

Chuyên đề 5

Hàm Số Lũy Thừa. Hàm Số Mũ & Hàm Số Lôgarit

§1. Lũy Thừa

A. Kiến Thức Cần Nhớ

1. Các định nghĩa.

- Lũy thừa với số mũ nguyên dương: $a^n = \underbrace{a.a...a}_{n \text{ thừa số}}$ ($a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$).
- Lũy thừa với số mũ 0: $a^0 = 1$ ($a \neq 0$).
- Lũy thừa với số mũ nguyên âm: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ ($a \neq 0, n \in \mathbb{N}^*$).
- Căn bậc n : b là căn bậc n của $a \Leftrightarrow b^n = a$.
Lưu ý: Khi n lẻ thì a có đúng một căn bậc n là $\sqrt[n]{a}$.
Khi n chẵn thì $a < 0$ không có căn bậc n .
 $a = 0$ có một căn bậc n là 0.
 $a > 0$ có hai căn bậc n là $\pm \sqrt[n]{a}$.
- Lũy thừa với số mũ hữu tỷ: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ ($a > 0; m, n \in \mathbb{Z}; n \geq 2$).
- Lũy thừa với số mũ thực: $a^\alpha = \lim_{n \rightarrow +\infty} a^{r_n}$ ($a > 0; (r_n) \subset \mathbb{Q}; \lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = \alpha$).

2. Các tính chất của lũy thừa với số mũ thực.

Cho hai số $a, b > 0$ và α, β là những số thực tùy ý. Ta có

- $a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta}$.
- $(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}$.
- $(ab)^\alpha = a^\alpha \cdot b^\alpha$.
- Nếu $a > 1$ thì $a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha > \beta$.
- Nếu $\alpha > 0$ thì $0 < a < b \Leftrightarrow a^\alpha < b^\alpha$.
- $\frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}$.
- $\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = \frac{a^\alpha}{b^\alpha}$.
- Nếu $0 < a < 1$ thì $a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta$.
- Nếu $\alpha < 0$ thì $0 < a < b \Leftrightarrow a^\alpha > b^\alpha$.

B. Bài Tập

5.1. Tính giá trị các lũy thừa sau

- a) $(0,04)^{-1,5} - (0,125)^{-\frac{2}{3}}$.
- b) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75} + \left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{4}{3}}$.
- c) $27^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75} - 25^{0,5}$.
- d) $(-0,5)^{-4} - 625^{0,25} - \left(2\frac{1}{4}\right)^{-1\frac{1}{2}}$.
- e) $81^{-0,75} + \left(\frac{1}{125}\right)^{-\frac{1}{3}} - \left(\frac{1}{32}\right)^{-\frac{3}{5}}$.
- f) $\frac{10^{2+\sqrt{7}}}{2^{2+\sqrt{7}} \cdot 5^{1+\sqrt{7}}}$.
- g) $(4^{2\sqrt{3}} - 4^{\sqrt{3}-1}) \cdot 2^{-2\sqrt{3}}$.
- h) $\left(\sqrt[6]{25+4\sqrt{6}} - \sqrt[3]{1+2\sqrt{6}}\right) \sqrt[3]{1-2\sqrt{6}}$.

5.2. Rút gọn các biểu thức sau

- a) $\frac{x^{\frac{5}{4}}y + xy^{\frac{5}{4}}}{\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y}}$.
- b) $\frac{a^{\frac{1}{3}}\sqrt{b} + b^{\frac{1}{3}}\sqrt{a}}{\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b}}$.

$$c) \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}} - \frac{\sqrt{a} - \sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}}.$$

$$e) \frac{(a^{2\sqrt{3}} - 1)(a^{2\sqrt{3}} + a^{\sqrt{3}} + a^{3\sqrt{3}})}{a^{4\sqrt{3}} - a\sqrt{3}}.$$

$$g) \frac{a-1}{a^{\frac{3}{4}} + a^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\sqrt{a} + \sqrt[4]{a}}{\sqrt{a} + 1} \cdot a^{\frac{1}{4}} + 1.$$

$$d) \frac{a-b}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}} - \frac{a+b}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}.$$

$$f) \left(\frac{a+b}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}} - \sqrt[3]{ab} \right) : \left(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} \right)^2.$$

$$h) \left(a + \frac{b^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} \right) \left(\frac{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} + \frac{b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}} \right)^{-\frac{2}{3}}.$$

5.3. Hãy so sánh các cặp số sau

a) $\sqrt[3]{10}$ và $\sqrt[5]{20}$.

c) 3^{600} và 5^{400} .

b) $\sqrt[4]{13}$ và $\sqrt[5]{23}$.

d) $\sqrt[3]{7} + \sqrt{15}$ và $\sqrt{10} + \sqrt[3]{28}$.

