

Chuyên đề 6

Phương Pháp Tọa Độ Trong Không Gian

§1. Tọa Độ Trong Không Gian

A. Kiến Thức Cần Nhớ

1. Tọa độ trong không gian.

- Hai vectơ bằng nhau: $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$.
- Các phép toán vectơ: $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1; a_2 \pm b_2; a_3 \pm b_3); k\vec{a} = (ka_1; ka_2; ka_3)$.
- Tích vô hướng của hai vectơ: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.
- Hai vectơ vuông góc: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.
- Độ dài vectơ: $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.
- Góc giữa hai vectơ: $\cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$.
- Tọa độ vectơ: $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$.
- Khoảng cách giữa hai điểm: $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.
- Tính chất trung điểm: I là trung điểm của $AB \Leftrightarrow I \left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2} \right)$.
- Tính chất trọng tâm: G là trọng tâm $\Delta ABC \Leftrightarrow G \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3} \right)$.

2. Tích có hướng của hai vectơ.

- Định nghĩa. $[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$.
- Tính chất.
 - $[\vec{a}, \vec{b}] \perp \vec{a}; [\vec{a}, \vec{b}] \perp \vec{b}$.
 - $[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}$ cùng phương.
 - $||[\vec{a}, \vec{b}]|| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b})$.
 - $[\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} = 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng.
- Ứng dụng.
 - Diện tích tam giác: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} ||[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]||$.
 - Thể tích tứ diện: $V_{ABCD} = \frac{1}{6} ||[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD}||$.
 - Thể tích hình hộp: $V_{ABCD.A'B'C'D'} = ||[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}] \cdot \overrightarrow{AA'}||$.

3. Phương trình mặt cầu.

- Dạng 1: $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2 \quad (R > 0)$.
Có tâm $I(a; b; c)$ và bán kính $R = \sqrt{R^2}$.
- Dạng 2: $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0 \quad (a^2 + b^2 + c^2 > d)$.
Có tâm $I(a; b; c)$ và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

Lưu ý. Điểm M thuộc mặt cầu $\Leftrightarrow R = IM$.

B. Bài Tập

6.1. Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a}(5; 7; 2)$, $\vec{b}(3; 0; 4)$ và $\vec{c}(-6; 1; -1)$.

- a) Hãy tìm các vectơ sau: $\vec{m} = 3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$; $\vec{n} = 5\vec{a} + 6\vec{b} + 4\vec{c}$; $\vec{p} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{6}\vec{c}$.

- b) Tính: $|\vec{a}|; |\vec{b}|; |\vec{a} - \vec{b}|; \vec{a} \cdot \vec{b}; [\vec{a}, \vec{b}]$.
- c) Tìm $\vec{x}$ sao cho $\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{x} = \vec{0}$.
- d) Tìm u, v để vectơ $\vec{y} (1; u; v)$ cùng phương với vectơ $\vec{a} + 2\vec{b}$.
- 6.2.** Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a} (1; 0; -2)$, $\vec{b} (1; 2; -1)$ và $\vec{c} (0; 3; -2)$.
- a) Tìm vectơ $\vec{u}$ biết $2\vec{a} + \vec{b} - 3\vec{c} - 2\vec{u} = \vec{0}$. b) Tính $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|$.
- c) Tìm $\vec{a} (\vec{b} - 2\vec{c})$; $[\vec{a}, \vec{b}]$. d) Tìm vectơ $\vec{u}$ biết $\vec{u} \perp \vec{a}$; $\vec{u} \perp \vec{b}$ và $|\vec{u}| = \sqrt{21}$.
- 6.3.** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A (1; 0; -2)$, $B (2; 1; -1)$, $C (1; -2; 2)$.
- a) Chứng minh A, B, C không thẳng hàng. b) Tính chu vi tam giác ABC .
- c) Tìm tọa độ D để $ABCD$ là hình bình hành. d) Tìm tọa độ trọng tâm tam giác ABC .
- 6.4.** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A (-1; -2; 3)$, $B (0; 3; 1)$, $C (4; 2; 2)$.
- a) Tính $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$. b) Tính $\cos \widehat{BAC}$. c) Tính $[\vec{AB}, \vec{AC}]$.
- 6.5.** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A (1; 0; 3)$, $B (2; 2; 4)$, $C (0; 3; -2)$.
- a) Chứng minh tam giác ABC vuông tại A .
- b) Tìm tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .
- c) Tính diện tích tam giác ABC .
- 6.6.** Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A (1; 1; 3)$, $B (-1; 3; 2)$, $C (-1; 2; 3)$. Tính diện tích tam giác ABC và thể tích tứ diện $OABC$.
- 6.7.** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A (-3; -2; 6)$, $B (-2; 4; 4)$. Hãy tính độ dài đường cao OH của tam giác OAB .
- 6.8.** Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A (0; 4; 1)$, $B (1; 0; 1)$, $C (3; 1; -2)$. Tìm tọa độ trục tâm tam giác ABC .
- 6.9.** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A (1; 1; 1)$, $B (-1; 1; 0)$, $C (3; 1; -1)$. Tìm điểm M thuộc mặt phẳng (Oxz) sao cho M cách đều A, B, C .
- 6.10.** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A (-1; 6; 6)$, $B (3; -6; -2)$. Tìm điểm M thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $AM + BM$ là ngắn nhất.
- 6.11.** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A (2; 5; 3)$, $B (3; 7; 4)$, $C (x, y, 6)$. Tìm x, y để A, B, C thẳng hàng.
- 6.12.** Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A (1; 1; 1)$, $B (2; 3; 4)$, $C (6; 5; 2)$, $D (7; 7; 5)$. Chứng minh rằng A, B, C, D là bốn đỉnh của hình bình hành. Tính diện tích hình bình hành đó.
- 6.13.** Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có $A (2; 1; -1)$, $B (3; 0; 1)$, $C (2; -1; 3)$ và D thuộc trục Oy . Tìm tọa độ đỉnh D , biết thể tích tứ diện $ABCD$ bằng 5.
- 6.14.** Tìm tâm và bán kính của các mặt cầu sau
- a) $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z + 1)^2 = 9$. b) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z + 9 = 0$.
- c) $x^2 + y^2 + z^2 + y - 5z + 1 = 0$. d) $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 6x + 8y + 15z - 3 = 0$.
- 6.15.** Lập phương trình mặt cầu trong các trường hợp sau
- a) Có tâm $I (1; 2; -3)$ và qua $M (2; 0; -1)$.
- b) Có đường kính AB biết $A (3; 2; -1)$ và $B (1; 1; 2)$.
- c) Ngoại tiếp tứ diện $OABC$ biết $A (2; 0; 0)$, $B (0; -1; 0)$ và $C (0; 0; 3)$.
- d) Ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ biết $A (1; 2; 1)$, $B (3; -1; 2)$, $C (-2; 1; 2)$ và $D (1; 1; 3)$.
- e) Có tâm nằm trên mặt phẳng (Oyz) và qua ba điểm $A (0; 8; 0)$, $B (4; 6; 2)$, $C (0; 12; 4)$.

