có:

$$F_{n+1} = (a+b)F_n - abF_{n-1} \Rightarrow F_{n+1} - bF_n = a(F_n - bF_{n-1})$$

Đặt $u_n = F_{n+1} - bF_n$ thì ta thấy $u_n = au_{n-1}$, hay (u_n) là một cấp số nhân có công bội $q = a$.

Mặt khác: $u_1 = F_2 - bF_1 = 1 - b = a$ nên ta có $u_n = a^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Tức là $F_{n+1} = a^n + bF_n$, từ đó:

$$\begin{aligned} F_{n+1} &= (F_{n+1} - bF_n) + b(F_n - bF_{n-1}) + b^2(F_{n-1} - bF_{n-2}) + \dots + b^{n-1}(F_2 - bF_1) + b^nF_1 \\ \Rightarrow F_{n+1} &= b^n + ab^{n-1} + a^2b^{n-2} + \dots + a^{n-2}b^2 + ab^{n-1} + a^n = \sum_{k=0}^n a^k b^{n-k} = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b} \end{aligned}$$

Bây giờ ta thay các giá trị của a và b vào, vì a, b là nghiệm của phương trình (*) nên không mất tính tổng quát, ta có thể coi:

$$a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}; b = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Vậy

$$F_n = \frac{\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n}{\frac{1 + \sqrt{5}}{2} - \frac{1 - \sqrt{5}}{2}} = \frac{\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Công thức nói trên chính là số hạng tổng cần tìm của dãy số Fibonacci.

À ời thêm về Fibonacci: Fibonacci tên thật là Leonardo da Pisa (1170 – 1250), cũng được biết đến với các tên gọi khác như Leonardo Pisano, Leonardo Bonacci, Leonardo Fibonacci, là nhà Toán học người Italia, được coi là nhà toán học thông minh nhất thời trung đại của thế giới.

Dãy số Fibonacci xuất hiện lần đầu trong cuốn sách “Liber Abaci” của Fibonacci từ bài toán sau đây:

Một cặp thỏ mỗi tháng sinh một lần, cho một cặp thỏ con gồm một đực và một cái. Cặp thỏ mới sinh ra sau 2 tháng lại bắt đầu sinh cặp mới. Giả thiết thỏ không chết và luôn sinh sản được (^_^), hỏi sau một năm sẽ có bao nhiêu thỏ nếu như lúc đầu ta có 1 cặp thỏ.

Từ giả thiết suy ra rằng sau một tháng sẽ có 2 cặp thỏ, sau 2 tháng, cặp thứ nhất tiếp tục sinh và ta có 3 cặp thỏ. Tháng tiếp theo, cặp hũ 2 cũng sinh, và cặp đầu vẫn sinh nên ta lại có 5 cặp thỏ. À hừ vậy, nếu kí hiệu F_n là số thỏ ở tháng n kể từ đầu năm thì ta thấy (F_n) lập thành dãy số Fibonacci nói trên:

$$F_1 = F_2 = 1; F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Dãy Fibonacci có vai trò rất quan trọng trong không chỉ trong Toán học mà trong tất cả các ngành khoa học khác. Trong rất nhiều bài toán khó, dãy Fibonacci xuất hiện làm cho người giải không khỏi kinh ngạc bất ngờ. Trong tự nhiên, người ta cũng quan sát và thống kê thấy được đa số các gân, cành, lá cây mọc theo quy luật của dãy Fibonacci diệu kì này.

Chú ý rằng từ cách giải bài toán tìm số hạng tổng quát của dãy Fibonacci, ta có thể tìm được số hạng tổng quát của dãy số cho bởi công thức truy hồi sau:

$$u_1 = a, u_2 = b; u_{n+1} = au_n + \beta u_{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Dãy số xác định như thế được gọi là dãy hồi quy tuyến tính bậc 2. À ó gắn liền với tên tuổi nhà toán học người Pháp François Édouard Anatole Lucas (1842-1891) nên còn được gọi là dãy Lucas.

Trong trường hợp phương trình bậc hai $x^2 - ax - \beta = 0$ không có nghiệm thực, ta vẫn có thể giải bài toán trong trường số phức.

Bây giờ, ta sẽ ứng dụng tư tưởng trên vào một bài toán tổng quát hơn:

VD3.1d.4: Cho a, b, c là các số thực thỏa điều kiện $a \neq 0$ và $b^2 - 4ac > 0$

a. Bài toán thuận: Cho phương trình bậc 2: $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ (*) có 2 nghiệm thực x_1, x_2 . Đặt $S_n = x_1^n + x_2^n$. Khi đó: $aS_{n+1} + bS_n + cS_{n-1} = 0, \forall n \in \mathbf{N}^*$.

b. Bài toán đảo: Cho 2 số thực phân biệt x_1, x_2 . Kí hiệu $S_n = x_1^n + x_2^n$. Khi đó, nếu:

$aS_{n+1} + bS_n + cS_{n-1} = 0, \forall n \in \mathbf{N}^*$ thì x_1, x_2 là 2 nghiệm phân biệt của phương trình $f(x) = 0$.

Lời giải:

a. Bài toán thuận: x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình (*) $\Rightarrow aS_{n+1} + bS_n + cS_{n-1} = 0, \forall n \in \mathbf{N}^*$.

Thật vậy, vì x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình (*) nên theo định lý Viète ta có:

$$S_{n+1} = x_1^{n+1} + x_2^{n+1} = (x_1 + x_2)(x_1^n + x_2^n) - x_1x_2(x_1^{n-1} + x_2^{n-1}) = -\frac{b}{a}S_n - \frac{c}{a}S_{n-1}$$

Suy ra $aS_{n+1} + bS_n + cS_{n-1} = 0, \forall n \in \mathbf{N}^*$ (đpcm).

b. Bài toán đảo: $aS_{n+1} + bS_n + cS_{n-1} = 0, \forall n \in \mathbf{N}^* \Rightarrow x_1, x_2$ là 2 nghiệm của phương trình (*)

Hệ thức truy hồi đã cho tương đương với:

$$x_1^{n-1}(ax_1^2 + bx_1 + c) + x_2^{n-1}(ax_2^2 + bx_2 + c) = 0, \forall n \in \mathbf{N}^*$$

Hay: $x_1^k f(x_1) + x_2^k f(x_2) = 0, \forall k \in \mathbf{N}$ (1)

Do x_1 và x_2 là 2 số thực phân biệt nên chúng không thể đồng thời bằng 0.

Vì thế, (1) chỉ xảy ra khi $f(x_1) = f(x_2) = 0$.

Tức là x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình $f(x) = 0$. Đó chính là đpcm.

Ứng dụng bài toán trên, ta có thể giải một số bài toán Số Học sau:

VD3.1d.5: Tìm $\left[(4 + \sqrt{15})^7\right]$ với $[x]$ là phần nguyên của số thực x , chỉ số nguyên lớn nhất không vượt quá x .

Lời giải:

Đặt $x_1 = 4 + \sqrt{15}$ và $x_2 = 4 - \sqrt{15}$ thì ta có $x_1 + x_2 = 8$ và $x_1x_2 = 1$. Theo định lý Viète đảo thì x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình bậc hai: $X^2 - 8X + 1 = 0$.

Đặt $S_n = x_1^n + x_2^n$. Theo **VD3.1d.4** thì: $S_{n+1} = 8S_n - S_{n-1}$, từ đó ta tính được:

$$S_1 = 8; S_2 = 62; S_3 = 488; S_4 = 3842; S_5 = 30248; S_6 = 238142; S_7 = 1874888$$

Mà: $0 < x_2^7 = (4 - \sqrt{15})^7 < 1$ nên $1874887 < 1874888 - x_2^7 < 1874888$ hay:

$$1874887 < (4 + \sqrt{15})^7 < 1874888$$

Vậy: $\left[(4 + \sqrt{15})^7\right] = 1874887$

VD3.1d.6: Chứng minh rằng trong biểu diễn thập phân của số $(7 + 4\sqrt{3})^n$ có ít nhất n chữ số 9 sau dấu phẩy.

Lời giải:

Đặt $x_1 = 7 + 4\sqrt{3}$ và $x_2 = 7 - 4\sqrt{3}$, ta có $x_1 + x_2 = 14$ và $x_1x_2 = 7^2 - (4\sqrt{3})^2 = 1$ nên theo định lý Viète đảo thì x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình $X^2 - 14X + 1 = 0$.

Đặt $S_n = x_1^n + x_2^n$ thì với cách chứng minh tương tự như **VD3.1d.2**, ta có S_n luôn là số nguyên dương $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

Mặt khác:

$$0 < x_2 = 7 - 4\sqrt{3} = \frac{1}{7 + 4\sqrt{3}} < \frac{1}{11} < \frac{1}{10}$$

ã ên:

$$0 < (7 - 4\sqrt{3})^n < \frac{1}{10^n}$$

Vậy:

$$(7 + 4\sqrt{3})^n < S_n < (7 + 4\sqrt{3})^n + \frac{1}{10^n}$$

$$\Rightarrow S_n - \frac{1}{10^n} < (7 + 4\sqrt{3})^n < S_n$$

Mà S_n là số nguyên dương $\forall n \in \mathbf{N}^*$ nên sau dấu phẩy của số $(7 + 4\sqrt{3})^n$ luôn có ít nhất là n chữ số 9. Đó chính là đpcm.

VD3.1d.7: Cho phương trình $x^2 - 4x + 1 = 0$ có các nghiệm x_1, x_2 . Chứng minh rằng $x_1^{2n} + x_2^{2n}$ có thể được phân tích thành tổng bình phương của 3 số nguyên liên tiếp $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

Lời giải:

Giải phương trình đã cho, ta thấy nó có 2 nghiệm phân biệt là $x_1 = 2 + \sqrt{3}$ và $x_2 = 2 - \sqrt{3}$.

Theo định lý về khai triển nhị thức ă ewton thì $\exists a_n, b_n \in \mathbf{Z}^*$ sao cho:

$$\begin{cases} x_1^n = (2 + \sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{3} \\ x_2^n = (2 - \sqrt{3})^n = a_n - b_n\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_n^2 - 3b_n^2 = (a_n + b_n\sqrt{3})(a_n - b_n\sqrt{3}) = ((2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}))^n = 1$$

Mặt khác, theo định lý Viète, ta có: $x_1^n x_2^n = (x_1 x_2)^n = 1 = a_n^2 - 3b_n^2 \Rightarrow a_n^2 = 3b_n^2 + 1$

$$\begin{aligned} \text{Vậy: } x_1^{2n} + x_2^{2n} &= (a_n + b_n\sqrt{3})^2 + (a_n - b_n\sqrt{3})^2 = 2a_n^2 + 6b_n^2 = 2(3b_n^2 + 1) + 6b_n^2 = 12b_n^2 + 2 \\ &= (4b_n^2 - 4b_n + 1) + 4b_n^2 + (4b_n^2 + 4b_n + 1) = (2b_n - 1)^2 + (2b_n)^2 + (2b_n + 1)^2, \forall n \in \mathbf{N}^* \end{aligned}$$

Và đó chính là đpcm.

VD3.1d.8: (VMO 2002)

Tìm các giá trị nguyên dương của m để phương trình sau có nghiệm nguyên dương:

$$x + y + u + v = n\sqrt{xyuv}$$

Lời giải:

Phương trình đã cho có thể đưa về dạng tương đương sau:

$$\begin{aligned} x + y + u + v &= n\sqrt{xyuv} \\ \Leftrightarrow (x + y + u + v)^2 &= n^2 xyuv \\ \Leftrightarrow x^2 + 2(y + u + v)x + (y + u + v)^2 &= n^2 xyuv \quad (1) \end{aligned}$$

Giả sử n là số nguyên dương sao cho phương trình (1) có nghiệm nguyên dương $(x; y; u; v)$.

Gọi $(x_0; y_0; z_0; t_0)$ là nghiệm nguyên dương của phương trình (1) sao cho $x_0 + y_0 + z_0 + t_0$ có giá trị nhỏ nhất. Và, không mất tính tổng quát, giả sử $x_0 \geq y_0 \geq z_0 \geq t_0$. Khi đó, từ hệ thức (1), ta dễ thấy:

$$(y_0 + u_0 + v_0)^2 : x_0$$

Mặt khác, x_0 là nghiệm nguyên dương của phương trình bậc hai:

$$x^2 + (2(y_0 + u_0 + v_0) - n^2 y_0 u_0 v_0)x + (y_0 + u_0 + v_0)^2 = 0$$

Theo định lý Viète, và từ nhận xét rằng $(y_0 + u_0 + v_0)^2 : x_0$, ta thấy phương trình trên còn có một nghiệm nguyên dương nữa là:

$$x_1 = \frac{(y_0 + u_0 + v_0)^2}{x_0}$$

Điều này chứng tỏ rằng $\left(\frac{(y_0 + u_0 + v_0)^2}{x_0}; y_0; z_0; t_0\right)$ cũng là một nghiệm của PT (1)

Mặt khác, do $x_0 \geq y_0 \geq z_0 \geq t_0$ và $x_0 + y_0 + z_0 + t_0$ có giá trị nhỏ nhất trong các nghiệm của PT (1) nên:

$$x_1 \geq x_0 \geq y_0 \geq z_0 \geq t_0$$

Theo định lý về dấu của tam thức bậc hai, ta có:

$$\begin{aligned} 0 \leq f(y_0) &= y_0^2 - n^2 y_0^2 u_0 v_0 + 2(y_0 + u_0 + v_0)y_0 + (y_0 + u_0 + v_0)^2 \\ &\leq y_0^2 - n^2 y_0^2 u_0 v_0 + 6y_0^2 + 9y_0^2 = 16y_0^2 - n^2 y_0^2 u_0 v_0 \end{aligned}$$

Suy ra: $n^2 y_0^2 u_0 v_0 \leq 16y_0^2 \Rightarrow n^2 \leq n^2 u_0 v_0 \leq 16 \Rightarrow n \leq 4$

Mà $n \in \mathbf{Z}^+$ nên $n \in \{1; 2; 3; 4\}$

Tại $n = 1$, phương trình (1) có nghiệm nguyên dương $x = y = u = v = 4$

Tại $n = 2$, phương trình (1) có nghiệm nguyên dương $x = y = u = v = 2$

Tại $n = 3$, phương trình (1) có nghiệm nguyên dương $x = y = 1; u = v = 2$

Tại $n = 4$, phương trình (1) có nghiệm nguyên dương $x = y = u = v = 1$

Vậy các giá trị cần tìm của n là $n \in \{1; 2; 3; 4\}$.

e. Giải và biện luận một số hệ phương trình:

Một đa thức $f(x_1; x_2; \dots; x_n)$ được gọi là đối xứng giữa các biến $x_1, x_2, \dots, x_n$ nếu như với mọi hoán vị $(x_{i_1}; x_{i_2}; \dots; x_{i_n})$ của bộ số $(x_1; x_2; \dots; x_n)$, ta đều có:

$$f(x_{i_1}; x_{i_2}; \dots; x_{i_n}) = f(x_1; x_2; \dots; x_n)$$

Hệ phương trình gồm các phương trình đối xứng giữa các ẩn được gọi là hệ phương trình đối xứng loại I.

