ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

HOÀNG VĂN QUÝ

CHUỖI LUỸ THỪA HÌNH THỨC VÀ HÀM SINH

Chuyên ngành : **Phương Pháp Toán Sơ Cấp**
Mã số: 60.46.40

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: PGS.TS. ĐÀM VĂN NHỈ

Thái Nguyên - 2011

CÔNG TRÌNH ĐƯỢC HOÀN THÀNH TẠI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC - ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

Phản biện 1: ....
....

Phản biện 2: ....
....

Luận văn sẽ được bảo vệ trước hội đồng chấm luận văn họp tại:
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC - ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
Ngày.... tháng.... năm 2011

Có thể tìm hiểu tại
THƯ VIỆN ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

Mục lục

Mở đầu

Trong toán học việc sử dụng các kiến thức toán cao cấp để giải quyết các bài toán ở phổ thông là điều rất quan trọng. Nó không chỉ giúp người làm toán có nhiều phương pháp lựa chọn lời giải, mở rộng tầm hiểu biết toán học mà còn phát huy được sự thông minh và sức sáng tạo, tầm bao quát bài toán, mở rộng bài toán dưới nhiều hướng khác nhau.

Sử dụng các kiến thức về chuỗi số để giải quyết các bài toán về dãy số là một vấn đề như vậy. Như chúng ta đã biết các vấn đề liên quan đến dãy số là một phần quan trọng của đại số và giải tích toán học. Khi tiếp cận vấn đề này các em học sinh giỏi, sinh viên và khá nhiều thầy cô giáo phổ thông thường rất phải đối mặt với rất nhiều bài toán khó liên quan đến chuyên đề này.

Trong các kỳ thi học sinh giỏi quốc gia, thi Olimpic toán quốc tế, thi Olimpic toán sinh viên giữa các trường đại học, cao đẳng, các bài toán liên quan đến dãy số cũng hay được đề cập và thường loại rất khó, đòi hỏi người học, người làm toán phải có một tầm hiểu biết rộng và rất sâu sắc các kiến thức về dãy số và chuỗi số mới đưa ra các phương pháp giải toán hay và hoàn thiện được bài toán.

Để phục vụ cho việc bồi dưỡng học sinh giỏi và việc trao đổi kinh nghiệm với các thầy cô giáo bồi dưỡng học sinh giỏi quan tâm và tìm hiểu thêm về phần này, được sự hướng dẫn của thầy Đàm Văn Nhỉ tác giả đã học tập thêm và viết đề tài " ***Chuỗi luỹ thừa hình thức và hàm sinh***".

Đề tài giải quyết các vấn đề trọng tâm :

Chương I : Kiến thức chuẩn bị .Tác giả nhắc lại các kiến thức cơ bản nhất về :

1.1 Khái niệm vành và đồng cấu

1.1.1 Vành.

1.1.2 Ước của không. Miền nguyên.

1.1.3 Đồng cấu.
1.1.4 Trường.
1.2 Vành đa thức và nghiệm.

Chương II : Vành các chuỗi luỹ thừa hình thức. Tác giả giới thiệu các kiến thức.

2.1 Vành các chuỗi luỹ thừa hình thức.
2.2 Dãy hiệu của một dãy .
2.3 Hàm sinh thường và dãy Fibonacci, dãy Catalan.
2.4 Hàm sinh mũ và dãy số Stirling.
2.5 Hàm sinh của dãy các đa thức Bernoulli.
2.6 Hàm sinh Dirichlet và hàm Zeta-Riemann.
2.7 Tích vô hạn.
2.8 Đồng nhất thức Newton.
2.9 Dãy truy hồi với hàm sinh.

Luận văn này được hoàn thành dưới sự hướng dẫn và chỉ bảo tận tình của PGS.TS Đàm Văn Nhỉ - Đại học Sư Phạm Hà Nội. Thầy đã dành nhiều thời gian hướng dẫn và giải đáp các thắc mắc của tác giả trong suốt quá trình làm luận văn. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến Thầy.

Tác giả xin gửi tới các thầy (cô) khoa Toán, phòng Đào tạo Trường Đại Học Khoa Học - Đại Học Thái Nguyên, cùng các thầy cô tham gia giảng dạy khóa Cao học 2009-2011 lời cảm ơn sâu sắc về công lao dạy dỗ trong thời gian qua. Đồng thời xin gửi lời cảm ơn tập thể lớp Cao học Toán K3B Trường Đại Học Khoa Học đã động viên giúp đỡ tác giả trong quá trình học tập và làm luận văn này.

Tác giả xin cảm ơn tới Sở Nội Vụ, Sở Giáo dục và đào tạo Bắc Ninh, Ban giám hiệu và tổ Toán trường THPT Lương Tài 2 đã tạo điều kiện giúp đỡ để tác giả hoàn thành khóa học này.

Tác giả

Hoàng Văn Quý

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

1.1 Khái niệm vành và đồng cấu

1.1.1 Vành

Định nghĩa . Ta gọi là vành một tập hợp X cùng với hai phép toán hai ngôi đã cho trong X ký hiệu theo thứ tự bằng các dấu + và . (*người ta thường ký hiệu như vậy*) và gọi là phép cộng và phép nhân sao cho các điều kiện sau thỏa mãn:
1) X cùng với phép cộng là một nhóm aben.
2) X cùng với phép nhân là một nửa nhóm.
3) Phép nhân phân phối với phép cộng: Với các phần tử tùy ý $x, y, z \in X$ ta có:

$$x(y+z) = xy + xz$$
$$(y+z)x = yx + zx$$

Phần tử trung lập của phép cộng thì ký hiệu là 0 và gọi là phần tử *không*. Phần tử đối xứng (đối với phép cộng) của một phần tử x thì ký hiệu là -x và gọi là đối của x . Nếu phép nhân là giao hoán thì ta bảo *vành* X *là giao hoán*. Nếu phép nhân có phần tử trung lập thì phần tử đó gọi là *phần tử đơn vị* của x và thường kí hiệu là *e* hay 1 .

1.1.2 Ước của không. Miền nguyên

Định nghĩa1 : Ta gọi là *ước của 0* mọi phần tử $a \neq 0$ sao cho có $b \neq 0$ thỏa mãn quan hệ *ab=0*.
Định nghĩa2 : Ta gọi *miền nguyên* một vành có nhiều hơn một phần tử, giao

hoán, có đơn vị, không có ước của *0*.

1.1.3 Đồng cấu

Định nghĩa. Một đồng cấu (vành) là một ánh xạ từ một vành X đến một vành Y sao cho:

$$f(a+b) = f(a) + f(b)$$
$$f(ab) = f(a)f(b)$$

với mọi $a, b \in X$. Nếu $X = Y$ thì đồng cấu f gọi là một tự đồng cấu của X. Ta cũng định nghĩa đơn cấu, toàn cấu, đẳng cấu tương tự như đã định nghĩa trong nhóm.

1.1.4 Trường

Định nghĩa: Ta gọi là *trường* một miền nguyên X trong đó mọi phần tử khác không đều có một nghịch đảo trong vị nhóm nhân X. Vậy một vành X giao hoán, có đơn vị, có nhiều hơn một phần tử là một trường nếu và chỉ nếu $X - \{0\}$ là một nhóm đối với phép nhân của X.

1.2 Vành đa thức và nghiệm

Kết quả chính

Cho vành giao hoán R và một biến x trên R. Với các $n \in \mathbb{N}$, xét tập hợp:

$$R[x] = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \mid a_i \in R\} = \Big\{\sum_{i=0}^{n} a_ix^i \mid a_i \in R\Big\}.$$

Mỗi phần tử $f(x) \in R[x]$ được gọi là một *đa thức* của biến x với các hệ số a_i thuộc vành R. Hệ số a_n được gọi là *hệ số cao nhất*, còn hệ số a_0 được gọi là *hệ số tự do* của $f(x)$. Khi $a_n \neq 0$ thì n được gọi là *bậc* của $f(x)$ và được ký hiệu $\deg f(x)$. Riêng đa thức 0 được quy định có bậc là $-\infty$ hoặc -1. Nếu $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i, g(x) = \sum\limits_{i=0}^{m} b_i x^i \in R[x]$ thì

$$f(x) = g(x) \text{ khi và chỉ khi } m = n, a_i = b_i \text{ với mọi } 0 \leqslant i \leqslant n$$

$$f(x) + g(x) = \sum_{i=0} (a_i + b_i)x^i, f(x)g(x) = \sum_{i=0} (\sum_{j=0}^{i} a_{i-j} b_j) x^i.$$

Định lý 1.2.1. *Ta có $R[x]$ là một vành giao hoán. Hơn nữa, nếu R là một miền nguyên thì $R[x]$ cũng là một miền nguyên.*

Định lý 1.2.2. *Giả sử k là một trường. Với các đa thức $f(x), g(x) \in k[x]$ và $g(x) \neq 0$ có hai đa thức duy nhất $q(x), r(x)$ sao cho $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$ với $\deg r(x) < \deg g(x)$.*

Ví dụ 1.2.3. *Cho hai số tự nhiên n và p với $n > p \geqslant 1$. Tìm điều kiện cần và đủ để $x^n - a^n$ chia hết cho $x^p - a^p$ với $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$.*

Bài giải: Biểu diễn $n = qp + r$ trong $\mathbb{Z}$ với $0 \leqslant r < p$. Khi đó có biểu diễn

$$x^n - a^n = (x^p - a^p)(x^{n-p} + a^p x^{n-2p} + \cdots + a^{(q-1)p} x^{n-qp}) + a^{qp}(x^r - a^r).$$

Vậy, điều kiện cần và đủ để $x^n - a^n$ chia hết cho $x^p - a^p$ là $n \,\vdots\, p$. □

Định lý 1.2.4. *Giả sử k là một trường. Khi đó vành $k[x]$ là một vành chính và nó là vành nhân tử hóa.*

Giả sử $\alpha \in R$ và đa thức $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i \in R[x]$. Biểu thức $f(\alpha) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i \alpha^i \in R$ được gọi là *giá trị* của $f(x)$ tại α. Nếu $f(\alpha) = 0$ thì α được gọi là một *nghiệm* của $f(x)$ trong R. Giả sử số nguyên $m \geqslant 1$ và $\alpha \in k$. $f(\alpha) = 0$ được gọi là một *nghiệm bội cấp m* của $f(x)$ trong k nếu $f(x)$ chia hết cho $(x - \alpha)^m$ và $f(x)$ không chia hết cho $(x - \alpha)^{m+1}$.

Định lý 1.2.5. *Đa thức $f(x) \in k[x]$ bậc $n \geqslant 1$. Khi đó ta có các kết quả sau:*

(i) *Nếu $\alpha \in k$ là nghiệm của $f(x)$ thì $f(x) = (x - \alpha)g(x)$ với $g(x) \in k[x]$.*

(ii) *$f(x)$ có không quá n nghiệm phân biệt trong k.*

Đôi khi để tìm mối liên hệ giữa các nghiệm hay một tính chất nào đó của nghiệm đa thức ta thường sử dụng kết quả sau đây:

Định lý 1.2.6. [Viét] *Giả sử $x_1, \dots, x_n$ là n nghiệm của đa thức bậc n sau đây: $f(x) = x^n - \delta_1 x^{n-1} + \delta_2 x^{n-2} - \dots + (-1)^n \delta_n$. Khi đó có các hệ thức*

$$\begin{cases} \delta_1 = x_1 + x_2 + \dots + x_n \\ \delta_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{n-1}x_n \\ \dots \\ \delta_n = x_1x_2 \dots x_n. \end{cases}$$

Định lý 1.2.7. *Giả sử $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ là một đa thức đối xứng khác 0. Khi đó tồn tại một và chỉ một đa thức $s(x_1, x_2, \dots, x_n) \in k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ sao cho $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = s(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$.*

Một số ví dụ

Ví dụ 1.2.8. *Giả sử $f(x) = x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 10x + 28$. Tính $f(1 + \sqrt[3]{3})$.*

Bài giải: Vì $1 + \sqrt[3]{3}$ là nghiệm của $g(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 4 = 0$ và $f(x) = (x-2)g(x) + 20$ nên $f(1 + \sqrt[3]{3}) = 20$. □

Ví dụ 1.2.9. [VMO 1990] *Giả sử $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n \in \mathbb{R}[x]$ với $a_0 \neq 0$ và thỏa mãn $f(x)f(2x^2) = f(2x^3 + x)$ với mọi giá trị thực x. Chứng minh rằng $f(x)$ không thể có nghiệm thực.*

Bài giải: So sánh hệ số của x^{3n} và x^0 ở hai vế, nên từ $f(x)f(2x^2) = f(2x^3 + x)$ ta suy ra $a_0^2 = a_0$ và $a_n^2 = a_n$. Vì $a_0 \neq 0$ nên $a_0 = 1$; còn $a_n = 0$ hoặc $a_n = 1$. Nếu $a_n = 0$ thì $f(x) = x^r g(x)$ với $g(0) \neq 0$. Vậy $x^r g(x) 2^r x^{2r} g(2x^2) = x^r(2x^2+1)^r g(2x^3 + x)$ hay $g(x)2^r x^{2r} g(2x^2) = (2x^2+1)^r g(2x^3+x)$. Vì $g(0) \neq 0$ nên ta nhận được $g(0) = 0$: mâu thuẫn. Vậy $a_n = 1$. Giả sử $f(x) = 0$ có nghiệm thực x_0. Khi đó $x_0 \neq 0$ vì $a_n \neq 0$. Vì $f(2x_0^3 + x_0) = f(x_0)f(2x_0^2) = 0$ nên $x_1 = 2x_0^3 + x_0$ cũng là nghiệm thực của $f(x)$. Vì hàm $y = 2x^3 + x$ là đơn điệu tăng nên dãy $(x_{r+1} = 2x_r^3 + x_r)_{r \geqslant 0}$ và $x_0 \neq 0$ là một dãy vô hạn và mỗi số hạng đều là nghiệm của $f(x)$ hay $f(x)$ có nhiều vô hạn nghiệm: mâu thuẫn theo Định lý 1.2.5. Vậy $f(x)$ không có nghiệm thực. □

Ví dụ 1.2.10. [IMO 1991] *Giả sử số hữu tỷ $a \in (0;1)$ thỏa mãn phương trình $\cos 3\pi a + 2\cos 2\pi a = 0$. Chứng minh rằng $a = \frac{2}{3}$.*

Bài giải: Đặt $x = \cos \pi a$. Khi đó $4x^3 + 4x^2 - 3x - 2 = 0$ hay $(2x+1)(2x^2 + x - 2) = 0$. Nếu $\cos \pi a = x = \frac{-1}{2}$ thì $a = \frac{2}{3}$. Nếu $x \neq \frac{-1}{2}$ thì $2x^2 + x - 2 = 0$, và như vậy x là số vô tỷ. Do $|x| \leqslant 1$ nên $\cos \pi a = x = \frac{-1+\sqrt{17}}{4}$. Bằng quy nạp, có thể chỉ ra $\cos 2^n \pi a = \frac{a_n + b_n\sqrt{17}}{4}$ với số nguyên lẻ a_n, b_n. Vì

$$\frac{a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{17}}{4} = \cos 2^{n+1}\pi a = 2\cos^2 2^n \pi a - 1 = 2[\frac{a_n + b_n\sqrt{17}}{4}]^2 - 1$$

nên $a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 17b_n^2 - 8}{2} > a_n$. Do đó dãy (a_n) là một dãy tăng nghiêm ngặt và như vậy tập các giá trị của $\cos 2^n \pi a$ với $n = 0, 1, 2, ...$ là tập vô hạn (*) vì $\sqrt{17}$ là số vô tỷ. Nhưng do a là số hữu tỷ nên tập các giá trị của $\cos m\pi a$ với $m = 0, 1, 2, ...$ phải là hữu hạn: mâu thuẫn với (*). Do đó $a = \frac{2}{3}$. □

