

Chuyên đề 1

Khảo Sát Sự Biến Thiên Và Vẽ Đồ Thị Hàm Số

§1. Tính Đơn Điều Của Hàm Số

A. Kiến Thức Cần Nhớ

Định lý 1.1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng I .

- Nếu $f'(x) > 0, \forall x \in I$ thì $y = f(x)$ đồng biến trên I .
- Nếu $f'(x) < 0, \forall x \in I$ thì $y = f(x)$ nghịch biến trên I .
- Nếu $f'(x) = 0, \forall x \in I$ thì $y = f(x)$ không đổi trên I .

Lưu ý.

- Nếu $f'(x) \geq 0, \forall x \in I$ và $f'(x) = 0$ tại hữu hạn điểm của I thì $y = f(x)$ đồng biến trên I .
- Khoảng I ở trên có thể được thay bởi một đoạn hoặc nửa khoảng với giả thiết bổ sung: “Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn hoặc nửa khoảng đó”.

B. Kỹ Năng Cơ Bản

1. Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số.

- Tìm tập xác định. Tính y' . Tìm các điểm tại đó y' bằng 0 hoặc không xác định.
- Lập bảng biến thiên. Từ bảng biến thiên rút ra kết luận.

2. Điều kiện để hàm số luôn đồng biến, nghịch biến.

- Tìm tập xác định D_f .
- Tính y' và chỉ ra $y' \geq 0, \forall x \in D_f$ (hoặc $y' \leq 0, \forall x \in D_f$).

C. Bài Tập

1.1. Tìm các khoảng đơn điệu của các hàm số sau

- | | | |
|-----------------------------|---------------------------------|-------------------------------------|
| a) $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$. | b) $y = -x^3 - 3x + 2$. | c) $y = x^3 + 3x^2 + 3x$. |
| d) $y = x^4 - 2x^2 + 3$. | e) $y = -x^4 + 2x^3 - 2x - 1$. | f) $y = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$. |
| g) $y = \frac{2x+3}{x+2}$. | h) $y = \frac{x+2}{3x-1}$. | i) $y = \frac{x^2 - 4x + 4}{1-x}$. |

1.2. Tìm m để hàm số $y = x^3 + (m-1)x^2 + (m^2-4)x + 9$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

1.3. Tìm m để hàm số $y = -mx^3 + (3-m)x^2 - 2x + 2$ luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

1.4. Tìm m để hàm số $y = \frac{mx-2}{m-x}$ luôn đồng biến trên mỗi khoảng xác định.

1.5. Tìm m để hàm số $y = \frac{mx-2}{x+m-3}$ luôn nghịch biến trên mỗi khoảng xác định.

1.6. Tìm m để hàm số $y = x + 2 + \frac{m}{x-1}$ luôn đồng biến trên mỗi khoảng xác định.

1.7. Tìm m để hàm số $y = \frac{mx+4}{x+m}$ nghịch biến trên $(-\infty; 1)$.

1.8. Tìm m để hàm số $y = \frac{mx-2}{x+m-3}$ nghịch biến trên $(1; +\infty)$.

1.9. Tìm a để hàm số $y = x^3 + 3x^2 + ax + a$ nghịch biến trên đoạn có độ dài bằng 1.

1.10. Tìm m để hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + mx + 2$ đồng biến trên đoạn có độ dài bằng 3.

§2. Cực Trị Của Hàm Số

A. Kiến Thức Cần Nhớ

Định lý 1.2. Giả sử hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại x_0 . Khi đó, nếu $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì $f'(x_0) = 0$.

Định lý 1.3. Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(a; b)$ chứa x_0 và có đạo hàm trên $(a; x_0)$, $(x_0; b)$. Khi đó

- Nếu $f'(x) < 0, \forall x \in (a; x_0)$ và $f'(x) > 0, \forall x \in (x_0; b)$ thì hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại x_0 .
- Nếu $f'(x) > 0, \forall x \in (a; x_0)$ và $f'(x) < 0, \forall x \in (x_0; b)$ thì hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại x_0 .

Định lý 1.4. Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp một trên $(a; b)$ và có đạo hàm cấp hai khác 0 tại x_0 . Khi đó

- Nếu $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{cases}$ thì hàm số đạt cực đại tại x_0 .
- Nếu $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) > 0 \end{cases}$ thì hàm số đạt cực tiểu tại x_0 .