§2. Phương Trình Mặt Phẳng

A. Kiến Thức Cần Nhớ

1. Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng.

Định nghĩa: Vectơ $\vec{n} \neq \vec{0}$ có giá vuông góc với (α) gọi là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) .

Lưu ý.

- Một mặt phẳng có vô số vectơ pháp tuyến cùng phương.
- Nếu hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ không cùng phương và có giá song song hoặc chứa trong (α) thì $\vec{n}_\alpha = [\vec{a}, \vec{b}]$.

2. Phương trình tổng quát của mặt phẳng.

Dạng: $(\alpha) : Ax + By + Cz + D = 0$ (A, B, C không đồng thời bằng 0).

Nhận xét.

- Mặt phẳng $Ax + By + Cz + D = 0$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n} (A; B; C)$.
- Lấy $x_0; y_0; z_0$ tùy ý $\Rightarrow z_0$ ta có điểm $M(x_0; y_0; z_0) \in (\alpha)$.
- Mặt phẳng qua $M(x_0; y_0; z_0)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} (A; B; C)$ có PT: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$.
- Mặt phẳng qua $A(a; 0; 0), B(0; b; 0)$ và $C(0; 0; c)$ có phương trình $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ gọi là PT đoạn chắn.
- Mặt phẳng $(Oxy), (Oxz), (Oyz)$ lần lượt có phương trình $z = 0, y = 0, x = 0$.
- Mặt phẳng (α) tiếp xúc với mặt cầu $(S) \Leftrightarrow d(I; (\alpha)) = R$.

3. Vị trí tương đối của hai mặt phẳng.

Cho hai mặt phẳng $(\alpha_1) : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ và $(\alpha_2) : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Ta có:

- $(\alpha_1) // (\alpha_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n}_1 = k\vec{n}_2 \\ D_1 \neq kD_2 \end{cases}$.
- $(\alpha_1) \equiv (\alpha_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n}_1 = k\vec{n}_2 \\ D_1 = kD_2 \end{cases}$.
- (α_1) cắt $(\alpha_2) \Leftrightarrow \vec{n}_1 \neq k\vec{n}_2$.
- $(\alpha_1) \perp (\alpha_2) \Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$.

4. Khoảng cách.

- Từ một điểm đến một mặt phẳng: $d(M; (\alpha)) = \frac{|Ax_M + By_M + Cz_M + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.
- Giữa hai mặt phẳng song song: $d((\alpha); (\beta)) = d(M; (\beta))$ ($M \in (\alpha)$).