Ví dụ 1.2.11. *Giả thiết đa thức $f(x)$ bậc n có tất cả các nghiệm đều thực. Khi đó tất cả các nghiệm của $af(x) + f'(x)$ cũng là những số thực.*

Bài giải: Giả sử $f(x)$ có các nghiệm thực $x_1, x_2, \ldots, x_k$ với bội tương ứng $r_1, r_2, \ldots, r_k$ và ta sắp xếp $x_1 < x_2 < \cdots < x_k$. Hàm số

$$g(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x - x_1} + \frac{1}{x - x_2} + \cdots + \frac{1}{x - x_k}$$

là hàm liên tục trong các khoảng $(-\infty; x_1), (x_1; x_2), \ldots, (x_{k-1}; x_k), (x_k; \infty)$. Dựa vào sự biến thiên của các hàm $\frac{1}{x - x_j}$, phương trình $g(x) = -a$ có thêm k nghiệm mới nữa khác $x_1, x_2, \ldots, x_k$ khi $a \neq 0$. Vậy $f(x)[g(x) + a] = 0$ có tất cả $(r_1 - 1) + \cdots + (r_k - 1) + k = \deg f(x)$ nghiệm thực. Vậy tất cả các nghiệm của $af(x) + f'(x)$ đều thực. Khi $a = 0$ thì $g(x) = 0$ có $k - 1$ nghiệm thực mới nữa. Vậy $f(x)[g(x) + 0] = 0$ có tất cả $(r_1 - 1) + \cdots + (r_k - 1) + k - 1 = \deg f'(x)$. Tóm lại tất cả các nghiệm của $af(x) + f'(x)$ là những số thực. □

Ví dụ 1.2.12. *Giả thiết tất cả các nghiệm của đa thức $f(x)$ và đa thức $g(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ đều là những số thực. Khi đó tất cả các nghiệm của $F(x) = a_0f(x) + a_1f'(x) + \cdots + a_nf^{(n)}(x)$ cũng đều là những số thực.*

Bài giải: Biểu diễn $g(x) = a_0(x+\lambda_1)(x+\lambda_2)\ldots(x+\lambda_n)$ với các λ_j thực. Ký hiệu $F_0(x) = a_0f(x)$, $F_1(x) = F_0(x) + \lambda_1F_0'(x) = a_0[f(x) + \lambda_1f'(x)]$, $F_2(x) = F_1(x)+\lambda_2F_1'(x) = a_0[f(x)+(\lambda_1+\lambda_2)f'(x)]+\lambda_1\lambda_2f''(x)]$,v.v... cuối cùng $F_n(x) = F_{n-1}(x) + \lambda_nF_{n-1}'(x) = a_0f(x) + a_1f'(x) + \cdots + a_nf^{(n)}(x)$. Theo Ví dụ 1.2.11 suy ra tất cả các nghiệm của $F_0, F_1, \ldots, F_n$ đều thực. $\square$

Ví dụ 1.2.13. *Cho* $f = \cos u + \mathrm{C}_n^1\cos(u+\alpha)x + \cdots + \mathrm{C}_n^n\cos(u+n\alpha)x^n$. *Giải phương trình* $f(x) = 0$.

Bài giải: Đặt $g = \sin u + \mathrm{C}_n^1\sin(u+\alpha)x + \cdots + \mathrm{C}_n^n\sin(u+n\alpha)x^n$. Khi đó

$$\begin{aligned}
f + ig &= z + \mathrm{C}_n^1\, ztx + \cdots + \mathrm{C}_n^n\, zt^nx^n = z(1+tx)^n\\
f - ig &= \overline{z} + \mathrm{C}_n^1\, \overline{z}\overline{t}x + \cdots + \mathrm{C}_n^n\, \overline{z}\overline{t}^nx^n = \overline{z}(1+\overline{t}x)^n\\
z &= \cos u + i\sin u\\
t &= \cos\alpha + i\sin\alpha.
\end{aligned}$$

Do đó $2f = z(1+tx)^n + \overline{z}(1+\overline{t}x)^n$. Phương trình $f(x) = 0$ tương đương với $z(1+tx)^n + \overline{z}(1+\overline{t}x)^n = 0$ hay $\left(\dfrac{1+\overline{t}x}{1+tx}\right)^n = -\dfrac{z}{\overline{z}} = -z^2$. Như vậy $\left(\dfrac{1+\overline{t}x}{1+tx}\right)^n = \cos(2u+\pi) + i\sin(2u+\pi)$ và được $\dfrac{1+\overline{t}x}{1+tx} = \cos(\dfrac{2u+\pi+k2\pi}{n}) + i\sin(\dfrac{2u+\pi+k2\pi}{n})$ với $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Từ đó được x. $\square$

Ví dụ 1.2.14. *Giả sử* $a_1, \ldots, a_n, b \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ *và* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *là những số thực phân biệt. Khi đó* $f(x) = b + \sum\limits_{k=1}^n \dfrac{a_k^2}{x-\alpha_k}$ *chỉ có nghiệm thực.*

Bài giải: Ta có $f(c+id) = b + \sum\limits_{k=1}^n \dfrac{a_k^2}{c+id-\alpha_k} = b + \sum\limits_{k=1}^n \dfrac{a_k^2(c-\alpha_k-id)}{(c-\alpha_k)^2+d^2}$. Phần ảo $\mathrm{Im}(f(c+id)) = -d\sum\limits_{k=1}^n \dfrac{a_k^2}{(a-\alpha_k)^2+b^2} \neq 0$ khi $d \neq 0$. Vậy $f(c+id) \neq 0$ khi $d \neq 0$. Không hạn chế có thể coi $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_{n-1} < \alpha_n$. Hiển nhiên $f(x) = 0$ có $n-1$ nghiệm thực γ_k thỏa mãn

$$\alpha_1 < \gamma_1 < \alpha_2 < \gamma_2 < \cdots < \alpha_{n-1} < \gamma_{n-1} < \alpha_n$$

và thêm đúng một nghiệm γ thỏa mãn hoặc $\gamma \in (-\infty, \alpha_1)$ hoặc $\gamma \in (\alpha_n, +\infty)$. Từ đó suy ra hàm $f(x)$ chỉ có các nghiệm thực. $\square$

Ví dụ 1.2.15. *Cho đa thức* $P(x) = 1 + x^2 + x^9 + x^{n_1} + ... + x^{n_s} + x^{1992}$ *với* $n_1, ..., n_s$ *là các số tự nhiên cho trước thỏa mãn* $9 < n_1 < ... < n_s < 1992$. *Chứng minh rằng nghiệm của đa thức P(x) (nếu có) không thể lớn hơn* $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Ví dụ 1.2.16. *Cho đa thức* $P(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 97$.
Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n luôn tồn tại một số nguyên dương a_n *sao cho* $P\left(a_n\right)$ *chia hết cho* 3^n.

Chương 2

Vành các chuỗi lũy thừa hình thức

Như một sự tiếp tục của vành đa thức ta nghiên cứu vành các chuỗi luỹ thừa hình thức một biến trên trường $k = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

2.1 Vành các chuỗi lũy thừa hình thức

Mục này tập trung nghiên cứu vành các chuỗi luỹ thừa hình thức một biến trên một trường. Ký hiệu

$$k[[x]] = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots \mid a_i \in k\} = \Big\{\sum_{i=0}^{\infty} a_ix^i \mid a_i \in k\Big\}.$$

Mỗi phần tử $f \in k[[x]], f = \sum\limits_{i=0}^{\infty} a_ix^i$ với $x^0 = 1$, được gọi là *một chuỗi luỹ thừa hình thức* của biến x với các hệ tử thuộc k. Để biến $k[[x]]$ thành một vành giao hoán có đơn vị ta cần các phép toán sau. Cho $f = \sum\limits_{i=0}^{\infty} a_ix^i, g = \sum\limits_{i=0}^{\infty} b_ix^i \in k[[x]]$ ta định nghĩa $f = g$ khi và chỉ khi $a_i = b_i$ cho mọi $i = 0, 1, \ldots$ và

$$f + g = \sum_{i=0}^{\infty}(a_i + b_i)x^i, fg = \sum_{i=0}^{\infty}(\sum_{j=0}^{i} a_{i-j}b_j)x^i.$$

Mệnh đề 2.1.1. *Với các phép toán trên, $k[[x]]$ lập thành một vành giao hoán có đơn vị.*

Chứng minh: Việc kiểm tra các tiên đề của vành là thỏa mãn. □

Trong vành này ta không quan tâm tới tính hội tụ và tính giá trị của chuỗi; chỉ quan tâm tới tính hữu tỉ và công thức đóng của chuỗi. Người ta cần công thức đóng của chuỗi để nghiên cứu tổng hay các hệ số của biểu diễn chuỗi. Đạo hàm hình thức của phần tử $f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ là $f' = \sum_{i=1}^{\infty} i a_i x^{i-1}$. Với một hàm $f(x)$ bất kỳ xác định tại $x = 0$, ta biểu diễn nó qua chuỗi lũy thừa hình thức $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

Định lý 2.1.2. *Chuỗi lũy thừa hình thức $f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ là ước của đơn vị khi và chỉ khi $a_0 \neq 0$.*

Chứng minh: Chuỗi luỹ thừa hình thức $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ là đơn vị của $k[[x]]$ khi và chỉ khi tồn tại chuỗi luỹ thừa hình thức $g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$ sao cho $f(x)g(x) = 1$. Điều này tương đương với hệ $a_0 b_0 = 1, \sum_{j=0}^{i} a_{i-j} b_j = 0$ cho mọi $i = 1, 2, \ldots$. Coi các b_j là ẩn và hệ giải được khi và chỉ khi $a_0 \neq 0$. $\square$

Chuỗi $g(x)$ được gọi là *nghịch đảo* của $f(x)$ và đôi khi viết $g(x) = \frac{1}{f(x)}$. Người ta thường quan tâm đến tính hữu tỉ của chuỗi và các hệ tử. Chuỗi $f(x)$ được gọi là *chuỗi hữu tỉ* nếu có $p(x), q(x) \in k[x]$ để $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ hay $f(x)q(x) = p(x)$ trong $k[[x]]$. Nếu $q(0) = 1$, *bậc* của $f(x)$ là $\deg f(x) := \deg p(x) - \deg q(x)$. Nếu tồn tại hàm (đại số hoặc siêu việt) $F(x)$ sao cho $f(x) = F(x)$ thì $F(x)$ được gọi là *công thức đóng* của chuỗi $f(x)$. Khai triển thành chuỗi luỹ thừa hình thức một số hàm đơn giản sau đây:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots \\
e^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\arcsin x &= x + \frac{x^3}{2.3} + \frac{1.3x^5}{2.4.5} + \cdots + \frac{1.3.5\ldots(2n-1)x^{2n+1}}{2.4.6\ldots(2n).(2n+1)} + \cdots \\
\arccos x &= \frac{\pi}{2} - \Big(x + \frac{x^3}{2.3} + \frac{1.3x^5}{2.4.5} + \cdots + \frac{1.3.5\ldots(2n-1)x^{2n+1}}{2.4.6\ldots(2n).(2n+1)} + \cdots\Big) \\
\arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots \\
\frac{\pi^2}{6} &= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots .
\end{aligned}
$$

Chú ý 2.1.3. *Điều kiện cho x để có biểu diễn như trên không xét ở đây.*

Định lý 2.1.4. [Euler] *Với mọi số thực x ta có $e^{ix} = \cos x + i\sin x$.*

Chứng minh: Từ $e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1!} + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \cdots + \frac{(ix)^n}{n!} + \cdots$ ta suy ra đồng nhất thức

$$
\begin{aligned}
e^{ix} &= (1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots) \\
&+ \ i(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots).
\end{aligned}
$$

Do đó $e^{ix} = \cos x + i\sin x$. □

Hệ quả 2.1.5. *Với mọi số thực x, y ta luôn có các hệ thức sau đây:*

(i) $e^{ix}e^{iy} = e^{i(x+y)}$ *và* $\left(e^{ix}\right)^n = e^{inx}$ *với mọi* $n \in \mathbb{Z}$.

(ii) $\frac{e^{ix}}{e^{iy}} = e^{i(x-y)}$ *và* $\overline{e^{ix}} = e^{-ix} = \frac{1}{e^{ix}}$.

(iii) $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$.

Chứng minh: Suy ra từ Định lý 2.1.4. □

Bổ đề 2.1.6. *Ta có*

$$
\begin{aligned}
e &= 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots \\
\pi &= 4(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} + \cdots).
\end{aligned}
$$

Chứng minh: Vì $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$ nên khi cho $x = 1$ có $e = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$.

Vì $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots$ nên khi cho $x = 1$ có $\pi = 4(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} + \cdots)$. □

Định lý 2.1.7. *Số e là số vô tỉ.*

Chứng minh: Từ chuỗi e^x có $e = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$. Giả sử e là số hữu tỉ, $e = \frac{p}{q}$. Khi đó $\frac{p}{q} = 2 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{q!} + \frac{1}{(q+1)!} + \cdots$. Vậy $p(q-1)! - (2 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{q!})q! = \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \cdots < \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^2} + \cdots = \frac{1}{q}$. Điều này không thể được vì vế trái là số nguyên, còn vế phải là một phân số thực sự nhỏ hơn 1. Vậy e là số vô tỉ. □

Người ta đã chứng minh số π cũng là số vô tỷ. Kết quả được phát biểu qua định lý sau, <không chứng minh ở đây>

Định lý 2.1.8. *Số π là số vô tỉ.*

Ví dụ 2.1.9. *Tính* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{(2n+1)\binom{2n}{n}}$ *và chỉ ra* $\sum_{n=0}^{m} \frac{2^{n+1}}{(2n+1)\binom{2n}{n}} < \pi$ *với mọi số nguyên dương m.*

Bài giải: Từ đồng nhất thức $(\arcsin x)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2 x^{2n+2}}{(2n+1)!(n+1)}$ với $|x| \leqslant 1$ và lấy đạo hàm hai vế ta nhận được $4x\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n+2}(n!)^2 x^{2n+2}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^{2n+2}}{(2n+1)\binom{2n}{n}}$. Với $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ta có hệ thức $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{(2n+1)\binom{2n}{n}} = \pi$. □

Ví dụ 2.1.10. *Cho $f(x) = \frac{1 - x + x^2}{1 + x + x^2}$. Chứng minh rằng $f^{(s)}(0)$ là số nguyên và chia hết cho $2s!$ với mọi $s = 1, 2, \ldots$.*

Bài giải: Biểu diễn $f(x) = 1 - \dfrac{2x}{1+x+x^2} = 1 + \dfrac{2x^2-2x}{1-x^3}$ khi $|x| < 1$. Viết thành chuỗi cho $f(x)$, ta có $f(x) =$

$$1+(2x^2-2x)(1+x^3+x^6+\cdots) = 1-2x+2x^2-2x^4+2x^5-2x^7+2x^8-\cdots.$$

Khi đó $f^{(s)}(0) = \begin{cases} -2s! \text{ nếu } s = 3n-2 \\ 2s! \text{ nếu } s = 3n-1 \\ 0 \text{ nếu } s = 3n. \end{cases}$ Vậy $f^{(s)}(0)$ là số nguyên và chia hết cho $2s!$. □

Ví dụ 2.1.11. *Cho $f(x) = 1 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$ thỏa mãn tất cả các hệ số các lũy thừa của x trong khai triển $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ có giá trị tuyệt đối không vượt quá 2. Chứng minh rằng $|a_n| \leqslant n+1$ với mọi n.*

Bài giải: Biểu diễn $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_nx^n$ với $|b_n| \leqslant 2$ cho mọi n. Vì $f'(x) = f(x).\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ nên ta nhận được hệ thức dưới đây:

$$a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots = (1+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots)(b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots).$$

