

Tuyển tập các bài toán BĐT từ Mathlinks.ro

Bài Toán 1. Với 3 số dương a, b, c ; hãy chứng minh rằng :

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c + \frac{4(a-b)^2}{a+b+c}$$

Lời Giải (1).

Đáng lẽ nếu áp dụng C-S thì phải ra thế này :

$$VT \geq \frac{(|a-b| + |b-c| + |c-a|)^2}{a+b+c}$$

Và khi này với không mất tính tổng quát ta giả sử $|a-b| = \min\{|a-b|; |b-c|; |c-a|\}$ thì ngay lập tức ta có:

$$|a-b| + |b-c| + |c-a| \geq 2|a-b|$$

Từ đây, ta cũng có đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$ hay $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}c$; $c = \frac{\sqrt{5}-1}{2}b$. ■

Lời Giải (2).

Ta có 1 đẳng thức sau :

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} - (a+b+c) = \frac{1}{a+b+c} \left[\frac{(ac-b^2)^2}{bc} + \frac{(bc-a^2)^2}{ab} + \frac{(ab-c^2)^2}{ac} \right]$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh:

$$\frac{(ac-b^2)^2}{bc} + \frac{(bc-a^2)^2}{ab} + \frac{(ab-c^2)^2}{ac} \geq 4(a-b)^2$$

Nhưng $\frac{(ab-c^2)^2}{ac} \geq 0$ và:

$$\frac{(ac-b^2)^2}{bc} + \frac{(bc-a^2)^2}{ab} \geq \frac{(|ac-b^2| + |bc-a^2|)^2}{b(a+c)} \geq \frac{(a-b)^2(a+b+c)^2}{b(a+c)}$$

Bằng AM-GM, ta có :

$$b(a+c) \leq \frac{(a+b+c)^2}{4} \implies \frac{(a-b)^2(a+b+c)^2}{b(a+c)} \geq 4(a-b)^2$$

Từ đây, ta có đpcm. ■

Bài Toán 2. Cho a, b, c, d, e là các số thực không âm và $a+b+c+d+e=5$. Chứng minh rằng:

$$abc + bcd + cde + dea + eab \leq 5$$

Lời Giải.

Giả sử $e = \min\{a, b, c, d, e\}$. Áp dụng BDT Cauchy ta có

$$\begin{aligned} abc + bcd + cde + dea + eab &= e(a+c)(b+d) + bc(a+c-e) \\ &\leq e \left(\frac{a+b+c+d}{2} \right)^2 + \left(\frac{b+c+a+d-e}{3} \right)^2 \\ &= \frac{e(5-e)^2}{4} + \frac{(5-2e)^3}{27} \end{aligned}$$

Ta cần chứng minh

$$\frac{e(5-e)^2}{4} + \frac{(5-2e)^3}{27} \leq 1$$

Bất đẳng thức này tương đương với $(e-1)^2(e+8) \geq 0$. ■

Bài Toán 3. Cho $a, b, c, d > 0$ thỏa mãn $a + b + c + d = 4$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{11+a^2} + \frac{1}{11+b^2} + \frac{1}{11+c^2} + \frac{1}{11+d^2} \leq \frac{1}{3}$$

Lời Giải (Apartim De).

Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{11+x^2}$ có đạo hàm cấp 2 là $f'(x) = \frac{6(x^2 - \frac{11}{3})}{(11+x^2)^3}$.

Do đó nếu $x \in \left(-\sqrt{\frac{11}{3}}; \sqrt{\frac{11}{3}}\right)$ thì $f''(x) < 0$, suy ra $f(x)$ là hàm lõm trong đoạn $\left(-\sqrt{\frac{11}{3}}; \sqrt{\frac{11}{3}}\right)$.

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \leq b \leq c \leq d$.

Nếu cả 4 số a, b, c, d đều thuộc khoảng $\left(0; \sqrt{\frac{11}{3}}\right)$ thì BDT cần chứng minh sẽ đúng theo BDT Jensen.

Do đó, xét có ít nhất 2 trong số 4 biến a, b, c, d lớn hơn $\sqrt{\frac{11}{3}}$, giả sử đó là c và d .

Dễ thấy rằng hàm số $f(x)$ ở trên là hàm nghịch biến trên khoảng xác định là $(0; +\infty)$, nên:

$$\begin{aligned} f(a) + f(b) + f(c) + f(d) &< f(a-1) + f(b-1) + f(c-3) + f(d-3) \\ &< 4f\left(\frac{a+b+c+d-8}{4}\right) \\ &= 4f(-1) = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

■

Lời Giải (Popa Alexandru).

