

Chuyên đề 9

Số Phức

§1. Dạng Đại Số Của Số Phức

A. Kiến Thức Cần Nhớ

1. Khái niệm số phức.

- Định nghĩa: $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1$).
 a gọi là phần thực, b gọi là phần ảo.
 $b = 0 \Rightarrow z = a$ gọi là số thực, $a = 0 \Rightarrow z = bi$ gọi là số thuần ảo.
Số phức $z = a + bi$ được biểu diễn bởi điểm $M(a; b)$ trên mặt phẳng Oxy .
- Biểu diễn hình học: Số phức $z = a + bi$ được biểu diễn bởi điểm $M(a; b)$ trên mặt phẳng Oxy .
- Hai số phức bằng nhau: $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases}$.
- Số phức liên hợp: $\bar{z} = a - bi$.

2. Phép toán số phức.

- Cộng, trừ, nhân hai số phức: Xem như nhân hai đa thức.
- Chia hai số phức: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2}$.

3. Mô đun của số phức.

- Định nghĩa: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- Tính chất: $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$, $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

Kỹ Năng Cơ Bản

1. Tìm số phức.

- Nếu trong biểu thức chỉ chứa z thì biến đổi để rút z .
- Nếu trong biểu thức chứa $z, \bar{z}, |z|$ thì gọi $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$) thay vào biểu thức để tìm a, b .

2. Tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức.

- Gọi $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$), thay vào biểu thức để tìm mối liên hệ giữa x, y .

Lưu ý. Một số tập hợp điểm thường gặp:

- $x = x_0$: Đường thẳng song song trục Oy .
- $ax + by + c = 0$: Đường thẳng.
- $y = \frac{a}{x}$: Hypebol.
- $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$: Đường tròn.
- $y = y_0$: Đường thẳng song song trục Ox .
- $y = ax^2 + bx + c$: Parabol.
- $\sqrt{(x - a)^2 + y^2} + \sqrt{(x + a)^2 + y^2} = b$: Elip.
- $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$: Đường tròn.

C. Bài Tập

9.1. Thực hiện các phép tính sau

- a) $\frac{(2 - 3i)(1 + i)}{4 + i}$. b) $4 - 3i + \frac{5 + 4i}{3 + 6i}$. c) $\frac{2 - i}{1 + 4i} + \frac{3 + 2i}{1 - 2i}$.
- d) $\frac{(1 + i)^2(2i)^3}{-2 + i}$. e) $\frac{2i(2 + 3i)^2}{3 + 4i}$. f) $\frac{1}{(1 + i)(4 - 3i)}$.

9.2. Tìm phần thực và phần ảo của các số phức sau

- a) $z = (1 + i)^2 - (1 - i)^2$. b) $z = i^{2011}$. c) $z = (1 + i)^{2012}$.
- d) $z = \left(\frac{1 + i}{1 - i} \right)^{33}$. e) $z = \left(\frac{2}{1 - i} \right)^{99}$. f) $z = \frac{1}{2i} \left(i^7 - \frac{1}{i^7} \right)$.

9.3. Cho số phức $z = x + iy$. Tìm phần thực và phần ảo của các số phức sau

a) $u = z^2 - 2z + 4i$. b) $v = z^2 + |z| - 2i$. c) $w = \frac{\bar{z} + i}{iz - 1}$.

9.4. Tìm phần thực, phần ảo của các số phức z thỏa mãn các điều kiện sau

a) (CD-09) $(1 + i)^2(2 - i)z = 8 + i + (1 + 2i)z$. b) (CD-2010) $(2 - 3i)z + (4 + i)\bar{z} = -(1 + 3i)^2$.
c) (A-2010) $\bar{z} = (\sqrt{2} + i)^2(1 - i\sqrt{2})$. d) (B-2011) $z = \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 + i}\right)^3$.