B. Bài Tập

6.16. Lập phương trình mặt phẳng (P) trong các trường hợp sau

- Đi qua ba điểm $A(1; 0; 0), B(0; -2; 0), C(0; 0; 3)$.
- Đi qua ba điểm $A(2; -1; 3), B(4; 2; 1), C(-1; 2; 3)$.
- Đi qua điểm $M(2; -1; 2)$ và song song với mặt phẳng $(\beta) : 2x - y + 3z + 4 = 0$.
- Đi qua $M(1; 2; 3)$ và vuông góc AB . Biết $A(-1; 0; 2), B(3; 2; 1)$.
- Đi qua hai điểm $A(3; 1; -1), B(2; -1; 4)$ và vuông góc với mặt phẳng $(\alpha) : 2x - y + 3z + 1 = 0$.
- Đi qua $M(-2; 3; -1)$ và vuông góc với hai mặt phẳng $(\alpha) : x + 2y + 2z + 1 = 0; (\beta) : 2x + 3y + z = 0$.
- Đi qua hai điểm $M(1; 2; 3), N(2; -2; 4)$ và song song với trục Oy .
- Trung trực của Ab , biết $A(4; -1; 5), B(2; 3; 1)$.
- Song song với $(\beta) : 4x + 3y - 12z + 1 = 0$ và tiếp xúc với $(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 2 = 0$.

6.17. Xét vị trí tương đối của các cặp mặt phẳng sau

- $(\alpha) : x - 2y + 3z - 3 = 0; (\beta) : 2x - y + z - 1 = 0$.
- $(\alpha) : 2x - y + 2z + 1 = 0; (\beta) : -4x + 2y - 4z - 1 = 0$.
- $(\alpha) : 3x - y + 2z + 1 = 0; (\beta) : 6x - 2y + 4z + 2 = 0$.

6.18. Tính các khoảng cách sau

- Giữa $M(2; -3; 1)$ và $(\alpha) : 2x + 2y + z + 3 = 0$.
- Giữa $A(-4; 1; 5)$ và $(\alpha) : x + 7y - 2z + 1 = 0$.
- Giữa $(\alpha) : 2x - y + 2z + 1 = 0$ và $(\beta) : 4x - 2y + 4z - 3 = 0$.

6.19. (TN-06) Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2; 0; 0), B(0; 3; 0), C(0; 0; 6)$.

- Viết phương trình mặt phẳng qua ba điểm A, B, C .
- Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Viết phương trình mặt cầu đường kính OG .

6.20. (TN-07) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $E(1; -4; 5), F(3; 2; 7)$.

- Viết phương trình mặt cầu qua F và có tâm E .
- Viết phương trình mặt phẳng trung trực của EF .

6.21. (CD-09) Trong không gian $Oxyz$, cho $(P_1) : x + 2y + 3z + 4 = 0$ và $(P_2) : 3x + 2y - z + 1 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua $A(1; 1; 1)$ và vuông góc với hai mặt phẳng $(P_1), (P_2)$.

6.22. Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có $A(5; 1; 3), B(1; 6; 2), C(5; 0; 4), D(4; 0; 6)$.

- Viết phương trình các mặt phẳng (ACD) và (BCD) .
- Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa cạnh AB và song song với cạnh CD .

6.23. Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(-2; 6; 3), B(1; 0; 6), C(0; 2; -1), D(1; 4; 0)$.

- Viết phương trình mặt phẳng (BCD) . Suy ra $ABCD$ là một tứ diện.
- Tính chiều cao AH của tứ diện $ABCD$.
- Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa AB và song song với CD .