Lưu ý. Nếu $y''(x_0) = 0$ thì hàm số có thể đạt cực trị hoặc không đạt cực trị tại x_0 .

B. Kỹ Năng Cơ Bản

1. Tìm cực trị của hàm số.

- Tìm tập xác định. Tính y' . Tìm các điểm tại đó y' bằng 0 hoặc không xác định.
- Lập bảng biến thiên. Từ bảng biến thiên rút ra kết luận.

2. Điều kiện để hàm số có cực trị, có k cực trị.

- Sử dụng DL 1.3 và DL 1.4.

3. Điều kiện để hàm số đạt cực trị tại x_0 .

- Tính y', y'' . Hàm số đạt cực trị tại $x_0 \Rightarrow y'(x_0) = 0 \Rightarrow m$.
- Thay m và x_0 vào y'' để kết luận.

Lưu ý. Nếu $y''(x_0) = 0$ thì phải kiểm tra dấu của y' để kết luận.

C. Bài Tập

1.11. Tìm cực trị của các hàm số sau

- | | | |
|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------------|
| a) $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$. | b) $y = -x^3 - 3x + 2$. | c) $y = x^3 + 3x^2 + 3x$. |
| d) $y = x^4 - 2x^2 + 3$. | e) $y = -x^4 + 2x^3 - 2x - 1$. | f) $y = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$. |
| g) $y = \frac{2x + 3}{x + 2}$. | h) $y = \frac{x + 2}{3x - 1}$. | i) $y = \frac{x^2 - 4x + 4}{1 - x}$. |

1.12. Tìm m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(2m - 1)x - 2$

- | | | |
|----------------|------------------------------|------------------------------|
| a) Có cực trị. | b) Đạt cực trị tại $x = 0$. | c) Đạt cực đại tại $x = 1$. |
|----------------|------------------------------|------------------------------|

1.13. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - m + 1)x + 1$. Với giá trị nào của m thì hàm số

- | | | |
|------------------------------|--------------------------|----------------------|
| a) Đạt cực đại tại $x = 1$. | b) Có cực đại, cực tiểu. | c) Không có cực trị. |
|------------------------------|--------------------------|----------------------|

1.14. Cho hàm số $y = x^4 - 2(m + 1)x^2 + 2m + 1$. Với giá trị nào của m thì hàm số

- | | | |
|------------------------|-------------------------------|------------------------------|
| a) Có ba điểm cực trị. | b) Đạt cực tiểu tại $x = 0$. | c) Đạt cực trị tại $x = 1$. |
|------------------------|-------------------------------|------------------------------|

1.15. Tìm m để hàm số $y = -x^4 + 2(2m - 1)x^2 + 3$ có đúng một cực trị.

1.16. (B-02) Tìm m để hàm số $y = mx^4 + (m^2 - 9)x^2 + 10$ có ba điểm cực trị.

1.17. Xác định giá trị của m để hàm số $y = \frac{x^2 + mx + 1}{x + m}$

- | | | |
|----------------------|-------------------------------|------------------------------|
| a) Không có cực trị. | b) Đạt cực tiểu tại $x = 1$. | c) Đạt cực đại tại $x = 2$. |
|----------------------|-------------------------------|------------------------------|

§3. Giá Trị Lớn Nhất Và Giá Trị Nhỏ Nhất Của Hàm Số

A. Kiến Thức Cần Nhớ

Định nghĩa 1.5. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập hợp D . Khi đó

$$\bullet M = \max_{x \in D} f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq M, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D : M = f(x_0) \end{cases} \quad \bullet m = \min_{x \in D} f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq m, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D : m = f(x_0) \end{cases}$$

Lưu ý.

- Mọi hàm số liên tục trên một đoạn đều có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn đó.
- Trên khoảng hoặc nửa khoảng hàm số có thể có hoặc không có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.

B. Kỹ Năng Cơ Bản

1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên miền D .

- Tính $y', y' = 0 \Rightarrow x_i \in D$.
- Lập bảng biến thiên. Từ bảng biến thiên rút ra kết luận.

2. Xét tính đơn điệu trên khoảng cho trước.

PP1:

- Tính y' và chỉ ra $y' \geq 0, \forall x \in D$ (hoặc $y' \leq 0, \forall x \in D$).
- Từ $y' \geq 0, \forall x \in D \Rightarrow m \geq g(x), \forall x \in D$.
- Lập bảng biến thiên của $g(x)$ trên D . Từ bảng biến thiên rút ra kết luận.