9.5. Tìm số phức z thỏa mãn các điều kiện sau

a) (D-2011) $z - (2 + 3i)\bar{z} = 1 - 9i$. b) (B-2011) $\bar{z} - \frac{5 + i\sqrt{3}}{z} - 1 = 0$.
c) (A-2011) $z^2 = |z|^2 + \bar{z}$. d) (D-2010) $|z| = \sqrt{2}$ và z^2 là số thuần ảo.
e) $\left(\frac{z + i}{z - i}\right)^4 = 1$. f) (B-09) $|z - (2 + i)| = \sqrt{10}$ và $z\bar{z} = 25$.

9.6. Tìm môđun của số phức z thỏa mãn các điều kiện sau

a) (CD-2011) $(1 + 2i)^2z + \bar{z} = 4i - 20$. b) (A-2011) $(2z - 1)(1 + i) + (\bar{z} + 1)(1 - i) = 2 - 2i$.

9.7. Giải các phương trình sau

a) $\frac{2 + i}{1 - i}z = \frac{-1 + 3i}{2 + i}$. b) $((2 + i)\bar{z} + 3 + i)\left(iz + \frac{1}{2i}\right) = 0$.
c) $z + 2\bar{z} = 2 - 4i$. d) $z^2 + \bar{z} = 0$.
e) $z^2 + |z| = 0$. f) $z + 2\bar{z} = (1 + 5i)^2$.

9.8. (A-2010) Cho số phức z thỏa $\bar{z} = \frac{(1 + i\sqrt{3})^3}{1 - i}$. Tìm môđun của số phức $\bar{z} + iz$.

9.9. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $z + (1 - i)\bar{z} = 1 - 2i$. Tìm môđun của số phức $\frac{z}{1 + \bar{z}}$.

9.10. (D-2012) Cho số phức z thỏa mãn $(2 + i)z + \frac{2(1 + 2i)}{1 + i} = 7 + 8i$. Tìm môđun của số phức $w = z + 1 + i$.

9.11. (A-2012) Cho số phức z thỏa mãn $\frac{5(\bar{z} + i)}{z + 1} = 2 - i$. Tính môđun của số phức $w = 1 + z + z^2$.

9.12. Tìm số phức z thỏa mãn đồng thời $\left|\frac{z - 1}{z - i}\right| = 1, \left|\frac{z - 2i}{z + i}\right| = 1$.

9.13. Tìm số phức z thỏa mãn $|z| = |z - 2 - 2i|$ và $\frac{z - 2i}{z - 2}$ là số thuần ảo.

9.14. Tìm số phức z có môđun nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện $|iz - 3| = |z - 2 - i|$.

9.15. Cho số phức $z = \frac{i - m}{1 - m(m - 2i)}$

a) Tìm m để $z\bar{z} = \frac{1}{2}$. b) Tìm m để $|z - i| \leq \frac{1}{4}$. c) Tìm m để z có môđun lớn nhất.

9.16. Tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện

a) $|z + \bar{z} + 3| = 4$. b) $|z - \bar{z} + 1 - i| = 2$. c) $2|z - i| = |z - \bar{z} + 2i|$.
d) $|z^2 - (\bar{z})^2| = 4$. e) (D-09) $|z - (3 - 4i)| = 2$. f) $|z - i| = |(1 + i)z|$.

9.17. Tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện

a) $|z - 1 + i| = 2$. b) $|2 + z| = |i - z|$. c) $|2 + z| > |z - 2|$.
d) $1 \leq |z + 1 - i| \leq 2$. e) $|z - 4i| + |z + 4i| = 10$. f) $\left|\frac{z}{z - i}\right| = 3$.

9.18. (CD-2012) Cho số phức z thỏa mãn $(1 - 2i)z - \frac{2 - i}{1 + i} = (3 - i)z$. Tìm tọa độ điểm biểu diễn của z trong mặt phẳng tọa độ Oxy .

9.19. Tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = (1 + i)z - 2$, biết $|z - 3| = 2$.

9.20. Cho các điểm A, B, C và A', B', C' trong mặt phẳng phức biểu diễn theo thứ tự các số phức $1 - i, 2 + 3i, 3 + i$ và $3i, 3 - 2i, 3 + 2i$. Chứng minh rằng ABC và $A'B'C'$ là hai tam giác có cùng trọng tâm.