- 6.24.** (CD-2011) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1; 2; 3)$, $B(1; 0; -5)$ và mặt phẳng $(P) : 2x + y - 3z - 4 = 0$. Tìm điểm M thuộc (P) sao cho ba điểm A, B, M thẳng hàng.
- 6.25.** Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (α) song song với mặt phẳng $(\beta) : 4x + 3y - 12z + 1 = 0$ và tiếp xúc với mặt cầu $(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 2 = 0$.
- 6.26.** (D-04) Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2; 0; 1)$, $B(1; 0; 0)$, $C(1; 1; 1)$ và $(P) : x + y + z - 2 = 0$. Viết phương trình mặt cầu đi qua ba điểm A, B, C và có tâm thuộc (P) .
- 6.27.** (B-2012) Trong không gian $Oxyz$, cho $A(0; 0; 3)$, $M(1; 2; 0)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) qua A và cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại B, C sao cho tam giác ABC có trọng tâm thuộc đường thẳng AM .
- 6.28.** (A-2011) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 4z = 0$ và điểm $A(4; 4; 0)$. Viết phương trình mặt phẳng (OAB) , biết điểm B thuộc (S) và tam giác OAB đều.
- 6.29.** (A-2011) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; 0; 1)$, $B(0; -2; 3)$ và mặt phẳng $(P) : 2x - y - z + 4 = 0$. Tìm tọa độ điểm M thuộc (P) sao cho $MA = MB = 3$.
- 6.30.** (B-08) Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(0; 1; 2)$, $B(2; -2; 1)$, $C(-2; 0; 1)$.
a) Viết phương trình mặt phẳng qua ba điểm A, B, C .
b) Tìm tọa độ điểm M thuộc $(P) : 2x + 2y + z - 3 = 0$ sao cho $MA = MB = MC$.
- 6.31.** (D-2010) Trong không gian $Oxyz$, cho $(P) : x + y + z - 3 = 0$ và $(Q) : x - y + z - 1 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (R) vuông góc với (P) và (Q) sao cho khoảng cách từ O đến (R) bằng 2.
- 6.32.** (B-09) Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có các đỉnh $A(1; 2; 1)$, $B(-2; 1; 3)$, $C(2; -1; 1)$, $D(0; 3; 1)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A, B sao cho khoảng cách từ C đến (P) bằng khoảng cách từ D đến (P) .
- 6.33.** (B-07) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 3 = 0$ và mặt phẳng $(P) : 2x - y + 2z - 14 = 0$.
a) Viết phương trình (Q) chứa trục Ox và cắt (S) theo đường tròn có bán kính bằng 3.
b) Tìm điểm M thuộc mặt cầu (S) sao cho khoảng cách từ M đến (P) là lớn nhất.
- 6.34.** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(0; 1; 1)$, $B(2; -1; 1)$, $C(4; 1; 1)$ và mặt phẳng $(P) : x + y + z - 6 = 0$. Tìm điểm M trên (P) sao cho $|\vec{MA} + 2\vec{MB} + \vec{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất.
- 6.35.** (A-03) Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có A trùng gốc tọa độ O , $B(a; 0; 0)$, $D(0; a; 0)$, $A'(0; 0; b)$, $(a > 0, b > 0)$. Gọi M là trung điểm cạnh CC' .
a) Tính thể tích khối tứ diện $BDA'M$.
b) Xác định tỉ số $\frac{a}{b}$ để $(A'BD)$ vuông góc với (MBD) .

§3. Phương Trình Đường Thẳng

A. Kiến Thức Cần Nhớ

1. Vectơ chỉ phương của đường thẳng.

Định nghĩa: Vectơ $\vec{u} \neq \vec{0}$ có giá song song hoặc trùng với Δ gọi là vectơ chỉ phương của Δ .

Lưu ý. Đường thẳng Δ có vô số vectơ chỉ phương cùng phương với nhau.

2. Phương trình tham số của đường thẳng.

Đường thẳng qua $M(x_0; y_0; z_0)$ và nhận $\vec{u}(a_1; a_2; a_3)$ làm vectơ chỉ phương có PTTS:
$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases} \quad (\Delta).$$

Nhận xét.

- Đường thẳng Δ qua $M(x_0; y_0; z_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}(a_1; a_2; a_3)$.
- Nếu $a_1 a_2 a_3 \neq 0$ thì Δ còn viết dưới dạng $\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$ gọi là dạng chính tắc.
- Nếu Δ song song với (α) và $M \in \Delta$ thì $d(\Delta; (\alpha)) = d(M; (\alpha))$.

3. Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng.

- $d \equiv d' \Leftrightarrow [\vec{u}, \vec{u}'] = [\vec{u}, \vec{M_0 M'_0}] = \vec{0}$.
- d và d' cắt nhau $\Leftrightarrow \begin{cases} [\vec{u}, \vec{u}'] \neq \vec{0} \\ [\vec{u}, \vec{u}'] \cdot \vec{M_0 M'_0} = 0 \end{cases}$.

$$\bullet d // d' \Leftrightarrow \begin{cases} [\vec{u}, \vec{u'}] = \vec{0} \\ [\vec{u}, \overrightarrow{M_0 M'_0}] \neq \vec{0} \end{cases} \quad \bullet d \text{ và } d' \text{ chéo nhau} \Leftrightarrow [\vec{u}, \vec{u'}] \cdot \overrightarrow{M_0 M'_0} \neq 0.$$

4. Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt phẳng.

$$\text{Cho đường thẳng } \Delta : \begin{cases} x = x_0 + at \\ x = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \text{ và mặt phẳng } (\alpha) : Ax + By + Cz + D = 0.$$

Số giao điểm của Δ và (α) là số nghiệm phương trình $A(x_0 + at) + B(y_0 + bt) + C(z_0 + ct) + D = 0$ (1).

- $\Delta // (\alpha) \Leftrightarrow (1)$ vô nghiệm.
- $\Delta \subset (\alpha) \Leftrightarrow (1)$ có vô số nghiệm.
- $\Delta \text{ cắt } (\alpha) \Rightarrow (1)$ có một nghiệm.
- $\Delta \perp (\alpha) \Leftrightarrow \vec{u} = k \vec{n}$.