5.4. Tính $A = \sqrt{a+b+c+2\sqrt{ab+bc}} + \sqrt{a+b+c-2\sqrt{ab+bc}}$, ($a, b, c > 0, a+c > b$)

§2. Lôgarit

A. Kiến Thức Cần Nhớ

1. Định nghĩa. $\alpha = \log_a b \Leftrightarrow a^\alpha = b$ ($a, b > 0; a \neq 1$).

2. Tính chất.

• $\log_a 1 = 0$.

• $\log_a a = 1$.

• $a^{\log_a b} = b$.

• $\log_a (a^\alpha) = \alpha$.

• Khi $a > 1$ thì $\log_a b > \log_a c \Leftrightarrow b > c$.

• Khi $0 < a < 1$ thì $\log_a b > \log_a c \Leftrightarrow b < c$.

3. Quy tắc tính.

• $\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$.

• $\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b$.

• $\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b$.

• $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$.

• $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$.

• $\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$.

• $\log_a b = \log_a c \cdot \log_c b$.

• $\log_{a^\alpha} b = \frac{1}{\alpha} \log_a b$.

4. Lôgarit thập phân và lôgarit tự nhiên.

• Lôgarit thập phân: Là lôgarit có cơ số $a = 10$. Ký hiệu: $\log x$ hoặc $\lg x$.

• Lôgarit tự nhiên: Là lôgarit có cơ số $a = e$. Ký hiệu: $\ln x$.

B. Bài Tập

5.5. Tính

a) $\log_3 \sqrt[4]{3}$.

d) $\log 45 - 2 \log 3$.

g) $5 \ln e^{-1} + 4 \ln (e^2 \sqrt{e})$.

b) $2 \log_{27} \log 1000$.

e) $3 \log_2 \log_4 16 + \log_{\frac{1}{2}} 2$.

h) $\log 72 - 2 \log \frac{27}{256} + \log \sqrt{108}$.

c) $\log_{25} 8 \cdot \log_8 5$.

f) $\log_2 48 - \frac{1}{3} \log_2 27$.

i) $\log 0,375 - 2 \log \sqrt{0,5625}$.

5.6. Đơn giản biểu thức

a) $\frac{\log_2 4 + \log_2 \sqrt{10}}{\log_2 20 + \log_2 8}$.

d) $\log_a \left(\frac{a^2 \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[4]{a}} \right)$.

g) $16^{1+\log_4 5} + 4^{\frac{1}{2}\log_2 3 + 3\log_5 5}$.

b) $\frac{\log_2 24 - \frac{1}{2} \log_2 72}{\log_3 18 - \frac{1}{3} \log_3 72}$.

e) $\log_5 \log_5 \underbrace{\sqrt[5]{\sqrt[5]{\dots \sqrt[5]{5}}}}_{n \text{ dấu căn}}$.

h) $\left(81^{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\log_9 4} + 25^{\log_{125} 8} \right) 49^{\log_7 2}$.

c) $\left(\log_7 2 + \frac{1}{\log_5 7} \right) \log 7$.

f) $9^{2\log_3 4 + 4\log_{81} 2}$.

i) $72 \left(49^{\frac{1}{2}\log_7 9 - \log_7 6} + 5^{-\log_{\sqrt{5}} 4} \right)$.

5.7. So sánh các cặp số sau:

a) $\log_3 \frac{6}{5}$ và $\log_3 \frac{5}{6}$.

d) $\log_5 3$ và $\log_{0,3} 2$.

b) $\log_{\frac{1}{2}} e$ và $\log_{\frac{1}{2}} \pi$.

e) $\log_3 5$ và $\log_7 4$.

c) $\log_2 10$ và $\log_5 30$.

f) $\log_3 10$ và $\log_8 57$.

