

## Chuyên đề 12

# Bất Đẳng Thức & Giá Trị Lớn Nhất - Giá Trị Nhỏ Nhất

### §1. Bất Đẳng Thức

#### A. Kiến Thức Cần Nhớ

##### 1. Tính chất cơ bản của bất đẳng thức.

- $a > b$  và  $b > c \Rightarrow a > c$ .
- $a > b \Rightarrow a + c > b + c$ .
- Nếu  $c > 0$  thì  $a > b \Rightarrow ac > bc$ .
- Nếu  $c < 0$  thì  $a > b \Rightarrow ac < bc$ .

##### 2. Bất đẳng thức Cauchy.

- Đối với hai số:  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}, \forall a, b \geq 0$ . Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi  $a = b$ .

Dạng khác:  $a + b \geq 2\sqrt{ab}; \quad a^2 + b^2 \geq 2ab; \quad \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}; \quad ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ .

- Đối với ba số:  $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}, \forall a, b, c \geq 0$ . Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c$ .

Dạng khác:  $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}; \quad a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc; \quad \sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3}; \quad abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$ .

#### B. Phương Pháp Cơ Bản

- PP1: Sử dụng phép biến đổi tương đương.
- PP2: Sử dụng bất đẳng thức Cauchy.
- PP3: Phương pháp hàm số.

**Lưu ý.** Kỹ thuật chọn điểm rơi: Dự đoán dấu bằng xảy ra rồi suy ngược kết quả.

#### C. Bài Tập

**12.1.** Cho  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Chứng minh bất đẳng thức  $2a^2 + b^2 + c^2 \geq 2a(b + c)$ .

**12.2.** Cho  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Chứng minh bất đẳng thức  $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq abc(a + b + c)$ .

**12.3.** Cho  $a, b > 0$ . Chứng minh bất đẳng thức  $a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$ .

**12.4.** Cho  $a, b \geq 0$ . Chứng minh bất đẳng thức  $\frac{a+b}{1+a+b} \leq \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}$ .

**12.5.** Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh bất đẳng thức  $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} > 1$ .

**12.6.** Cho  $a, b, c, d > 0$ . Chứng minh bất đẳng thức  $1 < \frac{a}{b+c+d} + \frac{b}{c+d+a} + \frac{c}{d+a+b} + \frac{d}{a+b+c} < 2$ .

**12.7.** Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh bất đẳng thức  $\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} \geq 6$ .