B. Bài Tập

6.36. Lập phương trình đường thẳng d trong các trường hợp sau

- a) Đi qua $A(2; 1; -1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (-2; 3; 2)$.
- b) Đi qua hai điểm $A(1; 2; 3), B(5; 4; 4)$.
- c) Đi qua $A(-3; 1; 2)$ và vuông góc với $(\alpha) : x - 2y + 3z + 1 = 0$.
- d) Đi qua $M(2; 1; -3)$ và song song với đường thẳng $\Delta : \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z}{4}$.
- e) Đi qua $M(-3; 1; 4)$ và song song với giao tuyến của $(\alpha) : 3x + 2y - 5z + 1 = 0; (\beta) : x - 4y + 3z + 2 = 0$.
- f) Giao tuyến của $(\alpha) : x + z - 1 = 0; (\beta) : 2x - 2y + 3z + 1 = 0$.

6.37. (CĐ-09) Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1; 1; 0), B(0; 2; 1)$ và trọng tâm $G(0; 2; -1)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua C và vuông góc với (ABC) .

6.38. (TN-08) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2; -1; 3)$ và $(P) : x - 2y - 2z - 10 = 0$. Tính khoảng cách từ A đến (P) . Viết phương trình đường thẳng qua A và vuông góc với (P) .

6.39. (D-2011) Trong không gian $Oxyz$, cho $\Delta : \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z}{1}$ và $(P) : 2x - y + 2z = 0$. Viết phương trình mặt cầu có tâm thuộc đường thẳng Δ , bán kính bằng 1 và tiếp xúc với mặt phẳng (P) .

6.40. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(4; -6; 3), B(5; -7; 3)$. Gọi d là đường thẳng qua A và vuông góc với mặt phẳng $(P) : 8x + 11y + 2z - 3 = 0$. Tìm điểm C thuộc d sao cho $\triangle ABC$ vuông tại B .

6.41. (A-2012) Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1}$, mặt phẳng $(P) : x + y - 2z + 5 = 0$ và điểm $A(1; -1; 2)$. Viết phương trình đường thẳng Δ cắt d và (P) lần lượt tại M và N sao cho A là trung điểm của đoạn thẳng MN .

6.42. (D-2012) Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{1}$ và hai điểm $A(1; -1; 2), B(2; -1; 0)$. Xác định tọa độ điểm M thuộc d sao cho tam giác AMB vuông tại M .

6.43. (A-2012) Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \frac{x+1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1}$ và điểm $I(0; 0; 3)$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I và cắt d tại hai điểm A, B sao cho tam giác IAB vuông tại I .

6.44. Xét vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng sau

- a) $d : \frac{x-12}{4} = \frac{y-9}{3} = \frac{z-1}{1}$ và $(\alpha) : 3x + 5y - z - 2 = 0$.
- b) $d : \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{-3}$ và $(\alpha) : x + y + z - 4 = 0$.

6.45. Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng sau

- a) $d : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-3}{-1}$ và $d' : \frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-5}{-2}$.
- b) $d : \frac{x-3}{-1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-5}{-2}$ và $d' : \frac{x-2}{-3} = \frac{y-5}{3} = \frac{z-3}{-6}$.
- c) $d : \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{-1}$ và $d' : \frac{x-2}{-2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{3}$.
- d) $d : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-5}{1}$ và $d' : \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+1}{2}$.

6.46. (TN-09) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S) : (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 36$ và mặt phẳng $(P) : x + 2y + 2z + 18 = 0$.

- a) Xác định tọa độ tâm T và bán kính của (S) . Tính khoảng cách từ T đến (P) .
- b) Viết phương trình tham số của đường thẳng d qua T và vuông góc với (P) . Tìm tọa độ giao điểm của d và (P) .

6.47. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha) : 3x + 5y - z - 2 = 0$ và đường thẳng $d : \frac{x-12}{4} = \frac{y-9}{3} = \frac{z-1}{1}$.

- Tìm giao điểm M của d và (α) .
- Viết phương trình mặt phẳng (β) chứa M và vuông góc với d .

6.48. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d : \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}$ và $d' : \frac{x}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{1}$.

- Chứng minh d và d' chéo nhau.
- Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa d và song song với d' .

6.49. (CD-2012) Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1 : \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 1 - t \end{cases}, d_2 : \begin{cases} x = 1 + 2s \\ y = 2 + 2s \\ z = -s \end{cases}$. Chứng minh d_1 và d_2 cắt nhau. Viết phương trình mặt phẳng chứa hai đường thẳng d_1, d_2 .

6.50. (B-06) Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $A(0; 1; 2)$ và $d_1 : \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{-1}, d_2 : \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-2}{1}$.

- Viết phương trình mặt phẳng (P) qua A và song song với d_1, d_2 .
- Tìm M thuộc d_1, N thuộc d_2 sao cho A, M, N thẳng hàng.

6.51. (D-03) Trong không gian $Oxyz$, cho d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(P) : x + 3ky - z + 2 = 0$ và $(Q) : kx - y + z + 1 = 0$. Tìm k để d vuông góc với $(\alpha) : x - y - 2z + 5 = 0$.