Giả sử $|a_n| \leqslant n+1$ không thể thỏa mãn với mọi n. Khi đó có số tự nhiên k nhỏ nhất để $|a_k| > k+1$. Do bởi $ka_k = b_0a_{k-1}+b_1a_{k-2}+\cdots+b_{k-2}a_1+b_{k-1}$ và $|ka_k| > k(k+1)$ nên

$$|b_0a_{k-1}+b_1a_{k-2}+\cdots+b_{k-2}a_1+b_{k-1}| \leqslant 2\big(|a_{k-1}|+|a_{k-2}|+\cdots+|a_1|+1\big)$$

và như thế $k(k+1) < |ka_k| \leqslant 2\big(k+(k-1)+\cdots+2+1\big) = k(k+1)$: mâu thuẫn. Như vậy $|a_n| \leqslant n+1$ với mọi n. □

Ví dụ 2.1.12. *Chứng minh rằng $2^{\frac{1}{2}}(2^2)^{\frac{1}{2^2}}\cdots(2^n)^{\frac{1}{2^n}} < 4$ với mọi số nguyên dương n.*

Bài giải: Vì $2^{\frac{1}{2}}(2^2)^{\frac{1}{2^2}}\cdots(2^n)^{\frac{1}{2^n}} = 2^{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{2^k}}$ nên chỉ cần chứng minh $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{2^k} < 2$. Vì $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{k}{2^k} = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\sum\limits_{r=k}^{\infty}\dfrac{1}{2^r} = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^{k-1}} = 2$ nên $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{2^k} < 2$. □

Ví dụ 2.1.13. *Tìm* $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$, *trong đó dãy số nguyên* (a_n) *và* (b_n) *thỏa mãn:*

$$\begin{cases} a_{-1}=0, b_{-1}=1, a_0=1, b_0=1 \ \text{ và với } \ n\geqslant 1: \\ a_n=2a_{n-1}+(2n-1)^2a_{n-2}, b_n=2b_{n-1}+(2n-1)^2b_{n-2}. \end{cases}$$

Bài giải: Bằng quy nạp theo n ta nhận được các công thức $b_n=\prod\limits_{k=0}^{n}(2k+1)$ và $a_n=(2n+1)a_{n-1}+(-1)^n\prod\limits_{k=0}^{n-1}(2k+1)$. Vậy $\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{a_{n-1}}{b_{n-1}}+\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ với mọi số nguyên $n\geqslant 0$. Như vậy $\dfrac{a_n}{b_n}=1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}+\cdots+\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$. Chuyển qua giới hạn ta được $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\arctan 1=\dfrac{\pi}{4}$. □

Ví dụ 2.1.14. *Cho hai dãy số nguyên* (a_n) *và* (b_n) *thỏa mãn:*

$$\begin{cases} a_0=-1, b_0=1 \\ a_n=2n-1, b_n=-n^2, n\geqslant 1. \end{cases}$$

Xây dựng hai dãy các số nguyên (A_n) *và* (B_n) *như sau:*

$$\begin{cases} A_0=0, B_0=1, A_1=1, B_1=a_1 \\ A_{n+1}=a_{n+1}A_n+b_nA_{n-1}, B_{n+1}=a_{n+1}B_n+b_nB_{n-1}, n\geqslant 1. \end{cases}$$

(i) *Tính* A_n, B_n *theo* n.

(ii) *Chứng minh* $\dfrac{A_n}{B_n}\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$.

(iii) *Tìm* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{B_n}{A_n}$.

(iv) *Chứng minh* $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}=\cfrac{1}{1-\cfrac{1^2}{3-\cfrac{2^2}{5-\cfrac{3^2}{\ddots-\cfrac{\cdots}{2n-3-\cfrac{(n-1)^2}{2n-1}}}}}}$.

Bài giải: Bằng quy nạp theo n ta nhận được các công thức $B_n = n!$ và $A_n = (\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k})n!$.

(ii) Ta có $\dfrac{A_n}{B_n} = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$.

(iii) Vì $\dfrac{B_n}{A_n} = \dfrac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}$ nên $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{B_n}{A_n} = \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{1}{\ln(1+x)} = 0$.

(iii) Do $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} = \dfrac{A_n}{B_n} = \cfrac{1}{1 - \cfrac{1^2}{3 - \cfrac{2^2}{5 - \cfrac{3^2}{\ddots - \cfrac{\cdots}{2n-3-\cfrac{(n-1)^2}{2n-1}}}}}}$. □

2.2 Dãy hiệu của một dãy

Định nghĩa 2.2.1. Cho dãy số $\{a_n\} = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Dãy $\{Da_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ với $Da_n = a_{n+1} - a_n, n \geqslant 0$, được gọi là *dãy hiệu* của dãy $\{a_n\}$.

Vì dãy hiệu cũng là một dãy số nên ta có thể lập dãy hiệu của nó và ký hiệu qua $\{D^2a_n\}$. Hiển nhiên

$$D^2a_n = Da_{n+1} - Da_n = a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n.$$

Tổng quát $D^{k+1}a_n = D^ka_{n+1} - D^ka_n$ và $D^k(D^ha_n) = D^{k+h}a_n$.

Ví dụ 2.2.2. *Với số nguyên dương r, dãy (a_n), trong đó $a_n = \binom{n}{r}$, thỏa mãn hệ thức $Da_n = a_{n+1} - a_n = \binom{n}{r-1}$.*

Bổ đề 2.2.3. *Với hai dãy số $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$ ta có $D(ra_n+sb_n) = rDa_n+sDb_n$ và $D^k(ra_n + sb_n) = rD^ka_n + sD^kb_n$ với mọi số r, s và số tự nhiên k, n.*

Chứng minh: Vì $D(ra_n+sb_n) = rDa_n+sDb_n = r(a_{n+1}-a_n)+s(b_{n+1}-b_n)$ nên có ngay kết quả $D(ra_n + sb_n) = rDa_n + sDb_n$. Tổng quát $D^k(ra_n + sb_n) = rD^ka_n + sD^kb_n$ được chứng minh dễ dàng bằng qui nạp theo k. □

Bổ đề 2.2.4. *Cho dãy số $\{a_n\}$. Nếu $D^{r+1}a_n = 0$ với mọi $n \geqslant 0$ thì $r+1$ số hạng $a_0, Da_0, \ldots, D^r a_0$ xác định hoàn toàn tất cả các $D^k a_n$ với mọi k, n. Đặc biệt, nếu dãy số $\{b_n\}$ thỏa mãn $D^j b_0 = D^j a_0$ và $D^{r+1}b_n = 0$ với mọi $n \geqslant 0$, $0 \leqslant j \leqslant r$, thì $a_n = b_n$ với mọi n.*

Chứng minh: Hiển nhiên. □

Định lý 2.2.5. *Cho dãy số $\{a_n\}$. Nếu có đa thức $p(x)$ bậc r thỏa mãn $a_n = p(n)$ với mọi $n \geqslant 0$ thì $D^{r+1}a_n = 0$ với mọi $n \geqslant 0$. Ngược lại, nếu $D^{r+1}a_n = 0$ với mọi $n \geqslant 0$ thì*

$$a_n = \binom{n}{0}a_0 + \binom{n}{1}Da_0 + \cdots + \binom{n}{s}D^s a_0 + \cdots + \binom{n}{r}D^r a_0.$$

Chứng minh: Giả sử đa thức $p(x)$ bậc r thỏa mãn $a_n = p(n)$ với mọi $n \geqslant 0$. Ta chỉ ra $D^{r+1}a_n = 0$ bằng phương pháp qui nạp theo r. Khi $r = 0$ có $a_n = p(n) = a$. Vậy $D^1 a_n = a - a = 0$. Giả sử kết luận đúng cho $r-1$ và $p(x) = c_r x^r + \cdots + c_0$. Vì $a_n = p(n)$ với mọi $n \geqslant 0$ nên $Da_n = a_{n+1} - a_n = p(n+1) - p(n)$. Đặt $q(x) = p(x+1) - p(x)$ thỏa mãn $Da_n = q(n)$. Vì $q(x)$ là đa thức bậc $r-1$ nên $D^r(Da_n) = 0$ theo giả thiết qui nạp. Vậy ta nhận được $D^{r+1}a_n = 0$.
Giả thiết dãy $\{a_n\}$ thỏa mãn $D^{r+1}a_n = 0$ với mọi $n \geqslant 0$. Định nghĩa dãy mới $\{b_n\}$ xác định bởi:

$$b_n = \binom{n}{0}a_0 + D\binom{n}{1}a_0 + \cdots + D^s\binom{n}{s}a_0 + \cdots + D^r\binom{n}{r}a_0, n \geqslant 0.$$

Theo Bổ đề 2.2.3 ta có ngay

$$\begin{aligned} Db_n &= D\binom{n}{0}a_0 + D^2\binom{n}{1}a_0 + \cdots + D^{r+1}\binom{n}{r}a_0 \\ &= \binom{n}{0}Da_0 + \binom{n}{1}D^2 a_0 + \cdots + D^{r+1}\binom{n}{r-1}D^r a_0 \end{aligned}$$

vì $D^{r+1}a_0 = 0$. Lặp lại, với $D^2, \ldots, D^j$ và ta nhận được

$$D^j b_n = \binom{n}{0}D^j a_0 + \binom{n}{1}D^{j+1}a_0 + \cdots + \binom{n}{r-j}D^r a_0$$

và đến $D^r b_n = D^r a_0\binom{n}{r-r} = D^r a_0$. Do đó $D^{r+1}b_n = D^{r+1}a_0 = 0$ với mọi $n \geqslant 0$ và $D^j b_0 = D^j a_0$ với mọi $0 \leqslant j \leqslant r$. Vậy theo Bổ đề 2.2.4 có $a_n = b_n$ với mọi $n \geqslant 0$. □

Ví dụ 2.2.6. *Cho dãy* (a_n) *với* $a_0 = 3$ *và* $a_{n+1} = a_n + 4n + 1$ *với mọi* $n \geqslant 0$. *Chứng minh rằng với mỗi số tự nhiên dương* m *đều có* n *để* $a_n - 3n - 1 = 2m^2$.

Bài giải: Vì $Da_n = a_{n+1} - a_n = 4n + 1$, $D^2a_n = Da_{n+1} - Da_n = 4(n + 1) + 1 - 4n - 1 = 4$ và $D^3a_n = 0$ nên theo Định lý 2.2.5 ta có ngay $a_n = 3\binom{n}{0} + Da_0\binom{n}{1} + D^2a_0\binom{n}{2} + 0 = 3 + n + 2n(n-1) = 2n^2 - n + 3$ hay $a_n - 3n - 1 = 2(n-1)^2$ với mọi $n \geqslant 0$. Vậy với mỗi m có $a_{m+1} - 3(m + 1) - 1 = 2m^2$. □

Ví dụ 2.2.7. *Cho dãy* (a_n) *với* $a_0 = 3, a_1 = 2$ *và* $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n - 6n^2 + 14n - 5$ *với mọi* $n \geqslant 0$. *Xác định* a_n *theo* n.

Bài giải: Vì $a_{n+2} - 2a_{n+1} = a_{n+1} - 2a_n - 6n^2 + 14n - 5$ nên khi đặt $b_n = a_{n+1} - 2a_n$ ta sẽ có $b_{n+1} = b_n - 6n^2 + 14n - 5$ và dãy (b_n) với $b_0 = -4, b_{n+1} = b_n - 6n^2 + 14n - 5$ với mọi $n \geqslant 0$. Vì $Db_n = b_{n+1} - b_n = -6n^2 + 14n - 5$, $D^2b_n = Db_{n+1} - Db_n = -6(n+1)^2 + 14(n+1) - 5 + 6n^2 - 14n + 5 = -12n + 8$ và $D^3b_n = -12, D^4b_n = 0$ nên theo Định lý 2.2.5 ta có ngay $b_n = -4\binom{n}{0} + Da_0\binom{n}{1} + D^2a_0\binom{n}{2} + D^3a_0\binom{n}{3}$ hay

$$b_n = -4 - 5n + 8\binom{n}{2} - 12\binom{n}{3} = -2n^3 + 10n^2 - 13n - 4.$$

Vậy $a_0 = 3, a_{n+1} = 2a_n - 2n^3 + 10n^2 - 13n - 4$ với mọi $n \geqslant 0$. Với dãy kiểu này, ta xét $a_n = u.2^n + an^4 + bn^3 + cn^2 + dn + e$. Từ đây dễ dàng suy ra a_n. □

Ví dụ 2.2.8. *Cho dãy* (a_n) *với* $a_0 = 5, a_1 = 1$ *và* $a_{n+1} = a_n + 6a_{n-1} - 6n^2 + 26n - 25$ *với mọi* $n \geqslant 1$. *Chứng minh rằng với mọi tự nhiên* n *đều có* $a_n \equiv 2.3^n + n^2 (\bmod 2^n)$.

Bài giải: Với dãy kiểu này, trước tiên xét đa thức đặc trưng $x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$. Tiếp theo $a_n = u3^n + v(-2)^n + +an^3 + bn^2 + cn + d$ và xét

$$\begin{cases} 5 = a_0 = u + v + d \\ 1 = a_1 = 3u - 2v + a + b + c + d \\ 34 = a_2 = 9u + 4v + 8a + 4b + 2c + d \\ 39 = a_3 = 27u - 8v + 27a + 9b + 3c + d \\ 226 = a_4 = 81u + 16v + 64a + 16b + 4c + d \\ 415 = a_5 = 243u - 32v + 125a + 25b + 5c + d. \end{cases}$$

Giải hệ được $u = 2, v = 3, b = 1$ và $a = c = d = 0$. Như vậy có công thức $a_n = 2.3^n + 3.(-2)^n + n^2$ và $a_n \equiv 2.3^n + n^2 (\bmod 2^n)$ với mọi $n \geqslant 0$. $\square$

Chú ý 2.2.9. *Nếu có đa thức $g(x)$ thỏa mãn $a_n = g(n)$ thì $a_{n+1} - a_n = g(n+1) - g(n)$ là một đa thức của n với bậc nhỏ đi 1.*

2.3 Hàm sinh thường và dãy Fibonacci, dãy Catalan

Một trong những nguồn gốc dẫn đến khái niệm hàm sinh chính là Định lý khai triển nhị thức Newton $(1+x)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$ và khai triển thành chuỗi lũy thừa của hàm phân thức $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$. Đây là một kỹ thuật giải tích với nhiều ứng dụng trong tổ hợp và nghiên cứu dãy số. Hàm sinh được phân ra làm hai loại: Hàm sinh thường và Hàm sinh mũ. Ta bắt đầu với khái niệm hàm sinh thường dưới đây:

Định nghĩa 2.3.1. Cho dãy số $\{a_n\}$, hoặc tổng quát hơn là dãy hàm $\{a_n = a_n(x)\}$. Chuỗi luỹ thừa hình thức $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ được gọi là *hàm sinh thường* của dãy $\{a_n\}$.

Kết quả chính

Định lý sau đây đã được chứng minh trong Giải tích.