PP2:

- Tính y' . Tìm các điểm tại đó $y' = 0$ hoặc không xác định.
- Lập bảng biến thiên. Từ bảng biến thiên rút ra kết luận.

Lưu ý.

$$\bullet m \geq f(x), \forall x \in D \Leftrightarrow m \geq \max_{x \in D} f(x). \quad \bullet m \leq f(x), \forall x \in D \Leftrightarrow m \leq \min_{x \in D} f(x).$$

C. Bài Tập

1.18. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số sau:

- a) $y = 1 + 8x - 2x^2$ trên $[-1; 3]$. b) $y = x^3 - 3x^2 + 1$ trên $[-2; 3]$. c) $y = 1 + 4x^3 - 3x^4$ trên $[-2; 1]$.
d) $y = x^3 - 3x^2 + 1$ trên $(1; 4)$. e) $y = x - 5 + \frac{1}{x}$ trên $(0; +\infty)$. f) $y = x - \frac{1}{x}$ trên $(0; 2]$.
g) $y = \frac{4}{1 + x^2}$. h) $y = x^4 + 2x^2 - 1$. i) $y = x + \sqrt{4 - x^2}$.

1.19. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số sau

- a) $y = x + \sqrt{2} \cos x$ trên $[0; \frac{\pi}{2}]$. b) $y = 2 \sin x - \frac{4}{3} \sin^3 x$ trên $[0; \pi]$. c) $y = \sin^4 x - 4 \sin^2 x + 5$.
d) $y = \sin^4 x + \cos^4 x$. e) $y = 5 \sin x - 12 \cos x - 5$. f) $y = \sin^2 x + \sin 2x + 2 \cos^2 x$.

1.20. Cho parabol $(P) : y = x^2$ và điểm $A(-3; 0)$. Tìm điểm $M \in (P)$ sao cho khoảng cách AM ngắn nhất và tính khoảng cách đó.

1.21. Tìm m để hàm số $y = x^3 + 3x^2 - mx - 4$ đồng biến trên $(-\infty; 0)$.

1.22. (BĐT-79) Tìm m để hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + (m-1)x^2 + (m-3)x - 4$ đồng biến trên $(0; 3)$.

1.23. Tìm m để hàm số $y = mx^3 - 3(m-1)x^2 + 9(m-2)x + 1$ đồng biến trên $[2; +\infty)$.

1.24. Tìm m để hàm số $y = x^3 + 3x^2 + (m+1)x + 4m$ đồng biến trên $(-\infty; -2)$ và $(2; +\infty)$.

1.25. (BĐT-50) Tìm m để hàm số $y = \frac{mx^2 + 6x - 2}{x + 2}$ nghịch biến trên $[1; +\infty)$.

1.26. Tìm m để hàm số $y = \frac{x^2 - 2mx + 2m^2 - 2}{x - m}$ đồng biến trên $(1; +\infty)$.

1.27. Tìm a để hàm số $y = \frac{x^2 - 2ax + 4a^2}{x - 2a}$ đồng biến trên $(2; +\infty)$.

§4. Đường Tiệm Cận Của Đồ Thị Hàm Số

A. Kiến Thức Cần Nhớ

Định nghĩa 1.6. Đường thẳng $y = y_0$ được gọi là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0$ hoặc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0$.

Định nghĩa 1.7. Đường thẳng $x = x_0$ được gọi là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$ hoặc $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$.

Định nghĩa 1.8. Đường thẳng $y = ax + b$, ($a \neq 0$) được gọi là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ hoặc $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$.

B. Kỹ Năng Cơ Bản

1. Tìm tiệm cận ngang và tiệm cận đứng.

- Tìm $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) \Rightarrow \text{TCN}$.
- Tìm $\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x) \Rightarrow \text{TCD}$.

Lưu ý. x_0 thường là một nghiệm của mẫu.

2. Tìm tiệm cận xiên.

C1: Viết lại hàm số dưới dạng $y = ax + b + g(x)$. Chỉ ra $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [y - (ax + b)] = 0 \Rightarrow \text{TCX}$.

C2: Tính $a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ và $b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - ax] \Rightarrow \text{TCX}$.

