

CÁC BÀI TOÁN BĐT TỪ VMF 2012

Bài Toán 1. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $0 < a, b, c \leq 1$. Chứng minh rằng

$$\left(1 + \frac{1}{abc}\right)(a + b + c) \geq 3 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

Lời Giải.

Bài Toán 2. Chứng minh rằng, với các số thực dương thỏa mãn $\left(\frac{x + y + z}{2012}\right)^2 \leq 4xyz$ ta có :

$$\frac{\sqrt{x}}{x + \sqrt{yz}} + \frac{\sqrt{y}}{y + \sqrt{zx}} + \frac{\sqrt{z}}{z + \sqrt{xy}} \leq 2012$$

Lời Giải.

Bài Toán 3. Cho các số thực dương a, b, c và $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{3}{a^2b + b^2c + c^2a} + \frac{4}{abc} \geq 5$$

Lời Giải.

Bài Toán 4. Cho các số thực dương $a; b; c$ thỏa mãn $ab^2 + b^2c + c^2a = 3$. Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{a+7} + \sqrt[3]{b+7} + \sqrt[3]{c+7} \leq 2(a^4 + b^4 + c^4)$$

Lời Giải.

Bài Toán 5. Cho các số thực a, b, c không âm thỏa $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$a^2 + b^2 + c^2 + abc \geq 4$$

Lời Giải.

Bài Toán 6. Cho $a, b, c > 0$; $b \geq a \geq c$; $ab + bc + ca \leq 3$. Chứng minh rằng:

$$P = \frac{a}{a^3 + a^2b + c^3} + \frac{b}{b^3 + b^2c + a^3} + \frac{1}{ab + 2c^2} \geq 1$$

Lời Giải.

Bài Toán 7. Cho $a, b, c > 0$; $ab + bc + ca \leq 3$; $a \geq b \geq c$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^4}{b^4 + a^3b} + \frac{b}{c^4 + b^2c^2} + \frac{1}{2c^3} \geq \frac{3}{2}$$

Lời Giải.

Bài Toán 8. Cho các số thực dương a, b, c thoả mãn $abc = 1$. Tìm GTLN của :

$$P = \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + 2\sqrt{c} + 2} + \frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c} + 2\sqrt{a} + 2} + \frac{1}{\sqrt{c} + \sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 2}$$

Lời Giải.

Bài Toán 9. Cho $x, y, z > 0$. Chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{1}{x^2 + xy} + \frac{1}{y^2 + yz} + \frac{1}{z^2 + zx} \geq \frac{27}{2(x + y + z)^2}$$

Lời Giải.

Bài Toán 10. Chứng minh

$$\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2012} \right) \left(2 + \frac{1}{2012} \right) \cdots \left(2012 + \frac{1}{2012} \right) < (2012)!$$

Lời Giải.

Bài Toán 11. Cho $x, y, z \in [0; 1]$. Tìm max của biểu thức:

$$P = (1 + xyz) \cdot \left(\frac{1}{1 + x^3} + \frac{1}{1 + y^3} + \frac{1}{1 + z^3} \right)$$

Lời Giải.

Bài Toán 12. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x(x-1) + y(y-1) + z(z-1) \leq \frac{4}{3}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$A = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z}$$

Lời Giải.

Bài Toán 13. Cho 2 số dương x, y thỏa mãn $12x^2 + 2y^2 = 5$. Chứng minh rằng:

$$x + y + \frac{1}{xy} \geq \frac{7}{2}$$

Lời Giải.

Bài Toán 14. Cho các số thực a, b, c thỏa $0 \leq a \leq b \leq c$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Tìm GTLN của:

$$A = 5a - 4abc$$

Lời Giải.

Bài Toán 15. Cho $x, y, z \in [1; 3]$ và $x + y + z = 6$. Tìm GTLN của

$$P = x^3 + 2y^3 + z^3$$

Lời Giải.

Bài Toán 16. Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{4}{a^2+7} + \frac{4}{b^2+7} + \frac{4}{c^2+7}$$

Lời Giải.