Định lý 2.3.2. *Cho số thực dương α. Nếu chuỗi luỹ thừa hình thức $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ hội tụ tới $h(x)$ thì cho mọi $x \in (-\alpha, \alpha)$ hàm $h(x)$ có $h'(x) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} i a_i x^{i-1}$ và $\int\limits_0^h f(t)dt = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \dfrac{a_i x^{i+1}}{i+1}$.*

Định lý 2.3.3. *Dãy số $\{a_n\}$ được gọi là* dãy xác định kiểu tuyến tính *nếu dãy có dạng : $a_0 = \alpha_0, \ldots, a_{s-1} = \alpha_{s-1}$ và $a_{n+s} = \gamma_1 a_{n+s-1} + \gamma_2 a_{n+s-2} + \cdots + \gamma_s a_n, n \geqslant 0$. Khi đó hàm sinh thường $f(x)$ của dãy $\{a_n\}$ là một hàm hữu tỉ $\dfrac{b_0 + b_1 x + \cdots + b_r x^r}{-1 + \gamma_1 x + \cdots + \gamma_s x^s}, r < s$, khi và chỉ khi $\{a_n\}$ là dãy xác định kiểu tuyến tính.*

Chứng minh: Giả thiết $a_0 = \alpha_0, \ldots, a_{s-1} = \alpha_{s-1}$ và $a_{n+s} = \gamma_1 a_{n+s-1} + \gamma_2 a_{n+s-2} + \cdots + \gamma_s a_n, n \geq 0$. Đặt $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$. Sử dụng $a_{n+s} = \gamma_1 a_{n+s-1} + \gamma_2 a_{n+s-2} + \cdots + \gamma_s a_n, n \geq 0$, ta có $(\gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \cdots + \gamma_s x^s) f(x) = p(x) + f(x)$, trong đó $p(x)$ là đa thức với bậc $\deg p(x) < s$. Đặt $q(x) = \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \cdots + \gamma_s x^s$. Ta có $(q(x) - 1) f(x) = p(x)$. Vậy $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x) - 1}$ hay hàm sinh thường $f(x)$ của dãy là một hàm hữu tỉ.

Ngược lại, cho $f(x) = \dfrac{b_0 + b_1 x + \cdots + b_r x^r}{-1 + \gamma_1 x + \cdots + \gamma_s x^s} = \dfrac{p(x)}{q(x)}, r < s$. Vì $f(x) q(x) = p(x)$ nên khi so sánh hệ số của các x^n ta có hai hệ

$$\begin{cases} -a_0 = b_0 \\ a_0 \gamma_1 - a_1 = b_1 \\ \ldots \\ a_0 \gamma_{s-1} + a_1 \gamma_{s-2} + \cdots - a_{s-1} = b_{s-1} \text{ và} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_0 \gamma_s + a_1 \gamma_{s-1} + \cdots - a_s = 0 \\ a_1 \gamma_s + a_2 \gamma_{s-1} + \cdots - a_{s+1} = 0 \\ a_2 \gamma_s + a_3 \gamma_{s-1} + \cdots - a_{s+2} = 0 \\ \ldots \end{cases}$$

Giải hệ đầu có nghiệm $a_0 = \alpha_0, \ldots, a_{s-1} = \alpha_{s-1}$. Từ hệ sau ta suy ra $a_{n+s} = \gamma_1 a_{n+s-1} + \gamma_2 a_{n+s-2} + \cdots + \gamma_s a_n, n \geq 0$. Do đó $\{a_n\}$ là dãy xác định kiểu tuyến tính. □

Định lý 2.3.4. *Nếu $u(x) = -x^s + \gamma_1 x^{s-1} + \cdots + \gamma_s = 0$ có các nghiệm $r_1, \ldots, r_t$ với các bội tương ứng $\gamma_1, \ldots, \gamma_t$. Khi đó tồn tại các đa thức $p_1(n)$, $p_2(n)$, $\ldots$, $p_t(n)$ thỏa mãn $a_n = p_1(n) r_1^n + p_2(n) r_2^n + \cdots + p_t(n) r_t^n$ và $0 \leqslant \deg p_i(n) \leqslant \gamma_i - 1$ với $i = 1, 2, \ldots, t$.*

Một vài ví dụ

Ví dụ 2.3.5. *Dãy số $a_0 = 5, a_1 = 13, a_2 = 35$ và $a_{n+3} = 6a_{n+2} - 11a_{n+1} + 6a_n$ với $n \geqslant 0$. Chứng minh rằng $a_n \equiv 2^{n+1} (\bmod 3^{n+1})$ và $a_n \equiv 3^{n+1} (\bmod 2^{n+1})$.*

Bài giải: Đa thức $p(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x-2)(x-3)$. Vậy $a_n = a2^n + b3^n + c$. Từ điều kiện ban đầu suy ra $a_n = 2^{n+1} + 3^{n+1}$. □

Ví dụ 2.3.6. *Xét dãy số* $a_0 = 11, a_1 = 6, a_2 = 18, a_3 = 104, a_4 = 346$ *và*

$$a_{n+5} = 6a_{n+4} - 13a_{n+3} + 14a_{n+2} - 12a_{n+1} + 8a_n, n \geqslant 0.$$

Tìm số nguyên dương lớn nhất m *để* a_{2011} *chia hết cho* 2^m.

Bài giải: Đa thức $p(x) = x^5 - 6x^4 + 13x^3 - 14x^2 + 12x - 8$ được viết thành $p(x) = (x-2)^3(x-i)(x+i)$. Vậy $a_n = p_1(n)2^n + ai^n + b(-i)^n$. Từ điều kiện ban đầu suy ra $a_n = (n^2 + n + 1)2^n + 5i^n + 5(-i)^n$. Vậy $a_{2011} = (2011^2 + 2011 + 1)2^{2011}$. Số m cần tìm bằng 2011. □

Sử dụng khái niệm hàm sinh và chuỗi luỹ thừa hình thức để xét một số dãy số đặc biệt.

Ví dụ 2.3.7. *Xét dãy số Fibonacci* $a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + a_{n-1}, n \geqslant 1$. *Công thức đóng cho hàm sinh thường của dãy là* $f(x) = \dfrac{x}{1 - x - x^2}$. *Tìm* a_n *theo* n *và chỉ ra* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{a_n}{4^{n+1}} = \dfrac{1}{11}$.

Bài giải: Đặt $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$. Khi đó $(1 - x - x^2)f(x) = x$ hay ta có $f(x) = \dfrac{x}{1 - x - x^2}$. Với $a = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ và $b = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, biểu diễn $f(x)$ qua chuỗi lũy thừa $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\Big(\dfrac{1}{1-ax} - \dfrac{1}{1-bx}\Big)$. Vậy có

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big((1 + ax + a^2x^2 + \cdots) - (1 + bx + b^2x^2 + \cdots)\Big).$$

So sánh hệ số của x^n ở hai vế có $a_n = \dfrac{a^n - b^n}{\sqrt{5}}$ và công thức đóng $f(x) = \dfrac{x}{1 - x - x^2}$. Với $x = \dfrac{1}{4}$ ta nhận được $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{a_n}{4^{n+1}} = \dfrac{1}{11}$. □

Từ kết quả $a_n = \dfrac{a^n - b^n}{\sqrt{5}}$ ta suy ra các đồng nhất thức sau đây:

Ví dụ 2.3.8. *Xét dãy số Fibonacci* $a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + a_{n-1}, n \geqslant 1$. *Khi đó ta có*

(i) **[Phương trình Biner]** $a_n = \dfrac{a^n - b^n}{\sqrt{5}}, L_n = a^n + b^n$ **[Số Lucas]**. *Do đó* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = a$.

(ii) $a_n = \dfrac{1}{2^{n-1}} \sum\limits_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]} \binom{n}{2k+1} 5^k = \sum\limits_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]} \binom{n-k-1}{k}$.

(iii) $a_{2n+1} = a_n^2 + a_{n+1}^2, a_{3n} = a_n^3 + a_{n+1}^3 - a_{n-1}^3$.

(iv) $a^n = aa_n + a_{n-1}, b^n = ba_n + a_{n-1}$.

(v) $a_{3n} + (-1)^n a_n \vdots a_{2n}$.

(vi) *Nếu $p > 5$ là số nguyên tố thì $a_p \vdots p$ và $a_2 + 1 = 2 \vdots 2, a_3 + 1 = 3 \vdots 3, a_5 = 5 \vdots 5$.*

Bài giải: (i),(ii),(iii),(iv) và (v) đều được suy ra từ công thức $a_n = \dfrac{a^n - b^n}{\sqrt{5}}$.

Với $p > 5$ là số nguyên tố thì từ (ii) có $a_p = \dfrac{1}{2^{p-1}} \sum\limits_{k=0}^{[\frac{p-1}{2}]} \binom{p}{2k+1} 5^k \vdots p$. Với □

Ví dụ 2.3.9. *Xét dãy Catalan $a_0 = 1, a_{n+1} = a_0a_n + a_1a_{n-1} + \cdots + a_{n-1}a_1 + a_na_0, n \geqslant 0$. Công thức đóng cho hàm sinh của dãy là $f(x) = \dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$. Tìm công thức tính a_n theo n.*

Bài giải: Đặt $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$. Khi đó

$$\begin{aligned} f(x)f(x) &= a_0^2 + (a_0a_1 + a_1a_0)x + (a_0a_2 + a_1a_1 + a_2a_0)x^2 + \cdots \\ &= a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3 + \cdots = \frac{f(x)-1}{x}. \end{aligned}$$

Vậy $x[f(x)]^2 - f(x) + 1 = 0$. Giải phương trình này và do $f(0) = 0$ nên

$$f(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = \frac{1}{2x} - \frac{1}{2x}(1-4x)^{\frac{1}{2}}.$$

Công thức đóng cho hàm sinh $f(x)$ là $f(x) = \dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$. Biểu diễn hàm này qua chuỗi luỹ thừa $f(x) = \dfrac{1}{2x}\Big[2x + \dfrac{2^2}{2!}x^2 + \dfrac{1.3}{3!}2^3x^3 + \cdots + \dfrac{1.3.5...(2n-3)}{n!}2^nx^x + \cdots\Big]$. So sánh hệ số được $a_n = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$ với mọi số nguyên $n \geqslant 1$. □

Ví dụ 2.3.10. *Dãy số* (a_n) *được xác định như sau:* $a_1 = 1$ *và* $a_n = \dfrac{1}{n!} + \dfrac{a_1}{(n-1)!} + \dfrac{a_2}{(n-2)!} + \cdots + \dfrac{a_{n-1}}{1!}$ *với* $n > 1$. *Xác định công thức đóng của* $f(x)$ *và chỉ ra* $a_n = \dfrac{F^{(n)}(0)}{n!}$, *trong đó* $F(x) = \dfrac{-1}{e^x - 2}$ *với mọi* n.

Bài giải: Đặt $a_0 = 1$. Xét hàm sinh $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Khi đó $f(x)(e^x - 1) = \big(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots\big)\big(\frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots\big) = f(x) - 1$. Vậy $f(x) = \dfrac{-1}{e^x - 2}$. Dựa vào Công thức khai triển Taylor-Maclaurin ta có $a_n = \dfrac{F^{(n)}(0)}{n!}$, trong đó $F(x) = \dfrac{-1}{e^x - 2}$ với mọi n. □

2.4 Hàm sinh mũ và dãy số Stirling

Kết quả chính

Như một sự tiếp tục, khái niệm hàm sinh mũ sẽ được định nghĩa dưới đây.

Định nghĩa 2.4.1. Cho dãy số $\{a_n\}$. Chuỗi luỹ thừa hình thức biểu diễn trong dạng $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{a_n}{n!} x^n$ được gọi là *hàm sinh mũ* của dãy $\{a_n\}$.

Ví dụ 2.4.2. *Với dãy số* $(\binom{m}{n})$ *hàm sinh thường* $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} x^n$ *được viết thành* $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{m!}{(m-n)!n!} x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{A_m^n}{n!} x^n$ *là hàm sinh mũ của dãy* (A_m^n).

(m là số cố định cho trước)

Định nghĩa 2.4.3. Cho một tập hữu hạn S khác rỗng. *Một phân hoạch* của S thành k phần, với $1 \leqslant k \leqslant n$, là một họ các tập con $S_1, \ldots, S_k$ thỏa mãn ba điều kiện sau đây :

$$\begin{cases} \bigcup\limits_{i=1}^{k} S_i = S \\ S_i \neq \emptyset \text{ với mọi } i \\ S_i \cap S_j = \emptyset \text{ với mọi } i, j, i \neq j. \end{cases}$$

Định nghĩa 2.4.4. Cho tập hữu hạn S khác rỗng. Số các phân hoạch của tập S thành k phần được ký hiệu là $S(n,k)$ và được gọi là *số Stirling* (loại 2).

Định lý 2.4.5. *Với hai số nguyên dương n, k thỏa mãn $1 \leqslant k \leqslant n$ ta luôn có*

$$k!S(n,k) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} i^n.$$

Chứng minh: Xét tập $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ và $R = \{1, 2, \ldots, k\}$. Theo Bài tập 1.2.22, số các toàn ánh từ S lên R bằng $k!S(n,k)$. Mặt khác, biểu diễn ánh xạ $f : S \to R$ qua $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ f(a_1) & f(a_2) & \ldots & f(a_n) \end{pmatrix}$ ta có ngay $\{f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n)\} = \{1, 2, \ldots, k\}$. Viết dãy số $f(a_1) \ldots f(a_n)$ như một chỉnh hợp lặp chập n của k số. Như vậy, tương ứng mỗi ánh xạ f với đúng một chỉnh hợp lặp chập n của k số. Số chỉnh hợp lặp này đúng bằng k^n. Ký hiệu A là tập tất cả các ánh xạ từ S vào R và cho mỗi i ký hiệu A_i là tập con của A gồm tất cả các ánh xạ từ S vào $R \setminus \{i\}$. Ta có $|A| = k^n, |A_i| = (k-1)^n$ và $\bigcap_{j=1}^{s} A_{i_j} = (k-s)^n$. Tập tất cả các toàn ánh từ S lên R đúng bằng $A \setminus \bigcup_{i=1}^{k} A_i$. Theo Định lý 2.4.5, ta nhận được

$$\begin{aligned} k!S(n,k) &= |A| - |\bigcup_{i=1}^{k} A_i| = k^n - \binom{k}{1}(k-1)^n \\ &+ \binom{k}{2}(k-2)^n - \cdots + (-1)^k \binom{k}{k}(k-k)^n. \end{aligned}$$

Vậy $k!S(n,k) = \sum\limits_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i}(k-i)^n = \sum\limits_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} i^n$. □

Hệ quả 2.4.6. *Với hai số nguyên dương n, k thỏa mãn $1 \leqslant k \leqslant n$ ta luôn có*

$$k^n = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} i!S(n,i).$$

Chứng minh: Đặt $a_k = k!S(n,k)$ và $b_i = i^n$. Theo Định lý 2.4.5, ta có $a_k = \sum\limits_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} b_i$. Đặt $c_k = (-1)^k a_k$. Khi đó $c_k = \sum\limits_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} b_i$. Ký hiệu đẳng thức này như sau $c^k = (1-b)^k$ và hiểu là sau khi khai triển thay b^i bởi b_i. Với ký hiệu hiệu hình thức, đúng với mọi giá trị của x, có thể viết đồng nhất thức như sau: $(c+x)^k = (-b+1+x)^k$. Cho $x = -1$ ta có $(-1)^k b^k = (c-1)^k$ hay $b_k = (1-c)^k = \sum\limits_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}c_i$. Vậy $k^n = \sum\limits_{i=0}^{k}\binom{k}{i}i!S(n,i)$. □

Định lý 2.4.7. *Hàm sinh mũ của dãy số Stirling là* $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{S(n,k)x^n}{n!}$ *có công thức đóng bằng* $\dfrac{(e^x-1)^k}{k!}$.

