

KHAI THÁC HỆ HỮU TỈ BẬC HAI

Hệ phương trình hữu tỉ bậc hai 2 ẩn là hệ có dạng

$$\begin{cases} a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2 + a_4x + a_5y + a_6 = 0 \\ b_1x^2 + b_2xy + b_3y^2 + b_4x + b_5y + b_6 = 0 \end{cases}$$

Với a_i, b_i ($i = \overline{1, 6}$) là các hệ số. Trong trường hợp tổng quát, việc giải hệ trên sẽ dẫn đến giải một phương trình bậc bốn. Tuy nhiên, trong một số tình huống ta có thể đơn giản hóa lời giải dựa vào đặc trưng của bài toán. Có 4 phương pháp hiệu quả, mỗi phương pháp đều có thể giải quyết một lớp hệ bậc hai:

- Giải hệ tổng quát bằng phương pháp thế.
- Khử bậc hai bằng phương pháp đặt ẩn phụ tổng - hiệu.
- Khử bậc nhất bằng phương pháp tịnh tiến nghiệm.
- Khử bậc không bằng phương pháp đặt ẩn phụ.

1 Giải hệ tổng quát bằng phương pháp thế

Khử hạng tử bậc hai (x^2 hoặc y^2) ở một phương trình sau đó dùng phép thế để thu được phương trình bậc bốn.

Ví dụ: (Nghệ An TST 2008) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{1}{5} \quad (1) \\ 4x^2 + 3x - \frac{57}{25} = -y(3x + 1) \quad (2) \end{cases}$$

Lời giải.

Nhận thấy $x = -\frac{1}{3}$ không là nghiệm của hệ. Vậy $x \neq -\frac{1}{3}$.

Xét (2) ta có

$$(2) \Leftrightarrow y = -\frac{4x^2 + 3x - \frac{57}{25}}{3x + 1}$$

Thay vào (1) ta có

$$x^2 + \left(-\frac{4x^2 + 3x - \frac{57}{25}}{3x + 1} \right)^2 = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{(5x - 2)(25x - 11)(125x^2 + 255x + 142)}{625(3x + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{5} \\ x = \frac{11}{25} \end{cases}$$

Từ đó tìm được nghiệm của hệ là $(x; y) = \left(\frac{2}{5}; \frac{1}{5} \right); \left(\frac{11}{25}; \frac{2}{25} \right)$. $\square$

2 Khử bậc hai bằng phương pháp đặt ẩn phụ tổng - hiệu

Nội dung phương pháp là từ một hệ phương trình theo 2 ẩn x, y ta đặt

$$(*) \begin{cases} a = mx + ny \\ b = ux + vy \end{cases} \quad (a, b \text{ là ẩn mới}).$$

Phương pháp này có thể giải quyết nhiều hệ phương trình hữu tỉ, đặc biệt là hệ bậc hai. Vì từ một phương trình bậc hai 2 ẩn $m_1x^2 + m_2xy + m_3y^2 + m_4x + m_5y + m_6 = 0$ ta có thể đưa về dạng $n_1ab + n_2a + n_3b + n_4 = 0$, từ đó tính được a theo b .

Một trường hợp đặc biệt hơn là phép đặt $\begin{cases} a = mx + ny \\ b = nx - my \end{cases}$ dùng cho hệ phương trình có một phương

trình đối xứng, có thể đưa một số bài về hệ đối xứng loại I.

Về cơ bản ta vẫn thu được một phương trình bậc bốn nhưng hệ số sẽ đơn giản hơn nhiều so với phép thế trực tiếp.

Ví dụ: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 = xy + x + y \\ x^2 - y^2 = 3 \end{cases}$

Lời giải.