5.8. Tính $\log_4 1250$ theo a , biết $a = \log_2 5$.

5.9. Tính $\log_{54} 168$ theo a, b , biết $a = \log_7 12, b = \log_{12} 24$.

5.10. Tính $\log_{140} 63$ theo a, b, c , biết $a = \log_2 3, b = \log_3 5, c = \log_7 2$.

5.11. Tính $\log_{\sqrt[3]{25}} 135$ theo a, b , biết $a = \log_4 75, b = \log_8 45$.

5.12. Chứng minh rằng $ab + 5(a-b) = 1$, biết $a = \log_{12} 18, b = \log_{24} 54$.

5.13. Cho $y = 10^{\frac{1}{1-\log x}}, z = 10^{\frac{1}{1-\log y}}$. Chứng minh rằng $x = 10^{\frac{1}{1-\log z}}$.

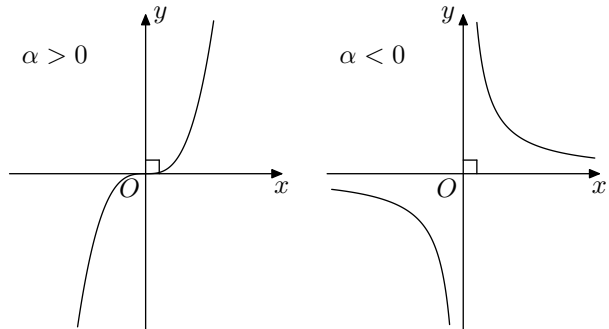
5.14. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng $(abc)^{\frac{a+b+c}{3}} \leq a^a b^b c^c$.

§3. Hàm Số Lũy Thừa. Hàm Số Mũ & Hàm Số Lôgarit

A. Kiến Thức Cần Nhớ

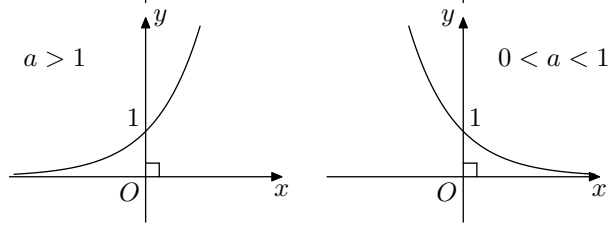
1. Hàm số lũy thừa.

- Dạng: $y = x^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$).
- Tập xác định:
 - Nếu α nguyên dương thì $D = \mathbb{R}$.
 - Nếu $\alpha = 0$ hoặc nguyên âm thì $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
 - Nếu α không nguyên thì $D = (0; +\infty)$.
- Đạo hàm: $y' = \alpha x^{\alpha-1}$.
- Tính chất: (Xét trên $(0; +\infty)$)
 - $\alpha > 0$: Hàm số luôn đồng biến.
 - $\alpha < 0$: Hàm số luôn nghịch biến.



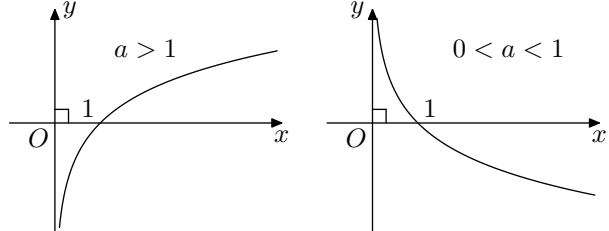
2. Hàm số mũ.

- Dạng: $y = a^x$ ($0 < a \neq 1$).
- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.
- Đạo hàm: $y' = a^x \ln a$.
- Tính chất:
 - $a > 1$: Hàm số luôn đồng biến.
 - $a < 1$: Hàm số luôn nghịch biến.



3. Hàm số lôgarit.

- Dạng: $y = \log_a x$ ($0 < a \neq 1$).
- Tập xác định: $D = (0; +\infty)$.
- Đạo hàm: $y' = \frac{1}{x \ln a}$.
- Tính chất:
 - $a > 1$: Hàm số luôn đồng biến.
 - $a < 1$: Hàm số luôn nghịch biến.



4. Đạo hàm của hàm số lũy thừa, mũ và lôgarit.

- $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$.
- $(a^x)' = a^x \ln a$.
- $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$.
- $(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} \cdot u'$.
- $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$.
- $(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'$.
- $(e^x)' = e^x$.
- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.
- $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$.

B. Bài Tập

5.15. Tìm tập xác định của các hàm số sau

- a) $y = (x^2 - 2)^{-2}$. b) $y = (2 - x^2)^{\frac{2}{7}}$. c) $y = (x^2 - x - 2)^{\sqrt{2}}$.
 d) $y = \log_2 (5 - 2x)$. e) $y = \log_3 (x^2 - 2x)$. f) $y = \log_{0,4} \frac{3x+2}{1-x}$.