Chứng minh: Theo Định lý 2.4.5, $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}\Big(\dfrac{1}{k!}\sum\limits_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}i^n\Big)x^n$. Do đó $k!f(x) = \sum\limits_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(ix)^n}{n!} = \sum\limits_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}e^{ix} = (e^x-1)^k$ hay $f(x) = \dfrac{(e^x-1)^k}{k!}$. □

Một vài ví dụ

Ví dụ 2.4.8. *Ký hiệu $D(n)$ là số các hoán vị của n phần tử không có phần tử cố định, chẳng hạn: Số các phép hoán vị $\pi \in S_n$ sao cho $\pi(k) \neq k$ với mọi k. Dễ dàng chỉ ra* $D(n) = n!\Big(\dfrac{1}{0!}-\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}-\cdots+\dfrac{(-1)^n}{n!}\Big)$. *Hàm sinh mũ của dãy $(D(n))$ là* $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{D(n)}{n!}x^n$. *Xác định công thức đóng của $f(x)$ và chứng minh* $D(n) = nD(n-1)+(-1)^n, D(n) = (n-1)\big(D(n-1)+D(n-2)\big)$.

Bài giải: Do bởi $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{D(n)}{n!}x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\Big(\dfrac{1}{0!}-\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}-\cdots+\dfrac{(-1)^n}{n!}\Big)x^n$ nên $f(x) = \Big(\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{k!}x^k\Big)\Big(\sum\limits_{k=0}^{\infty}x^k\Big) = e^{-x}.\dfrac{1}{1-x} = \dfrac{1}{e^x(1-x)}$.
Từ $f(x)(1-x) = e^{-x}$ suy ra $\dfrac{D(n)}{n!}-\dfrac{D(n-1)}{(n-1)!} = \dfrac{(-1)^n}{n!}$ và như vậy $D(n) = nD(n-1)+(-1)^n$. Từ $\begin{cases}D(n) = nD(n-1)+(-1)^n\\ D(n-1) = (n-1)D(n-2)+(-1)^{n-1}\end{cases}$ suy ra $D(n)+D(n-1) = nD(n-1)+(n-1)D(n-2)$ hay $D(n) = (n-1)\big(D(n-1)+D(n-2)\big)$. □

Ví dụ 2.4.9. *Ký hiệu $D(n)$ là số các hoán vị của n phần tử không có phần tử cố định. Chứng minh rằng $\sum\limits_{n=0}^{m} \binom{m}{n} D(n) = m!$ với mọi số nguyên $m \geqslant n$.*

Bài giải: Do bởi $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{D(n)}{n!} x^n = \dfrac{1}{e^x(1-x)}$ nên $f(x)e^x = \dfrac{1}{1-x}$. Vậy $\Big(\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{D(n)}{n!} x^n\Big)\Big(\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n!} x^n\Big) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$. So sánh hệ số của x^m ở hai vế ta được $\sum\limits_{n=0}^{m} \binom{m}{n} D(n) = m!$. □

Ví dụ 2.4.10. *Dãy số Bell (B_n) được xác định như sau: $B_n = \sum\limits_{k=1}^{n} S(n,k)$ với $n > 1$ và $B_0 = 1$. Xác định công thức đóng của $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{B_n}{n!} x^n$.*

Bài giải: Dễ dàng chỉ ra $B_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$. Đặt $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{B_n}{n!} x^n$. Vậy $f(x)e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n!} B_{n+1} x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1) \dfrac{B_{n+1}}{(n+1)!} x^n = f'(x)$. Từ đây suy ra $\int \dfrac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{dx} = \int e^x\,\mathrm{dx}$ hay $\ln(f(x)) = e^x + C$. Vì $f(0) = B_0 = 1$ nên $C = -1$ và như thế $\ln(f(x)) = e^x - 1$. Do đó $f(x) = e^{e^x - 1}$. □

2.5 Hàm sinh của dãy các đa thức Bernoulli

Định nghĩa 2.5.1. *Các đa thức Bernoulli* $\{B_n(x)\}$ là những đa thức thỏa mãn ba điều kiện sau đây:

(i) $B_0(x) = 1$

(ii) $B_n'(x) = nB_{n-1}(x)$ với $n \geqslant 1$

(iii) $\int\limits_0^1 B_n(x)dx = 0$ với $n \geqslant 1$.

Định nghĩa 2.5.2. *Số Bernoulli thứ n* là $B_n(0)$ và được ký hiệu qua B_n với $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Bổ đề 2.5.3. *Đạo hàm cấp s của $B_n(x)$ là $B_n^{(s)}(x) = n(n-1)\ldots(n-s+1)B_{n-s}(x)$ và $B_n(x)$ là đa thức bậc n.*

Chứng minh: $B_n^{(s)}(x) = n(n-1)\ldots(n-s+1)B_{n-s}(x)$ được suy ra từ điều kiện (ii). Vì $B_n^{(n)}(x) = n!B_0(x) = n!$ nên $\deg B_n(x) = n$. $\square$

Định lý 2.5.4. *Ta có ngay các hệ thức sau đây:* $B_n(x) = \sum\limits_{s=0}^{n} \binom{n}{s} B_s x^{n-s}$ *và* $B_0 = 1, \sum\limits_{s=0}^{n} \binom{n+1}{s} B_s = 0, B_n \in \mathbb{Q}$.

Chứng minh: Ta luôn có $B_n(x) = \sum\limits_{s=0}^{n} \dfrac{B_n^{(s)}(0)x^s}{s!}$. Theo Bổ đề 2.5.3, $B_n(x) = \sum\limits_{s=0}^{n} \dfrac{n!B_{n-s}(0)x^s}{s!(n-s)!} = \sum\limits_{s=0}^{n} \binom{n}{s} B_s x^{n-s}$. Cho $n \geq 1$, từ điều kiện $\int\limits_0^1 B_n(x)dx = 0$ ta suy ra hệ thức $\int\limits_0^1 \big(\sum\limits_{s=0}^{n} \binom{n}{s} B_s x^{n-s}\big)dx = 0$ hay $\dfrac{1}{n+1} \sum\limits_{s=0}^{n} \binom{n+1}{s} B_s = 0$. Vì $B_0 = 1, \sum\limits_{s=0}^{n} \binom{n+1}{s} B_s = 0$ nên $B_n \in \mathbb{Q}$ với mọi n (bằng quy nạp). $\square$

Từ kết quả này, dễ dàng nhận được một số đồng nhất thức và đa thức sau:

$$\begin{aligned}
B_0 &= 1\\
2B_1 + B_0 &= 0\\
3B_2 + 3B_1 + B_0 &= 0\\
4B_3 + 6B_2 + 4B_1 + B_0 &= 0\\
5B_4 + 10B_3 + 10B_2 + 5B_1 + B_0 &= 0\\
6B_5 + 15B_4 + 20B_3 + 15B_2 + 6B_1 + B_0 &= 0\\
&\dots\\
\sum_{s=0}^{n}\binom{n+1}{s}B_s &= 0.\\
B_0(x) &= 1\\
B_1(x) &= x - \frac{1}{2}\\
B_2(x) &= x^2 - x + \frac{1}{6}\\
B_3(x) &= x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x\\
B_4(x) &= x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}\\
B_5(x) &= x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x.
\end{aligned}$$

Hệ quả 2.5.5. *Ta có* $\Delta B_n(x) = B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}$.

Chứng minh: Ta luôn có hệ thức dưới đây:

$$B_n(x+1) = \sum_{s=0}^{n}\frac{B_n^{(s)}(1)x^s}{s!} = \sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}B_s(1)x^{n-s}.$$

Hiển nhiên $B_0(1) = B_0(0) = 1$. Cho $n \geqslant 2$, từ điều kiện $\int\limits_0^1 B_m(x)dx = 0$ khi $m \geqslant 1$ suy ra $0 = \int\limits_0^1 nB_{n-1}(x)dx = \int\limits_0^1 B_n'(x)dx = B_n(1) - B_n(0)$. Do vậy, khi xét $b(x) = B_n(x+1) - B_n(x)$, từ Định lý 2.5.4 ta có

$$b(x) = \sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}\big[B_s(1) - B_s(0)\big]x^{n-s} = \binom{n}{1}\big[B_1(1) - B_1(0)\big]x^{n-1}.$$

Vì $B_1(1) - B_1(0) = 1$ nên $\Delta B_n(x) = B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}$. $\square$

Ví dụ 2.5.6. *Với số nguyên dương n, s có* $\sum\limits_{k=0}^{n-1} k^s = \dfrac{1}{s+1}\sum\limits_{k=0}^{s} \binom{s+1}{k} B_k n^{s+1-k}$.

Bài giải: Theo Hệ quả 2.5.5 có $\sum\limits_{k=0}^{n-1} k^s = \dfrac{1}{s+1}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\big(B_{s+1}(k+1) - B_{s+1}(k)\big)$. Như vậy $\sum\limits_{k=0}^{n-1} k^s = \dfrac{1}{s+1}\big(B_{s+1}(n) - B_{s+1}(0)\big) = \dfrac{1}{s+1}\sum\limits_{k=0}^{s}\binom{s+1}{k} B_k n^{s+1-k}$ theo Định lý 2.5.4. $\square$

Ví dụ 2.5.7. *Tính tổng* $T = \sum\limits_{k=0}^{n} k^4$ *theo* n.

Bài giải: Theo ví dụ trên có $\sum\limits_{k=0}^{n} k^4 = \dfrac{1}{5}\big(B_5(n+1) - B_5\big)$ và như vậy nhận được $T = \dfrac{n^5}{5} + \dfrac{n^4}{2} + \dfrac{n^3}{3} - \dfrac{n}{30}$. $\square$

Hệ quả 2.5.8. *Ta có* $B_n = \dfrac{(-1)^n}{n!}\det\begin{pmatrix} \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & 0 & \dots & 0 \\ \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \dots & \dots & \binom{n}{n-1} \\ \binom{n+1}{0} & \binom{n+1}{1} & \dots & \dots & \binom{n+1}{n-1} \end{pmatrix}$.

Chứng minh: Từ $B_0 = 1, \sum\limits_{i=0}^{n}\binom{n+1}{i} B_i = 0$, ta có hệ phương trình tuyến tính với các ẩn $(B_0, B_1, \dots, B_n)$:

$$\begin{cases} \binom{1}{0} B_0 = 1 \\ \binom{2}{0} B_0 + \binom{2}{1} B_1 = 0 \\ \binom{3}{0} B_0 + \binom{3}{1} B_1 + \binom{3}{2} B_2 = 0 \\ \dots \\ \binom{n+1}{0} B_0 + \binom{n+1}{1} B_1 + \dots + \binom{n+1}{n} B_n = 0. \end{cases}$$

Hệ này có nghiệm $(B_0, B_1, \ldots, B_n)$. Tính B_n qua định thức ta được

$$B_n \quad \det\begin{pmatrix} \binom{1}{0} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \ldots & \ldots & \binom{n}{n-1} & 0 \\ \binom{n+1}{0} & \binom{n+1}{1} & \ldots & \ldots & \binom{n+1}{n-1} & \binom{n+1}{n} \end{pmatrix}$$

$$= \quad \det\begin{pmatrix} \binom{1}{0} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \ldots & \ldots & \binom{n}{n-1} & 0 \\ \binom{n+1}{0} & \binom{n+1}{1} & \ldots & \ldots & \binom{n+1}{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

hay $B_n = \dfrac{(-1)^n}{n!} \det\begin{pmatrix} \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & 0 & \ldots & 0 \\ \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \ldots & \ldots & \binom{n}{n-1} \\ \binom{n+1}{0} & \binom{n+1}{1} & \ldots & \ldots & \binom{n+1}{n-1} \end{pmatrix}.$ □

Xét dãy số Bernoulli $\{B_n\}$ với $B_0 = 1, \sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i} B_i = 0, n \geqslant 1$. *Hàm sinh mũ* của dãy các số Bernoulli $\{B_n\}$ là $B(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{B_n x^n}{n!}$.

Định lý 2.5.9. *Công thức đóng của hàm sinh mũ $B(x)$ của dãy các số Bernoulli là* $\dfrac{x}{e^x - 1}$.

Chứng minh: Vì $\sum\limits_{s=0}^{n} \binom{n+1}{s} B_s = 0$ nên $B_{n+1} = \sum\limits_{s=0}^{n+1} \binom{n+1}{s} B_s$ với $n = 1, 2, \ldots$. Thế $n+1$ qua n được $B_n = \sum\limits_{s=0}^{n} \binom{n}{s} B_s$ với $n = 2, 3, \ldots$. Vì $B_0 = \binom{0}{0} B_0$ và $B_1 = \binom{1}{0} B_0 + \binom{1}{1} B_1 - 1$ nên $B(x) = -x + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \Big(\sum\limits_{s=0}^{n} \binom{n}{s} B_s \Big) \dfrac{x^n}{n!} = -x + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \sum\limits_{s=0}^{n} \Big(\dfrac{B_s x^s}{s!}\Big)\Big(\dfrac{x^{n-s}}{(n-s)!}\Big) = -x + B(x)e^x$. Vậy $B(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$. □

Hệ quả 2.5.10. *Cho* $n \neq 1$ *và* n *lẻ có* $B_n = 0$.

Chứng minh: Vì $1 + \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{B_n x^n}{n!} = B(x) - B_1 x = \frac{x}{e^x - 1} + \frac{x}{2}$ nên $1 + \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{B_n x^n}{n!} = \frac{x(e^x + 1)}{2(e^x - 1)}$. Vì $\frac{x(e^x + 1)}{2(e^x - 1)}$ là hàm chẵn nên $B_n = 0$ khi $n \neq 1$ và n là số lẻ. □

Định lý 2.5.11. [Euler] *Ta có* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} z^n = \frac{ze^{xz}}{e^z - 1}$.

Chứng minh: Vì $B_n(x) = \sum\limits_{s=0}^{n} \binom{n}{s} B_s x^{n-s}$ theo Định lý 2.5.4 nên ta nhận được biểu diễn

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} z^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sum\limits_{s=0}^{n} \binom{n}{s} B_s x^{n-s}}{n!} z^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{n} \frac{B_s x^{n-s}}{s!(n-s)!} z^n = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{B_s z^s}{s!} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^r z^r}{r!}.
\end{aligned}$$

Theo Định lý 2.5.9 ta có $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} z^n = \frac{z}{e^z - 1} e^{xz} = \frac{ze^{xz}}{e^z - 1}$. □

Hệ quả 2.5.12. *Ta luôn có*

(i) $\sum\limits_{s=0}^{n-1} \binom{n}{s} B_s(x) = nx^{n-1}$ *với mọi* $n \geqslant 2$.

(ii) $B_n(x + y) = \sum\limits_{s=0}^{n} \binom{n}{s} B_s(x) y^{n-s}$.

Chứng minh: (i) Theo Định lý 2.5.11, ta có biểu diễn $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x+1)}{n!} z^n = \frac{ze^{xz}}{e^z - 1} e^z = \Big(\sum\limits_{r=0}^{\infty} \frac{B_r(x)}{r!} z^r \Big) \Big(\sum\limits_{s=0}^{\infty} \frac{z^s}{s!} \Big)$. So sánh hệ số của z^n ở hai vế, ta được $B_n(x+1) = \sum\limits_{s=0}^{n} \binom{n}{s} B_s(x)$ hay $B_n(x+1) = B_n(x) + \sum\limits_{s=0}^{n-1} \binom{n}{s} B_s(x)$. Vì $B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}$ theo Hệ quả 2.5.5 nên $\sum\limits_{s=0}^{n-1} \binom{n}{s} B_s(x) = nx^{n-1}, n \geqslant 2$.

(ii) Từ $\dfrac{ze^{(x+y)z}}{e^z-1} = \dfrac{ze^{xz}}{e^z-1}e^{yz}$ ta suy ra sự bằng nhau giữa hai chuỗi

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n(x+y)}{n!}z^n = \Big(\sum_{r=0}^{\infty}\frac{B_r(x)}{r!}z^r\Big)\Big(\sum_{s=0}^{\infty}\frac{y^s z^s}{s!}\Big)$$

và như vậy $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{B_n(x+y)}{n!}z^n = \sum\limits_{r,s=0}^{\infty}\dfrac{B_s(x)y^r}{s!r!}z^{s+r}$. So sánh hệ tử của z^n có $B_n(x+y) = \sum\limits_{s=0}^{n}\binom{n}{s}B_s(x)y^{n-s}$. □

Ví dụ 2.5.13. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{B_n(mx)}{n!}z^n = \dfrac{1}{m}\sum\limits_{k=0}^{m-1}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{m^n z^n}{n!}B_n(x+\dfrac{k}{m})$ *với mọi số nguyên* $m \geqslant 1$.