6.52. (D-02) Trong không gian $Oxyz$, cho $(P) : 2x - y + 2 = 0$ và d là giao tuyến hai mặt phẳng $(\alpha) : (2m+1)x + (1-m)y + m - 1 = 0$ và $(\beta) : mx + (2m+1)z + 4m + 2 = 0$. Xác định m để d song song với (P) .

6.53. (D-09) Trong không gian $Oxyz$, cho $A(2; 1; 0), B(1; 2; 2), C(1; 1; 0)$ và mặt phẳng $(P) : x + y + z - 20 = 0$. Xác định tọa độ điểm D thuộc đường thẳng AB sao cho đường thẳng CD song song với mặt phẳng (P) .

6.54. Lập phương trình đường vuông góc chung của $d_1 : \frac{x-7}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-9}{-1}$ và $d_2 : \frac{x-3}{-7} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$.

6.55. Viết phương trình đường thẳng qua $A(1; -1; 1)$ và cắt $d : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{-1}, d' : \frac{x}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-2}{1}$.

6.56. Viết phương trình đường thẳng Δ vuông góc với (Oxz) và cắt $d : \begin{cases} x = t \\ y = -4 + t \\ z = 3 - t \end{cases}, d' : \begin{cases} x = 1 - 2t' \\ y = -3 + t' \\ z = 4 - 5t' \end{cases}$.

6.57. (B-04) Trong không gian $Oxyz$, cho $A(-4; -2; 4)$ và $d : \frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{4}$. Viết phương trình đường thẳng Δ qua A , cắt và vuông góc với d .

6.58. (D-09) Trong không gian $Oxyz$, cho $\Delta : \frac{x+2}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-1}$ và $(P) : x + 2y - 3z + 4 = 0$. Viết phương trình đường thẳng d nằm trong (P) sao cho d cắt và vuông góc với Δ .

6.59. (A-07) Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1 : \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{1}$ và $d_2 : \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 3 \end{cases}$.

- Chứng minh d_1 và d_2 chéo nhau.
- Viết phương trình d vuông góc với $(P) : 7x + y - 4z = 0$ và cắt hai đường thẳng d_1, d_2 .

6.60. (CD-2012) Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+1}{1}$ và mặt phẳng $(P) : 2x + y - 2z = 0$. Đường thẳng Δ nằm trong (P) vuông góc với d tại giao điểm của d và (P) . Viết phương trình đường thẳng Δ .

§4. Hình Chiếu

A. Kiến Thức Cần Nhớ

1. Hình chiếu của điểm M trên mặt phẳng (α) .

- Viết phương trình đường thẳng Δ qua M và vuông góc với (α) .
- Hình chiếu H là giao điểm của Δ và (α) .

Lưu ý. Mặt phẳng (α) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn có tâm là hình chiếu của I trên (α) .

2. Hình chiếu của điểm M trên đường thẳng d .

- Lấy $H \in d$. Tính $\overrightarrow{MH}$.
- H là hình chiếu của M trên $d \Leftrightarrow \overrightarrow{MH} \cdot \vec{u}_d = 0$.

3. Hình chiếu của đường thẳng d trên mặt phẳng (α) .

TH1: d cắt (α) .

- Tìm giao điểm a của d và (α) .
- Lấy M cụ thể trên d . Tìm hình chiếu M' của M trên d .
- Hình chiếu d' là đường thẳng AM' .

TH2: d song song (α) .

- Lấy M cụ thể trên d . Tìm hình chiếu M' của M trên d .
- Hình chiếu d' qua M' và song song với d .

B. Bài Tập

6.61. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 4; 2)$ và mặt phẳng $(\alpha) : x + y + z - 1 = 0$. Tìm tọa độ điểm H là hình chiếu vuông góc của A lên (α) . Tìm tọa độ điểm A' đối xứng với A qua (α) .

6.62. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1; 0; 0)$ và $\Delta : \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$. Tìm tọa độ điểm H là hình chiếu vuông góc của A lên Δ . Tìm tọa độ điểm A' đối xứng với A qua Δ .

6.63. (D-06) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; 3)$; $d_1 : \frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{1}$ và $d_2 : \frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{1}$. Tìm A' đối xứng với A qua d_1 . Viết phương trình đường thẳng Δ qua A , vuông góc d_1 và cắt d_2 .

6.64. Trong không gian $Oxyz$, cho $d : \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-3}{1}$ và $(P) : x + y + z - 10 = 0$. Viết phương trình hình chiếu d' của d lên (P) .

6.65. Trong không gian $Oxyz$, cho $d : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{2}$ và $(P) : x + 2y - 2z - 1 = 0$. Viết phương trình hình chiếu d' của d lên (P) .

6.66. Trong không gian $Oxyz$, lập phương trình d' đối xứng của $d : \frac{x-4}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-5}$ qua $(P) : x - y + 2z - 3 = 0$.