Sau đây, ta sẽ tìm hiểu ứng dụng của định lý Viète trong việc giải các hệ phương trình loại này.

VD3.1e.1: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 4 \\ x + xy + y = 2 \end{cases}$$

Lời giải:

Đặt $S = x + y$ và $P = xy$, hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} S^2 - P = 4 \\ S + P = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -P = S - 2 \\ S^2 + S^2 - 4S + 4 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = 2 - S \\ S(S - 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 0 \\ P = 2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} S = 2 \\ P = 0 \end{cases}$$

Do điều kiện $S^2 \geq 4P$ nên ta chỉ chọn kết quả $S = 2; P = 0$.

Khi đó, theo định lý Viète đảo, $x; y$ là 2 nghiệm của phương trình bậc hai:

$$X^2 - 2X = 0$$

Suy ra $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$

Vậy hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm là $(0; 2)$ và $(2; 0)$.

Đối với các hệ phương trình gồm các phương trình không đối xứng, hoặc chỉ một phương trình là đối xứng, bằng phép đổi biến số hoặc một số biến đổi Đại Số khéo léo, ta vẫn có thể đưa chúng về dạng hệ đối xứng.

VD3.1e.2: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = 4 \\ x^2 + y^2 = 128 \end{cases}$$

Lời giải:

Đặt $u = \sqrt{x+y}$ và $v = \sqrt{x-y}$. Khi đó: $\begin{cases} x+y = u^2 \\ x-y = v^2 \end{cases}$. Suy ra:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \\ y = \frac{1}{2}(u^2 - v^2) \end{cases}$$

Hệ đã cho có dạng:

$$\begin{cases} u + v = 4 \\ u^4 + v^4 = 256 (*) \end{cases}$$

Đặt $S = u + v = 4$ và $P = uv$ thì điều kiện để hệ có nghiệm là $S^2 \geq 4P$, tức là $P \leq 4$.

Biến đổi phương trình (*) của hệ, ta có:

$$\begin{aligned} 256 &= u^4 + v^4 = (u^2 + v^2)^2 - 2u^2v^2 = ((u + v)^2 - 2uv)^2 - 2(uv)^2 \\ &\Leftrightarrow (2P - 16)^2 - 2P^2 = 256 \\ &\Leftrightarrow 4P^2 - 64P + 256 - 2P^2 - 256 = 0 \\ &\Leftrightarrow P(P - 32) = 0 \end{aligned}$$

Theo điều kiện xác định suy ra $P = 0$.

Từ định lý Viète đảo thì x, y là 2 nghiệm của phương trình bậc hai:

$$t^2 - 4t = 0 \Leftrightarrow t = 0 \text{ hoặc } t = 4$$

Suy ra $(x; y) \in \{(0; 4); (4; 0)\}$

Thử lại ta thấy các nghiệm nói trên đều thoả hệ phương trình.

Vậy hệ có 2 nghiệm $(x; y)$ là $(0; 4)$ và $(4; 0)$.

VD3.1e.3: (Olympic 30/4 năm 2007)

Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + \frac{8xy}{x + y} = 16 \\ \sqrt{x + y} = x^2 - y \end{cases}$$

Lời giải:

Đặt $S = x + y$ và $P = xy$. Theo định lý Viète đảo, x, y là 2 nghiệm của phương trình bậc hai: $t^2 - St + P = 0$

Điều kiện để hệ có nghĩa là $S > 0$ và điều kiện để hệ có nghiệm là phương trình ấy có nghiệm, tức là $S^2 \geq 4P$

Mặt khác, vì $x^2 + y^2 = S^2 - 2P$ nên từ phương trình đầu của hệ ta có:

$$\begin{aligned} S^2 - 2P + \frac{8P}{S} &= 16 \\ \Rightarrow S^3 - 2SP + 8P - 16S &= \\ \Rightarrow S(S - 4)(S + 4) - 2P(S - 4) &= 0 \\ \Rightarrow (S - 4)(S^2 + 4S - 2P) &= 0 \end{aligned}$$

Thay ngược trở lại $x^2 + y^2 = S^2 - 2P$ thì:

$$(S - 4)(x^2 + y^2 + 4S) = 0$$

ả hưng vì $x^2 + y^2 \geq 0, \forall x, y \in \mathbf{R}$ và $4S > 0$ do $S > 0$ theo điều kiện có nghĩa của hệ nên $x^2 + y^2 + 4S > 0$

Vậy ta có $S = 4$, suy ra $x + y = 4$

Suy ra $\sqrt{x + y} = 2$ và $y = 4 - x$. Thay vào phương trình sau của hệ ta được:

$$x^2 - (4 - x) = 2 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = -3 \text{ hoặc } x = 2$$

Suy ra $(x; y) \in \{(-3; 7); (2; 2)\}$

Thử lại ta thấy các nghiệm trên đều thoả hệ.

Vậy hệ phương trình đã cho có các nghiệm $(x; y)$ là $(-3; 7)$ và $(2; 2)$

Phép thế Viète cũng được dùng để biện luận hoặc định tham số để hệ phương trình thoả một điều kiện nào đó.

VD3.1e.4: (Thi học sinh giỏi THCS TPHCM năm 1999 – 2000)

Tìm m để hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} xy(x+4)(y+4) = m \\ x^2 + y^2 + 4(x+y) = m+1 \end{cases}$$

Lời giải:

Biến đổi hệ phương trình đã cho, ta có:

$$\begin{cases} xy(x+4)(y+4) = m \\ x^2 + y^2 + 4(x+y) = m+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 + 4x)(y^2 + 4y) = m \\ (x^2 + 4x) + (y^2 + 4y) = m+1 \end{cases}$$

Đặt $X = x^2 + 4x$ và $Y = y^2 + 4y$ thì hệ đã cho có dạng:

$$\begin{cases} XY = m \\ X + Y = m+1 \end{cases}$$

Theo định lý Viète đảo thì $X; Y$ là 2 nghiệm của phương trình bậc hai:

$$t^2 - (m+1)t + m = 0 (*)$$

Phương trình trên có tổng các hệ số: $a + b + c = 1 - (m+1) + m = 0$ nên có 2 nghiệm:

$$t_1 = 1; t_2 = m$$

Suy ra:

$$\begin{cases} X = 1 \\ Y = m \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} X = m \\ Y = 1 \end{cases}$$

Do $X = x^2 + 4x = (x+2)^2 - 4 \geq -4$ nên hệ đã cho có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (*) có 2 nghiệm đều không nhỏ hơn -4 . Điều này xảy ra khi và chỉ khi $m \geq -4$

Vậy tập hợp các giá trị của m để hệ có nghiệm là $[-4; +\infty)$

VD3.1e.5: Cho các số thực $x, y, z \neq 0$ thỏa hệ điều kiện:

$$\begin{cases} x + y + z = xyz \\ x^2 = yz \end{cases}$$

Chứng minh rằng: $x^2 \geq 3$

Lời giải:

Biến đổi hệ điều kiện đã cho, ta có:

$$\begin{cases} x + y + z = xyz \\ x^2 = yz \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + z = yz \cdot x - x = x^3 - x \\ yz = x^3 \end{cases}$$

Theo định lý Viète đảo, $y; z$ là 2 nghiệm của phương trình bậc hai:

$$t^2 - (x^3 - x)t + x^3 = 0$$

Để tồn tại các số $x; y; z$ thỏa điều kiện của đề bài thì phương trình trên phải có nghiệm.

Điều này có nghĩa là:

$$\begin{aligned} \Delta &\geq 0 \Leftrightarrow (x^3 - x)^2 - 4x^3 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (x^3 + x)(x^3 - 3x) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x^2(x^2 + 3)(x^2 - 3) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 \geq 3 \text{ (vì } x^2 + 3 > x^2 \geq 0) \end{aligned}$$

Vậy $x^2 \geq 3$ (đpcm).

VD3.1e.6: Cho các số thực x, y, z thỏa hệ điều kiện: $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2 \\ xy + yz + zx = 1 \end{cases}$

Chứng minh rằng: $-\frac{4}{3} \leq x, y, z \leq \frac{4}{3}$

Lời giải:

Do vai trò x, y, z bình đẳng nên ta chỉ cần chứng minh điều mà gia thiết yêu cầu đối với 1 biến nào đó trong số chúng là đủ. Chẳng hạn, ta sẽ chứng minh cho x .

Thật vậy, ta có:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2 \\ xy + yz + zx = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y+z)^2 - 2yz = 2 - x^2 \\ yz + x(y+z) = 1 \end{cases}$$

Đặt $S = y + z$ và $P = yz$, hệ trở thành:

$$\begin{cases} S^2 - 2P = 2 - x^2 & (1) \\ P + Sx = 1 & (2) \end{cases}$$

Từ (2) ta có $P = 1 - Sx$, thay vào (1) thì:

$$S^2 - 2(1 - Sx) = 2 - x^2$$

$$\Leftrightarrow S^2 + 2xS + x^2 - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (S + x)^2 - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow S = -x + 2 \text{ hoặc } S = -x - 2$$

- Nếu $S = -x + 2$ thì $P = 1 - x(-x + 2) = x^2 - 2x + 1$.

Theo định lý Viète, y, z là 2 nghiệm của phương trình bậc hai:

$$t^2 + (x - 2)t + x^2 - 2x + 1 = 0$$

Vì có tồn tại các số y, z nên phương trình nói trên có nghiệm, do đó:

$$\Delta = (x - 2)^2 - 4(x - 1)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x(3x - 4) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{4}{3}$$

- Nếu $S = -x - 2$ thì $P = 1 - x(-x - 2) = x^2 + 2x + 1$

Theo định lý Viète, y, z là 2 nghiệm của phương trình bậc hai:

$$t^2 + (x + 2)t + x^2 + 2x + 1 = 0$$

Vì có tồn tại các số y, z nên phương trình nói trên có nghiệm, do đó:

$$\Delta = (x + 2)^2 - 4(x + 1)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x(3x + 4) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{4}{3} \leq x \leq 0$$

Hợp của 2 kết quả trên, ta có:

$$-\frac{4}{3} \leq x \leq \frac{4}{3}$$

Tương tự ta cũng có:

$$-\frac{4}{3} \leq y \leq \frac{4}{3} \text{ và } -\frac{4}{3} \leq z \leq \frac{4}{3}$$

Vậy ta đã có đpcm.

3.2. Định lý Viète đối với phương trình bậc 3:

Ứng dụng của định lý Viète đối với phương trình bậc 3 tương tự như ứng dụng của định lý này đối với phương trình bậc 2. Ta hãy xét một số bài toán:

- Liên hệ giữa các nghiệm x_1, x_2, x_3 của một phương trình bậc 3:

VD3.2a.1: Gọi x_1, x_2, x_3 là 3 nghiệm của phương trình: $x^3 - x + 1 = 0$. Tính: $S = x_1^{11} + x_2^{11} + x_3^{11}$

Lời giải:

Theo định lý Viète, ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = -1 \\ x_1x_2x_3 = -1 \end{cases}$$

Ta lại có: $x_i^3 - x_i + 1 = 0 \Leftrightarrow x_i^3 = x_i - 1 \ (i = 1, 2, 3)$
 $\Rightarrow x_i^5 = x_i^3 - x_i^2 = -x_i^2 + x_i - 1 \ (i = 1, 2, 3)$
 $\Rightarrow x_i^8 = 2_i^2 - 3x_i + 2 \ (i = 1, 2, 3)$
 $\Rightarrow x_i^{11} = 2x_i^3 - 5x_i^2 + 5x_i - 2 \ (i = 1, 2, 3)$

Ta có:

$$S = \sum_{i=1}^3 x_i^{11} = 2 \sum_{i=1}^3 x_i^3 - 5 \sum_{i=1}^3 x_i^2 + 5 \sum_{i=1}^3 x_i - 6$$

Mặt khác:

$$\begin{cases} x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = (x_1 + x_2 + x_3)^3 - 3(x_1 + x_2 + x_3)(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) + 3x_1x_2x_3 = -3 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = 2 \end{cases}$$

Suy ra: $S = 2.(-3) - 5.2 - 6 = -22$

VD3.2a.2: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 15 \\ x^4 + y^4 + z^4 = 35 \end{cases}$$

Biết rằng hệ phương trình trên có một nghiệm thỏa điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 < 10$. Không giải hệ, hãy tính giá trị của biểu thức: $S = x^5 + y^5 + z^5$

Lời giải:

Đặt $p = xy + yz + zx$ và $q = xyz$. Theo định lý Viète đảo, x, y, z là nghiệm của đa thức:

$$f(u) = u^3 - 3u^2 + pu - q$$

Ta có:

$$\begin{cases} x^3 - 3x^2 + px - q = 0 \\ y^3 - 3y^2 + py - q = 0 \\ z^3 - 3z^2 + pz - q = 0 \end{cases}$$