Bài giải: Vì $\dfrac{1}{e^z-1} = \dfrac{1+e^z+e^{2z}+\cdots+e^{(m-1)z}}{e^{mz}-1}$ nên theo Định lý 2.5.11, ta có biểu diễn $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{B_n(mx)}{n!}z^n = \dfrac{ze^{mxz}}{e^z-1} = \dfrac{1}{m}\dfrac{mze^{mxz}}{e^z-1}$ hay

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n(mx)}{n!}z^n &= \frac{1}{m}\frac{e^{mxz}mz(1+e^z+\cdots+e^{(m-1)z})}{e^{mz}-1}\\ &= \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{mze^{mz(x+\frac{k}{m})}}{e^{mx}-1}\\ &= \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{m^n z^n}{n!}B_n(x+\frac{k}{m}).\end{aligned}$$

Vậy $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{B_n(mx)}{n!}z^n = \dfrac{1}{m}\sum\limits_{k=0}^{m-1}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{m^n z^n}{n!}B_n(x+\dfrac{k}{m})$ với mọi $m \geqslant 1$. □

Ví dụ 2.5.14. *Với hai số nguyên* $m, n > 1$ *hãy tìm tất cả các đa thức* $f(x)$ *với hệ tử cao nhất bằng 1 thỏa mãn* $m^{-n}f(mx) = \dfrac{1}{m}\sum\limits_{k=0}^{m-1}f(x+\dfrac{k}{m})$.

Bài giải: Từ $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{B_n(mx)}{n!}z^n = \dfrac{1}{m}\sum\limits_{k=0}^{m-1}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{m^n z^n}{n!}B_n(x+\dfrac{k}{m})$ theo Ví dụ 2.5.13 ta suy ra $m^{-n}B_n(mx) = \dfrac{1}{m}\sum\limits_{k=0}^{m-1}B_n(x+\dfrac{k}{m})$. Vậy $B_n(x)$ thỏa mãn đầu bài.

Tính duy nhất: Giả sử có hai đa thức phân biệt $p(x) = x^n + ax^{n-1} + \cdots$ và $q(x) = x^n + bx^{n-1} + \cdots$ thỏa mãn đầu bài. Khi đó hiệu $\delta(x) = p(x) - q(x) = cx^d + \cdots$ với $c \neq 0$ và $d < n$ cũng thỏa mãn đầu bài. Vì $m^{-n}\delta(mx) = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\delta(x + \frac{k}{m})$ nên ta có $c = m^{d-n}c$ hay $c = 0$: vô lý, do $m > 1$ và $d < n$. □

Ví dụ 2.5.15. *Nếu có* $\frac{x}{e^x - 1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n!}x^n$ *thì các* $u_n \in \mathbb{Q}$ *với mọi* n.

Bài giải: Giả sử $\frac{x}{e^x - 1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n!}x^n$. Khi đó, qua quy đồng và giản ước x, nhận được đồng nhất thức $1 = \big(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}x^n\big)\big(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n!}x^n\big)$. So sánh hệ số của x^n ở hai vế, có $\frac{u_n}{n!1!} + \frac{u_{n-1}}{(n-1)!2!} + \cdots + \frac{u_1}{1!n!} + \frac{1}{(n+1)!} = 0$ với mọi $n \geqslant 1$. Biểu diễn dạng tổ hợp qua việc nhân hai vế với $(n+1)!$:

$$\binom{n+1}{1}u_n + \binom{n+1}{2}u_{n-1} + \cdots + \binom{n+1}{n}u_1 + 1 = 0, n \geqslant 1,$$

hay viết theo kiểu hình thức $(u+1)^{n+1} - u^{n+1} = 0$ với chú ý: Sau khi khai triển xong phải viết u^k thành u_k. Từ đồng nhất thức này ta có hệ phương trình tuyến tính vô hạn dưới đây:

$$\begin{cases} 2u_1 + 1 = 0 \\ 3u_2 + 3u_1 + 1 = 0 \\ 4u_3 + 6u_2 + 4u_1 + 1 = 0 \\ 5u_4 + 10u_3 + 10u_2 + 5u_1 + 1 = 0 \\ 6u_5 + 15u_4 + 20u_3 + 15u_2 + 6u_1 + 1 = 0 \\ \ldots . \end{cases}$$

Như vậy $u_n = B_n \in \mathbb{Q}$ với mọi n. □

2.6 Hàm sinh Dirichlet và hàm Zeta-Riemann

Định nghĩa 2.6.1. Với hàm số học $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, và $s > 1$, chuỗi luỹ thừa hình thức $F(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ được gọi là *chuỗi Dirichlet tương ứng* f. Cho dãy số $\{a_n\}$. Chuỗi $g(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ còn được gọi là *hàm sinh Dirichlet.*

Ta công nhận hai định lý sau về tính duy nhất, tính nhân của chuỗi Dirichlet:

Định lý 2.6.2. *Cho hai chuỗi Dirichlet* $F(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ *và* $G(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s}$ *tương ứng các hàm số học* $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$. *Nếu có số* $\delta \in \mathbb{R}$ *sao cho* $F(s) = G(s)$ *với mọi* $s \geqslant \delta$ *thì* $f(n) = g(n)$ *cho mọi* n.

Định lý 2.6.3. *Cho ba chuỗi Dirichlet* $F_i(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{f_i(n)}{n^s}$ *tương ứng ba hàm số học* $f_i : \mathbb{N} \to \mathbb{C}, i = 1, 2, 3$. *Nếu* $f_3(n) = \sum\limits_{u,v,uv=n} f_1(u)f_2(v)$ *với mỗi* $n \in \mathbb{N}$ *thì* $F_3(s) = F_1(s)F_2(s)$.

Định lý 2.6.4. *Cho số* $s > 1$ *và hai dãy số* $\{a_n\}, \{b_n\}$. *Xét hai hàm sinh Dirichlet* $g(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ *và* $h(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s}$. *Giả thiết hai chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^s}$ *và* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|b_n|}{n^s}$ *hội tụ trong khoảng* (s_0, ∞). *Khi đó* $g(s)h(s)$ *cũng là một hàm sinh Dirichlet sinh ra bởi dãy* $\{c_n\}$ *với* $c_n = \sum\limits_{uv=n} a_u b_v$ *trong khoảng* (s_0, ∞).

Chứng minh: Theo phép nhân các chuỗi ta có

$$g(s)h(s) = (\sum_{u=1}^{\infty} \frac{a_u}{u^s})(\sum_{v=1}^{\infty} \frac{b_v}{v^s}) = \sum_{u=1}^{\infty}\sum_{v=1}^{\infty} \frac{a_u b_v}{(uv)^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum\limits_{uv=n} a_u b_v}{n^s}.$$

Vậy $g(s)h(s)$ là một hàm sinh Dirichlet sinh ra bởi dãy $\{c_n\}$ với $c_n = \sum\limits_{uv=n} a_u b_v$. □

Định lý 2.6.5. *Nếu* f *là một hàm nhân thì* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \prod\limits_{p} (\sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{f(p^i)}{p^{is}})$, *trong đó tích lấy theo tất cả các số nguyên tố* p. *Chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ *được gọi là* hàm sinh Dirichlet *của hàm số học* f.

Chứng minh: Khai triển tích ở vế phải của hệ thức trên ta có

$$\begin{aligned}
\prod_p \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{f(p^i)}{p^{is}}\right) &= \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f(p_j^i)}{p_j^{is}}\right) \\
&= \sum \frac{f(p_{j_1}^{\lambda_{j_1}}) f(p_{j_2}^{\lambda_{j_2}}) \dots f(p_{j_r}^{\lambda_{j_r}})}{p_{j_1}^{s\lambda_{j_1}} p_{j_2}^{s\lambda_{j_2}} \dots p_{j_r}^{s\lambda_{j_r}}} \\
&= \sum f(p_1^{\lambda_1} p_2^{\lambda_2} \dots p_r^{\lambda_r}), \text{ vì } f \text{ là hàm số nhân,} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}, n = p_{j_1}^{\lambda_{j_1}} p_{j_2}^{\lambda_{j_2}} \dots p_{j_r}^{\lambda_{j_r}},
\end{aligned}$$

trong đó p_t là số nguyên tố thứ t. Như vậy hệ thức trên là đúng. □

Chú ý 2.6.6. *Ta sử dụng tích hữu hạn* $T_k = \prod_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{f(p_i^j)}{p_i^{js}}\right)$. *Sau đó cho* $k \to \infty$.

Định nghĩa 2.6.7. Cho số $s > 1$ và dãy số $\{a_n\}$. Chuỗi luỹ thừa hình thức $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ được gọi là *hàm zeta Riemann*.

Định lý 2.6.8. *Với* $s > 1$ *ta có*

(i) $\zeta^2(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n^s}$.

(ii) $\zeta(s) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1 - p_j^{-s}}$.

(iii) $\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$.

Chứng minh: (i) Theo Định lý 2.6.4, $\zeta^2(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{u|n} 1.1}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n^s}$.

(ii) Theo Định lý 2.6.5 với $f(n) = 1$ có $\zeta(s) = \prod_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{p_j^{is}}\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1 - p_j^{-s}}$.

(iii) Ký hiệu $G(s)$ là hàm sinh Dirichlet của hàm số học μ. Khi đó

$$G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \prod_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mu(p_j^i)}{p_j^{is}}\right) = \prod_{j=1}^{\infty} (1 - p_j^{-s}) = \frac{1}{\zeta(s)}.$$

Như vậy $\dfrac{1}{\zeta(s)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\mu(n)}{n^s}$. $\square$

Định lý 2.6.9. *Ta có* $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$.

Chứng minh: Công thức khai triển Fourier của hàm $f(x)$ trên $[-\pi, \pi]$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx), \begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, \mathrm{dx} \\ b_n = \dfrac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, \mathrm{dx} \\ n \geqslant 1. \end{cases}$$

Với hàm số chẵn $f(x) = x^2$ có $x^2 = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, a_n = \dfrac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi} x^2 \cos nx \, \mathrm{dx}$ cho mọi $n \geq 0$. Vậy $x^2 = \dfrac{\pi^2}{3} + 4 \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \cos nx}{n^2}$. Cho $x = \pi$ ta có $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$. $\square$

2.7 Tích vô hạn

Định nghĩa 2.7.1. Với dãy số (a_n) ta đặt tích $a_1 a_2 \ldots a_n \ldots = \prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Tích này được gọi là một *tích vô hạn*. Ký hiệu $A_k = \prod\limits_{n=1}^{k} a_n$. Nếu tồn tại $\lim\limits_{n \to +\infty} A_n = A$ thì A được gọi là *giá trị* của tích vô hạn $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ và viết $A = \prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Vấn đề đặt ra: Khi nào tồn tại giá trị của tích vô hạn $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ đối với một dãy số cho trước (a_n).
Ta có kết quả sau đây của G.M. Fichtenholz về tính hội tụ của một tích qua hội tụ của một tổng tương ứng:

Định lý 2.7.2. [Fichtenholz] *Cho dãy các số dương* (a_n) *và dãy các số âm* (b_n). *Khi đó*

(i) *Tích vô hạn* $\prod\limits_{i=1}^{\infty}(1+a_n)$ *hội tụ khi và chỉ khi tổng vô hạn* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_n$ *hội tụ.*

(ii) *Tích vô hạn* $\prod\limits_{i=1}^{\infty}(1+b_n)$ *hội tụ khi và chỉ khi tổng vô hạn* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_n$ *hội tụ.*

Chứng minh: (i) Hiển nhiên, nếu tích vô hạn $\prod\limits_{i=1}^{\infty}(1+a_n)$ hoặc tổng vô hạn $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_n$ hội tụ thì $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$. Khi đó $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(1+a_n)}{a_n} = 1$. Do bởi tích vô hạn $P = \prod\limits_{i=1}^{\infty}(1+a_n)$ hội tụ khi và chỉ khi tổng vô hạn $\ln P = \sum\limits_{i=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$ hội tụ. Vậy việc hội tụ hay phân kỳ của $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$ và $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_n$ là tương đương. Từ đây suy ra tích vô hạn $\prod\limits_{i=1}^{\infty}(1+a_n)$ hội tụ khi và chỉ khi tổng vô hạn $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_n$ hội tụ. □

Ví dụ 2.7.3. *Giả sử dãy* (a_n) *được xác định như sau:* $a_1 = 1$ *và* $a_{n+1} = \dfrac{(n+1)^3-1}{(n+1)^3+1}a_n$ *với mọi* $n \geqslant 1$. *Tìm* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ *và tích vô hạn* $\prod\limits_{n=2}^{\infty}\Big(\dfrac{n^3-1}{n^3+1}\Big)$.

Bài giải: Hiển nhiên $a_k = \prod\limits_{n=2}^{k}\Big(\dfrac{n^3-1}{n^3+1}\Big)$. Do bởi $n+1 = (n+2)-1$ và $n^2+n+1 = (n+1)^2-(n+1)+1$ nên $a_k = \dfrac{2(k^2+k+1)}{3k(k+1)}$. Do đó $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \dfrac{2}{3}$ và tích vô hạn $\prod\limits_{n=2}^{\infty}\Big(\dfrac{n^3-1}{n^3+1}\Big) = \dfrac{2}{3}$. □

Ví dụ 2.7.4. *Đặt* $I_n = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x\,\mathrm{dx}$. *Khi đó* $I_{n+1} = \dfrac{n}{n+1}I_{n-1}$ *với mọi* $n \geqslant 1$. *Từ đó suy ra*

$$\text{(i)}\quad \begin{cases} \int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2n} x\,\mathrm{dx} = \dfrac{(2n-1)(2n-3)\ldots 3.1}{2n(2n-2)\ldots 4.2}\dfrac{\pi}{2} \\ \int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x\,\mathrm{dx} = \dfrac{2n(2n-2)\ldots 4.2}{(2n+1)(2n-1)\ldots 3.1}. \end{cases}$$

(ii) $\left[\dfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \dfrac{1}{2n+1} < \dfrac{\pi}{2} < \left[\dfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \dfrac{1}{2n}$.

(iii) **[Wallis]** $\dfrac{\pi}{2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left[\dfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \dfrac{1}{2n+1}$.

Bài giải: (i) Hiển nhiên $I_{n+1} = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x(-\cos x)^{\cdot}$. Từ đây suy ra $I_{n+1} = nI_{n-1} - nI_{n+1}$ và ta nhận được $I_{n+1} = \dfrac{n}{n+1} I_{n-1}$ với mọi $n \geqslant 1$. Từ công thức truy hồi này suy ra $\begin{cases} \int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2n} x\,\mathrm{dx} = \dfrac{(2n-1)(2n-3)\ldots 3.1}{2n(2n-2)\ldots 4.2}\dfrac{\pi}{2} \\ \int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x\,\mathrm{dx} = \dfrac{2n(2n-2)\ldots 4.2}{(2n+1)(2n-1)\ldots 3.1}. \end{cases}$

(ii) Từ $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x\,\mathrm{dx} < \int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2n} x\,\mathrm{dx} < \int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2n-1} x\,\mathrm{dx}$ suy ra hai bất đẳng thức $\dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\dfrac{\pi}{2} < \dfrac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}$ và nhận được các bất đẳng thức $\left[\dfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \dfrac{1}{2n+1} < \dfrac{\pi}{2} < \left[\dfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \dfrac{1}{2n}$.