Bài Toán 17. Cho $x, y, z > 1$ và $xy + yz + zx \geq 2xyz$. Tìm GTLN của :

$$A = (x-1)(y-1)(z-1)$$

Lời Giải.

Bài Toán 18. Cho các số thực $a, b \in (0; 1)$. Chứng minh rằng:

$$\frac{ab(1-a)(1-b)}{(1-ab)^2} < \frac{1}{4}$$

Lời Giải.

Bài Toán 19. Cho $\frac{1}{4} \leq x \leq 1; y, z \geq 1; xyz = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} \geq \frac{22}{15}$$

Lời Giải.

Bài Toán 20. Cho $x, y, z \in [1; 4]$. Tìm min của

$$P = \frac{x}{2x+3y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{x+z}$$

Lời Giải.

Bài Toán 21. Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\frac{\sqrt{a(a^2 + ab + bc)}}{a + b} + \frac{\sqrt{b(b^2 + bc + ca)}}{b + c} + \frac{\sqrt{c(c^2 + ca + ab)}}{c + a} \leq \frac{3}{2} \cdot \sqrt{a + b + c}$$

Lời Giải.

Bài Toán 22. Cho x, y, z là 3 số thực thuộc $[1; 9]$ và $x = \max\{x, y, z\}$. Tìm GTLN và GTNN của biểu thức

$$P = \frac{x}{x + 2y} + \frac{y}{y + z} + \frac{z}{z + x}$$

Lời Giải.

Bài Toán 23. Cho a, b, c là các số thực dương. CMR

$$\min \left\{ \frac{ab}{c^2} + \frac{bc}{a^2} + \frac{ca}{b^2}; \frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab} \right\} \geq \max \left\{ \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}; \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \right\}$$

Lời Giải.

Bài Toán 24. CMR với mọi số thực dương x, y, z thỏa mãn $x(x + y + z) = 3yz$ ta có

$$(x + y)^3 + (x + z)^3 + 3(x + y)(y + z)(z + x) \leq 5(y + z)^3$$

Lời Giải.

Bài Toán 25. Cho a, b, c thực dương thỏa $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2} \leq 3\sqrt{2}$.
Chứng minh

$$\frac{1}{\sqrt{8^a + 1}} + \frac{1}{\sqrt{8^b + 1}} + \frac{1}{\sqrt{8^c + 1}} \geq 1$$

Lời Giải.

Bài Toán 26. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $ab + bc + ac = 7abc$. Tìm GTNN của

$$S = \frac{8a^4 + 1}{a^2} + \frac{108b^5 + 1}{b^2} + \frac{16c^6 + 1}{c^2}$$

Lời Giải.

Bài Toán 27. Cho x, y thực thỏa $1 - y^2 = x(x - y)$. Tìm min, max của

$$P = \frac{x^6 + y^6 - 1}{x^3y + xy^3}$$

Lời Giải.

Bài Toán 28. Cho x, y, z thực thỏa mãn $x + y + z = 0$. Tìm min

$$Q = |2x - y| + |2y - z| + |2z - x| - \ln(\sqrt{14(x^2 + y^2 + z^2)} + 1)$$

Lời Giải.

Bài Toán 29. Cho các số dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1-16xyz}{4}$ Tìm GTNN của

$$P = \frac{x + y + z + 4xyz}{1 + 4xy + 4yz + 4zx}$$

Lời Giải.

Bài Toán 30. Cho các số thực a, b và số thực dương c thỏa mãn $a^2 + b^2 + ab = 3c^2$. Chứng minh rằng:

$$a^3 + b^3 + 4abc \leq 6c^3$$

Lời Giải.

Bài Toán 31. Cho $0 < y < x \leq 3$ và $x + y \leq 5$, tìm GTLN của các biểu thức

$$S_2 = x^2 + y^2, \quad S_3 = x^3 + y^3, \quad S_n = x^n + y^n$$

Lời Giải.

Bài Toán 32. Cho các số thực a, b, c thuộc đoạn $[0; 1]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{a^3 + 2}{b^2 + 1} + \frac{b^3 + 2}{c^2 + 1} + \frac{c^3 + 2}{a^2 + 1}$$

Lời Giải.