Ấp hân theo vế các đẳng thức trên lần lượt với x^k, y^k, z^k rồi cộng chúng lại theo vế, ta có:

$$(x^{k+3} + y^{k+3} + z^{k+3}) - 3(x^{k+2} + y^{k+2} + z^{k+2}) + p(x^{k+1} + y^{k+1} + z^{k+1}) - q(x^k + y^k + z^k) = 0$$

Đặt $S_n = x^n + y^n + z^n \ (n \in \mathbb{N})$ thì ta có:

$$S_{k+3} = 3S_{k+2} - pS_{k+1} - qS_k \quad (*)$$

Mặt khác, vì $x + y + z = 3$ nên $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = S_2 + 2p$, suy ra:

$$S_2 = 9 - 2p$$

Trong đẳng thức (*), cho $k = 1$, ta có:

$$S_4 = 3S_3 - pS_2 + qS_1 \Rightarrow 35 = 45 - p(9 - 2p) + 3(3p - 4) \Rightarrow p^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} p = 1 \\ p = -1 \end{cases}$$

Ấp hưng nếu $p = -1$ thì $S_2 = 9 - 2.(-1) = 11 > 10$, trái với giả thiết. Vậy $p = 1$, suy ra $q = -1$

Cuối cùng, trong (*), cho $k = 2$, ta có: $S_5 = 3S_4 - pS_3 + qS_2 = 3.35 - 1.15 - 1.7 = 83$

Vậy $x^5 + y^5 + z^5 = 63$

VD3.2a.3: Cho 2 đa thức $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ và $Q(x) = x^2 + x + 2008$. Biết rằng phương trình $P(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt còn phương trình $P[Q(x)] = 0$ vô nghiệm. Chứng minh rằng:

$$P(2007) > \frac{1}{64}$$

Lời giải:

Gọi x_1, x_2, x_3 là 3 nghiệm phân biệt của $P(x)$. Theo định lý Viète thì:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -a \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = b \\ x_1x_2x_3 = -c \end{cases}$$

Do đó:

$$P(x) = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)x - x_1x_2x_3 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

$$\text{Ta có: } P[Q(x)] = (x^2 + x + 2008 - x_1)(x^2 + x + 2008 - x_2)(x^2 + x + 2008 - x_3)$$

Vì phương trình $P[Q(x)] = 0$ vô nghiệm nên các phương trình:

$$x^2 + x + 2008 - x_1 = 0; x^2 + x + 2008 - x_2 = 0; x^2 + x + 2008 - x_3 = 0$$

đều vô nghiệm. Do đó:

$$\begin{cases} 2008 - x_1 > \frac{1}{4} \\ 2008 - x_2 > \frac{1}{4} \\ 2008 - x_3 > \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow (2008 - x_1)(2008 - x_2)(2008 - x_3) > \frac{1}{64}$$

$$\text{Tức là } P(2008) > \frac{1}{64} \text{ (đpcm)}$$

b. Các bài toán lượng giác:

VD3.2b.1: Cho phương trình $x^3 + px^2 + qx + r = 0$. Biết rằng phương trình này có các nghiệm thực, đồng thời các nghiệm ấy là cosin 3 góc của một tam giác. Tính giá trị của biểu thức:

$$A = p^2 - 2(q + r)$$

Lời giải:

Giả sử các nghiệm của phương trình là cosin 3 góc của tam giác ABC .

Theo định lý Viète, ta có:

$$\begin{cases} \cos A + \cos B + \cos C = -p & (1) \\ \cos A \cos B + \cos B \cos C + \cos C \cos A = q & (2) \\ \cos A \cos B \cos C = -r & (3) \end{cases}$$

Từ (1) và (2) ta có:

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = (\cos A + \cos B + \cos C)^2 - 2(\cos A \cos B + \cos B \cos C + \cos C \cos A)$$

$$\text{Suy ra: } \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = p^2 - 2q$$

Từ (3) ta có:

$$-2r = \cos A [\cos(B + C) - \cos(B - C)] = -\cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C + 1$$

Từ 2 điều vừa suy ra, ta có:

$$-2r = -(p^2 - 2q) + 1$$

Hay:

$$p^2 - 2(q + r) = 1$$

Vậy $A = 1$.

VD3.2b.2: Tính giá trị của biểu thức: $A = \tan^6 10^\circ + \tan^6 50^\circ + \tan^6 70^\circ$

Lời giải:

Cách 1:

Theo công thức góc nhân ta có:

$$\tan 3x = \frac{3 \tan x - \tan^3 x}{1 - 3 \tan^2 x}$$

Suy ra:

$$\tan^2 3x = \frac{\tan^6 x + 9 \tan^2 x - 6 \tan^4 x}{9 \tan^4 x + 1 - 6 \tan^2 x}$$

Hay:

$$\tan^6 x - (6 + 9 \tan^2 3x) \tan^4 x + (9 + 6 \tan^2 3x) \tan^2 x - \tan^2 3x = 0 \quad (1)$$

Đặt $y = \tan^2 x$, phương trình (1) được viết dưới dạng:

$$y^3 - (6 + 9 \tan^2 3x) y^2 + (9 + 6 \tan^2 3x) y - \tan^2 3x = 0 \quad (2)$$

Quay về với bài toán, trong phương trình (2), lần lượt thay $x = 10^\circ$, $x = 50^\circ$ và $x = 70^\circ$ thì theo định lý Viète đảo suy ra $y_1 = \tan^2 10^\circ$; $y_2 = \tan^2 50^\circ$ và $y_3 = \tan^2 70^\circ$ là 3 nghiệm phân biệt của phương trình bậc ba:

$$y^3 - 9y^2 + 11y - \frac{1}{3} = 0$$

Theo giả thiết, ta cần tính giá trị của biểu thức $A = y_1^3 + y_2^3 + y_3^3$

Từ định lý Viète cho phương trình bậc ba, ta có:

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 = 9 \\ y_1 y_2 + y_2 y_3 + y_3 y_1 = 11 \\ y_1 y_2 y_3 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Vì thế:

$$\begin{aligned} A &= \tan^6 10^\circ + \tan^6 50^\circ + \tan^6 70^\circ = y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 \\ &= (y_1 + y_2 + y_3)((y_1 + y_2 + y_3)^2 - 3(y_1 y_2 + y_2 y_3 + y_3 y_1)) + 3y_1 y_2 y_3 = 433 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } A = \tan^6 10^\circ + \tan^6 50^\circ + \tan^6 70^\circ = 433$$

Cách 2: ta sẽ tiếp cận bài toán ở một hướng khác

Đổi các giá trị lượng giác trên thành radian, ta cần phải tính giá trị của biểu thức:

$$A = \tan^2 \frac{\pi}{18} + \tan^2 \frac{5\pi}{18} + \tan^2 \frac{7\pi}{18}$$

ta nhận xét rằng:

$$\begin{aligned} \tan^2 \left(3 \cdot \frac{\pi}{18} \right) &= \tan^2 \frac{\pi}{6} = \frac{1}{3} \\ \tan^2 \left(3 \cdot \frac{5\pi}{18} \right) &= \tan^2 \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{3} \\ \tan^2 \left(3 \cdot \frac{7\pi}{18} \right) &= \tan^2 \frac{7\pi}{6} = \tan^2 \frac{\pi}{6} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Suy ra $\frac{\pi}{18}$; $\frac{3\pi}{18}$; $\frac{7\pi}{18}$ là 3 nghiệm của phương trình $\tan^2 3x = \frac{1}{3}$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \left(\frac{3 \tan x - \tan^3 x}{1 - 3 \tan^2 x} \right)^2 = \frac{1}{3} \\ &\Leftrightarrow \frac{\tan^6 x - 6 \tan^4 x + 9 \tan^2 x}{9 \tan^4 x - 6 \tan^2 x + 1} = \frac{1}{3} \\ &\Leftrightarrow 3 \tan^6 x - 27 \tan^4 x + 33 \tan^2 x - 1 = 0 \end{aligned}$$

Đến đây ta đặt các ẩn phụ: $y_1 = \tan^2 \frac{\pi}{18}$; $y_2 = \tan^2 \frac{5\pi}{18}$; $y_3 = \tan^2 \frac{7\pi}{18}$, bài toán quay về giống như cách 1.

VD3.2b.3: Tính giá trị của biểu thức:

$$M = \sqrt[3]{\cos \frac{2\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cos \frac{4\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cos \frac{6\pi}{7}}$$

Lời giải:

Mọi thứ bắt nguồn từ nhận xét sau:

$\frac{2\pi}{7}; \frac{4\pi}{7}; \frac{6\pi}{7}$ là các nghiệm của phương trình $3x + 4x = k2\pi$

$$\Rightarrow 4x = -3x + k2\pi$$

$$\Rightarrow \cos 4x = \cos 3x$$

$$\Rightarrow 2 \cos^2 2x - 1 = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

$$\Rightarrow 2(2 \cos^2 x - 1)^2 - 1 = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

$$\Rightarrow 2(4 \cos^4 x - 4 \cos^2 x + 1) - 1 = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

$$\Rightarrow (\cos x - 1)(8 \cos^3 x + 4 \cos^2 x - 4 \cos x - 1) = 0$$

Nhưng $\frac{2\pi}{7}; \frac{4\pi}{7}; \frac{6\pi}{7}$ không phải là nghiệm của phương trình $\cos x - 1 = 0$

Suy ra $\frac{2\pi}{7}; \frac{4\pi}{7}; \frac{6\pi}{7}$ là các nghiệm của phương trình: $8 \cos^3 x + 4 \cos^2 x - 4 \cos x - 1 = 0$

Đặt $t_1 = 2 \cos \frac{2\pi}{7}; t_2 = 2 \cos \frac{4\pi}{7}; t_3 = 2 \cos \frac{6\pi}{7}$ thì t_1, t_2, t_3 là các nghiệm của phương trình:

$$t^3 + t^2 - 2t - 1 = 0$$

Theo định lý Viète, ta có:

$$\begin{cases} t_1 + t_2 + t_3 = -1 \\ t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_3 t_1 = 2 \\ t_1 t_2 t_3 = 1 \end{cases}$$

Để tính giá trị của biểu thức đề bài yêu cầu:

$$M = \sqrt[3]{\cos \frac{2\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cos \frac{4\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cos \frac{6\pi}{7}} = \sqrt[3]{t_1} + \sqrt[3]{t_2} + \sqrt[3]{t_3}$$

Ta xét thêm biểu thức $N = \sqrt[3]{t_1 t_2} + \sqrt[3]{t_2 t_3} + \sqrt[3]{t_3 t_1}$, khi đó:

$$M^3 = t_1 + t_2 + t_3 + 3(\sqrt[3]{t_1} + \sqrt[3]{t_2} + \sqrt[3]{t_3})(\sqrt[3]{t_1 t_2} + \sqrt[3]{t_2 t_3} + \sqrt[3]{t_3 t_1}) - 3\sqrt[3]{t_1 t_2 t_3}$$

$$N^3 = t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_3 t_1 + 3(\sqrt[3]{t_1 t_2} + \sqrt[3]{t_2 t_3} + \sqrt[3]{t_3 t_1})(\sqrt[3]{t_1 t_2 t_3}(\sqrt[3]{t_1} + \sqrt[3]{t_2} + \sqrt[3]{t_3})) - 3\sqrt[3]{t_1^2 t_2^2 t_3^2}$$

Tức là:

$$\begin{cases} M^3 = 3MN - 4 \\ N^3 = 3MN - 5 \end{cases}$$

Suy ra:

$$(MN)^3 = (3MN - 4)(3MN - 5) = 9(MN)^2 - 27MN + 20$$

$$\Rightarrow (MN - 3)^3 + 7 = 0$$

$$\Rightarrow MN = 3 - \sqrt[3]{7}$$

Suy ra: $M^3 = 3MN - 4 = 5 - 3\sqrt[3]{7}$

Vậy:

$$\sqrt[3]{2 \cos \frac{2\pi}{7}} + \sqrt[3]{2 \cos \frac{4\pi}{7}} + \sqrt[3]{2 \cos \frac{6\pi}{7}} = \sqrt[3]{5 - 3\sqrt[3]{7}}$$

Hay:

$$M = \sqrt[3]{\cos \frac{2\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cos \frac{4\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cos \frac{6\pi}{7}} = \sqrt[3]{\frac{5 - 3\sqrt{7}}{2}}$$

Đó chính là giá trị cần tính của M .

c. Ứng dụng của phép thế Viète trong chứng minh các bất đẳng thức, phương pháp “ p, q, r ”:

Trước hết ta nhắc lại định lý sau:

Định lý cơ bản của Đại Số (đối với trường hợp 3 biến số): Mọi đa thức đối xứng $f(x, y, z)$ đều có thể được biểu diễn dưới dạng đa thức $H(p, q, r)$ trong đó $p = x + y + z, q = xy + yz + zx, r = xyz$.

Áp dụng định lý trên, để chứng minh một bất đẳng thức đối xứng giữa 3 biến số, ta thường tìm cách đưa chúng từ dạng khai triển $f(x, y, z)$ thành dạng chính tắc p, q, r là $H(p, q, r)$. (Tất nhiên, điều này tuy luôn làm được nhưng không phải lúc nào cũng dễ dàng). Sau đó, ta sẽ tìm cách phân tích chúng ở dạng p, q, r đó thành các bất đẳng thức đúng mà ta có thể chứng minh được.