6.67. (A-08) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2; 5; 3)$ và đường thẳng $d : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{2}$. Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của A trên d . Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa d sao cho khoảng cách từ A đến (α) lớn nhất.

6.68. (CD-2010) Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1; -2; 3)$, $B(-1; 0; 1)$ và $(P) : x + y + z + 4 = 0$. Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của A trên (P) . Viết phương trình mặt cầu (S) có bán kính bằng $\frac{AB}{6}$, có tâm thuộc đường thẳng AB và (S) tiếp xúc với (P) .

6.69. Trong không gian $Oxyz$, cho $(P) : x + 2y - 2z - 3 = 0$ và $(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 2z - 10 = 0$. Chứng minh (P) cắt (S) theo một đường tròn. Tìm tâm và bán kính của đường tròn đó.

6.70. (A-09) Trong không gian $Oxyz$, cho $(P) : 2x - 2y - z - 4 = 0$ và $(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 11 = 0$. Chứng minh (P) cắt (S) theo một đường tròn. Tìm tâm và bán kính của đường tròn đó.

6.71. Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(3; 3; 0)$, $B(3; 0; 3)$, $C(0; 3; 3)$, $D(3; 3; 3)$. Viết phương trình mặt cầu qua bốn điểm A, B, C, D . Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

6.72. (D-2012) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P) : 2x + y - 2z + 10 = 0$ và điểm $I(2; 1; 3)$. Viết phương trình mặt cầu tâm I và cắt (P) theo một đường tròn có bán kính bằng 4.

§5. Góc Và Khoảng Cách

1. Góc.

Gọi α, β, γ là góc giữa hai mặt phẳng, giữa hai đường thẳng và giữa đường thẳng với mặt phẳng. Ta có

$$\bullet \cos \alpha = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\alpha| |\vec{n}_\beta|} \quad \bullet \cos \beta = |\cos(\vec{u}_1; \vec{u}_2)| \quad \bullet \sin \gamma = |\cos(\vec{u}; \vec{n})|.$$

2. Khoảng cách.

$$\bullet \text{ Từ một điểm đến một đường thẳng: } d(M, \Delta) = \frac{|\overrightarrow{[u, \overrightarrow{M_0M}]}|}{|\vec{u}|}, \quad d(M, AB) = \frac{|\overrightarrow{[AB, \overrightarrow{AM}]}|}{|\vec{AB}|}.$$

• Giữa hai đường thẳng chéo nhau: $d(\Delta, \Delta') = \frac{|\left[\vec{u}, \vec{u'}\right] \cdot \overrightarrow{M_0 M'_0}|}{\left|\left[\vec{u}, \vec{u'}\right]\right|}, d(AB, CD) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right] \cdot \overrightarrow{AC}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right]\right|}.$

B. Bài Tập

6.73. Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$. Tính góc và khoảng cách giữa hai cạnh AB và CD biết $A(3; -1; 0), B(0; -7; 3), C(-2; 1; -1), D(3; 2; 6)$.

6.74. (TN-09) Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1; -2; 3)$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{-1}$.

- Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng qua A và vuông góc với d .
- Tính khoảng cách từ A đến d . Viết phương trình mặt cầu tâm A và tiếp xúc với d .

6.75. (A-05) Trong không gian $Oxyz$, cho $d: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-3}{1}$ và $(P): 2x + y - 2z + 9 = 0$.

- Tìm điểm I thuộc d sao cho khoảng cách từ I đến (P) bằng 2.
- Tìm giao điểm A của d và (P) . Lập phương trình Δ nằm trong (P) , qua A và vuông với d .

6.76. (TN-08) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(3; -2; -2)$ và $(P): 2x - 2y + z - 1 = 0$.

- Viết phương trình đường thẳng qua A và vuông góc với (P) .
- Tính $d(A, (P))$. Viết phương trình (Q) sao cho (Q) song song (P) và $d((P), (Q)) = d(A, (P))$.

6.77. (CD-2010) Trong không gian $Oxyz$, cho $d: \frac{x}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$ và $(P): 2x - y + 2z - 2 = 0$.

- Viết phương trình mặt phẳng chứa d và vuông góc với (P) .
- Tìm tọa độ điểm M thuộc d sao cho M cách đều góc tọa độ O và (P) .

6.78. (CD-2011) Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-1}{1}$. Viết phương trình mặt cầu có tâm $I(1; 2; -3)$ và cắt đường thẳng d tại hai điểm A, B sao cho $AB = \sqrt{26}$.

6.79. (A-2010) Trong không gian $Oxyz$, cho $A(0; 0; -2)$ và $\Delta: \frac{x+2}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+3}{2}$. Tính khoảng cách từ A đến Δ . Viết phương trình mặt cầu tâm A , cắt Δ tại hai điểm B, C sao cho $BC = 8$.