5.16. Tính đạo hàm của các hàm số sau

- a) $y = (3x^2 - 4x + 1)^{\sqrt{2}}$. b) $y = 3x^2 - \ln x + 4 \sin x$. c) $y = 2xe^x + 3 \sin 2x$.
 d) $y = \log (x^2 + x + 1)$. e) $y = \ln \frac{e^x}{1+e^x}$. f) $y = (\frac{x}{2} - \frac{1}{4}) e^{2x}$.
 g) $y = (e^{4x} + 1 - \ln x)^\pi$. h) $y = \frac{2 \ln x + 1}{4 \ln x - 5}$. i) $y = \ln (2e^x + \ln (x^2 + 3x + 5))$.

5.17. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau

- a) $y = x - e^{2x}$ trên $[0; 1]$. b) $y = e^{2x} - 2e^x$ trên $[-1; 2]$. c) $y = (x + 1)e^x$ trên $[-1; 2]$.
 d) $y = \ln (3 + 2x - x^2)$ trên $[0; 2]$. e) $y = \ln (4 - 3x^2 - x^4)$. f) $y = x^2 - \ln (1 - 2x)$ trên $[-2; 0]$.
 g) $y = x^2 e^{-x}$ trên $[0; \ln 8]$. h) $y = x^2 \ln x$ trên $[1; e]$. i) $y = 5^x + 5^{1-x}$ trên $[0; \log_5 8]$.

§4. Phương Trình & Bất Phương Trình Mũ

A. Kiến Thức Cần Nhớ

1. Phương trình mũ cơ bản.

- Dạng: $a^x = b$ ($0 < a \neq 1$).
- Cách giải:
 - $b \leq 0$: Phương trình vô nghiệm.
 - $b > 0$: $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$.

2. Bất phương trình mũ cơ bản.

- Dạng: $a^x > b$ ($0 < a \neq 1$).
- Cách giải:
 - $b \leq 0$: $S = \mathbb{R}$.
 - $b > 0$, $a > 1$: $a^x > b \Leftrightarrow x > \log_a b$.
 - $0 < a < 1$: $a^x > b \Leftrightarrow x < \log_a b$.

Lưu ý. Các dạng $a^x \geq b$; $a^x < b$; $a^x \leq b$ dựa vào dấu để có cách giải tương ứng.

B. Phương Phương Giải Cơ Bản

- Đưa về cùng cơ số.
- Lấy logarit hai vế.
- Đặt ẩn phụ.
- Sử dụng tính đơn điệu của hàm số mũ.

C. Bài Tập

5.18. Giải các phương trình sau

- $2^{2x-1} = 3.$
- $2^{x^2-x+8} = 4^{1-3x}.$
- $3^{2x-1} + 3^{2x} = 108.$
- $(3 + 2\sqrt{2})^{x+1} = (3 - 2\sqrt{2})^{2x+8}.$
- $2^{x^2-x} = 4.$
- $3^x \cdot 2^{x+1} = 72.$
- $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 3^x + 3^{x-1} + 3^{x-2}.$
- $(5 - 2\sqrt{6})^{x^2-3x+2} - (5 + 2\sqrt{6})^{\frac{1-x^2}{2}} = 0.$

5.19. Giải các bất phương trình sau

- $2^{-x^2+3x} < 4.$
- $2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} - 5^{x+2}.$
- $x^{2x-1} < x^{x^2}.$
- $32^{\frac{x+5}{x-1}} > 0,25.128^{\frac{x+17}{x-3}}.$
- $3^{x+2} + 3^{x-1} \leq 28.$
- $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} < 3^x + 3^{x-1} + 3^{x-2}.$
- $(\sqrt{5} + 2)^{x-1} \geq (\sqrt{5} - 2)^{\frac{x-1}{x+1}}.$
- $2^{x^2} \cdot 7^{x^2+1} < 7.14^{2x^2-4x+3}.$

5.20. Giải các phương trình sau

- $64^x - 8^x - 56 = 0.$
- $2^{2+x} - 2^{2-x} = 15.$
- (D-03) $2^{x^2-x} - 2^{2+x-x^2} = 3.$
- (TN-08) $3^{2x+1} - 9.3^x + 6 = 0.$
- (TN-07) $7^x + 2.7^{1-x} - 9 = 0.$
- $3^{2x+1} = 3^{x+2} + \sqrt{1 - 6.3^x + 3^{2(x+1)}}.$