Để đưa các bất đẳng thức ở dạng khai triển theo x, y, z thành dạng chính tắc theo p, q, r , ta thường dùng một số hằng đẳng thức sau:

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + z^2 &= (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx) = p^2 - 2q \\(xy)^2 + (yz)^2 + (zx)^2 &= (xy + yz + zx)^2 - 2xyz(x + y + z) = q^2 - 2pr \\(x + y)(y + z)(z + x) &= (x + y + z)(xy + yz + zx) - xyz = pq - r \\x^3 + y^3 + z^3 &= (x + y + z)^3 - 3(x + y)(y + z)(z + x) = p^3 - 3pq + 3r \\x^4 + y^4 + z^4 &= (x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) = (p^2 - 2q)^2 - 2(q^2 - 2pr)\end{aligned}$$

Sau khi đã đưa được bất đẳng thức cần chứng minh về dạng chính tắc theo p, q, r , công việc còn lại của chúng ta là chứng minh một bất đẳng thức mới với các đại lượng p, q, r . Ưu thế của phương pháp này là chúng ta sẽ không cần phải thông qua những ước lượng trung gian mà thay vào đó sẽ sử dụng những đánh giá trực tiếp và nhờ đó sẽ thu được những ước lượng rất chặt mà đôi khi các bất đẳng thức cơ sở khác như AM-GM, Holder Bunyakovsky, Tchebychev... không thể thực hiện được.

Tiếp theo chúng ta sẽ đến với một số bất đẳng thức cơ sở thường được sử dụng trong phương pháp p, q, r :

Bất đẳng thức Schur: Cho $a, b, c \geq 0$ và t là một số thực bất kì. Khi đó:

$$a^t(a - b)(a - c) + b^t(b - c)(b - a) + c^t(c - a)(c - b) \geq 0$$

Chứng minh:

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$. Đưa bất đẳng thức cần chứng minh về dạng:

$$(a - b)(a^t(a - c) - b^t(b - c) + c^t(a - b)(a - c)) \geq 0$$

Ta có: $a - c = (a - b) + (b - c) \geq b - c \geq 0$ và $a^t \geq b^t \geq 0$ nên:

$$a^t(a - c) \geq b^t(b - c)$$

Hay: $a^t(a - c) - b^t(b - c) \geq 0$. Vậy:

$$(a - b)(a^t(a - c) - b^t(b - c)) \geq 0$$

Mặt khác, cũng vì $a \geq b \geq c$ nên $c^t(a - b)(a - c) \geq 0$

Suy ra:

$$(a - b)(a^t(a - c) - b^t(b - c) + c^t(a - b)(a - c)) \geq 0$$

Từ đây ta có được đpcm.

Các hệ quả của bất đẳng thức Schur:

Lần lượt cho $t = 1$ và $t = 2$, ta có các bất đẳng thức sau:

$$\begin{aligned}a(a - b)(a - c) + b(b - c)(b - a) + c(c - a)(c - b) &\geq 0 \\a^2(a - b)(a - c) + b^2(b - c)(b - a) + c^2(c - a)(c - b) &\geq 0\end{aligned}$$

Viết các bất đẳng thức trên dưới dạng p, q, r , ta có:

$$\begin{aligned} p^3 - 4pq + 9r &\geq 0 \\ p^4 - 5p^2q + 4q^2 + 6pr &\geq 0 \end{aligned}$$

Hai bất đẳng thức trên là một phần trong số các cơ sở hết sức quan trọng của phương pháp p, q, r . Ta còn một số bất đẳng thức cơ sở khác cũng rất quan trọng như sau:

$$\begin{array}{lll} p^2 \geq 3q & p^2q + 3pr \geq 4q^2 & p^4 + 3q^2 \geq 4p^2q \\ p^3 \geq 27r & pq^2 + 2q^2 \geq 4p^2q & 2p^3 + 9r^2 \geq 7pqr \\ q^2 \geq 3pr & pq^2 \geq 2p^2r + 3qr & p^3q + q^3 \geq 6pqr \\ 2p^3 + 9r \geq 7pq & q^3 + 9r^2 \geq 4pqr & \end{array}$$

Các bạn hãy tự chứng minh lại các bất đẳng thức cơ sở trên xem như bài tập đối với mình

Sau đây là một số bài toán đã được sắp xếp với độ khó tăng dần nhằm giúp các bạn làm quen với phương pháp:

VD3.2c.1: (Iran TST 1996)

Cho $x, y, z \geq 0$ và không có quá một số trong chúng bằng 0. Chứng minh rằng:

$$(xy + yz + zx) \left(\frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(y+z)^2} + \frac{1}{(z+x)^2} \right) \geq \frac{9}{4}$$

Lời giải:

Cần phải nói thêm rằng Iran TST 1996 là một bất đẳng thức rất khó vì tính chặt chẽ của nó. Các bạn có thể thử tự tìm cách chứng minh bất đẳng thức nói trên bằng phương pháp đánh giá thông qua các bất đẳng thức cổ điển, nhưng xin báo trước rằng kết quả sẽ không mấy khả quan! Ồ goài cách giải bằng phương pháp p, q, r sắp được trình bày dưới đây, bài toán còn có một lời giải bằng phương pháp phân tích bình phương SOS, cũng được coi là một ví dụ kinh điển cho phương pháp SOS, nhưng nó không phải là phạm vi nghiên cứu của chúng ta.

Bây giờ ta đến với lời giải bằng phương pháp p, q, r của bài toán:

Đặt $p = x + y + z, q = xy + yz + zx, r = xyz$, bất đẳng thức cần chứng minh có thể biến đổi thành:

$$\begin{aligned} (xy + yz + zx) \left(\frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(y+z)^2} + \frac{1}{(z+x)^2} \right) &\geq \frac{9}{4} \\ \Leftrightarrow q \left(\frac{(p^2 + q)^2 - 4p(pq - r)}{(pq - r)^2} \right) &\geq \frac{9}{4} \\ \Leftrightarrow 4p^4q - 17p^2q^2 + 4q^3 - 34pqr - 9r^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Đến đây tức là ta đã đi được nửa chặng đường của phương pháp. Cần phải lưu ý với các bạn rằng phương pháp “ p, q, r ” rất dễ gây ra nhầm lẫn trong khi biến đổi, vì thế ta phải hết sức thận trọng khi sử dụng nó.

Việc còn lại của chúng ta là biến đổi bất đẳng thức đã cho thành tổng của các số hạng không âm dựa vào các cơ sở của phương pháp “ p, q, r ”. Lưu ý với bạn đọc rằng kỹ năng biến đổi p, q, r của chúng ta chỉ có thể được nâng cao nhờ kinh nghiệm trong việc giải quyết nhiều bài toán chứ không thể tự nhiên mà có được.

Quay lại với bài toán Iran TST 1996, ta viết bất đẳng thức thu được sau cùng dưới dạng sau:

$$\begin{aligned} 4p^4q - 17p^2q^2 + 4q^3 - 34pqr - 9r^2 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow pq(p^3 - 4pq + 9r) + q(p^4 - 5p^2q + 4q^2 + 6pr) + r(pq - 9r) &\geq 0 \end{aligned}$$

Theo các cơ sở của phương pháp “ p, q, r ” thì bất đẳng thức sau cùng là đúng. Vì thế mà ta có đpcm.

VD3.2c.2: Cho 3 số thực dương x, y, z thỏa điều kiện $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng:

$$(1 - x^2)^2 + (1 - y^2)^2 + (1 - z^2)^2 \leq (1 + x)(1 + y)(1 + z)$$

Lời giải:

Đặt $p = x + y + z, q = xy + yz + zx, r = xyz$, bất đẳng thức cần chứng minh có thể biến đổi thành:

$$\begin{aligned} (1 - x^2)^2 + (1 - y^2)^2 + (1 - z^2)^2 &\leq (1 + x)(1 + y)(1 + z) \\ \Leftrightarrow 3 - 2(p^2 - 2q) + (1 - 2q)^2 - 2(q^2 - 2r) &\leq 1 + p + q + r \end{aligned}$$

ả hưng vì giả thiết $p = 1$ nên bất đẳng thức cần chứng minh được biến đổi thành:

$$3 - 2(1 - 2q) + (1 - 2q)^2 - 2(q^2 - 2r) \leq 2 + q + r$$

Hay:

$$2q^2 - q + 3r \leq 0$$

Vì $pq \geq 9r$ và $p = 1$ nên ta có $q \geq 9r$, tức là $-q + 9r \leq 0$. Vì thế, chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta có:

$$2q^2 - q + \frac{1}{3}q \leq 0$$

ả hưng điều này tương đương với:

$$2q^2 - \frac{2}{3}q \leq 0 \Leftrightarrow 2q\left(q - \frac{1}{3}\right) \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq q \leq \frac{1}{3}$$

Song bất đẳng thức sau cùng này hiển nhiên đúng vì $p^2 \geq 3q$

Và ta đã có đpcm.

VD3.2c.3: Cho $x, y, z > 0$ thoả điều kiện $xyz = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(y+z)^2} + \frac{1}{(z+x)^2} + \frac{2}{(1+x)(1+y)(1+z)} \geq 1$$

Lời giải:

Với phép thế $p = x + y + z, q = xy + yz + zx, r = xyz$, bất đẳng thức được đưa về dạng:

$$2p^2 + q^2 + 2pq + p - 3 + 2(p + q + 2) \geq (p + q + 2)^2$$

Hay:

$$p^2 \geq 2q + 3$$

ả hưng điều này hiển nhiên đúng, vì ta có:

$$p^2 \geq 3q \text{ (cơ sở phương pháp “} p, q, r \text{”)}$$

Còn theo bất đẳng thức Cauchy thì:

$$\begin{aligned} xy + yz + zx &\geq 3\sqrt[3]{(xyz)^2} \\ &\Rightarrow q \geq 3 \Rightarrow 3q \geq 2q + 3 \end{aligned}$$

Vậy $p^2 \geq 2q + 3$ và ta đã có đpcm.

VD3.2c.3: Cho $x, y, z \geq 0$ và thoả mãn điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{8}{27} \leq (1 - xy)(1 - yz)(1 - zx) \leq 1$$

Lời giải:

Bất đẳng thức $(1 - xy)(1 - yz)(1 - zx) \leq 1$ là hiển nhiên. Ta sẽ chứng minh:

$$(1 - xy)(1 - yz)(1 - zx) \geq \frac{8}{27}$$

Đặt $p = x + y + z, q = xy + yz + zx$ và $r = xyz$, bất đẳng thức cần chứng minh được đưa về dạng:

$$1 - q + pr - r^2 \geq \frac{8}{27} \Leftrightarrow 1 - q + r(p - r) \geq \frac{8}{27}$$

Theo bất đẳng thức Schur, ta có:

$$p^3 - 4pr + 9r \geq 0 \Leftrightarrow 9r \geq p(4q - 2p^2)$$

Mặt khác, vì $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ nên $p^2 - 2q = 1$ hay $4q - p^2 = 2q - 1$, từ đó:

$$9r \geq p(2q - 1) \Leftrightarrow r \geq \frac{1}{9}p(2q - 1)$$

Theo bất đẳng thức cơ sở của phương pháp “ p, q, r ”, ta có:

$$pq \geq 9r \Leftrightarrow p - r \geq \frac{8}{9}p$$

ả hân theo vế 2 bất đẳng thức vừa thu được, ta có:

$$r(p-r) \geq \frac{8}{81}p^2(2q-1)$$

Mặt khác, vì $p^2 = 2q + 1$ nên bất đẳng thức trên có dạng:

$$r(p-r) \geq \frac{8}{81}(2q-1)(2q+1) \Leftrightarrow r(p-r) \geq \frac{8}{81}(4q^2-1)$$

Vậy, để có điều phải chứng minh, ta chỉ cần đánh giá được:

$$1-q+\frac{8}{81}(4q^2-1) \geq \frac{8}{27}$$

Biến đổi tương đương bất đẳng thức này về dạng nhân tử, ta được:

$$(1-q)(49-32q) \geq 0$$

Song điều này hiển nhiên đúng vì: $1 = x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx = q$.

Vậy ta có đpcm.

VD3.2c.4: Cho $x, y, z > 0$ thỏa điều kiện $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1-xy} + \frac{1}{1-yz} + \frac{1}{1-zx} \leq \frac{27}{8}$$

Lời giải:

Đặt $p = x + y + z = 1$, $q = xy + yz + zx$ và $r = xyz$. Sử dụng các hằng đẳng thức sau:

$$(1-xy)(1-yz)(1-zx) = 1 - q + pr - r^2$$

$$(1-xy)(1-yz) + (1-yz)(1-zx) + (1-zx)(1-xy) = 3 - 2q + pr$$

Ta biến đổi được bất đẳng thức cần chứng minh về dạng:

$$\frac{3-2q+pr}{1-q+pr+r^2} \leq \frac{27}{8}$$

Hay:

$$3 - 11q + 19r - 27r^2 \geq 0$$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$(x+y+z)^3 \geq 27xyz \Rightarrow p^3 \geq 27r \Rightarrow p^3r \geq 27r^2 \Rightarrow -27r^2 \geq -r$$

Mà $p = 1$ nên $r \geq 27r^3$ và để có đpcm, ta chỉ cần đánh giá được:

$$3 - 11q + 19r - r \geq 0 \Leftrightarrow 3 - 11q + 18r \geq 0$$

Viết bất đẳng thức trên về dạng theo x, y, z thì ta có:

$$3 - 11(xy + yz + zx) + 18xyz \geq 0$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $z = \min\{x, y, z\}$ thế thì $z \leq \frac{1}{3}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$xy(18z-11) - 11z(x+y) \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 (18z-11) - 11z(x+y)$$

Vì $x + y + z = 1$ nên ta chỉ cần chứng minh rằng:

$$\left(\frac{1-z}{2}\right)^2 (18z-11) - 11z(1-z) \geq 0$$

ả hân điều này tương đương với:

$$(3z-1)^2(2z+1) \geq 0$$

Bất đẳng nói trên là hiển nhiên đúng. Vì thế mà ta có đpcm.

