

Korea Final Round 2013

Dịch giả: Hoàng Trung Hiếu

31/03/2013

1

Cho $\triangle ABC$ ($\hat{B} > \hat{C}$). $D \in AC$ thoả mãn $\widehat{ABD} = \hat{C}$. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$. Đường tròn ngoại tiếp $\triangle CDI$ giao với AI tại E ($E \neq I$). Đường thẳng đi qua E và song song với AB cắt BD tại P . Gọi J là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABD$. Điểm A' là điểm thoả mãn $AI = IA'$. Điểm Q là giao điểm JP và $A'C$. Chứng minh rằng $QJ = QA'$.

2

Tìm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thoả mãn các điều kiện sau:

a. $f(x) \geq 0 \quad \forall \quad x \in \mathbb{R}$

b. Với $a; b; c; d \in \mathbb{R}$ thoả mãn $ab + bc + cd = 0$ và

$$f(a - b) + f(c - d) = f(a) + f(b + c) + f(d)$$

3

Cho số nguyên $n \leq 3$. Xét tập hợp $T = \{(i, j) | 1 \leq i < j \leq n, i|j\}$. Đối với các số thực không âm $x_1, x_2, \dots, x_n$ thoả mãn $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của:

$$\sum_{(i,j) \in T} x_i x_j$$

4

Cho $\triangle ABC$. $B_1; C_1$ lần lượt là tâm đường tròn bàng tiếp $\hat{B}$ và $\hat{C}$. B_1C_1 cắt đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ tại D ($D \neq A$). E là điểm thoả mãn $B_1E \perp CA; C_1E \perp BA$. w là đường tròn ngoại tiếp $\triangle ADE$. Tiếp tuyến của w tại D cắt AE tại F . $G; H$ là các điểm thuộc AE ; w sao cho $DGH \perp AE$. Đường tròn ngoại tiếp $\triangle HGF$ cắt w tại I ($I \neq H$). J là chân đường vuông góc hạ từ D xuống AH . Chứng minh AI đi qua trung điểm DJ .

5

Cho $a; b$ là 2 số nguyên dương ; $(a; b) = 1$. Hai dãy $\{a_n\}; \{b_n\}$ thoả mãn:

$$(a + b\sqrt{2})^{2n} = a_n + b_n\sqrt{2}$$

. Tìm tất cả các số nguyên tố p thoả mãn tồn tại $n \leq p$ thoả mãn $p|b_n$.

6

Đối với một hoán vị bất kì $f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ và xác định

$$A = \{i | i > f(i)\}$$

$$B = \{(i, j) | i < j \leq f(j) < f(i) \text{ or } f(j) < f(i) < i < j\}$$

$$C = \{(i, j) | i < j \leq f(i) < f(j) \text{ or } f(i) < f(j) < i < j\}$$

$$D = \{(i, j) | i < j \text{ and } f(i) > f(j)\}$$

Chúng minh rằng: $|A| + 2|B| + |C| = |D|$