5.21. Giải các bất phương trình sau

- $4^x - 3.2^x + 2 > 0.$
- $5^x + 5^{1-x} > 6.$
- $32.4^x + 1 < 18.2^x.$
- $(2 + \sqrt{3})^x + (2 - \sqrt{3})^x > 4.$

5.22. Giải các phương trình sau

- $(5 - 2\sqrt{6})^x + (5 + 2\sqrt{6})^x = 10.$
- $(7 + 3\sqrt{5})^x + 5.(7 - 3\sqrt{5})^x = 6.2^x.$
- $(7 + 4\sqrt{3})^x - 3(2 - \sqrt{3})^x + 2 = 0.$
- (B-07) $(\sqrt{2} - 1)^x + (\sqrt{2} + 1)^x - 2\sqrt{2} = 0.$
- $(\sqrt{5} + 2\sqrt{6})^x + (\sqrt{5} - 2\sqrt{6})^x = 10.$
- $(26 + 15\sqrt{3})^x + 2(7 + 4\sqrt{3})^x - 2(2 - \sqrt{3})^x = 1.$

5.23. Giải các phương trình sau

- $3.4^x - 2.6^x = 9^x.$
- $4^{x+\sqrt{x^2-2}} - 5.2^{x-1+\sqrt{x^2-2}} - 6 = 0.$
- $27^x + 12^x = 2.8^x.$
- $2.16^{x+1} + 3.81^{x+1} = 5.36^{x+1}.$
- $5.2^x = 7\sqrt{10^x} - 2.5^x.$
- (A-06) $3.8^x + 4.12^x - 18^x - 2.27^x = 0.$

5.24. Giải các bất phương trình sau

- $27^x + 12^x < 2.8^x.$
- $9^{\frac{1}{x}} - 13.6^{\frac{1}{x}-1} + 4^{\frac{1}{x}} < 0.$
- $\frac{4-5^x}{5^{2x}-5^{x+1}+6} \leq 1.$
- $25^{2x-x^2+1} + 9^{2x-x^2+1} \geq 34.15^{2x-x^2}.$
- $\sqrt{9^x - 3^{x+1}} + 2 > 3^x - 9.$
- $\frac{4-7.5^x}{5^{2x+1}-12.5^x+4} \leq \frac{2}{3}.$

5.25. Giải các phương trình sau

- $12 + 6^x = 4.3^x + 3.2^x.$
- $2^{x^2-5x+6} + 2^{1-x^2} = 2.2^{6-5x} + 1.$
- $4^{x^2+x} + 2^{1-x^2} = 2^{(x+1)^2} + 1.$
- $5^{2x+1} + 7^{x+1} - 175^x - 35 = 0.$
- (D-06) $2^{x^2+x} - 4.2^{x^2-x} - 2^{2x} + 4 = 0.$
- $x^2.2^{x-1} + 2^{|x-3|+6} = x^2.2^{|x-3|+4} + 2^{x+1}.$

5.26. Giải các bất phương trình sau

- $12 + 6^x > 4.3^x + 3.2^x.$
- $5^{2x+1} + 6^{x+1} > 30 + 5^x.30^x.$
- $4^{x^2+x} + 2^{1-x^2} \geq 2^{(x+1)^2} + 1.$
- $5^{2x-10-3\sqrt{x-2}} - 4.5^{x-5} < 5^{1+3\sqrt{x-2}}.$

5.27. Giải các phương trình sau

- $3^x = 11 - x.$
- $3^x + 4^x = 5^x.$
- $5^{x^2-2x+2} + 4^{x^2-2x+3} + 3^{x^2-2x+4} = 48.$
- $2^x = x + 1.$
- $1 + 8^{\frac{x}{2}} = 3^x.$
- $2\sqrt{3-x} = -x^2 + 8x - 14.$

5.28. Giải các phương trình sau

- $4^x + (2x - 17).2^x + x^2 - 17x + 66 = 0.$
- $9^x + 2(x - 2).3^x + 2x - 5 = 0.$
- $9^{x^2} + (x^2 - 3).3^{x^2} - 2x^2 + 2 = 0.$
- $3^{2x} - (2^x + 9).3^x + 9.2^x = 0.$