VD3.2c.5: Cho $x, y, z \geq 0$. Chứng minh rằng:

$$(8x^2 + yz)(8y^2 + zx)(8z^2 + xy) \leq (x + y + z)^6$$

Lời giải:

Đặt $p = x + y + z$, $q = xy + yz + zx$ và $r = xyz$. Do bất đẳng thức cần chứng minh là đồng bậc nên không giảm tính tổng quát, ta có thể giả sử $p = x + y + z = 1$. Khi đó, bất đẳng thức được đưa về dạng:

$$513(xyz)^2 + 64(x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3) + 8xyz(x^3 + y^3 + z^3) \leq 1$$

Ta sử dụng các hằng đẳng thức sau:

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 &= p(p^2 - 3q) + 3r \\ a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 &= q^3 - 3q^2r + 3r^2 \end{aligned}$$

Và bất đẳng thức cần chứng minh đã được đưa về dạng:

$$\begin{aligned} 513(xyz)^2 + 64(x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3) + 8xyz(x^3 + y^3 + z^3) &\leq 1 \\ \Leftrightarrow 513r^3 + 64(q^3 - 3q^2r + 3r^2) + 8r(p^3 - 3pq + 3r) &\leq 1 \\ \Leftrightarrow 729r^2 + 64q(q^2 - 3r) + 8r(1 - 3q) &\leq 1 \\ \Leftrightarrow 64q(q^2 - 3r) + 8r(1 - 3q) &\leq (1 - 27r)(1 + 27r) \end{aligned}$$

Theo các bất đẳng thức cơ sở của phương pháp “ p, q, r ” thì ta có: $pq \geq 9r$, mà $p = 1$ nên:

$$q \geq 9r \Rightarrow 1 - 3q \leq 1 - 27r \Rightarrow 8r(1 - 3q) \leq 8r(1 - 27r)$$

Để giải quyết bài toán, ta chỉ cần chứng minh:

$$64q(q^2 - 3r) \leq (1 - 27r)(1 + 19r)$$

Bây giờ ta sẽ chứng minh:

$$1 - 27r \geq 16(q^2 - 3r)$$

Hay:

$$1 + 21r \geq 16q^2$$

Thật vậy, theo bất đẳng thức Schur ta có: $p^3 - 4pq + 9r \geq 0$ nên tại $p = 1$ ta sẽ có: $1 + 9r \geq 4q$

Suy ra:

$$1 + 21r \geq 17r + 4q \geq 1 + \frac{7}{3}(4q - 1)$$

Xét 2 trường hợp sau:

Nếu $q \geq \frac{1}{4}$ hoặc $q \leq \frac{1}{3}$, ta sẽ chứng minh $1 + \frac{7}{3}(4q - 1) \geq 16q^2$. Điều này tương đương với:

$$(3q - 1)(4q - 1) \leq 0 \text{ (đúng trong trường hợp đang xét)}$$

Nếu $\frac{1}{3} \leq q \leq \frac{1}{4}$ thì theo bất đẳng thức Cauchy ta có: $\frac{1}{4} \geq q \geq 3\sqrt[3]{r^2}$

Suy ra $1 - 27r \geq 16(q^2 - 3r)$

Vậy trong mọi trường hợp ta luôn có $1 - 27r \geq 16(q^2 - 3r)$

Phần còn lại ta sẽ chứng minh: $16(1 + 19r) \geq 64q$, hay $19r + 1 \geq 64q$, nhưng điều này hiển nhiên đúng theo bất đẳng thức Schur, kết hợp với $p = 1$.

Vì thế, ta đã có đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi x, y, z tỉ lệ với $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ hay $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ hoặc các hoán vị của chúng.

VD3.1c.6: Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2 + ab + b^2} + \frac{1}{b^2 + bc + c^2} + \frac{1}{c^2 + ca + a^2} \geq \frac{9}{(a + b + c)^2}$$

Lời giải:

Đặt $p = a + b + c$, $q = ab + bc + ca$ và $r = abc$. Ta chú ý đến hằng đẳng thức sau:

$$a^2 + ab + b^2 = (a + b)^2 - ab = (1 - c)^2 - ab = 1 - c - q$$

Vậy bất đẳng thức cần chứng minh có thể được đưa về dạng sau:

$$\sum_{cyc} (1-a-q)(1-b-q) \geq \frac{9}{p^2} (1-a-q)(1-b-q)(1-c-q)$$

Khai triển và thu gọn bất đẳng thức trên, chú ý rằng vì các biến khá công kênh nên ta có thể đặt $m = 1 - q$ để quá trình tính toán được đơn giản hơn. Sau khi đã khai triển và thu gọn rồi thay lại các biến như cũ thì ta cần chứng minh bất đẳng thức sau:

$$9q^3 + 6q^2 - 3q + 9r + 1 \geq 0$$

Hay:

$$q(3q + 1)^2 + 9r - 1 - 4q \geq 0$$

Ấu hưng hiễn nhiên ta đã có $q(3q + 1)^2 \geq 0$ và theo bất đẳng thức Schur đối với $p = 1$ thì ta có:

$$p^2 - 4pq + 9r \geq 0 \Rightarrow 1 + 9r \geq 4q$$

Vậy bất đẳng thức hoàn toàn được chứng minh.

VD3.1c.7: Cho $x, y, z \geq 0$ và $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng:

$$xy + yz + zx \geq 12(x^3 + y^3 + z^3)(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)$$

Lời giải:

Đặt $p = x + y + z, q = xy + yz + zx$ và $r = xyz$.

Với giả thiết $p = 1$, bất đẳng thức cần chứng minh được đưa về dạng:

$$q \geq 12(1 - 3q + 3r)(q^2 - 2r)$$

Nếu $q \geq \frac{1}{4}$ thì do $0 \leq r \leq \frac{p}{9}$ nên ta chỉ cần chứng minh rằng:

$$q \geq 12q^2 \left(1 - 3q - \frac{q}{3}\right)$$

Hay:

$$1 \geq 4q(3 - 8q)$$

Xét hàm số: $f(q) = 12q - 32q^2$ có đạo hàm $f'(q) = 12 - 64q < 0$ trên miền đang xét của q nên $f(q)$ giảm trên miền này và ta có:

$$f(q) \leq f\left(\frac{1}{4}\right) = 1$$

(đối với các bạn không biết về đạo hàm, ta có thể xét dấu biểu thức: $\frac{f(q_1) - f(q_2)}{q_1 - q_2} < 0$ với $q_1 < q_2 \leq \frac{1}{4}$)

Nếu $0 \leq q \leq \frac{1}{4}$, bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$q \geq 12q^2(1 - 3q) + 12r(3q^2 + 6q - 2) - 72r^2$$

Ấu hưng bất đẳng thức nói trên đúng vì theo bất đẳng thức Cauchy thì:

$$12q(1 - 3q) = 4 \cdot 3q(1 - 3q) \leq (3q + (1 - 3q))^2 = 1$$

Ấu ẽn suy ra:

$$12q^2(1 - 3q) \leq q$$

Mặt khác: $3q^2 + 6q - 2 < 0$ với q thuộc miền đang xét. Vì thế:

$$q \geq 12q^2(1 - 3q) \geq 12q^2(1 - 3q) + 12r(3q^2 + 6q - 2) \geq 12q^2(1 - 3q) + 12r(3q^2 + 6q - 2) - 72r^2$$

Vậy trong mọi trường hợp, bất đẳng thức:

$$q \geq 12(1 - 3q + 3r)(q^2 - 2r)$$

là bất đẳng thức đúng. Và ta đã có đpcm.

Điều thú vị của bài toán trên là đẳng thức xảy ra tại các điểm x, y, z có giá trị lệch nhau. Các bạn hãy tự kiểm tra điều này.

VD3.1c.8: Cho $x, y, z \geq 0$. Tìm hằng số k nhỏ nhất để bất đẳng thức sau đây luôn đúng:

$$\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^k \left(\frac{xy+yz+zx}{3}\right)^{\frac{3-k}{2}} \geq \frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{8}$$

Lời giải:

Cho $x = y = 1$ và $z \rightarrow 0$ thì ta thấy giá trị của k bị chặn trong miền:

$$k \geq k_0 = \frac{3 \ln 3 - 4 \ln 2}{2 \ln 2 - \ln 3}$$

Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức đúng tại $k = k_0$ vừa tìm được.

Thật vậy, đặt $p = x + y + z, q = xy + yz + zx$ và $r = xyz$. Vì bất đẳng thức đồng bậc nên không giảm tính tổng quát, ta có thể giả sử $p = 1$. Khi đó, bất đẳng thức cần chứng minh được đưa về dạng:

$$F = r + \frac{8q^{\frac{3-k_0}{2}}}{3^{\frac{3+k_0}{2}}} - q \geq 0$$

Xét 2 trường hợp:

Nếu $1 \geq 4q \geq 0$ thì:

$$F \geq \frac{8q^{\frac{3-k_0}{2}}}{3^{\frac{3+k_0}{2}}} - q = q^{\frac{3-k_0}{2}} \left(\frac{8}{3^{\frac{3+k_0}{2}}} - q^{\frac{k_0-1}{2}} \right) \geq q^{\frac{3-k_0}{2}} \left(\frac{8}{3^{\frac{3+k_0}{2}}} - \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{k_0-1}{2}} \right) = 0 \Rightarrow F \geq 0$$

Nếu $\frac{1}{3} \geq q \geq \frac{1}{4}$ thì theo bất đẳng thức Schur ta có $p^3 - 4pq + 9r \geq 0$, mà $p = 1$ nên:

$$r \geq \frac{4q - 1}{9}$$

Từ đó:

$$F \geq \frac{4q - 1}{9} + \frac{8q^{\frac{3-k_0}{2}}}{3^{\frac{3+k_0}{2}}} - q = \frac{8q^{\frac{3-k_0}{2}}}{3^{\frac{3+k_0}{2}}} - \frac{5q + 1}{9}$$

Đặt:

$$f(q) = \frac{8q^{\frac{3-k_0}{2}}}{3^{\frac{3+k_0}{2}}} - \frac{5q + 1}{9}$$

Tính đạo hàm ta có:

$$f'(q) = \frac{4(3 - k_0)}{q^{\frac{k_0-1}{2}} \cdot 3^{\frac{k_0+3}{2}}} - \frac{5}{9}$$

Vì $\frac{1}{3} \geq q \geq \frac{1}{4}$ nên $f'(q) < 0$, suy ra $f(q)$ là hàm giảm trên $\left[\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right]$. Mà $f'\left(\frac{1}{3}\right) < 0 < f'\left(\frac{1}{4}\right)$ nên tồn tại duy nhất $q_0 \in \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right]$ sao cho $f'(q_0) = 0$. Theo bổ đề Fermat ta có:

$$f(q) \geq \min \left\{ f\left(\frac{1}{3}\right), f\left(\frac{1}{4}\right) \right\}$$

Ấu hưng ta có:

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = f\left(\frac{1}{4}\right) = 0$$

Ấu ền $f(q) \geq 0$.

Vậy trong tất cả các trường hợp, ta đều có: $F = r + \frac{8q^{\frac{3-k_0}{2}}}{3^{\frac{3+k_0}{2}}} - q \geq 0$

Do đó, giá trị nhỏ nhất cần tìm của k là:

$$k = k_0 = \frac{3 \ln 3 - 4 \ln 2}{2 \ln 2 - \ln 3} \approx 1,82$$

d. Các bất đẳng thức nhiều hơn 3 biến số:

Phương pháp “ p, q, r ” không chỉ cho phép ta chứng minh được các bất đẳng thức 3 biến mà còn hỗ trợ việc tìm được các hằng số tốt, làm cho bất đẳng thức trở nên mạnh nhất. Ắt hẳn, có thể bạn nghĩ rằng “ p, q, r ” chỉ thực sự hữu dụng đối với trường hợp bất đẳng thức gồm có 3 biến số? Sự thật không phải thế, bằng định lý Viète, kết hợp với một số công cụ cơ bản của Giải Tích, chúng ta có thể chứng minh các bất đẳng thức với số lượng biến nhiều hơn. Phần này xin giới thiệu với các bạn một bất đẳng thức 4 biến, được chứng minh bằng cách đưa về 3 biến nhờ ứng dụng của 2 định lý quan trọng là định lý Viète của Đại Số và định lý Rolle của Giải Tích. Ắt hẳn trước hết, ta hãy làm quen với một số khái niệm cơ sở của Giải Tích.

Đạo hàm của đa thức:

Cho đa thức $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^n a_k x^k$

Ta định nghĩa giới hạn của tỉ số giữa số gia của giá trị $P(x)$ với số gia của x khi số gia ấy dần đến 0, là đạo hàm của đa thức $P(x)$, nghĩa là:

$$P'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x + \Delta x) - P(x)}{\Delta x}$$

Ta chứng minh được đa thức đạo hàm của $P(x)$ là:

$$P'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + 2 a_2 x + a_1 = \sum_{k=1}^n k a_k x^{k-1}$$

Các tính chất của đa thức đạo hàm:

Ắt hẳn $\forall x \in [a; b]$, ta có $P'(x) > 0$ thì $P(x)$ tăng trên $[a; b]$

Ắt ngược lại, nếu $\forall x \in [a; b]$, ta có $P'(x) < 0$ thì $P(x)$ giảm trên $[a; b]$

Ắt hẳn $\forall x \in [a; b]$, ta có $P'(x) = 0$ thì $P(x)$ là hàm hằng trên $[a; b]$

Chứng minh:

Ta chỉ chứng minh trường hợp $P'(x) > 0$, các trường hợp còn lại có thể suy ra tương tự.

Thật vậy, trong trường hợp này, $P(x)$ là hàm tăng trên $[a; b]$ khi và chỉ khi:

$$\frac{P(x + \Delta x) - P(x)}{\Delta x} > 0, \forall x \in [a; b]$$

Tức là:

$$P'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x + \Delta x) - P(x)}{\Delta x} > 0$$

Và ta đã có đpcm.