(iii) Từ (ii) suy ra giới hạn $\dfrac{\pi}{2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left[\dfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \dfrac{1}{2n+1}$. □

Ví dụ 2.7.5. *Chứng minh rằng tích vô hạn* $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \Big(1 - \dfrac{1}{(2n+1)^2}\Big)$ *hội tụ và tìm giá trị của nó.*

Bài giải: Do bởi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n+1)^2}$ hội tụ nên tích vô hạn $\prod\limits_{n=2}^{\infty} \Big(1 - \dfrac{1}{(2n+1)^2}\Big)$ hội tụ theo Định lý 2.7.2.

Từ $\dfrac{\pi}{2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left[\dfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \dfrac{1}{2n+1} = \dfrac{2}{1}.\dfrac{2}{3}.\dfrac{4}{3}.\dfrac{4}{5}\ldots\dfrac{2n}{2n-1}.\dfrac{2n}{2n+1}\ldots$ theo Ví dụ 2.7.4 ta suy ra $\dfrac{\pi}{4} = \Big(\dfrac{2}{3}.\dfrac{4}{3}\Big).\Big(\dfrac{4}{5}.\dfrac{6}{5}\Big)\ldots\Big(\dfrac{2n-2}{2n-1}.\dfrac{2n}{2n-1}\Big)\ldots$. Do vậy có giới hạn $\dfrac{\pi}{4} = \prod\limits_{n=1}^{\infty} \Big(1 - \dfrac{1}{(2n+1)^2}\Big)$. □

Ví dụ 2.7.6. *Giả sử dãy số* (x_k) *được xác định bởi* $x_0 = 1$ *và* $x_{k+1} = \Big(1 -$

$\frac{1}{4(k+1)^2}\Big)x_k$ *với mọi* $k \geqslant 0$. *Chứng minh rằng dãy* (x_k) *hội tụ và xác định giới hạn của nó.*

Bài giải: Do bởi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2}$ hội tụ nên tích vô hạn $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\Big(1-\frac{1}{4n^2}\Big)$ hội tụ theo Định lý 2.7.2. Vì $x_{k+1} = \Big(1-\frac{1}{4(k+1)^2}\Big)x_k = \prod\limits_{k=1}^{n+1}\Big(1-\frac{1}{4k^2}\Big)$ nên dãy số (x_k) hội tụ và $\lim\limits_{k\to+\infty} x_k = \prod\limits_{n=1}^{\infty}\Big(1-\frac{1}{4n^2}\Big)$.
Từ $\frac{2}{\pi} = \frac{1}{2}.\frac{3}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{4}\ldots\frac{2n-1}{2n}.\frac{2n+1}{2n}\ldots$ theo Ví dụ 2.7.4 ta suy ra $\frac{2}{\pi} = \Big(\frac{1}{2}.\frac{3}{2}\Big).\Big(\frac{3}{4}.\frac{5}{4}\Big)\ldots\Big(\frac{2n-1}{2n}.\frac{2n+1}{2n}\Big)\ldots$. Do vậy ta nhận được ngay giới hạn $\frac{2}{\pi} = \prod\limits_{n=1}^{\infty}\Big(1-\frac{1}{4n^2}\Big)$ hay $\lim\limits_{k\to+\infty} x_k = \frac{2}{\pi}$. □

Ví dụ 2.7.7. *Đánh số các số nguyên tố theo thứ tự tăng dần* $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \ldots$. *Khi đó ta có* $\prod\limits_{i=1}^{\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{p_i^2}} = \frac{\pi^2}{6}$. *Từ đó suy ra* $\prod\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{1-\frac{1}{p_i^2}} < \frac{5}{3}$.

Bài giải: Ta có $\prod\limits_{i=1}^{\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{p_i^2}} = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ theo Định lý 2.6.9. Do bởi $\pi^2 < 10$ nên $\prod\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{1-\frac{1}{p_i^2}} < \prod\limits_{i=1}^{\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{p_i^2}} = \frac{\pi^2}{6} < \frac{5}{3}$. □

Ví dụ 2.7.8. *Dãy số thực* (x_n) *được xác định bởi* $x_2 = 4$ *và với mọi* $n \geqslant 2$ *có* $x_{n+1} = \frac{n^4+2n^3-2n-1}{n^4}x_n$. *Tìm giới hạn của dãy* $\big(\frac{x_n}{n^2}\big)$ *khi* $n \to +\infty$.

Bài giải: Dễ dàng suy ra $x_{n+1} = \frac{(n+1)^2(n^2-1)}{n^4}x_n$ và ta có $\frac{x_{n+1}}{(n+1)^2} = \frac{n^2-1}{n^2}\frac{x_n}{n^2}$ với mỗi số nguyên dương n. Đặt $z_n = \frac{x_n}{n^2}$ với mỗi số nguyên dương n. Khi đó $z_{k+1} = (1-\frac{1}{k^2})z_k = \prod\limits_{n=2}^{k}(1-\frac{1}{n^2})z_2 = \prod\limits_{n=2}^{k}(1-\frac{1}{n^2})$. Do bởi

$z_{k+1} = \sum_{n=1}^{k}(1 - \frac{1}{n^2}) = \frac{1}{2}\frac{k+1}{k} \to \frac{1}{2}$ khi $k \to +\infty$. Vậy giới hạn của dãy $(\frac{x_n}{n^2})$ bằng $\frac{1}{2}$ khi $n \to +\infty$. □

Ví dụ 2.7.9. [VMO 2011] *Dãy số thực (x_n) xác định bởi $x_1 = 1$ và $x_n = \frac{2n}{(n-1)^2}\sum_{i=1}^{n-1} x_i$ với mọi $n \geqslant 2$. Đặt $y_n = x_{n+1} - x_n$ với mỗi số nguyên dương n. Chứng minh rằng dãy số (y_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \to +\infty$.*

Bài giải: Dễ dàng suy ra $x_{n+1} = \frac{(n+1)(n^2+1)}{n^3}x_n$ và $y_n = x_{n+1} - x_n = \frac{n^2+n+1}{n^2}\frac{x_n}{n}$ với mỗi số nguyên dương n. Đặt $z_n = \frac{x_n}{n}$ với mỗi số nguyên dương n. Khi đó $z_{k+1} = \frac{x_{k+1}}{k+1} = (1+\frac{1}{k^2})z_k = \prod_{n=1}^{k}(1+\frac{1}{n^2})z_1 = \prod_{n=1}^{k}(1+\frac{1}{n^2})$. Do bởi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ theo Định lý 2.6.9 nên $\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n^2})$ theo Định lý 2.7.2 hay (z_n) có giới hạn hữu hạn z khi $n \to +\infty$. Vì $y_n = \frac{n^2+n+1}{n^2}z_n$ với mỗi số nguyên dương n nên dãy (y_n) cũng có giới hạn hữu hạn z khi $n \to +\infty$. □

2.8 Đồng nhất thức Newton

Sử dụng chuỗi luỹ thừa hình thức để chứng minh một số đồng nhất thức liên quan đến đa thức đối xứng cơ bản. Giả sử $x_1, \ldots, x_n$ là n tham số. Ký hiệu

$$\begin{cases} \delta_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_n \\ \delta_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n \\ \ldots \\ \delta_n = x_1x_2\ldots x_n \\ N_t = x_1^t + x_2^t + \cdots + x_n^t, t = 1, 2, \ldots, N_0 = n \\ p_h = p_h(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i_1+\cdots+i_n=h} x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_n^{i_n}. \end{cases}$$

Định lý 2.8.1. [Newton] *Ta có các đồng nhất thức sau đây:*

$$N_t - N_{t-1}\delta_1 + \cdots + (-1)^{t-1}N_1\delta_{t-1} + (-1)^t t\delta_t = 0, 1 \leqslant t \leqslant n,$$
$$N_t - N_{t-1}\delta_1 + \cdots + (-1)^{n-1}N_{t-n+1}\delta_{n-1} + (-1)^n N_{t-n}\delta_n = 0, t > n.$$

Chứng minh: Với $f(x) = (x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n)$ ta nhận được

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x - x_1} + \dots + \frac{1}{x - x_n} = \frac{1}{x}\left[\frac{1}{1 - \dfrac{x_1}{x}} + \dots + \frac{1}{1 - \dfrac{x_n}{x}}\right].$$

Vậy $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \sum\limits_{t=0}^{\infty} \dfrac{x_1^t + x_2^t + \dots + x_n^t}{x^{t+1}} = \sum\limits_{t=0}^{\infty} \dfrac{N_t}{x^{t+1}}$ hay $\dfrac{f'(x)}{x^{n-1}} = \dfrac{f(x)}{x^n} \sum\limits_{t=0}^{\infty} \dfrac{N_t}{x^t}$. Từ đây có được đồng nhất thức $n - (n-1)\dfrac{\delta_1}{x} + (n-2)\dfrac{\delta_2}{x^2} - \dots + (-1)^{n-1}\dfrac{\delta_{n-1}}{x^{n-1}}$ $= [1 - \dfrac{\delta_1}{x} + \dfrac{\delta_2}{x^2} - \dots + (-1)^n \dfrac{\delta_n}{x^n}][n + \dfrac{\delta_1}{x} + \dots + \dfrac{\delta_t}{x^t} + \dots]$. So sánh hệ số của $\dfrac{1}{x^t}$ ở hai vế ta có các đồng nhất thức Newton. $\square$

Hệ quả 2.8.2. *Giả sử hai hệ các số thực $a_1, \dots, a_n$ và $b_1, \dots, b_n$ thỏa mãn $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^s = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k^s$ với mọi $s = 1, 2, \dots, n$. Khi đó có phép hoán vị π thuộc nhóm đối xứng S_n để $a_k = b_{\pi(k)}$ với $k = 1, 2, \dots, n$.*

Chứng minh: Sử dụng Định lý 2.8.1, qua quy nạp theo s nhận được các đồng nhất thức $\delta_s(a_1, \dots, a_n) = \delta_s(b_1, \dots, b_n)$ với mọi $s = 1, 2, \dots, n$. Từ đây suy ra $\prod\limits_{k=1}^{n}(x - a_k) = \prod\limits_{k=1}^{n}(x - b_k)$. Vậy có phép hoán vị π thuộc nhóm đối xứng S_n để $a_k = b_{\pi(k)}$ với $k = 1, 2, \dots, n$. $\square$

Định lý 2.8.3. *Đặt $u_i = (-1)^{i+1}\delta_i$ với $1 \leqslant i \leqslant n$. Khi đó có đồng nhất thức*

$$N_t = \sum \frac{t(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n - 1)!}{\lambda_1!\lambda_2!\cdots\lambda_n!} u_1^{\lambda_1} u_2^{\lambda_2} \cdots u_n^{\lambda_n},$$

trong đó tổng lấy theo tất cả các hệ $(\lambda_1, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$ các số nguyên không âm thỏa mãn $\lambda_1 + 2\lambda_2 + \dots + n\lambda_n = t$.

Chứng minh: Với $f(x) = (x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n)$ ta nhận được

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{x_1^t + x_2^t + \dots + x_n^t}{x^{t+1}} = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{N_t}{x^{t+1}}, (1).$$

Dễ dàng thấy $f(x) = x^n - u_1 x^{n-1} - u_2 x^{n-2} - \dots - u_n$. Biểu diễn $f(x) =$

$x^n - g(x)$. Ta có $\dfrac{f(x)}{x^n} = 1 - \dfrac{g(x)}{x^n}$. Viết thành chuỗi lũy thừa hình thức

$$\begin{aligned}\frac{f'(x)}{f(x)} &= \frac{f'(x)}{x^n}\frac{1}{1-\dfrac{g(x)}{x^n}} = \frac{f'(x)}{x^n}\sum_{t=0}^{\infty}(\frac{g(x)}{x^n})^t \\ &= \frac{f'(x)}{x^n}\sum_{t=0}^{\infty}(\frac{\delta_1}{x} - \frac{\delta_2}{x^2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{\delta_n}{x^n})^t, (2).\end{aligned}$$

Từ $(1), (2)$ ta suy ra

$$\begin{aligned}\sum_{t=0}^{\infty}\frac{N_t}{x^{t+1}} &= \frac{f'(x)}{x^n}\sum_{t=0}^{\infty}(\frac{u_1}{x} + \frac{u_2}{x^2} + \cdots + \frac{u_n}{x^n})^t \\ &= \sum_{t=0}^{\infty}(\frac{u_1}{x} + \frac{u_2}{x^2} + \cdots + \frac{u_n}{x^n})^t(\frac{n}{x} - \frac{(n-1)u_1}{x^2} - \cdots - \frac{u_{n-1}}{x^n}) \\ &= \sum_{t=0}^{\infty}[\sum\frac{t!u_1^{\lambda_1}u_2^{\lambda_2}\cdots u_n^{\lambda_n}}{\lambda_1!\lambda_2!\ldots\lambda_n!x^{h+1}}](n - \frac{(n-1)u_1}{x} - \cdots - \frac{u_{n-1}}{x^{n-1}}).\end{aligned}$$

ở đó tổng lấy theo tất cả các số nguyên không âm thoả mãn $\lambda_1 + 2\lambda_2 + \cdots + n\lambda_n = h$ và $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = t$. Vậy

$$\begin{aligned}\sum_{t=0}^{\infty}\frac{N_t}{x^{t+1}} &= \sum_{t=0}^{\infty}[\sum\frac{(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)!u_1^{\lambda_1}u_2^{\lambda_2}\cdots u_n^{\lambda_n}}{\lambda_1!\lambda_2!\ldots\lambda_n!x^{\lambda_1+2\lambda_2+\cdots+n\lambda_n+1}}] \\ &\qquad (n - \frac{(n-1)u_1}{x} - \cdots - \frac{u_{n-1}}{x^{n-1}}).\end{aligned}$$

ở đó tổng lấy theo tất cả các hệ $(\lambda_1, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ các số nguyên không âm. So sánh hệ số của $\dfrac{1}{x^{t+1}}$ ở hai vế ta có hệ số của $u_1^{\lambda_1}u_2^{\lambda_2}\cdots u_n^{\lambda_n}$ đúng bằng

$$\begin{aligned}&\frac{(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)!n}{\lambda_1!\lambda_2!\ldots\lambda_n!} - \frac{(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n - 1)!(n-1)}{(\lambda_1 - 1)!\lambda_2!\ldots\lambda_n!} - \\ &\cdots - \frac{(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n - 1)!1}{\lambda_1!\lambda_2!\ldots(\lambda_{n-1} - 1)!\lambda_n!}\end{aligned}$$

với $\lambda_1 + 2\lambda_2 + \cdots + n\lambda_n = t$. Biến đổi các số hạng ta có hệ số của $u_1^{\lambda_1}u_2^{\lambda_2}\cdots u_n^{\lambda_n}$ bằng

$$\frac{(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n - 1)![\lambda_1 + 2\lambda_2 + \cdots + n\lambda_n]}{\lambda_1!\lambda_2!\ldots\lambda_n!} = \frac{t(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n - 1)!}{\lambda_1!\lambda_2!\ldots\lambda_n!}.$$

Tóm lại $N_t = \sum \frac{t(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n-1)!}{\lambda_1!\lambda_2!\cdots\lambda_n!} u_1^{\lambda_1}u_2^{\lambda_2}\cdots u_n^{\lambda_n}$, trong đó tổng lấy theo tất cả các hệ $(\lambda_1, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ các số nguyên không âm thoả mãn $\lambda_1 + 2\lambda_2 + \cdots + n\lambda_n = t$. □