- 12.8.** Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh bất đẳng thức  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$ .
- 12.9.** Cho  $a, b, c, d > 0$ . Chứng minh bất đẳng thức  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \geq \frac{16}{a+b+c+d}$ .
- 12.10.** Cho  $a, b, c, d > 0$ . Chứng minh bất đẳng thức  $\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^4 \geq abcd$ .
- 12.11.** Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh bất đẳng thức  $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$ .
- 12.12.** Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh bất đẳng thức  $\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \leq \frac{a+b+c}{2}$ .
- 12.13.** Cho  $x, y, z > 0$ . Chứng minh bất đẳng thức  $\frac{2\sqrt{x}}{x^3+y^2} + \frac{2\sqrt{y}}{y^3+z^2} + \frac{2\sqrt{z}}{z^3+x^2} \leq \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}$ .
- 12.14.** Cho  $a, b, c > 0$  và  $a+b+c=1$ . Chứng minh bất đẳng thức  $(a+b)(b+c)(c+a)abc \leq \frac{8}{729}$ .
- 12.15.** Cho  $a, b, c > 0$  và  $abc=1$ . Chứng minh bất đẳng thức  $\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$ .
- 12.16.** Cho  $a, b, c > 0$  và  $abc=1$ . Chứng minh bất đẳng thức  $\frac{a}{\sqrt{8c^3+1}} + \frac{b}{\sqrt{8a^3+1}} + \frac{c}{\sqrt{8b^3+1}} \geq 1$ .
- 12.17.** (B-05) Chứng minh bất đẳng thức  $\left(\frac{12}{5}\right)^x + \left(\frac{15}{4}\right)^x + \left(\frac{20}{3}\right)^x \geq 3^x + 4^x + 5^x$ .
- 12.18.** Cho  $x, y, z > 0$  thỏa mãn  $x+y+z=0$ . Chứng minh bất đẳng thức  $\sqrt{3+4^x} + \sqrt{3+4^y} + \sqrt{3+4^z} \geq 6$ .
- 12.19.** Cho  $x, y, z$  thỏa mãn  $3^{-x} + 3^{-y} + 3^{-z} = 1$ . Chứng minh  $\frac{9^x}{3^x+3^{y+z}} + \frac{9^y}{3^y+3^{z+x}} + \frac{9^z}{3^z+3^{x+y}} \geq \frac{3^x+3^y+3^z}{4}$ .
- 12.20.** Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh bất đẳng thức  $\frac{a^3}{a+b} + \frac{b^3}{b+c} + \frac{c^3}{c+a} \geq \frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)$ .
- 12.21.** Cho  $x, y > 0$ . Chứng minh bất đẳng thức  $(1+x)\left(1+\frac{y}{x}\right)\left(1+\frac{9}{\sqrt{y}}\right)^2 \geq 256$ .
- 12.22.** Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh bất đẳng thức  $\frac{a}{b+c} + \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \frac{b}{c+a} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \frac{c}{a+b} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 3$ .
- 12.23.** Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh bất đẳng thức  $\sqrt{\frac{a+b}{c}} + \sqrt{\frac{b+c}{a}} + \sqrt{\frac{c+a}{b}} \geq 2\left(\sqrt{\frac{c}{a+b}} + \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}}\right)$ .
- 12.24.** Cho  $a, b, c > 0$  thỏa mãn  $a^2+b^2+c^2=1$ . Chứng minh bất đẳng thức  $\frac{a}{b^2+c^2} + \frac{b}{c^2+a^2} + \frac{c}{a^2+b^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$ .
- 12.25.** Chứng minh bất đẳng thức  $\frac{e^{-x^2}}{1+x} \leq 1-x + \frac{x^4}{2(1+x)}, \forall x \in [0; 1]$ .
- 12.26.** (CD-09) Cho  $a, b$  thỏa mãn  $0 < a < b < 1$ . Chứng minh bất đẳng thức  $a^2 \ln b - b^2 \ln a > \ln a - \ln b$ .
- 12.27.** (D-07) Cho  $a \geq b > 0$ . Chứng minh bất đẳng thức  $\left(2^a + \frac{1}{2^a}\right)^b \leq \left(2^b + \frac{1}{2^b}\right)^a$ .
- 12.28.** (A-03) Cho  $x, y, z > 0$  thỏa mãn  $x+y+z \leq 1$ . Chứng minh  $\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{z^2 + \frac{1}{z^2}} \geq \sqrt{82}$ .
- 12.29.** (A-05) Cho  $x, y, z > 0$  thỏa mãn  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 4$ . Chứng minh  $\frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{2y+z+x} + \frac{1}{2z+x+y} \leq 1$ .
- 12.30.** (D-05) Cho  $x, y, z > 0$  thỏa mãn  $xyz=1$ . Chứng minh  $\frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy} + \frac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz} + \frac{\sqrt{1+z^3+x^3}}{zx} \geq 3\sqrt{3}$ .
- 12.31.** Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh bất đẳng thức  $\frac{a}{2a+5(b+c)} + \frac{b}{2b+5(c+a)} + \frac{c}{2c+5(a+b)} \geq \frac{1}{4}$ .

**12.32.** Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh bất đẳng thức  $\frac{1}{a(a+b)} + \frac{1}{b(b+c)} + \frac{1}{c(c+a)} \geq \frac{27}{2(a+b+c)^2}$ .

**12.33.** (A-09) Cho  $x, y, z > 0$  và  $x(x+y+z) = 3yz$ . Chứng minh bất đẳng thức

$$(x+y)^3 + (x+z)^3 + 3(x+y)(x+z)(y+z) \leq 5(y+z)^3$$

**12.34.** Cho  $x, y, z > 0$ . Chứng minh bất đẳng thức  $\left(\frac{x}{y} + \frac{z}{\sqrt[3]{xyz}}\right)^2 + \left(\frac{y}{z} + \frac{x}{\sqrt[3]{xyz}}\right)^2 + \left(\frac{z}{x} + \frac{y}{\sqrt[3]{xyz}}\right)^2 \geq 12$ .

**12.35.** Cho  $a, b, c, d > 0$ . Chứng minh bất đẳng thức  $\sqrt{\frac{a}{b+c+d}} + \sqrt{\frac{b}{c+d+a}} + \sqrt{\frac{c}{d+a+b}} + \sqrt{\frac{d}{a+b+c}} > 2$ .

**12.36.** Cho  $x, y, z > 0$ . Chứng minh bất đẳng thức  $\left(1 + \frac{x}{y}\right)\left(1 + \frac{y}{z}\right)\left(1 + \frac{z}{x}\right) \geq 2\left(1 + \frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}}\right)$ .

## §2. Giá Trị Lớn Nhất - Giá Trị Nhỏ Nhất

### A. Phương Pháp Cơ Bản

PP1: Sử dụng bất đẳng thức.

- Nếu  $A(x) = f(x).g(x)$  mà  $f(x) + g(x) = \text{const}$  thì  $A(x)$  đạt giá trị lớn nhất khi  $f(x) = g(x)$ .
- Nếu  $A(x) = f(x) + g(x)$  mà  $f(x).g(x) = \text{const}$  thì  $A(x)$  đạt giá trị nhỏ nhất khi  $f(x) = g(x)$ .

PP2: Sử dụng phương pháp hàm số.

### B. Bài Tập

**12.37.** Cho  $a, b > 0$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $S = \frac{a+b}{\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{ab}}{a+b}$ .