C. Bài Tập

1.28. Tìm tiệm cận (nếu có) của các hàm số sau

- | | | |
|-------------------------------------|-----------------------------------|-------------------------------|
| a) $y = \frac{2x-1}{x-2}$. | b) $y = \frac{x-3}{-x+2}$. | c) $y = \frac{3-4x}{x+1}$. |
| d) $y = \frac{\sqrt{x^2+x}}{x-1}$. | e) $y = \frac{\sqrt{x+3}}{x+1}$. | f) $y = 2x-1 + \frac{1}{x}$. |
| g) $y = \frac{x^2-4x+4}{1-x}$. | h) $y = \sqrt{x^2+x-1}$. | i) $y = x + \sqrt{x^2+2x}$. |

1.29. Tìm m để đồ thị hàm số $y = \frac{mx^2 - 2m(m-1)x - 3m^2 + m - 2}{x+2}$ có tiệm cận xiên đi qua $A(-1; -3)$.

1.30. Tìm m để hàm số $y = \frac{2x^2 + (m+1)x - 3}{x+m}$ có giao hai tiệm cận nằm trên parabol $(P): y = x^2 + 2x - 1$.

1.31. (A-08) Tìm m để góc giữa hai tiệm cận của hàm số $y = \frac{mx^2 + (3m^2 - 2)x - 2}{x+3m}$ bằng 45° .

1.32. Tìm m để đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + mx - 1}{x-1}$ có tiệm cận xiên tạo với các trục toạ độ một tam giác có diện tích bằng 4.

1.33. Tìm m để đồ thị hàm số $y = \frac{2x^2 - (5m-1)x + 4m^2 - m - 1}{x-m}$ có tiệm cận xiên tạo với các trục toạ độ một tam giác có diện tích bằng 4.

1.34. Cho hàm số $y = \frac{3x-1}{x-2}$. Chứng minh tích các khoảng cách từ điểm M nằm trên đồ thị hàm số đến hai tiệm cận không đổi.

1.35. Cho hàm số $y = \frac{-x^2 + 4x - 3}{x-2}$. Chứng minh tích các khoảng cách từ điểm M nằm trên đồ thị hàm số đến hai tiệm cận là một hằng số.

1.36. Tìm điểm M thuộc đồ thị hàm số $y = \frac{3x-5}{x-2}$ để tổng khoảng cách từ M đến hai tiệm cận là nhỏ nhất.

1.37. Tìm điểm M thuộc đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 2x - 2}{x-1}$ để tổng khoảng cách từ M đến hai tiệm cận là nhỏ nhất.

§5. Khảo Sát Sự Biến Thiên Và Vẽ Đồ Thị Hàm Số

A. Kiến Thức Cần Nhớ

1. Sơ đồ khảo sát tổng quát.

1. Tập xác định.
2. Sự biến thiên.
 - Giới hạn, tiệm cận (nếu có).
 - Bảng biến thiên (tính đạo hàm, lập bảng biến thiên, tính đơn điệu, cực trị).
3. Đồ thị.
 - Tương giao với các trục.
 - Tính đối xứng (nếu có).
 - Điểm đặc biệt (nếu cần).

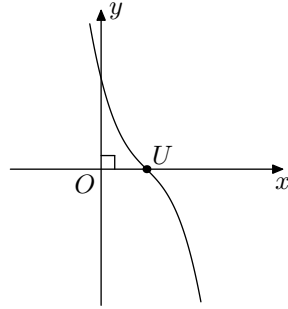
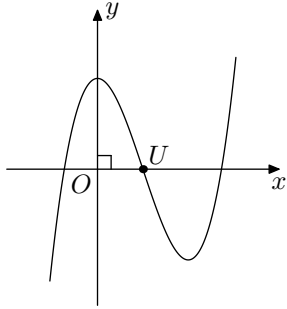
2. Điểm uốn.

Định nghĩa 1.9. Điểm $U(x_0; f(x_0))$ được gọi là điểm uốn của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu tồn tại một khoảng $(a; b)$ chứa điểm x_0 sao cho trên một trong hai khoảng $(a; x_0)$ và $(x_0; b)$ tiếp tuyến của đồ thị tại điểm U nằm phía trên đồ thị còn trên khoảng kia tiếp tuyến nằm phía dưới đồ thị.