9.21. Gọi M, M' theo thứ tự là các điểm của mặt phẳng phức biểu diễn số phức z khác 0 và $z' = \frac{1+i}{2}z$. Chứng minh tam giác OMM' vuông cân.

9.22. Cho A, B là hai điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn theo thứ tự các số phức z_0, z_1 khác 0 thỏa mãn đẳng thức $z_0^2 + z_1^2 = z_0z_1$. Chứng minh tam giác OAB đều.

§2. Phương Trình Bậc Hai Nghiệm Phức

A. Kiến Thức Cần Nhớ

1. Căn bậc hai của số phức.

• Định nghĩa: Số phức w gọi là căn bậc hai của số phức z nếu $w^2 = z$.

Chú ý: Số thực $a > 0$ có hai căn bậc hai là $w = \pm\sqrt{a}$.

Số thực $a < 0$ có hai căn bậc hai là $w = \pm i\sqrt{|a|}$.

Mỗi số phức $z \neq 0$ luôn có hai căn bậc hai.

• Cách tìm căn bậc hai: Gọi $w = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$) ta có $z = w^2 = x^2 - y^2 + 2xyi \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$.

2. Phương trình bậc hai nghiệm phức.

• Tính $\Delta = b^2 - 4ac$ (hoặc $\Delta' = (b')^2 - ac$).

• Trường hợp Δ là số thực: Nếu $\Delta > 0$ thì phương trình có hai nghiệm $z = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình có nghiệm kép $z = -\frac{b}{2a}$.

Nếu $\Delta < 0$ thì phương trình có hai nghiệm $z = \frac{-b \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$.

• Trường hợp Δ là số phức: Ta tìm căn bậc hai w của Δ . Khi đó phương trình có hai nghiệm $z = \frac{-b \pm w}{2a}$.

B. Bài Tập

9.23. Tìm các căn bậc hai của các số phức sau

a) $z = 13 - 12i$.

b) $z = -24 + 10i$.

c) $z = 1 + 4i\sqrt{3}$.

d) $z = 17 + 20i\sqrt{2}$.

e) $z = 4 + 6i\sqrt{5}$.

f) $z = -1 - 2i\sqrt{6}$.

9.24. Giải các phương trình sau trên tập hợp các số phức

a) $z^2 - 2z + 2 = 0$.

b) $-z^2 + 3z - 9 = 0$.

c) $2z^2 - 5z + 4 = 0$.

d) $-3z^2 + 2z - 1 = 0$.

e) $z^4 + z^2 - 6 = 0$.

f) $z^4 + 7z + 12 = 0$.

9.25. Ký hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $2z^2 - 2z + 1 = 0$. Tính giá trị biểu thức $A = \frac{1}{z_1^2} + \frac{1}{z_2^2}$.

9.26. (A-09) Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 + 2z + 10 = 0$. Tính $A = |z_1|^2 + |z_2|^2$.

9.27. (CĐ-2012) Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 2z + 1 + i = 0$. Tính $|z_1| + |z_2|$.

9.28. Cho z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - (i + 2)z + i = 0$. Tính $\left| \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} \right|$.

9.29. Giải các phương trình sau trên tập hợp các số phức

a) $iz^2 - 2(1 - i)z - 4 = 0$.

b) $z^2 - (5 - i)z + 8 - i = 0$.

c) (D-2012) $z^2 + 2(1 + i)z + 5i = 0$.

d) $\left(\frac{iz + 3}{z - 2i} \right)^2 - 3 \left(\frac{iz + 3}{z - 2i} \right) - 4 = 0$.

e) $3z^3 - 24 = 0$.

f) $8z^4 + 8z^3 = z + 1$.

9.30. Giải các phương trình sau trên tập hợp các số phức

a) $z^2 - 2(2 + i)z + 7 + 4i = 0$.

b) $(z - 1)^2(z + 1)^2 + 9z^2 = 0$.

c) $(z - i)(z^2 + 1)(z^3 + i) = 0$.

d) $3(z^2 - z + 1)^2 + 7(z^2 - z) + 1 = 0$.

e) $(z^2 + z)^2 + 4(z^2 + z) - 12 = 0$.

f) $(z^2 + 3z + 6)^2 + 2z(z^2 + 3z + 6) - 3z^2 = 0$.