**12.38.** Cho  $a, b, c > 0$  thỏa mãn  $a+b+c = 1$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = \frac{a^3}{(1-a)^2} + \frac{b^3}{(1-b)^2} + \frac{c^3}{(1-c)^2}$ .

**12.39.** Cho  $a, b, c > 0$  và  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $T = a + b + c + \frac{1}{abc}$ .

**12.40.** Cho  $a, b, c > 0$  thỏa mãn  $a + b + c \leq \frac{3}{2}$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của  $S = \sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{c^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{a^2}}$ .

**12.41.** (B-07) Cho  $x, y, z > 0$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = x\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{yz}\right) + y\left(\frac{y}{2} + \frac{1}{zx}\right) + z\left(\frac{z}{2} + \frac{1}{xy}\right)$ .

**12.42.** (D-08) Cho  $x, y > 0$ . Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = \frac{(x-y)(1-xy)}{(1+x)^2(1+y)^2}$ .

**12.43.** (B-08) Cho  $x, y$  thỏa mãn  $x^2 + y^2 = 1$ . Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của  $P = \frac{2(x^2 + 6xy)}{1 + 2xy + 2y^2}$ .

**12.44.** (A-06) Cho  $x, y \neq 0$  thỏa mãn  $(x+y)xy = x^2 + y^2 - xy$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $A = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3}$ .

**12.45.** (B-06) Cho hai số  $x, y$  thay đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của  $A = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{(x+1)^2 + y^2} + |y+2|$ .

**12.46.** (A-07) Cho  $x, y, z > 0$  thỏa mãn  $xyz = 1$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^2(y+z)}{y\sqrt{y} + 2z\sqrt{z}} + \frac{y^2(z+x)}{z\sqrt{z} + 2x\sqrt{x}} + \frac{z^2(x+y)}{x\sqrt{x} + 2y\sqrt{y}}$$

**12.47.** (B-03) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = x + \sqrt{4-x^2}$ .

**12.48.** (D-03) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$  trên đoạn  $[-1; 2]$ .

**12.49.** (D-2010) Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \sqrt{-x^2 + 4x + 21} + \sqrt{-x^2 + 3x + 10}$ .

**12.50.** (B-2010) Cho  $a, b, c > 0$  thỏa mãn  $a + b + c = 1$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M = 3(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 3(ab + bc + ca) + 2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

**12.51.** (CD-2010) Cho  $x, y > 0$  thay đổi thỏa mãn  $3x + y \leq 1$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $A = \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{xy}}$ .

**12.52.** (D-09) Cho  $x, y \geq 0$  thỏa mãn  $x + y = 1$ . Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S = (4x^2 + 3y)(4y^2 + 3x) + 25xy$$

**12.53.** (B-09) Cho  $x, y$  thỏa  $(x + y)^3 + 4xy \geq 2$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của  $A = 3(x^4 + y^4 + x^2 + y^2) - 2(x^2 + y^2) + 1$ .

**12.54.** (CD-08) Cho  $x, y$  thỏa mãn  $x^2 + y^2 = 2$ . Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của  $P = 2(x^3 + y^3) - 3xy$ .

**12.55.** Cho  $x, y, z > 0$  thỏa mãn  $x + y + z = 1$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của  $P = \frac{x^2(y+z)}{yz} + \frac{y^2(z+x)}{zx} + \frac{z^2(x+y)}{xy}$ .

**12.56.** Cho  $x, y, z > 1$  thỏa mãn  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 2$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $A = (x-1)(y-1)(z-1)$ .

**12.57.** Cho  $x, y, z$  là các số thực thỏa mãn các điều kiện  $x + y + z > 0, x + 1 > 0, y + 1 > 0, z + 1 > 0$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $P = \frac{x}{x+1} + \frac{y}{y+1} + \frac{z}{z+1}$ .

**12.58.** (B-2011) Cho  $a, b$  là các số thực dương thỏa mãn  $2(a^2 + b^2) + ab = (a+b)(ab+2)$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = 4\left(\frac{a^3}{b^3} + \frac{b^3}{a^3}\right) - 9\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right)$ .

**12.59.** (A-2011) Cho  $x, y, z \in [1; 4]$  và  $x \geq y, x \geq z$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = \frac{x}{2x+3y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x}$ .

**12.60.** (D-2012) Cho các số thực  $x, y$  thỏa mãn  $(x-4)^2 + (y-4)^2 + 2xy \leq 32$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = x^3 + y^3 + 3(xy-1)(x+y-2)$$

**12.61.** (B-2012) Cho các số thực  $x, y, z$  thỏa mãn các điều kiện  $x + y + z = 0$  và  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $P = x^5 + y^5 + z^5$ .

**12.62.** (A-2012) Cho các số thực  $x, y, z$  thỏa mãn điều kiện  $x + y + z = 0$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = 3^{|x-y|} + 3^{|y-z|} + 3^{|z-x|} - \sqrt{6x^2 + 6y^2 + 6z^2}$$