Bổ đề Fermat:

Cho đa thức $P(x)$. Ắt hẳn đa thức này đạt cực trị tại điểm $x_0 \in (a; b)$ thì ta có $P'(x_0) = 0$

Chứng minh:

Không mất tính tổng quát, giả sử x_0 là điểm cực tiểu. Để chứng minh bổ đề Fermat, ta xét đạo hàm bên trái và đạo hàm bên phải của $P(x)$ tại điểm x_0 :

$$P'(x_0^+) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{P(x) - P(x_0)}{x - x_0}, P'(x_0^-) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{P(x) - P(x_0)}{x - x_0}$$

ở cực tiểu tại điểm x_0 nên với x đủ gần x_0 thì $P(x) - P(x_0) \geq 0$. Vì vậy giá trị dưới dấu lim ở đẳng thức thứ nhất luôn không âm, còn ở đẳng thức thứ hai luôn không dương. Vì thế đạo hàm bên phải tại điểm x_0 không âm, còn đạo hàm bên trái tại điểm x_0 luôn không dương. Vì $P(x)$ có đạo hàm trên $[a; b]$ nên hai đạo hàm này bằng nhau và vì thế bắt buộc chúng phải cùng bằng 0. Bổ đề Fermat được chứng minh.

Áp dụng kết quả này, ta sẽ chứng minh được định lý Rolle:

Định lý Rolle:

Cho đa thức $P(x)$ có đạo hàm trên $(a; b)$. Khi đó, nếu $P(a) = P(b)$ thì tồn tại $x_0 \in (a; b)$ sao cho:

$$P'(x_0) = 0$$

Chứng minh:

Giả sử đa thức $P(x)$ đạt giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m trên đoạn $[a, b]$. Có thể xảy ra hai trường hợp

a) $M = m$. Khi đó $P(x)$ là đa thức hằng trên $[a, b]$ và $\forall x \in [a, b]$, ta có $P'(x) = 0$.

b) $M > m$. Do $P(a) = P(b)$ nên một trong hai giá trị M và m phải đạt được tại một điểm $x_0 \in (a; b)$. ở cực trị tại x_0 và theo bổ đề Fermat ta có $P'(x_0) = 0$.

ở đây định lý đã được chứng minh.

Một trong những hệ quả quan trọng của định lý Rolle là, khi ta cho $P(a) = P(b) = 0$ thì:

Giữa 2 nghiệm x_1 và x_2 của đa thức $P(x)$, có 1 nghiệm của đa thức đạo hàm $P'(x)$

Bây giờ ta sẽ ứng dụng hệ quả này, kết hợp với định lý Viète để chứng minh bất đẳng thức nổi tiếng sau:

VD3.1d.1: Cho $a, b, c, d \geq 0$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt[3]{\frac{abc + bcd + cda + dab}{4}} \leq \sqrt{\frac{ab + ac + ad + bc + bd + cd}{6}}$$

Lời giải:

Đặt $p = -(a + b + c + d)$, $q = ab + ac + ad + bc + bd + cd$, $r = abc + bcd + cda + dab$ và $s = abcd$.

Theo định lý Viète đảo, a, b, c, d là 4 nghiệm thực không âm của phương trình:

$$P(x) = x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$$

Theo hệ quả của định lý Rolle, giữa 2 nghiệm của $P(x)$ phải có một nghiệm của $P'(x)$. ở đây vì $P'(x)$ là đa thức bậc ba không đồng nhất với 0 nên $P'(x)$ có đúng 3 nghiệm thực dương.

Kí hiệu 3 nghiệm ấy là u, v, w . Ta có:

$$P'(x) = 4x^3 - 3px^2 + 2qx - r$$

Theo định lý Viète, đối với $P'(x)$, ta có:

$$\begin{cases} u + v + w = \frac{3p}{4} \\ uv + vw + wu = \frac{q}{2} \\ uvw = \frac{r}{4} \end{cases}$$

ở đây cũng theo định lý Viète đối với đa thức $P(x)$ thì:

$$\begin{cases} a + b + c + d = p \\ ab + ac + ad + bc + bd + cd = q \\ abc + bcd + cda + dab = r \\ abcd = s \end{cases}$$

Ân ta có:

$$\begin{cases} u + v + w = \frac{3}{4}(a + b + c + d) \\ uv + vw + wu = \frac{1}{2}(ab + ac + ad + bc + bd + cd) \\ uvw = \frac{1}{4}(abc + bcd + cda + dab) \end{cases}$$

Với 3 số thực dương u, v, w , theo bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\frac{uv + vw + wu}{3} \geq \sqrt[3]{(uvw)^2}$$

Suy ra:

$$\sqrt[3]{\frac{abc + bcd + cda + dab}{4}} \leq \sqrt{\frac{ab + ac + ad + bc + bd + cd}{6}}$$

Và đó chính là đpcm.

Xin lưu ý với các bạn rằng bất đẳng thức trong **VD3.1d.4** rất chặt. Phương pháp thường được dùng để chứng minh nó là phương pháp dồn biến, với sự hỗ trợ của định lý SMV (Stronger Mixing Variables). Âm hưng với định lý Viète, ta đã sử dụng các kiến thức trong sách giáo khoa phổ thông để làm được một điều mà phải sử dụng những công cụ rất mạnh mới có thể giải quyết được. Thật là kì diệu!

e. Các bất đẳng thức khác liên quan đến phương trình bậc ba:

VD3.2e.1: Cho đa thức $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ có 3 nghiệm không âm phân biệt. Chứng minh rằng:

$$-\frac{a}{3} > \sqrt{\frac{b}{3}} > -\sqrt[3]{c}$$

Lời giải:

Gọi x_1, x_2, x_3 là 3 nghiệm không âm phân biệt của $P(x)$. Theo định lý Viète thì:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -a \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = b \\ x_1x_2x_3 = -c \end{cases}$$

Mặt khác, vì x_1, x_2, x_3 là các số không âm phân biệt nên theo bất đẳng thức Bunyakovsky và bất đẳng thức Cauchy, trong các trường hợp không xảy ra dấu bằng vì các biến lệch nhau, ta thu được dãy bất đẳng thức sau:

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} > \sqrt{\frac{x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1}{3}} > \sqrt[3]{x_1x_2x_3}$$

Thay các đa thức Viète vào, ta có:

$$-\frac{a}{3} > \sqrt{\frac{b}{3}} > -\sqrt[3]{c}$$

Đó chính là đpcm.

VD3.2e.2: Cho phương trình $x^3 + px^2 + qx + p = 0$. Biết rằng $q \neq 1$ và phương trình đã cho có 3 nghiệm là $\tan 3$ góc của một tam giác nhọn. Chứng minh rằng: $p \leq -3\sqrt{3}$ và $q \geq 9$.

Lời giải:

Giả sử phương trình đã cho có 3 nghiệm là $\tan A, \tan B, \tan C$ với A, B, C là 3 góc của tam giác nhọn ABC . Theo định lý Viète, ta có:

$$\begin{cases} \tan A + \tan B + \tan C = -p \\ \tan A \tan B + \tan B \tan C + \tan C \tan A = q \\ \tan A \tan B \tan C = -p \end{cases}$$

Vì tam giác ABC nhọn nên $\tan A, \tan B, \tan C > 0$, vì vậy $p < 0$ và $q > 0$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\begin{aligned} \tan A \tan B \tan C &= \tan A + \tan B + \tan C \geq 3\sqrt[3]{\tan A \tan B \tan C} \\ &\Rightarrow -p \geq 3\sqrt[3]{-p} \\ &\Rightarrow p^3 \leq 27p \end{aligned}$$

Vì $p < 0$ nên từ bất đẳng thức trên ta suy ra $p \leq -3\sqrt{3}$.

Mặt khác, cũng theo bất đẳng thức Cauchy:

$$\begin{aligned} q &= \tan A \tan B + \tan B \tan C + \tan C \tan A \geq 3\sqrt[3]{(\tan A \tan B \tan C)^2} \\ &\Rightarrow q \geq 3\sqrt[3]{p^2} \geq 3\sqrt[3]{27} \Rightarrow q \geq 9 \end{aligned}$$

Vậy ta có đpcm.

VD3.2e.3: (VMO 2002)

Biết rằng đa thức $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ có 3 nghiệm thực. Chứng minh rằng:

$$12ab + 27c \leq 6a^3 + 10(a^2 - 2b)^{\frac{3}{2}}$$

Lời giải:

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$-6a(a^2 - 2b) \leq -27c + 10(a^2 - 2b)^{\frac{3}{2}}$$

Gọi x_1, x_2, x_3 là 3 nghiệm thực của đa thức $P(x)$. Theo định lý Viète, ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -a \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = b \\ x_1x_2x_3 = -c \end{cases}$$

Suy ra: $a^2 - 2b = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành:

$$6(x_1 + x_2 + x_3)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \leq 27x_1x_2x_3 + 10(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{\frac{3}{2}}$$

ả ếu $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ thì $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ và bất đẳng thức là hiển nhiên đúng.

ả ếu $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > 0$.

Không mất tính tổng quát, giả sử $x_1^2 \leq x_2^2 \leq x_3^2$, mặt khác vì bất đẳng thức là đồng bậc nên ta còn có thể giả sử $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 9$. Khi đó: $x_3^2 \geq 3$ và $2x_1x_2 \leq x_1^2 + x_2^2 \leq 6$.

Do đó, bất đẳng thức cần chứng minh lại được biến đổi về dạng:

$$2(x_1 + x_2 + x_3) - x_1x_2x_3 \leq 10$$

ả hưng theo bất đẳng thức Bunyakovsky, ta có:

$$\begin{aligned} [2(x_1 + x_2 + x_3) - x_1x_2x_3]^2 &= [2(x_1 + x_2) + x_3(2 - x_1x_2)]^2 \leq [4 + (2 - x_1x_2)^2][(x_1 + x_2)^2 + x_3^2] \\ &\Rightarrow [2(x_1 + x_2 + x_3) - x_1x_2x_3]^2 \leq [8 - 4x_1x_2 + (x_1x_2)^2](9 + 2x_1x_2) \\ &\Rightarrow [2(x_1 + x_2 + x_3) - x_1x_2x_3]^2 \leq 2(x_1x_2)^3 + (x_1x_2)^2 - 20x_1x_2 + 72 \\ &\Rightarrow [2(x_1 + x_2 + x_3) - x_1x_2x_3]^2 \leq (x_1x_2 + 2)^2(2x_1x_2 - 7) + 100 \leq 100 \end{aligned}$$

Vậy ta có đpcm.

3.3. Định lý Viète với phương trình bậc cao:

a. Một vài đẳng thức và bất đẳng thức về các đa thức đối xứng:

VD3.3a.1: Cho 2 bộ số $\{x_n\}$ và $\{a_n\}$ giảm và không âm thỏa mãn hệ điều kiện:

$$\begin{cases} E_k^1(x) \geq E_k^1(a), \forall k = \overline{1, n-1} \\ E_n^1(x) = E_n^1(a) \end{cases}$$

Chứng minh rằng:

$$E_n^2(x) \leq E_n^2(a)$$

Lời giải:

Ta có:

$$[E_n^1(x)]^2 - 2E_n^1(x^2) = E_n^2(x)$$

Vậy bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$[E_n^1(x)]^2 - 2E_n^1(x^2) \leq [E_n^1(a)]^2 - 2E_n^1(a^2)$$

ả hưng vì:

$$E_n^1(x) = E_n^1(a)$$

ả ên ta chỉ cần chứng minh:

$$E_n^1(x^2) \geq E_n^1(a^2)$$

Ta có:

$$(a_k - x_k)^2 \geq 0 \Rightarrow x_k^2 \geq a_k^2 + 2a_k(x_k - a_k), \forall a_k, x_k \in \mathbf{R}$$

Từ đó suy ra:

$$E_n^1(x^2) \geq E_n^1(a^2) + 2 \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) [E_k^1(x) - E_k^1(a)]$$

ả hưng theo giả thiết thì $\{a_n\}$ là dãy giảm và $E_k^1(x) \geq E_k^1(a), \forall k = \overline{1, n-1}$ nên ta có:

$$2 \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) [E_k^1(x) - E_k^1(a)] \geq 0$$

Vậy:

$$E_n^1(x^2) \geq E_n^1(a^2) + 2 \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) [E_k^1(x) - E_k^1(a)] \geq E_n^1(a^2)$$

Và đó chính là đpcm.

VD3.3a.2: (Bất đẳng Karamata)

Cho 2 bộ số giảm và không âm thỏa mãn hệ điều kiện:

$$\begin{cases} E_k^1(x) \geq E_k^1(a), \forall k = \overline{1, n-1} \\ E_n^1(x) = E_n^1(a) \end{cases}$$

Chứng minh rằng với mọi đa thức $P(x)$ thỏa điều kiện: $P''(x) \geq 0, \forall x \in \mathbf{R}$, ta luôn có:

$$E_n^1[P(x)] \geq E_n^1[P(a)]$$

Lời giải:

Vì $P''(x) \geq 0$ nên theo định lý Lagrange ta có:

$$P(x_k) \geq P(a_k) + P'(a_k)(x_k - a_k), \forall a_k, x_k \in \mathbf{R}$$

Lần lượt cho $k = 1, 2, \dots, n$ rồi cộng các bất đẳng thức dạng như trên lại với nhau, ta có:

$$E_n^1[P(x)] \geq E_n^1[P(a)] + \sum_{k=0}^{n-1} P'(a_k)(x_k - a_k)$$

Tức là:

$$E_n^1[P(x)] \geq E_n^1[P(a)] + \sum_{k=0}^{n-1} [P'(a_k) - P'(a_{k+1})][E_k^1(x) - E_k^1(a)]$$

đúng vì $P''(x) \geq 0, \forall x \in \mathbf{R}$ nên $P'(x)$ là hàm tăng trên $\mathbf{R}$. Mặt khác, vì $\{a_n\}$ là dãy giảm nên:

$$P'(a_k) > P'(a_{k+1}), \forall k = \overline{1, n}$$

Suy ra:

$$\sum_{k=0}^{n-1} [P'(a_k) - P'(a_{k+1})][E_k^1(x) - E_k^1(a)] \geq 0$$

Từ đó:

$$E_n^1[P(x)] \geq E_n^1[P(a)] + \sum_{k=0}^{n-1} [P'(a_k) - P'(a_{k+1})][E_k^1(x) - E_k^1(a)] \geq E_n^1[P(a)]$$

Và ta đã có đpcm.