Đặt $a = x - y$; $b = x + y$ ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 3a^2 + b^2 = 4b \\ ab = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{b} \\ \frac{27}{b^2} + b^2 = 4b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 \\ a = 1 \end{cases}$$

Từ đó tìm được $(x; y) = (2; 1) \square$

Bài tập áp dụng

Giải các hệ phương trình sau:

Bài 1: $\begin{cases} 4xy + 4(x^2 + y^2) + \frac{3}{(x+y)^2} = 7 \\ 2x + \frac{1}{x+y} = 3 \end{cases}$

Bài 2: $\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{1}{5} \\ 4x^2 + 3x - \frac{57}{25} = -y(3x + 1) \end{cases}$

Bài 3: $\begin{cases} x^2 + y^2 + x = 3 \\ x^2 - xy - 2y^2 + y + 1 = 0 \end{cases}$

Bài 4: (VMO 2004 Bảng B) $\begin{cases} x^3 + 3xy^2 = -49 \\ x^2 - 8xy + y^2 = 8y - 17x \end{cases}$

Bài tập tự luyện

Giải các hệ phương trình sau:

Bài 1: $\begin{cases} x^2 + y^2 + x = 3 \\ x^2 - 4y^2 + \frac{2xy}{x+y-1} = -1 \end{cases}$

Bài 2:
$$\begin{cases} 6x^2y + 2y^3 + 35 = 0 & (1) \\ 5x^2 + 5y^2 + 2xy + 5x + 13y = 0 & (2) \end{cases}$$

Bài 3*: (Chọn đội tuyển ĐHSP Hà Nội)
$$\begin{cases} x^4 - 2x = y^4 - y \\ (x^2 - y^2)^3 = 3 \end{cases}$$

3 Khử bậc nhất bằng phương pháp tịnh tiến nghiệm

Xét hệ bậc hai

$$\begin{cases} a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2 + a_4x + a_5y + a_6 = 0 & (1) \\ b_1x^2 + b_2xy + b_3y^2 + b_4x + b_5y + b_6 = 0 & (2) \end{cases}$$

Ý tưởng của phương pháp là đặt $x = u + a, y = v + b$ với u, v là ẩn mới, a, b là số cần tìm để hệ thu được không còn hạng tử bậc nhất, tức là hệ đẳng cấp bậc hai. a, b là nghiệm của hệ phương trình ẩn x, y :

$$(*) \begin{cases} 2a_1x + a_2y + a_4 = 0 \\ a_2x + 2a_3y + a_5 = 0 \\ 2b_1x + b_2y + b_4 = 0 \\ b_2x + 2b_3y + b_5 = 0 \end{cases}$$

Nhận thấy vế trái của 2 phương trình đầu chính là đạo hàm của vế trái của (1) theo 2 biến x và y . Tương tự với 2 phương trình sau. Trường hợp hệ (*) vô nghiệm thì ta không thể tịnh tiến.

Để nhận biết nhanh một hệ bậc hai có thể tịnh tiến hay không ta làm như sau:

- Thiết lập hệ phương trình (*).

- Biến đổi $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 2a_1x + a_2y + a_4 = 0 \\ a_2x + 2a_3y + a_5 = 0 \\ 2b_1x + b_2y + b_4 = 0 \end{cases} \wedge \begin{cases} 2a_1x + a_2y + a_4 = 0 \\ a_2x + 2a_3y + a_5 = 0 \\ b_2x + 2b_3y + b_5 = 0 \end{cases}$

Như vậy để (*) có nghiệm thì hai hệ trên phải có nghiệm, nghĩa là

$$\begin{vmatrix} 2a_1 & a_2 & a_4 \\ a_2 & 2a_3 & a_5 \\ 2b_1 & b_2 & b_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a_1 & a_2 & a_4 \\ a_2 & 2a_3 & a_5 \\ b_2 & 2b_3 & b_5 \end{vmatrix} = 0$$

Trong đó

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 - a_1c_2b_3 - a_2b_1c_3 + a_2c_1b_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1$$

Ví dụ: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + 3y^2 + 4xy - 18x - 22y + 31 = 0 \\ 2x^2 + 4y^2 + 2xy + 6x - 46y + 175 = 0 \end{cases}$$

Lời giải. Đặt $x = X - 5, y = Y + 7$ ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} X^2 + 3Y^2 + 4XY = 1 \\ 2X^2 + 4Y^2 + 2XY = 1 \end{cases}$$

Đến đây có thể giải theo cách thông thường là đặt $X = tY$ nhưng lưu ý rằng trừ hai phương trình ta được $X^2 - 2XY + Y^2 = 0 \Leftrightarrow X = Y$.