Viết BDT lại dưới dạng tương đương sau :

$$\sum_{cyc} (1-a) \frac{a+1}{11+a^2} \geq 0$$

Để ý rằng nếu $a \geq b \geq c \geq d$ thì

$$\frac{a+1}{11+a^2} \leq \frac{b+1}{11+b^2} \leq \frac{c+1}{11+c^2} \leq \frac{d+1}{11+d^2}$$

Do đó BDT trên chỉ là hệ quả của BDT Chebyshev. ■

Bài Toán 4. Ký hiệu thông thường R, r, p trong tam giác. Chứng minh rằng

$$p^2 \geq 2R^2 + 8Rr + 3r^2$$

Lời Giải (Virgil Nicula).

Ta sẽ sử dụng các công thức liên qua đến các góc tam giác sau :

$$(1) : a^2 + b^2 + c^2 = 2(p^2 - r^2 - 4Rr).$$

$$(2) : 4S = (b^2 + c^2 - a^2) \tan A.$$

$$(3) : \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = \frac{2S}{R^2}.$$

$$(4) : \cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R}.$$

Do đó :

$$\begin{aligned} \sum a^2 &= \sum (b^2 + c^2 - a^2) = 4S \sum \frac{\cos A}{\sin A} = 8S \sum \frac{\cos^2 A}{\sin 2A} \\ &\geq 8S \frac{(\sum \cos A)^2}{\sum \sin 2A} = 8S \cdot \frac{(1 + \frac{r}{R})^2}{\frac{2S}{R^2}} = 4(R + r)^2 \\ &\implies a^2 + b^2 + c^2 \geq 4(R + r)^2 \\ &\implies 2(p^2 - r^2 - 4Rr) \geq 4(R + r)^2 \\ &\implies p^2 \geq 2R^2 + 8Rr + 3r^2 \end{aligned}$$

■

Bài Toán 5. Cho $0 < a < b$ và n số thực $x_1; x_2; \dots x_n$ thuộc đoạn $[a; b]$. Chứng minh :

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right) \leq \frac{n^2(a + b)^2}{4ab}$$

Lời Giải (Popa Alexandru).

Đặt $P = (x_1 + x_2 + \dots + x_n) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right)$. Ta có :

$$\begin{aligned} P &= (x_1 + x_2 + \dots + x_n) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right) \\ &= \left(\frac{x_1}{c} + \dots + \frac{x_n}{c} \right) \left(\frac{c}{x_1} + \dots + \frac{c}{x_n} \right) \\ &\leq \frac{1}{4} \left(\frac{c}{x_1} + \frac{x_1}{c} + \dots + \frac{c}{x_n} + \frac{x_n}{c} \right)^2 \end{aligned}$$

Hàm số $f(t) = \frac{c}{t} + \frac{t}{c}$ đạt cực đại trên đoạn $[a; b]$ tại a hay b .

Ta sẽ chọn c sao cho $f(a) = f(b)$; $c = \sqrt{ab}$. Từ đó $f(t) \leq \sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}}$.

Suy ra :

$$P \leq \frac{n^2}{4} \left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} \right)^2 = \frac{n^2(a + b^2)}{4ab}$$

■

Bài Toán 6. Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng : (35)

$$(a^2 - bc) \sqrt{b+c} + (b^2 - ca) \sqrt{c+a} + (c^2 - ab) \sqrt{a+b} \geq 0$$

Bài Toán 6. Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng : (35)

$$(a^2 - bc) \sqrt{b+c} + (b^2 - ca) \sqrt{c+a} + (c^2 - ab) \sqrt{a+b} \geq 0$$

Bài Toán 7. Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $3x + 2y + z = 1$. Tìm GTLN của

$$A = \frac{1}{1 + |x|} + \frac{1}{1 + |y|} + \frac{1}{1 + |z|}$$

Bài Toán 7. Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $3x + 2y + z = 1$. Tìm GTLN của

$$A = \frac{1}{1 + |x|} + \frac{1}{1 + |y|} + \frac{1}{1 + |z|}$$

Bài Toán 8. DDD

Bài Toán 9. DDD

Lời Giải.

Bài Toán 10. DDD

Lời Giải.

Bài Toán 11. DDD

Lời Giải.

Bài Toán 12. DDD

Lời Giải.

Bài Toán 13. DDD

Lời Giải.

Bài Toán 14. DDD

Lời Giải.

Bài Toán 15. DDD

Lời Giải.

Bài Toán 16. DDD

Lời Giải.

Bài Toán 17. DDD

Lời Giải.

Bài Toán 18. DDD

Lời Giải.

Bài Toán 19. DDD

Lời Giải.

Bài Toán 20. DDD

Lời Giải.