9.31. Giải các phương trình sau trên tập hợp các số phức

a) $z^3 - 2(1 + i)z^2 + 3iz + 1 - i = 0$.

b) $z^4 - 4z^3 + 7z^2 - 16z + 12 = 0$.

c) $z^4 - z^3 + \frac{z^2}{2} + z + 1 = 0$.

d) $z^4 + 6z^3 + 9z^2 + 10i = i^{3000}$.

§3. Dạng Lượng Giác Của Số Phức

A. Kiến Thức Cần Nhớ

1. Định nghĩa.

Trong đó:

2. Hai số phức bằng nhau.

3. Nhân chia hai số phức.

Chú ý:

4. Căn bậc hai dạng lượng giác.

5. Công thức Moa-vrơ.

Hệ quả:

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad (r > 0).$$

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \cos \varphi = \frac{a}{r}, \sin \varphi = \frac{b}{r} \quad (\varphi \text{ gọi là một argumen}).$$

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = r_2 \\ \varphi_1 = \varphi_2 + k2\pi \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = -r_2 \\ \varphi_1 = \varphi_2 + \pi + k2\pi \end{cases}.$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

$$z^2 = r^2 (\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi).$$

$$\bar{z} = r (\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)).$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r} (\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)).$$

$$w = \pm \sqrt{r} (\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2}).$$

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) \quad (n \geq 1).$$

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi.$$

B. Bài Tập

9.32. Tìm argumen của số phức $z = 2 + \sqrt{3} + i$.

9.33. Viết dưới dạng lượng giác và tìm căn bậc hai của số phức $z = -2 + 2i\sqrt{3}$.

9.34. (B-2012) Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 2\sqrt{3}iz - 4 = 0$. Viết dạng lượng giác của z_1 và z_2 .

9.35. Viết các số phức sau dưới dạng lượng giác

a) $z = 1 + i$.

b) $z = \frac{1 - i\sqrt{3}}{1 + i}$.

c) $z = (1 - i\sqrt{3})(1 + i)$.

d) $z = (1 - i)^4 (\sqrt{3} + i)^6$.

e) $z = \frac{(1 + i)^{10}}{(\sqrt{3} + i)^9}$.

f) $w = z^{2000} + \frac{1}{z^{2000}}$, biết $z + \frac{1}{z} = 1$.

9.36. Tính

a) $z = \left(\frac{i}{1+i}\right)^{2004}$.

b) $z = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{365}$.

c) $z = \left(\frac{5+3i\sqrt{3}}{1-2i\sqrt{3}}\right)^{21}$.

9.37. Viết các số phức sau dưới dạng lượng giác

a) $z = \cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4}$.

b) $z = -\sin \frac{\pi}{8} - i \cos \frac{\pi}{8}$.

c) $z = \cos \varphi - i \sin \varphi$.

d) $z = \sin \varphi + 2i \sin^2 \frac{\varphi}{2}$.

e) $z = \cos \varphi + i(1 + \sin \varphi)$.

f) $z = \left(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3}\right) i^5 (1 + i\sqrt{3})^7$.

9.38. Tìm số phức z sao cho $|z| = |z - 2|$ và một argumen của $z - 2$ bằng một argumen của $z + 2$ cộng với $\frac{\pi}{2}$.

9.39. Tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $\frac{z-2}{z+2}$ có một argumen bằng $\frac{\pi}{3}$.

9.40. Cho số phức z có môđun bằng 1. Biết một argumen của z là φ , tìm một argumen của mỗi số phức sau

a) $w = 2z^2$.

b) $w = -\frac{1}{2\bar{z}}$.

c) $w = -z^2 z$.

d) $w = z + \bar{z}$.

e) $w = z^2 + z$.

f) $w = z^2 + \bar{z}$.

9.41. Tính tổng $S_n = (1 + i)^n + (1 - i)^n$. Từ đó suy ra S_{2012} .