Bài Toán 33. Cho các số thực không âm x, y, z thỏa mãn $xy + yz + zx = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = x^2y^3 + y^2z^3 + z^2x^3 + (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2$$

Lời Giải.

Bài Toán 34. Cho $a, b, c \in [0; 1]$ và $a + b + c \neq 0$. CMR

$$\frac{1}{ab+1} + \frac{1}{bc+1} + \frac{1}{ca+1} \leq \frac{5}{a+b+c}$$

Lời Giải.

Bài Toán 35. Cho a, b, c là 3 cạnh của tam giác, CMR

$$\frac{a+c}{3a+b} + \frac{a+b}{3a+c} + \frac{2a}{2a+b+c} < 2$$

Lời Giải.

Bài Toán 36. Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$D = \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} - \frac{1}{a+b+c}$$

Lời Giải.

Bài Toán 37. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = xyz$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{2}{\sqrt{1+z^2}} \leq \frac{9}{4}$$

Lời Giải.

Bài Toán 38. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xy + yz + zx = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{xyz} + \frac{4}{(x+y)(y+z)(z+x)} \geq \frac{3}{2}$$

Lời Giải.

Bài Toán 39. Cho $x, y, z > 0$ thỏa $xy + yz + zx = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{y(1+x^2)} + \frac{y}{z(1+y^2)} + \frac{z}{x(1+z^2)} \geq \frac{9}{4}$$

Lời Giải.

Bài Toán 40. Cho a, b, c dương thỏa mãn $a, b, c \in \left[\frac{1}{3}, 3\right]$ Tìm min của

$$P = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}$$

Lời Giải.

Bài Toán 41. Cho các số thực x, y thỏa mãn $x + y - 3 = 4(\sqrt{x-3} + \sqrt{y+1})$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2}$$

Lời Giải.

Bài Toán 42. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa $xy + yz + zx = 1$. CMR

$$\frac{x}{y(1+z^2)} + \frac{y}{z(1+x^2)} + \frac{z}{x(1+y^2)} \geq \frac{9}{4}$$

Lời Giải.

Bài Toán 43. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $4(x + y + z) = 3xyz$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{2+x+yz} + \frac{1}{2+y+zx} + \frac{1}{2+z+xy}$$

Lời Giải.

Bài Toán 44. Cho $x, y, z \in \mathbb{R}$ thỏa $3^{-x} + 3^{-y} + 3^{-z} = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{9^x}{3^x + 3^{y+z}} + \frac{9^y}{3^y + 3^{z+x}} + \frac{9^z}{3^z + 3^{x+y}} \geq \frac{3^x + 3^y + 3^z}{4}$$

Lời Giải.

Bài Toán 45. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. CMR

$$\frac{ab}{c^2} + \frac{bc}{a^2} + \frac{ca}{b^2} \geq \frac{1}{2} \left(\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} \right)$$

Lời Giải.

Bài Toán 46. Cho a, b, c là các số thực dương, thỏa mãn $a^7 + b^7 + c^7 \leq 3$. CMR

$$\frac{1}{2-a} + \frac{1}{2-b} + \frac{1}{2-c} \leq 3$$

Lời Giải.

Bài Toán 47. Cho a, b, c là các số thực không âm, thỏa mãn $ab + bc + ca > 0$. CMR

$$\frac{a}{b^3 + c^3} + \frac{b}{c^3 + a^3} + \frac{c}{a^3 + b^3} \geq \frac{8}{(a+b+c)^2}$$

Lời Giải.

Bài Toán 48. Cho a, b, c là các số không âm. CMR

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq 4(a + b + c)(a - b)(b - c)(c - a)$$

Lời Giải.

Bài Toán 49. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = \frac{1}{2}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{ab}{(1-a)(1-b)} + \frac{bc}{(1-b)(1-c)} + \frac{ca}{(1-c)(1-a)}$$

Lời Giải.

Bài Toán 50. Xét các số thực x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 0$. Tìm Min

$$Q = |2x - y| + |2y - x| + |2z - x| - \ln \left(\sqrt{14(x^2 + y^2 + z^2)} + 1 \right)$$

Lời Giải.