5.29. Giải các phương trình sau

- a) $2^{2x} - \sqrt{2^x + 6} = 6.$ b) $3^{2x} + \sqrt{3^x + 7} = 7.$
c) $27^x + 2 = 3\sqrt[3]{3^{x+1}} - 2.$ d) $7^{x-1} = 6\log_7(6x - 5) + 1.$

5.30. Giải các phương trình sau

- a) $2^{x^2} = 3^x.$ b) $2^{x^2-4} = 3^{x-2}.$
c) $5^x \cdot 8^{\frac{x-1}{x}} = 500.$ d) $8^{\frac{x}{x+2}} = 4 \cdot 3^{4-x}.$

5.31. Giải các phương trình sau

- a) $3^{x^2} = \cos 2x.$ b) $2^{|x|} = \sin x.$
c) $2^{x-1} + 2^{x^2} - x \cdot 2^{x-1} - 2^{x^2-x} = (x-1)^2.$ d) $2^{2x+1} + 2^{3-2x} = \frac{8}{\log_3(4x^2-4x+4)}.$

§5. Phương Trình & Bất Phương Trình Lôgarit

A. Kiến Thức Cần Nhớ

1. Phương trình lôgarit cơ bản.

- Dạng: $\log_a x = b \quad (0 < a \neq 1).$
- Cách giải: $\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b.$

2. Bất phương trình lôgarit cơ bản.

- Dạng: $\log_a x > b \quad (0 < a \neq 1).$
- Cách giải: $a > 1: \log_a x > b \Leftrightarrow x > a^b.$
 $0 < a < 1: \log_a x > b \Leftrightarrow 0 < x < a^b.$

Lưu ý. Các dạng $\log_a x \geq b; \log_a x < b; \log_a x \leq b$ dựa vào dấu để có cách giải tương ứng.

B. Phương Phương Giải Cơ Bản

- Đưa về cùng cơ số.
- Sử dụng tính đơn điệu của hàm số lôgarit.
- Đặt ẩn phụ.

C. Bài Tập

5.32. Giải các phương trình sau

- a) $\log_3(x-2) = 2.$ b) $\log_3(5x+3) = \log_3(7x+5).$
c) $\log_2(x^2-1) = \log_{\frac{1}{2}}(x-1).$ d) $\log_2 x + \log_2(x-2) = 3.$
e) $\log_2(x^2+8) = \log_2 x + \log_2 6.$ f) $\log_3(x+2) + \log_3(x-2) = \log_3 5.$
g) $\log_3 x + \log_4 x = \log_5 x.$ h) $\log_2 x + \log_3 x + \log_4 x = \log_{20} x.$

5.33. Giải các bất phương trình sau

- a) $\log_8(4-2x) \geq 2.$ b) $\log_3(x^2+2) + \log_{\frac{1}{3}}(x+2) < 0.$
c) $\log_{\frac{1}{5}}(3x-5) > \log_{\frac{1}{5}}(x+1).$ d) $\log_2(x+3) < \log_4(2x+9).$

5.34. Giải các phương trình sau

- a) $\log_2(x^2+3x+2) + \log_2(x^2+7x+12) = \log_2 24.$ b) $\log(x^3+8) = \log(x+58) + \frac{1}{2} \log(x^2+4x+4).$
c) $\frac{1}{2} \log \sqrt{2}(x+3) + \frac{1}{4} \log_4(x-1)^8 = \log_2 4x.$ d) $\frac{3}{2} \log_{\frac{1}{4}}(x+2)^2 - 3 = \log_{\frac{1}{4}}(4-x)^3 + \log_{\frac{1}{4}}(x+6)^3.$
e) $\log_{\sqrt{2}} \sqrt{x+1} - \log_{\frac{1}{2}}(3-x) - \log_8(x-1)^3 = 0.$ f) $\log_{\frac{1}{2}}(x-1) + \log_{\frac{1}{2}}(x+1) - \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(7-x) = 1.$
g) $\log_2(8-x^2) + \log_{\frac{1}{2}}(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}) - 2 = 0.$ h) $\log_2(4^x + 15 \cdot 2^x + 27) + 2 \log_2 \frac{1}{4 \cdot 2^x - 3} = 0.$

5.35. Giải các phương trình sau

- a) $\log_2(x - \sqrt{x^2-1}) + 3 \log_2(x + \sqrt{x^2-1}) = 2.$ b) (A-08) $\log_{2x-1}(2x^2+x-1) + \log_{x+1}(2x-1)^2 = 4.$
c) $\log_2(x - \sqrt{x^2-1}) \cdot \log_3(x + \sqrt{x^2-1}) = \log_6(x - \sqrt{x^2-1}).$