VD3.3a.3: Với mỗi dãy số thực $\{t_n\}$, ta kí hiệu:

$$A = \frac{1}{n}(t_1 + t_2 + \dots + t_n)$$

$$B = \frac{1}{n}(t_1^2 + t_2^2 + \dots + t_n^2)$$

Giả thiết rằng $t_i \in [p, q], \forall i = \overline{1, n}$. Chứng minh rằng:

$$\frac{A^2}{B} \geq \frac{4pq}{(p+q)^2}$$

Lời giải:

Từ giả thiết ta có:

$$(t_i - p)(t_i - q) \leq 0, \forall i = \overline{1, n} \Rightarrow \sum_{k=1}^n (t_k - p)(t_k - q) \leq 0$$

Suy ra:

$$\sum_{k=1}^n t_k^2 - (p+q) \sum_{k=1}^n t_k + npq \geq 0$$

Với các kí hiệu của bài toán thì bất đẳng thức trên được đưa về dạng:

$$B - (p+q)A + npq \geq 0$$

Vậy:

$$\frac{B}{A^2} \leq \frac{-pq}{A^2} + \frac{p+q}{A^2} = -pq \left(\frac{1}{A} - \frac{p+q}{2pq} \right)^2 + \frac{(p+q)^2}{4pq} \leq \frac{(p+q)^2}{4pq}$$

đảo ngược 2 vế của bất đẳng thức trên, ta thu được:

$$\frac{A^2}{B} \geq \frac{4pq}{(p+q)^2}$$

Và đó chính là đpcm.

VD3.3a.4: Cho $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{E_n^1}{C_n^1} \geq \sqrt{\frac{E_n^2}{C_n^2}} \geq \dots \geq \sqrt[n-1]{\frac{E_n^{n-1}}{C_n^{n-1}}} \geq \sqrt[n]{\frac{E_n^n}{C_n^n}}$$

Lời giải:

Ta chứng minh dãy bất đẳng thức trên bằng quy nạp.

Với $n = 1$, dễ thấy bất đẳng thức đúng.

Giả sử bất đẳng thức đúng tại $n - 1$, ta sẽ chứng minh nó cũng đúng cho n .

Thật vậy, không mất tính tổng quát, giả sử $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$.

Xét đa thức $P(x) = x^n - E_n^1 x^{n-1} + E_n^2 x^{n-2} - \dots + (-1)^n E_n^n$.

Theo định lý Viète đảo, rõ ràng đa thức $P(x)$ có n nghiệm là $x_1, x_2, \dots, x_n$ nên theo định lý Rolle, đa thức:

$$P'(x) = nx^{n-1} - (n-1)E_n^1 x^{n-2} + \dots + (-1)^{n-1} E_n^{n-1}$$

có $n - 1$ nghiệm $y_1, y_2, \dots, y_n$ xen kẽ với các nghiệm của $P(x)$:

$$0 < x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < x_3 < \dots < x_{n-1} < y_{n-1} < x_n$$

Theo định lý Viète, ta lại có:

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + \dots + y_n = \frac{n-1}{n} E_n^1 \\ y_1 y_2 + y_1 y_3 + \dots + y_1 y_n + y_2 y_3 + y_2 y_4 + \dots + y_2 y_n + \dots + y_{n-1} y_n = \frac{n-2}{n} E_n^2 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \\ y_1 y_2 \dots y_n = \frac{1}{n} E_n^{n-1} \end{cases}$$

Theo giả thiết quy nạp ta có:

$$\frac{n-1}{nC_{n-1}^1} E_n^1 \geq \sqrt{\frac{n-2}{nC_{n-1}^2} E_n^2} \geq \dots \geq {}^{n-1}\sqrt{\frac{E_n^{n-1}}{nC_{n-1}^{n-1}}}$$

Suy ra:

$$\frac{E_n^1}{C_n^1} \geq \sqrt{\frac{E_n^2}{C_n^2}} \geq \dots \geq {}^{n-1}\sqrt{\frac{E_n^{n-1}}{C_n^{n-1}}}$$

Âp dụng theo bất đẳng thức Cauchy thì:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} &\geq \frac{n}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}} \\ \Rightarrow (x_1 x_2 \dots x_n) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right) &\geq n \sqrt[n]{(x_1 x_2 \dots x_n)^{n-1}} \end{aligned}$$

Vì thế:

$${}^{n-1}\sqrt{\frac{E_n^{n-1}}{C_n^{n-1}}} \geq \sqrt[n]{\frac{E_n^n}{C_n^n}}$$

Vậy ta có:

$$\frac{E_n^1}{C_n^1} \geq \sqrt{\frac{E_n^2}{C_n^2}} \geq \dots \geq {}^{n-1}\sqrt{\frac{E_n^{n-1}}{C_n^{n-1}}} \geq \sqrt[n]{\frac{E_n^n}{C_n^n}}$$

Và theo nguyên lý quy nạp toán học, ta đã có được đpcm.

Chú ý: đây chính là bài toán tổng quát cho bài toán **VD3.1d.4**.

VD3.3a.5: Cho 2 bộ số dương $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ và $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$. Chứng minh hằng đẳng thức:

$$\frac{E_n^2(x+y)}{E_n^1(x+y)} = \frac{E_n^2(x)}{E_n^1(x)} + \frac{E_n^2(y)}{E_n^1(y)} + \left(\frac{1}{2E_n^1(x+y)E_n^1(x)E_n^1(y)} \right) \sum_{i=1}^n \left(x_i \sum_{j=1}^n y_j - y_i \sum_{j=1}^n x_j \right)^2$$

Lời giải:

Ta sử dụng biến đổi sau:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left(x_i \sum_{j=1}^n y_j - y_i \sum_{j=1}^n x_j \right)^2 &= \sum_{i=1}^n (x_i E_n^1(y) + y_i E_n^1(x))^2 \\ &= \sum_{i=1}^n [x_i^2 (E_n^1(y))^2 + y_i^2 (E_n^1(x))^2 + 2x_i y_i E_n^1(x) E_n^1(y)] \\ &= (E_n^1(y))^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 + (E_n^1(x))^2 \sum_{i=1}^n y_i^2 - 2E_n^1(x) E_n^1(y) \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ &= (E_n^1(y))^2 \left((E_n^1(x))^2 - E_n^1(x) \right) + (E_n^1(x))^2 \left((E_n^1(y))^2 - E_n^1(y) \right) - 2E_n^1(x) E_n^1(y) \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ &= 2(E_n^1(x))^2 (E_n^1(y))^2 - 2(E_n^1(x))^2 E_n^2(y) - 2(E_n^1(y))^2 E_n^2(x) (E_n^1(x))^2 - 2E_n^1(x) E_n^1(y) \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{aligned}$$

Vậy:

$$\left(\frac{1}{2E_n^1(x+y)E_n^1(x)E_n^1(y)} \right) \sum_{i=1}^n \left(x_i \sum_{j=1}^n y_j - y_i \sum_{j=1}^n x_j \right)^2 = \frac{A}{B}$$

Với:

$$\begin{cases} A = (E_n^1(x))^2 (E_n^1(y))^2 - (E_n^1(x))^2 E_n^2(y) - (E_n^1(y))^2 E_n^2(x) (E_n^1(x))^2 - E_n^1(x) E_n^1(y) \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ B = E_n^1(x+y) E_n^1(x) E_n^1(y) \end{cases}$$

Ta lại có:

$$\begin{aligned} E_n^2(x+y) &= \sum_{i=1}^{n-1} (x_i + y_i) \sum_{j=i+1}^n (x_j + y_j) = \sum_{i=1}^{n-1} \left[(x_i + y_i) \left(\sum_{j=i+1}^n x_j + \sum_{j=i+1}^n y_j \right) \right] \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \left[x_i \sum_{j=i+1}^n x_j + y_i \sum_{j=i+1}^n x_j + x_i \sum_{j=i+1}^n y_j + y_i \sum_{j=i+1}^n y_j \right] \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \left(x_i \sum_{j=i+1}^n x_j \right) + \sum_{i=1}^{n-1} \left(y_i \sum_{j=i+1}^n y_j \right) + \sum_{i=1}^{n-1} \left(x_i \sum_{j=i+1}^n y_j \right) + \sum_{i=1}^{n-1} \left(y_i \sum_{j=i+1}^n x_j \right) \\ &= E_n^2(x) + E_n^2(y) + \sum_{i=1}^{n-1} \left(x_i \sum_{j=i+1}^n y_j \right) + \sum_{i=1}^{n-1} \left(y_i \sum_{j=i+1}^n x_j \right) \end{aligned}$$

Mà đpcm tương đương với:

$$\frac{E_n^2(x+y)}{E_n^1(x+y)} - \frac{E_n^2(x)}{E_n^1(x)} - \frac{E_n^2(y)}{E_n^1(y)} = \left(\frac{1}{2E_n^1(x+y)E_n^1(x)E_n^1(y)} \right) \sum_{i=1}^n \left(x_i \sum_{j=1}^n y_j - y_i \sum_{j=1}^n x_j \right)^2$$

Qui đồng mẫu thức các phân thức ở vế trái, ta đưa hằng đẳng thức về dạng một phân thức có tử thức là:

$$\begin{aligned}
& E_n^2(x+y)E_n^1(x)E_n^1(y) - E_n^2(x)E_n^1(x+y)E_n^1(y) - E_n^2(y)E_n^1(x+y)E_n^1(x) \\
&= E_n^1(x) + E_n^1(y) - (E_n^1(y))^2 E_n^2(x) - (E_n^1(x))^2 E_n^2(y) - E_n^1(x)E_n^1(y)E_n^2(x) - E_n^1(x)E_n^1(y)E_n^2(y) \\
&= E_n^1(x)E_n^1(y)E_n^2(x) + E_n^1(x)E_n^1(y)E_n^2(y) + E_n^1(x)E_n^1(y) \left[\sum_{i=1}^{n-1} \left(x_i \sum_{j=i+1}^n y_j \right) + \sum_{i=1}^{n-1} \left(y_i \sum_{j=i+1}^n x_j \right) \right] \\
&\quad - (E_n^1(y))^2 E_n^2(x) - (E_n^1(x))^2 E_n^2(y) - E_n^1(x)E_n^1(y)E_n^2(x) - E_n^1(x)E_n^1(y)E_n^2(y) \\
&= \left[E_n^2(x) + E_n^2(y) + \sum_{i=1}^{n-1} \left(x_i \sum_{j=i+1}^n y_j \right) + \sum_{i=1}^{n-1} \left(y_i \sum_{j=i+1}^n x_j \right) \right] - (E_n^1(y))^2 E_n^2(x) - E_n^1(x)E_n^1(y)E_n^2(x) \\
&= E_n^1(x) + E_n^1(y) \left[\sum_{i=1}^{n-1} \left(x_i \sum_{j=i+1}^n y_j \right) + \sum_{i=1}^{n-1} \left(y_i \sum_{j=i+1}^n x_j \right) \right] - (E_n^1(y))^2 E_n^2(x) - (E_n^1(x))^2 E_n^2(y)
\end{aligned}$$

Vậy để chứng minh hằng đẳng thức, ta chỉ cần chứng minh:

$$E_n^1(x)E_n^1(y) - \sum_{i=1}^n x_i y_i = \sum_{i=1}^{n-1} \left(x_i \sum_{j=i+1}^n y_j \right) + \sum_{i=1}^{n-1} \left(y_i \sum_{j=i+1}^n x_j \right)$$

ở hưng ta có:

$$\begin{aligned}
E_n^1(x)E_n^1(y) - \sum_{i=1}^n x_i y_i &= \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i \right) - \sum_{i=1}^n x_i y_i \\
&= \sum_{i=1}^n x_i y_i + \sum_{i=1}^{n-1} \left(x_i \sum_{j=i+1}^n y_j \right) + \sum_{i=1}^{n-1} \left(y_i \sum_{j=i+1}^n x_j \right) - \sum_{i=1}^n x_i y_i \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \left(x_i \sum_{j=i+1}^n y_j \right) + \sum_{i=1}^{n-1} \left(y_i \sum_{j=i+1}^n x_j \right)
\end{aligned}$$

Và ta đã có đpcm.

Từ kết quả của **VD3.3a.4**, ta có:

$$\begin{aligned}
\frac{E_n^2(x+y)}{E_n^1(x+y)} - \frac{E_n^2(x)}{E_n^1(x)} - \frac{E_n^2(y)}{E_n^1(y)} &= \left(\frac{1}{2E_n^1(x+y)E_n^1(x)E_n^1(y)} \right) \sum_{i=1}^n \left(x_i \sum_{j=1}^n y_j - y_i \sum_{j=1}^n x_j \right)^2 \geq 0 \\
&\Rightarrow \frac{E_n^2(x+y)}{E_n^1(x+y)} \geq \frac{E_n^2(x)}{E_n^1(x)} + \frac{E_n^2(y)}{E_n^1(y)}
\end{aligned}$$

Đó chính là nội dung của bất đẳng thức Markuc – Lopes.

b. Đa thức bậc cao và định lý Viète:

VD3.3b.1: Cho đa thức $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ với $n \geq 2$ và $a_n a_0 \neq 0$. Biết rằng $P(x)$ có n nghiệm là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\left| \frac{a_{n-1} a_1}{a_n a_0} \right| \geq n^2$$

Lời giải:

Gọi $x_1, x_2, \dots, x_n$ là n nghiệm dương của $P(x)$. Theo định lý Viète, ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_n = \frac{a_{n-1}}{a_n} > 0 \\ x_1x_2 \dots x_{n-1} + x_1x_3 \dots x_{n-1} + \dots + x_2x_3 \dots x_{n-1} = (-1)^{n-1} \frac{a_1}{a_n} > 0 \\ x_1x_2 \dots x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n} > 0 \end{cases}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq n \sqrt[n]{x_1x_2 \dots x_n} \\ x_1x_2 \dots x_{n-1} + x_1x_3 \dots x_{n-1} + \dots + x_2x_3 \dots x_{n-1} \geq n \sqrt[n]{(x_1x_2 \dots x_n)^{n-1}} \end{cases}$$

Nhân theo vế 2 bất đẳng thức trên thì:

$$\begin{aligned} (x_1 + x_2 + \dots + x_n)(x_1x_2 \dots x_{n-1} + x_1x_3 \dots x_{n-1} + \dots + x_2x_3 \dots x_{n-1}) &\geq n^2 x_1x_2 \dots x_n \\ \Rightarrow \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_n)(x_1x_2 \dots x_{n-1} + x_1x_3 \dots x_{n-1} + \dots + x_2x_3 \dots x_{n-1})}{x_1x_2 \dots x_n} &\geq n^2 \\ \Rightarrow \left| \frac{a_{n-1}a_1}{a_na_0} \right| &\geq n^2 \end{aligned}$$

Vậy ta có đpcm.