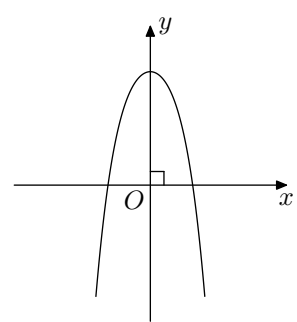
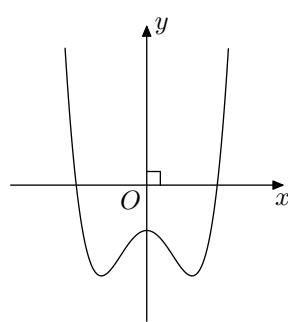
Mệnh đề 1.10. Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên một khoảng chứa x_0 , $f''(x_0) = 0$ và $f''(x)$ đổi dấu khi qua điểm x_0 thì $U(x_0; f(x_0))$ là một điểm uốn của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

B. Các Dạng Đồ Thị Khảo Sát

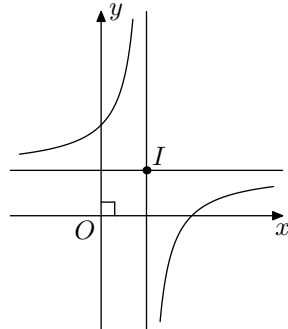
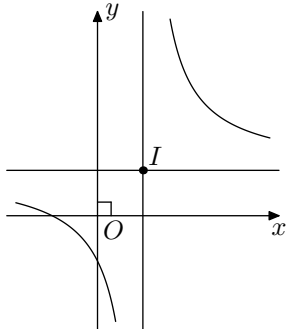
- Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$).



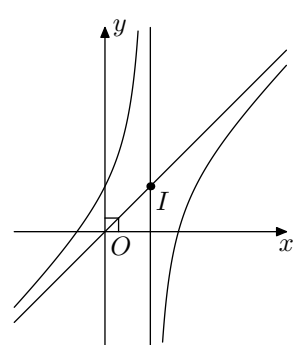
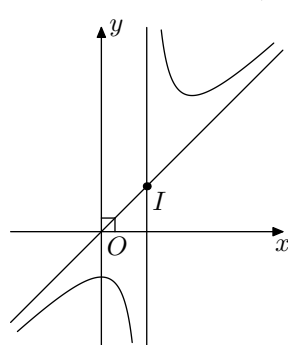
- Hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$).



- Hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0, ad - bc \neq 0$).



- Hàm số $y = \frac{ax^2+bx+c}{dx+e}$ ($a \neq 0, d \neq 0$).



C. Bài Tập

1.38. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số sau

- | | | | |
|---------------------------|--------------------------|----------------------------|--|
| a) $y = x^3 + 3x^2 - 4$. | b) $y = -x^3 + 3x - 2$. | c) $y = -x^3 + 1$. | d) $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$. |
| e) $y = x^3 + x - 2$. | f) $y = -2x^3 - x - 3$. | g) $y = -x^3 + 3x^2 - 1$. | h) $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x - \frac{5}{3}$. |

1.39. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số sau

- | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---|---------------------------|
| a) $y = x^4 - 2x^2 - 3$. | b) $y = x^4 + 2x^2 - 1$. | c) $y = \frac{1}{2}x^4 + x^2 - \frac{3}{2}$. | d) $y = 3 - 2x^2 - x^4$. |
| e) $y = -x^4 + 2x^2 - 2$. | f) $y = 2x^4 - 4x^2 + 1$. | g) $y = -2x^4 - 4x^2 + 1$. | h) $y = x^4 - 4x^2 + 3$. |

1.40. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số sau

- | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|------------------------------|
| a) $y = \frac{4}{2-x}$. | b) $y = \frac{x-3}{2-x}$. | c) $y = \frac{x+3}{x-1}$. | d) $y = \frac{-x+2}{2x+1}$. |
| e) $y = \frac{x-2}{x+1}$. | f) $y = \frac{x+2}{x-1}$. | g) $y = \frac{2-x}{x+1}$. | h) $y = \frac{x+3}{x-2}$. |

1.41. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số sau

a) $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$.

b) $y = \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 2}$.

c) $y = \frac{2x^2 + 5x + 4}{x + 2}$.

d) $y = \frac{-x^2 - 2x}{x + 1}$.

e) $y = \frac{x^2 - 2x}{x - 1}$.

f) $y = \frac{2x^2 - x + 1}{1 - x}$.

g) $y = -x + 2 + \frac{1}{x - 1}$.

h) $y = x - 1 + \frac{1}{x + 1}$.