5.36. Giải các bất phương trình sau

- a) (A-07) $2 \log_3(4x-3) + \log_{\frac{1}{3}}(2x+3) \leq 2.$ b) $\log_{\frac{1}{2}} x + 2 \log_{\frac{1}{4}}(x-1) + \log_2 6 \leq 0.$
c) (D-08) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{x^2-3x+2}{x} \geq 0.$ d) $\log_{0.5} \frac{x+1}{2x-1} > 1.$
e) $\frac{\log_2(3 \cdot 2^{x-1} - 1)}{x} \geq 1.$ f) $\frac{\log_2(1 - 3 \log_{27} x) - 1}{\log_2 x} < 0.$
g) (B-02) $\log_x[\log_3(9^x - 72)] \leq 1.$ h) $\frac{x-1}{\log_3(9-3^x) - 3} \leq 1.$

5.37. Giải các bất phương trình sau

- a) (B-08) $\log_{0.7}(\log_6 \frac{x^2+x}{x+4}) < 0.$ b) $\log_{\frac{1}{2}} \log_3 \frac{x+1}{x-1} \geq 0.$
c) $\log_3 \log_4 \frac{3x-1}{x+1} \leq \log_{\frac{1}{3}} \log_{\frac{1}{4}} \frac{x+1}{3x-1}.$ d) $\log_{\frac{1}{3}} \log_5(\sqrt{x^2+1} + x) > \log_3 \log_{\frac{1}{5}}(\sqrt{x^2+1} - x).$

5.38. Giải các phương trình sau

- a) $\log_2^2 x - 3\log_2 x + 2 = 0$.
 b) $\log_{\frac{1}{2}} x + \log_2^2 x = 2$.
 c) $2\log^2 x - \log^3 x = 2 - \log x$.
 d) $\log^2 x^3 - 20\log \sqrt{x} + 1 = 0$.
 e) $\sqrt{\log_3 x} + \sqrt{4 - \log_3 x} = 2$.
 f) $\log_2 (2^x + 1) \cdot \log_2 (2^{x+1} + 2) = 2$.
 g) $\log_3 (3^x + 1) \cdot \log_3 (3^{x+2} + 9) = 3$.
 h) $\log_2 (5^x - 1) \cdot \log_4 (2 \cdot 5^x - 2) = 1$.

5.39. Giải các bất phương trình sau

- a) $\log_2^2 (2x + 1) - 3\log (2x + 1) + 2 > 0$.
 b) $\log_9^2 (x - 1) - 3\log_3 (x - 1) + 1 \leq 0$.
 c) $\log_{x-1} 4 \geq 1 + \log_2 (x - 1)$.
 d) $\log_2 (2^x - 1) \log_{\frac{1}{2}} (2^{x+1} - 2) > -2$.
 e) $\log_4 (19 - 2^x) \log_2 \frac{19-2^x}{8} \leq -1$.
 f) $\log_5 (4^x + 144) - 4\log_5 2 < 1 + \log_5 (2^{x-2} + 1)$.

5.40. Giải các bất phương trình sau

- a) $\sqrt{\log_2 x} + \sqrt{\log_2 2} \geq \frac{4}{\sqrt{3}}$.
 b) $\sqrt[3]{\log_{\frac{1}{2}} x + \log_4 x^2} - 2 > 0$.
 c) $\sqrt{\log_2^2 x + \log_{\frac{1}{2}} x^2} - 3 > \sqrt{5} (\log_4 x^2 - 2)$.
 d) $\sqrt{\log^2 \sqrt{2} x + \log_2 x^4} - 8 > \log_{\sqrt{2}} \frac{x^2}{4}$.

5.41. Giải các bất phương trình sau

- a) $\log_{2x} 64 + \log_{x^2} 16 \geq 3$.
 b) $\log_x (125x) \cdot \log_{25} x > \frac{3}{2} + \log_5^2 x$.
 c) $(\text{CD-2012}) \log_2 (2x) \cdot \log_3 (3x) > 1$.
 d) $\log_{\frac{1}{3}} x + \sqrt{1 - 4\log_{\frac{1}{2}}^2 x} < 1$.