VD3.1b.2: Biết rằng đa thức $P(x) = x^{2000} + a_1x^{1999} + a_2x^{1998} + \dots + a_{1999}x + a_{2000}$ có 2000 nghiệm phân biệt đồng thời $a_{1995} = 1995$ và $a_{1997} = 1997$. Chứng minh rằng $a_{1996} > 2231$.

Lời giải:

Do đa thức $P(x)$ có 2000 nghiệm phân biệt nên theo định lý Rolle thì:

Đa thức $P'(x)$ có 1999 nghiệm phân biệt, đa thức $P''(x)$ có 1998 nghiệm phân biệt và đa thức $P'''(x)$ có 1997 nghiệm phân biệt.

Ảnh hưởng $P'''(0) = 3.2.a_{1997} = 3.2.1997 \neq 0$ nên đa thức sau:

$$Q(x) = x^{1997} \cdot P'''\left(\frac{1}{x}\right) = 6a_{1997}x^{1997} + 24a_{1996}x^{1996} + 60a_{1995}x^{1995} + \dots + b_1$$

cũng có 1997 nghiệm phân biệt. Giả sử các nghiệm đó là $x_1, x_2, \dots, x_{1997}$ Theo định lý Viète ta có:

$$\sum_{i=1}^{1997} x_i = -\frac{24a_{1996}}{6a_{1997}}$$

Và:

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j = -\frac{60a_{1995}}{6a_{1997}}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky ta có:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^{1997} x_i \right)^2 &\geq 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j \\ \Rightarrow \left(-\frac{24a_{1996}}{6a_{1997}} \right)^2 &\geq -2 \cdot \frac{60a_{1995}}{6a_{1997}} \\ \Rightarrow |a_{1996}| &\geq \frac{1}{2} \sqrt{5a_{1995}a_{1997}} > 2231 \end{aligned}$$

Và đó chính là đpcm.

VD3.1b.3: Gọi m, n, p là 3 nghiệm của phương trình bậc ba $ax^3 + bx^2 + cx - a = 0$. Chứng minh rằng:

$$m^2 + n^2 + p^2 \geq \frac{\sqrt{2}}{m} + \frac{\sqrt{3}}{n} - \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{p}$$

Lời giải:

Theo định lý Viète ta có $mnp = 1$

Chọn $\alpha = 45^\circ, \beta = -30^\circ, \gamma = 165^\circ$ thì $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ thì:

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos \gamma = -\cos 15^\circ = -\frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$$

Vậy sau khi nhân 2 về cho $mnp = 1$ thì bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$m^2 + n^2 + p^2 \geq 2mn \cos \alpha + 2np \cos \beta + 2pm \cos \gamma$$

$$\Leftrightarrow (m \cos \beta + n \cos \alpha - p)^2 + (m \sin \beta - n \sin \alpha)^2 \geq 0$$

ảnh hưởng bất đẳng thức sau cùng hiển nhiên đúng nên ta có đpcm.

Chú ý: bất đẳng thức $m^2 + n^2 + p^2 \geq 2mn \cos \alpha + 2np \cos \beta + 2pm \cos \gamma$ với $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ được gọi là bất đẳng thức Erdos. Trong tam giác, bất đẳng thức này có rất nhiều ứng dụng.

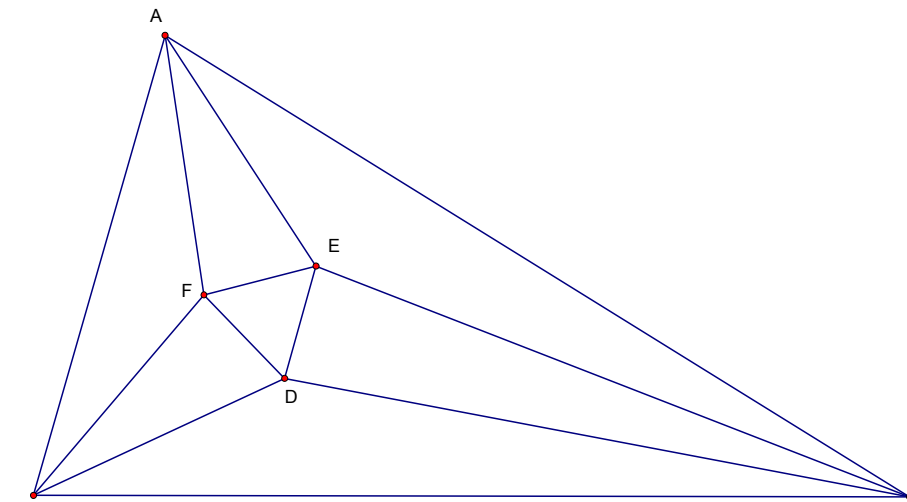
3.4. Ứng dụng của định lý Viète trong một bài toán Hình Học của thế kỉ:

Kết thúc bài thuyết trình, xin đưa các bạn bước đến một cánh cửa dẫn vào một chân trời khác rộng lớn hơn. Chúng ta đều đã biết, định lý Viète là một trong những định lý mang tính nền tảng cho sự phát triển của Đại Số, nhưng có lẽ ít người nghĩ rằng định lý này còn xuất hiện trong một số phân ngành quan trọng khác của Toán Học. ảnh hưởng đã nói ở trên, chúng ta sẽ bắt gặp bóng dáng của định lý Viète trong Giải Tích, cùng với sự hỗ trợ của định lý Rolle, định lý Lagrange... để chứng minh các mệnh đề quan trọng. Bây giờ, chúng ta sẽ đến với định lý này trong một bài toán Hình Học của thế kỉ, đó là định lý Morley.

VD3.4.1: (Định lý Morley)

Cho tam giác ABC bất kì. Các đường chia ba góc $\widehat{ABC}$ và góc $\widehat{ACB}$ kẻ với BC cắt nhau tại D . Các đường chia ba góc $\widehat{ABC}$ và góc $\widehat{ACB}$ kẻ với BC cắt nhau tại D . Các đường chia ba góc $\widehat{ABC}$ và góc $\widehat{ACB}$ kẻ với BC cắt nhau tại D . Chứng minh rằng tam giác DEF đều.

Lời giải:



Không mất tính tổng quát, giả sử bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC bằng 1 (đvdd). Thế thì $AB = 2 \sin 3c, BC = 2 \sin 3a, CA = 2 \sin 3b$. Bây giờ xét tam giác ABE , áp dụng định lý sin, ta có:

$$\frac{AE}{\sin \widehat{ABE}} = \frac{AB}{\sin \widehat{AEB}} \Rightarrow AE = \frac{AB \sin b}{\sin(180^\circ - a - b)} = \frac{2 \sin b \sin 3c}{\sin(60^\circ - c)}$$

Mặt khác, xét phương trình:

$$\sin 3x = \sin 3a \quad (1)$$

Ta có:

$$(1) \Leftrightarrow 3x = 3a + k\pi \Leftrightarrow x = a + \frac{k\pi}{3}$$

Lần lượt cho $k = 0, 1, 2$, ta được các giá trị của x là:

$$x_1 = a, x_2 = a + \frac{\pi}{3}, x_3 = a - \frac{\pi}{3}$$

Bây giờ, đặt $t = \sin x$ và xem (1) như là một phương trình đại số theo t thì:

$$3t - 4t^3 = \sin 3a$$

Biến đổi về dạng chính tắc của phương trình bậc 3, ta được:

$$4t^3 - 3t + \sin 3a = 0$$

Do $t_1 = \sin a, t_2 = \sin(a + 60^\circ), t_3 = \sin(a - 60^\circ)$ là các nghiệm của phương trình nên nói trên theo định lý Viète ta có:

$$t_1 t_2 t_3 = \frac{\sin 3a}{4}$$

$$\Rightarrow 4 \sin a \sin(60^\circ + a) \sin(60^\circ - a) = \sin 3a$$

Áp dụng công thức vừa thu được, ta có:

$$\sin 3c = 4 \sin c \sin(60^\circ + c) \sin(60^\circ - c)$$

Từ đó suy ra:

$$AE = \frac{2 \sin b \sin 3c}{\sin(60^\circ - c)} = \frac{2 \sin b \cdot 4 \sin c \sin(60^\circ + c) \sin(60^\circ - c)}{\sin(60^\circ - c)} = 8 \sin b \sin c \sin(60^\circ + c)$$

Lý luận tương tự ta có: $AD = 8 \sin c \sin b \sin(60^\circ + b)$

Áp dụng định lý cosin cho tam giác ADE, ta có:

$$\begin{aligned} DE^2 &= AD^2 + AE^2 - 2AD \cdot AE \cdot \cos \widehat{DAE} \\ &= 64 \sin^2 b \sin^2 c \sin^2(60^\circ + b) + 64 \sin^2 b \sin^2 c \sin^2(60^\circ + c) \\ &\quad - 2 \cdot 64 \sin^2 b \sin^2 c \sin(60^\circ + b) \sin(60^\circ + c) \cos a \\ &= 64 \sin^2 b \sin^2 c [\sin^2(60^\circ + b) + \sin^2(60^\circ + c) - 2 \sin(60^\circ + b) \sin(60^\circ + c) \cos a] \end{aligned}$$

Mặt khác, chú ý rằng $(60^\circ + b) + (60^\circ + c) + a = 180^\circ$ nên $(60^\circ + b), (60^\circ + c), a$ là số đo 3 góc của một tam giác. Trong họ các tam giác có số đo 3 góc là $(60^\circ + b), (60^\circ + c), a$ (họ này gồm các tam giác đồng dạng với nhau nên ta chỉ cần xét đặc trưng 1 tam giác bất kì trong họ), xét đặc trưng tam giác có số đo 3 góc là $(60^\circ + b), (60^\circ + c), a$ và có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng 1, theo định lý cos thì:

$$\begin{aligned} 4 \sin^2 a &= 4 \sin^2(60^\circ + b) + 4 \sin^2(60^\circ + c) - 2 \cdot 2 \sin(60^\circ + b) \cdot 2 \sin(60^\circ + c) \cos a \\ \Rightarrow \sin^2 a &= \sin^2(60^\circ + b) + \sin^2(60^\circ + c) - 2 \sin(60^\circ + b) \sin(60^\circ + c) \cos a \end{aligned}$$

Do tính chất nói trên đặc trưng cho bộ tam giác này nên ta có:

$$\begin{aligned} DE^2 &= 64 \sin^2 b \sin^2 c [\sin^2(60^\circ + b) + \sin^2(60^\circ + c) - 2 \sin(60^\circ + b) \sin(60^\circ + c) \cos a] \\ \Rightarrow DE^2 &= 64 \sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c \\ \Rightarrow DE &= 8 \sin a \sin b \sin c \end{aligned}$$

Lý luận tương tự ta cũng có: $EF = 8 \sin a \sin b \sin c$ và $FD = 8 \sin a \sin b \sin c$, suy ra $DE = EF = FD$, tức là tam giác DEF đều (đpcm).

THE E&D

Tài liệu tham khảo:

1. Phương trình bậc hai và một số ứng dụng (ả guyễn Đức Tấn, Vũ Đức Đoàn, Trần Đức Long, , Lương Anh Văn, ả guyễn Anh Hoàng, ả guyễn Phước, Bùi Ruy Tân)
2. Đa thức và ứng dụng (ả guyễn Hữu Điền)
3. Một số bài toán chọn lọc về lượng giác (ả guyễn Văn Mậu, Phạm Thị Bạch ả gọc)
4. Bất đẳng thức về đa thức (Lê Hoàn Phò, ả guyễn Sinh ả guyễn, ả guyễn Văn Thông, Trần Bá Hà, ả guyễn Cung ả ghi, ả gô Thế Phiệt, Phan Xuân Quang, Lê Hữu Dũng, ả guyễn Duy Thái Sơn, ả guyễn Quốc Khánh)
5. Tuyển tập đề thi Olympic 30/4 (trường THPT chuyên Lê Hồng Phong)
6. Tuyển tập đề thi học sinh giỏi Quốc gia Việt ả am (Trần ả am Dũng, ả guyễn Tiến Khải, Trịnh Thanh Đèo)
7. Sáng tạo bất đẳng thức (Phạm Kim Hùng)
8. ả ằng cao và phát triển Toán 9 (2 tập, Vũ Hữu Bình)
9. Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ
10. Bất đẳng thức – Định lý và áp dụng (ả guyễn Văn Mậu)
11. 40 năm Olympic Toán học Quốc tế (ả guyễn Văn ả ho)
12. Tuyển tập đề thi Olympic Toán Châu Á – Thái Bình Dương (ả guyễn Văn ả ho)
13. Đa thức Đại Số và phân thức hữu tỉ (ả guyễn Văn Mậu)
14. Bất biến và ứng dụng (ả guyễn Hữu Điền)
15. Ứng dụng của số phức trong Lượng Giác và Hình Học (Luu Minh Đức)
16. Phương trình hàm (ả guyễn Văn Mậu)
17. Phương pháp “p, q, r” trong chứng minh bất đẳng thức (ả guyễn Thúc Vũ Hoàng)
18. Topics in Inequalities (Hojoo Lee)
19. Vornicu – Schur inequality (Vornicu Valentine)
20. Các trang web <http://www.diendantoanhoc.net/forum>; <http://www.mathfriends.org>; <http://www.mathlinks.ro>; <http://www.artofproblemsolving.com>