6.80. (B-03) Trong không gian $Oxyz$, cho $A(2; 0; 0), B(0; 0; 8)$ và điểm C sao cho $\overrightarrow{AC} = (0; 6; 0)$. Tính khoảng cách từ trung điểm I của BC đến đường thẳng OA .

6.81. (D-2010) Trong không gian $Oxyz$, cho $\Delta_1: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$ và $\Delta_2: \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}$. Xác định tọa độ điểm

M thuộc Δ_1 sao cho khoảng cách từ M đến Δ_2 bằng 1.

6.82. (A-2010) Trong không gian $Oxyz$, cho $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-1}$ và $(P): x - 2y + z = 0$. Gọi C là giao điểm của Δ và (P) , M là điểm thuộc Δ . Tính khoảng cách từ M đến (P) , biết $MC = \sqrt{6}$.

6.83. (B-2010) Trong không gian $Oxyz$, cho $\Delta: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}$. Xác định tọa độ điểm M trên trục hoành sao cho khoảng cách từ M đến Δ bằng OM .

6.84. (B-2010) Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c), (b, c > 0)$ và $(P): y - z + 1 = 0$. Xác định b, c biết mặt phẳng (ABC) vuông góc với mặt phẳng (P) và khoảng cách từ O đến (ABC) bằng $\frac{1}{3}$.

6.85. (B-2012) Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-2}$ và hai điểm $A(2; 1; 0), B(-2; 3; 2)$. Viết phương trình mặt cầu đi qua A, B và có tâm thuộc đường thẳng d .

6.86. (A-09) Trong không gian $Oxyz$, cho $(P): x - 2y + 2z - 1 = 0$ và hai đường thẳng $\Delta_1: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+9}{6}, \Delta_2: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{-2}$. Xác định điểm M thuộc Δ_1 sao cho khoảng cách từ M đến Δ_2 bằng khoảng cách từ M đến (P) .

6.87. (B-2011) Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{-1}$ và mặt phẳng $(P): x + y + z - 3 = 0$. Gọi I là giao điểm của Δ và (P) . Tìm tọa độ điểm M thuộc (P) sao cho MI vuông góc với Δ và $MI = 4\sqrt{14}$.

- 6.88.** (B-2011) Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta : \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+5}{-2}$ và hai điểm $A(-2; 1; 1)$, $B(-3; -1; 2)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng Δ sao cho tam giác MAB có diện tích bằng $3\sqrt{5}$.
- 6.89.** (A-04) Trong không gian $Oxyz$, cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, AC cắt BD tại gốc tọa độ O . Biết $A(2; 0; 0)$, $B(0; 1; 0)$, $S(0; 0; 2\sqrt{2})$. Gọi M là trung điểm của cạnh SC .
- Tính góc và khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BM .
 - Gọi N là giao điểm của SD và (ABM) , tính thể tích khối chóp $S.ABMN$.
- 6.90.** (A-04) Trong không gian $Oxyz$, cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$. Biết $A(a; 0; 0)$, $B(-a; 0; 0)$, $C(0; 1; 0)$, $B'(-a; 0; b)$, ($a > 0, b > 0$).
- Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $B'C$ và AC' .
 - Cho a, b thay đổi sao cho $a + b = 4$. Tìm a, b để khoảng cách giữa hai đường thẳng $B'C$ và AC' là lớn nhất.
- 6.91.** (A-06) Trong không gian $Oxyz$, cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ với $A(0; 0; 0)$, $B(1; 0; 0)$, $D(0; 1; 0)$, $A'(0; 0; 1)$. Gọi M, N là trung điểm AB và CD .
- Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'C$ và MN .
 - Viết phương trình mặt phẳng chứa $A'C$ và tạo với (Oxy) một góc α sao cho $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{6}}$.
- 6.92.** Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1; 0; 0)$, $B(0; 1; 2)$. Tìm $C \in Oz$ để (ABC) hợp với $(\alpha) : 2x - 2y - z + 5 = 0$ một góc 60° .
- 6.93.** (D-07) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 4; 2)$, $B(-1; 2; 4)$ và $\Delta : \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{2}$.
- Viết phương trình đường thẳng d đi qua trọng tâm của tam giác OAB và vuông góc với (OAB) .
 - Tìm điểm M thuộc Δ sao cho $MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất.
- 6.94.** (B-09) Trong không gian $Oxyz$, cho $(P) : x - 2y + 2z - 5 = 0$ và hai điểm $A(-3; 0; 1)$, $B(1; -1; 3)$. Trong các đường thẳng đi qua A và song song với (P) , hãy viết đường thẳng mà khoảng cách từ B đến đường thẳng đó là nhỏ nhất.
- 6.95.** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \frac{x-3}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+1}{-1}$ và mặt phẳng $(P) : x + y + z + 2 = 0$. Gọi M là giao điểm của d và (P) . Viết phương trình đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P) , vuông góc với d đồng thời thỏa mãn khoảng cách từ M tới Δ bằng $\sqrt{42}$.