Từ đó có $\begin{cases} X = Y = \frac{-1}{2\sqrt{2}} \\ X = Y = \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1}{2\sqrt{2}} - 5; y = \frac{-1}{2\sqrt{2}} + 7 \\ x = \frac{1}{2\sqrt{2}} - 5; y = \frac{1}{2\sqrt{2}} + 7 \end{cases} \quad \square$

Bài tập áp dụng

Bài 1: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - 2xy + 2y + 15 = 0 \\ 2x - 2xy + y^2 + 5 = 0 \end{cases}$

Bài 2: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - y^2 - 2x + 2y = -3 \\ y^2 - 2xy + 2x = -4 \end{cases}$

Bài 3: Tìm m để hệ có nghiệm: $\begin{cases} x^2 + 2xy = m \quad (1) \\ x^2 + xy + y^2 = 1 \quad (2) \end{cases}$

4 Khử bậc không bằng phương pháp đặt ẩn phụ

Một hệ bậc hai nếu biết 1 nghiệm $(x_0; y_0)$ có thể giải quyết hoàn toàn bằng phương pháp đặt ẩn phụ $a = x - x_0; b = y - y_0$. Cách giải được minh họa qua bài toán sau:

Ví dụ: (MathScope VMO Preparation) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x^2 - 3y^2 = 2x - 2y - 1 \\ x^2 + xy - y^2 = x - 1 \end{cases}$$

Lời giải.

Nhận thấy hệ có nghiệm $(2; -1)$. Đặt $x - 2 = a, y + 1 = b$ ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 2a^2 + 6a - 3b^2 + 8b = 0 \\ a^2 + ab + 2a - b^2 + 4b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3b^2 - 2a^2 = 6a + 8b \\ b^2 - a^2 - ab = 2a + 4b \end{cases}$$

Nhận thấy $a = 0 \Leftrightarrow b = 0$ nên hệ có nghiệm $(a; b) = (0; 0)$ tương ứng với $(x; y) = (2; -1)$. Xét $ab \neq 0$, đặt $b = t.a$ ta có

$$\begin{cases} a^2(3t^2 - 2) = a(6 + 8t) \\ a^2(t^2 - 1 - t) = a(2 + 4t) \end{cases}$$

Nhận thấy $t \neq \frac{3}{4}$ và $t \neq -2$, chia hai phương trình vế theo vế được

$$\frac{3t^2 - 2}{t^2 - t - 1} = \frac{6 + 8t}{2 + 4t} \Leftrightarrow 2t^3 + 4t^2 + 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow (t + 1)(2t^2 + 2t + 1) = 0 \Leftrightarrow t = -1$$

Suy ra $b = -a$, từ đó tìm được $(a; b) = (-2; 2)$, nghĩa là $(x; y) = (0; 1)$.

Kết luận: Hệ có nghiệm $(x; y) = (2; -1), (0; 1)$. $\square$

Bài tập áp dụng

Bài 1: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 - 2xy - 3y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 + 2x + 3y = 19 \end{cases}$$

Bài 2: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 4x^2 - 32xy + 20y^2 = 20 \\ -24x^2 + y^2 + 7y = -6 \end{cases}$$

Bài 3*: Cho hệ phương trình ẩn $(x; y)$:
$$\begin{cases} ax^2 + bxy + 5ay^2 + 10b = -2 \\ cx^2 + dy^2 + 7d + 6c = 1 \end{cases}$$

Biết hệ có nghiệm $(x; y) = (1; 2), (0; -1)$. Tìm tất cả các nghiệm của hệ.