5.42. Giải các phương trình sau

- a) $x + 2 \cdot 3^{\log_2 x} = 3$.
 b) $x^2 + 3^{\log_2 x} = x^{\log_2 5}$.
 c) $x^{\log_2 9} = x^2 \cdot 3^{\log_2 x} - x^{\log_2 3}$.
 d) $\log_2 (x + 3^{\log_6 x}) = \log_6 x$.

5.43. Giải các phương trình sau

- a) $\log_2^2 x + (x - 4) \log_2 x - x + 3 = 0$.
 b) $\log_2^2 (x + 1) + (x - 5) \log_2 (x + 1) - 2x + 6 = 0$.
 c) $\log^2 (x^2 + 1) + (x^2 - 5) \log (x^2 + 1) - 5x^2 = 0$.
 d) $(x + 2) \log_3^2 (x + 1) + 4(x + 1) \log_3 (x + 1) - 16 = 0$.

5.44. Giải các phương trình sau

- a) $\log_2 (1 + \sqrt{x}) = \log_3 x$.
 b) $\log_7 x = \log_3 (2 + \sqrt{x})$.
 c) $3\log_3 (1 + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}) = 2\log_2 \sqrt{x}$.
 d) $\log_{\frac{1}{2}} (3 + |x|) = 2^{|x|} - 4$.
 e) $\log_2 (x^2 - 4) + x = \log_2 [8(x + 2)]$.
 f) $4(x - 2) [\log_2 (x - 3) + \log_3 (x - 2)] = 15(x + 1)$.

5.45. Giải các bất phương trình sau

- a) $3^x > 11 - x$.
 b) $1 + \sqrt{15^x} \leq 4^x$.
 c) $1 + 2^{x+1} + 3^{x+1} < 6^x$.
 d) $4^{\log x + 1} - 6^{\log x} > 2 \cdot 3^{\log x^2 + 2}$.
 e) $\log_7 x < \log_3 (\sqrt{x} + 2)$.
 f) $\log_2 (2^x + 1) + \log_3 (4^x + 2) \leq 2$.

§6. Hệ Phương Trình Mũ & Lôgarit

5.46. Giải các hệ phương trình sau

- a) $\begin{cases} 3^{y+1} - 2^x = 5 \\ 4^x - 6 \cdot 3^y + 2 = 0 \end{cases}$.
 b) (D-02) $\begin{cases} 2^{3x} = 5y^2 - 4y \\ \frac{4^x + 2^{x+1}}{2^{x+2}} = y \end{cases}$.
 c) (A-09) $\begin{cases} \log_2 (x^2 + y^2) = 1 + \log_2 (xy) \\ 3^{x^2 - xy + y^2} = 81 \end{cases}$.
 d) (B-2010) $\begin{cases} \log_2 (3y - 1) = x \\ 4^x + 2^x = 3y^2 \end{cases}$.

5.47. Giải các hệ phương trình sau

- a) $\begin{cases} \log_3 (x + 2) < 3 \\ \log_{\frac{1}{2}} (x^2 + 2x - 8) \geq \log_{\frac{1}{2}} 16 \end{cases}$.
 b) (A-04) $\begin{cases} \log_{\frac{1}{4}} (y - x) - \log_4 \frac{1}{y} = 1 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$.
 c) (D-2010) $\begin{cases} x^2 - 4x + y + 2 = 0 \\ 2\log_2 (x - 2) - \log_{\sqrt{2}} y = 0 \end{cases}$.
 d) (B-05) $\begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt{2-y} = 1 \\ 3\log_9 9x^2 - \log_3 y^3 = 3 \end{cases}$.

5.48. Giải các hệ phương trình sau

- a) $\begin{cases} 3^x - 3^y = y - x \\ x^2 + xy + y^2 = 12 \end{cases}$.
 b) $\begin{cases} x^3 - y^3 = 2^y - 2^x \\ (x^4 + 1)(y^2 + y - 1) + x(y - 2) = 1 \end{cases}$.
 c) $\begin{cases} x + \sqrt{x^2 - 2x + 2} = 3^{y-1} + 1 \\ y + \sqrt{y^2 - 2y + 2} = 3^{x-1} + 1 \end{cases}$.
 d) $\begin{cases} \ln(1+x) - \ln(1+y) = x - y \\ x^2 - 12xy + 20y^2 = 0 \end{cases}$.

- 5.49.** (D-06) Chứng minh với mọi $a > 0$, hệ phương trình $\begin{cases} e^x - e^y = \ln(1+x) - \ln(1+y) \\ y - x = a \end{cases}$ có nghiệm duy nhất.