Mệnh đề 2.8.4. *Ta luôn có* $\sum\limits_{h=0}^{n}(-1)^h\delta_h p_{n-h} = 0$. *Từ đó suy ra*

$$\delta_n = \det\begin{pmatrix} p_1 & 1 & 0 & \ldots. & 0\\ p_2 & p_1 & 1 & \ldots. & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & ..\\ p_{n-1} & p_{n-2} & & \ldots. & 1\\ p_n & p_{n-1} & & \ldots. & p_1\end{pmatrix} \text{ và}$$

$$p_n = \det\begin{pmatrix} \delta_1 & 1 & 0 & \ldots. & 0\\ \delta_2 & \delta_1 & 1 & \ldots. & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & ..\\ \delta_{n-1} & \delta_{n-2} & & \ldots. & 1\\ \delta_n & \delta_{n-1} & & \ldots. & \delta_1\end{pmatrix}.$$

Chứng minh: Đặt $\delta_0 = 1$ và $\delta_h = 0$ cho $h > n$. Ta viết hàm sinh $\delta(t) = \sum\limits_{h=0}^{\infty}\delta_h t^h = \prod\limits_{i=1}^{n}(1+tx_i)$ và $p(t) = \sum\limits_{h=0}^{\infty}p_h t^h = \prod\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{1-tx_i}$. Ta có ngay $\delta(t)p(-t) = 1$. Trong khai triển của $\delta(t)p(-t)$ các hệ số của $t^j, j \geqslant 1$, bằng 0. Vậy $\sum\limits_{h=0}^{n}(-1)^h\delta_h p_{n-h} = 0$. Từ $\sum\limits_{h=0}^{n}(-1)^h\delta_h p_{n-h} = 0$ trong bổ đề trên ta cho $n = 1, 2, \ldots, n$ ta có hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} 1.p_1 + (-\delta_1).1 = 0\\ 1.p_2 + (-\delta_1)p_1 + \delta_2.1 = 0\\ \ldots\\ 1.p_{n-1} + (-\delta_1)p_{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1}.1 = 0\\ 1.p_n + (-\delta_1)p_{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1}\delta_{n-1}p_1 = (-1)^{n+1}\delta_n.\end{cases}$$

Hệ này có nghiệm $(1, -\delta_1, \delta_2, \ldots, (-1)^{n-1}\delta_{n-1})$. Qua việc tính 1 ta có

$$\det\begin{pmatrix} p_1 & 1 & 0 & \ldots. & 0\\ p_2 & p_1 & 1 & \ldots. & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & ..\\ p_{n-1} & p_{n-2} & & \ldots. & 1\\ p_n & p_{n-1} & & \ldots. & p_1\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots. & 0\\ 0 & p_1 & 1 & \ldots. & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & ..\\ 0 & p_{n-2} & & \ldots. & 1\\ (-1)^{n+1}\delta_n & p_{n-1} & & \ldots. & p_1\end{pmatrix}.$$

Vậy $\delta_n = \det \begin{pmatrix} p_1 & 1 & 0 & .... & 0 \\ p_2 & p_1 & 1 & .... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & .. \\ p_{n-1} & p_{n-2} & & .... & 1 \\ p_n & p_{n-1} & & .... & p_1 \end{pmatrix}$ và

$$p_n = \det \begin{pmatrix} \delta_1 & 1 & 0 & .... & 0 \\ \delta_2 & \delta_1 & 1 & .... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & .. \\ \delta_{n-1} & \delta_{n-2} & & .... & 1 \\ \delta_n & \delta_{n-1} & & .... & \delta_1 \end{pmatrix}$$

được chứng minh hoàn toàn tương tự. □

Xét trường hợp thường hay được sử dụng là $n = 3$. Khi đó có $\delta_1, \delta_2, \delta_3$:

$$\begin{cases} \delta_1 = x_1 + x_2 + x_3 = N_1 \\ \delta_2 = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 \\ \delta_3 = x_1x_2x_3 \\ N_t = x_1^t + x_2^t + x_3^t, t = 1, 2, \dots \\ p_k = \sum\limits_{i_1+i_2+i_3=k} x_1^{i_1}x_2^{i_2}x_3^{i_3}. \end{cases}$$

Ví dụ 2.8.5. *Ta có* $\dfrac{x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1x_2x_3}{x_1 + x_2 + x_3} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_3x_1.$

Bài giải: Theo Định lý 2.8.1 ta có $N_3 - N_2\delta_1 + N_1\delta_2 - 3\delta_3 = 0$. Vậy $\dfrac{N_3 - 3\delta_3}{N_1} = N_2 - \delta_2$ và nhận được đồng nhất thức trên. □

Ví dụ 2.8.6. *Nếu* x_1, x_2, x_3 *thỏa mãn hệ thức* $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_1x_2x_3 = 0$ *thì* $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = 0.$

Bài giải: Theo Định lý 2.8.1 ta có $N_4 - N_3\delta_1 + N_2\delta_2 - N_1\delta_3 = 0$. Vậy $N_4 + N_2\delta_2 = N_1(N_3 + \delta_3) = 0$ và nhận được đồng nhất thức trên. □

Ví dụ 2.8.7. *Các số* x_1, x_2, x_3 *thỏa mãn* $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. *Khi đó hãy tính*

(i) $T = \Big(\dfrac{x_2 - x_3}{x_1} + \dfrac{x_3 - x_1}{x_2} + \dfrac{x_1 - x_2}{x_3}\Big)\Big(\dfrac{x_1}{x_2 - x_3} + \dfrac{x_2}{x_3 - x_1} + \dfrac{x_3}{x_1 - x_2}\Big).$

(ii) *Chứng minh* $x_1^6 + x_2^6 + x_2^6 = 3x_1^2x_2^2x_3^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)^3$.

Bài giải: (i) Phân tích và giản ước được $T = \dfrac{\delta_1^3 - 4\delta_1\delta_2 + 9\delta_3}{\delta_3} = 9$.

(ii) Dễ thấy x_1, x_2, x_3 là 3 nghiệm của $x^3 + \delta_2 x - \delta_3 = 0$. Do đó ta có $N_3 = 3\delta_3, N_4 = \delta_3 N_1 - \delta_2 N_2 = -\delta_2 N_2$. Như thế $N_6 = -N_4\delta_2 + N_3\delta_3 = 3\delta_3^2 + \delta_2^2 N_2 = 3\delta_3^2 - 2\delta_2^3$, vì $N_2 = -2\delta_2$. □

Ví dụ 2.8.8. *Đặt* $\delta_0 = p_0 = 1$. *Khi đó* $\delta_0 p_3 - \delta_1 p_2 + \delta_2 p_1 - \delta_3 p_0 = 0$. *Từ đó suy ra* $\delta_3 = \det\begin{pmatrix} p_1 & 1 & 0 \\ p_2 & p_1 & 1 \\ p_3 & p_2 & p_1 \end{pmatrix}$ *và* $p_3 = \det\begin{pmatrix} \delta_1 & 1 & 0 \\ \delta_2 & \delta_1 & 1 \\ \delta_3 & \delta_2 & \delta_1 \end{pmatrix}$.

Bài giải: Đặt $\delta_k = 0$ khi $k > 3$. Viết hàm sinh $\delta(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \delta_k t^k = \prod\limits_{i=1}^{3}(1+tx_i)$ và $p(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k t^k = \prod\limits_{i=1}^{3} \dfrac{1}{1+tx_i}$. Ta có ngay $\delta(t)p(-t) = 1$. Khai triển $\delta(t)p(-t)$, các hệ số của $t^j, j \geqslant 1$, đều bằng 0. Vậy $\sum\limits_{k=0}^{3}(-1)^k\delta_k p_{3-k} = 0$. Từ quan hệ này suy ra hệ phương trình tuyến tính:

$$\begin{cases} 1.p_1 - \delta_1.1 = 0 \\ 1.p_2 - \delta_1.p_1 + \delta_2.1 = 0 \\ 1.p_3 - \delta_1.p_2 + \delta_2.p_1 = \delta_3. \end{cases}$$

Hệ này có nghiệm $(1, -\delta_1, \delta_2)$. Qua việc tính hệ số của 1 ta suy ra quan hệ $\det\begin{pmatrix} p_1 & 1 & 0 \\ p_2 & p_1 & 1 \\ p_3 & p_2 & p_1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & p_1 & 1 \\ \delta_3 & p_2 & p_1 \end{pmatrix} = \delta_3$. $p_3 = \det\begin{pmatrix} \delta_1 & 1 & 0 \\ \delta_2 & \delta_1 & 1 \\ \delta_3 & \delta_2 & \delta_1 \end{pmatrix}$ được chứng minh hoàn toàn tương tự. □

Ví dụ 2.8.9. *Với* $x, y, z \geqslant 0$ *và* $xy + yz + zx = 1$ *ta có các bất đẳng thức*

$$T = x(1-y^2)(1-z^2) + y(1-z^2)(1-x^2) + z(1-x^2)(1-y^2) \leqslant \frac{4\sqrt{3}}{9}$$

$$P = x(2-y^2)(2-z^2) + y(2-z^2)(2-x^2) + z(2-x^2)(2-y^2) \geqslant 2\sqrt{3}.$$

Bài giải: Biến đổi được $T = 4\delta_3 = 4xyz$. Vì $1 = xy+yz+zx \geqslant 3\sqrt[3]{(xyz)^2}$ nên $T \leqslant \dfrac{4\sqrt{3}}{9}$. Ta còn có $P = 2\delta_1 + 7\delta_3 \geqslant 2\delta_1$. Vì $(x+y+z)^2 \geqslant 3(x+yz+zx) = 3$ nên $P \geqslant 2\sqrt{3}$. □

Ví dụ 2.8.10. *Chứng minh rằng nếu a, b, c là ba số thực phân biệt thì có*

$$\frac{a^3(b^2-c^2)+b^3(c^2-a^2)+c^3(a^2-b^2)}{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)} < a^2+b^2+c^2.$$

Bài giải: Dễ thấy cả tử và mẫu đều chia hết cho $(a-b)(b-c)(c-a)$. Vậy $VT = ab+bc+ca < a^2+b^2+c^2$ vì a, b, c phân biệt. □

Ví dụ 2.8.11. *Chứng minh rằng nếu a, b, c là ba số thực phân biệt thì*

$$\frac{a^2(a+b)(a+c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2(b+c)(b+a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2(c+a)(c+b)}{(c-a)(c-b)} > 3(ab+bc+ca).$$

Bài giải: Sau khi quy đồng, cả tử và mẫu đều chia hết cho $(a-b)(b-c)(c-a)$. Vậy $VT = (a+b+c)^2 > 3(ab+bc+ca)$ vì a, b, c phân biệt. □

Ví dụ 2.8.12. *Chứng minh rằng nếu $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $ab+ac+ad+bc+bd+cd=0$ thì*

$$a^3+b^3+c^3+d^3-3\big(bcd+cda+dab+abc\big) = (a+b+c+d)^3.$$

Bài giải: Đặt $\begin{cases} \delta_1 = a+b+c+d \\ \delta_2 = ab+ac+ad+bc+bd+cd \\ \delta_3 = abc+abd+acd+bcd \\ \delta_4 = abcd \\ N_t = a^t+b^t+c^t+d^t, t = 1, 2, \ldots, N_0 = 4. \end{cases}$ Theo Định lý 2.8.1 có $N_3 - N_2\delta_1 + N_1\delta_2 - 3\delta_3 = 0$. Vậy $N_3 - 3\delta_3 = N_2\delta_1 - N_1\delta_2 = \delta_1^3 - 3\delta_1\delta_2$. Vì $\delta_2 = 0$ nên $a^3+b^3+c^3+d^3-3\big(bcd+cda+dab+abc\big) = (a+b+c+d)^3$. □

Ví dụ 2.8.13. *Đa thức $T = 2(x^7+y^7+z^7) - 7xyz(x^4+y^4+z^4)$ có nhân tử là $x+y+z$.*

Bài giải: Đặt $A = x+y+z, B = xy+yz+zx, C = xyz$. Đặt $a_n = x^n+y^n+z^n$. Khi đó x, y, z là ba nghiệm của $t^3 - At^2 + Bt - C = 0$và

$a_{n+3} = Aa_{n+2} - Ba_{n+1} + Ca_n$ với số nguyên $n \geqslant 0$ và $a_0 = 3$. Chú ý

$$\begin{aligned}
a_0 &= 3\\
a_1 &= A\\
a_2 &= A^2 - 2B\\
a_3 &= Aa_2 - Ba_1 + Ca_0 = A^3 - 3AB + 3C = Ak_3 + 3C\\
a_4 &= Aa_3 - Ba_2 + Ca_1 = Ak_4 + 2B^2\\
a_5 &= Ak_5 - 5BC\\
a_6 &= Ak_6 - B^3 + 3C^2\\
a_7 &= Ak_7 + 7B^2C.
\end{aligned}$$

Vậy $T = 2a_7 - 7Ca_4 = A(2k_7 - 7k_4C)$ có nhân tử $A = x + y + z$. □

2.9 Dãy truy hồi với hàm sinh

Ví dụ 2.9.1. *Dãy số (a_n) xác định bởi:* $\begin{cases} a_0 = 2, a_1 = 4, a_2 = 31\\ a_{n+3} = 4a_{n+2} + 3a_{n+1} - 18a_n \end{cases}$ *với mọi $n \geqslant 0$. Chứng minh rằng $a_{2010} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 2011)$.*

Bài giải: Đặt $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$. Khi đó có quan hệ

$$f(x)(4x + 3x^2 - 18x^3) = f(x) - 9x^2 + 4x - 2$$

hay $f(x) = \dfrac{9x^2 - 4x + 2}{18x^3 - 3x^2 - 4x + 1} = \dfrac{1}{1 + 2x} + \dfrac{1}{(1 - 3x)^2}$. Từ đây suy ra $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \big((-2)^n + (n + 1)3^n\big)x^n$ và có $a_n = (-2)^n + (n + 1)3^n$ với mọi $n \geqslant 0$. Như vậy $a_{2010} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 2011)$. □

Ví dụ 2.9.2. *Dãy (a_n) xác định qua $a_1 = 1$ và $a_n = 1.2.a_{n-1} + 2.3.a_{n-2} + \cdots + (n - 1).n.a_1$ với mọi số nguyên $n \geqslant 2$. Chứng minh đồng nhất thức $a_{n+3} - 4a_{n+2} - a_{n+1} = 2\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ khi $n \geqslant 2$.*

Bài giải: Xét $f(x) = a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$. Khi đó ta có hệ thức

$$f(x)(1.2.x + 2.3.x^2 + \cdots + n.(n + 1).x^n + \cdots) = f(x) - x.$$

Từ $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$ ta suy ra $1x^2 + 2x^3 + \cdots = \dfrac{x^2}{(x-1)^2}$. Lấy đạo hàm hai vế có $1.2.x + 2.3.x^2 + \cdots = \dfrac{-2x}{(x-1)^3}$. Vậy $f(x) = x + \dfrac{-2x^2}{x^3 - 3x^2 + 5x - 1}$. Từ $f(x)(x^3-3x^2+5x-1) = x^4-3x^3+3x^2-x$ ta nhân ra và so sánh hệ số của $x^n, n \geqslant 4$ ở hai vế, nhận được $a_{n+3} = 5a_{n+2}-3a_{n+1}+a_n$ với mọi số nguyên $n \geqslant 2$. Biểu diễn các mối quan hệ trong bảng hệ thức sau đây:

$$\begin{cases} -a_1 = -1 \\ -a_2 + 5a_1 = 3 \\ -a_3 + 5a_2 - 3a_1 = -3 \\ -a_4 + 5a_3 - 3a_2 + a_1 = 1 \\ -a_5 + 5a_4 - 3a_3 + a_2 = 0 \\ -a_6 + 5a_5 - 3a_4 + a_3 = 0 \\ \cdots = \cdots \\ -a_n + 5a_{n-1} - 3a_{n-2} + a_{n-3} = 0 \\ -a_{n+1} + 5a_n - 3a_{n-1} + a_{n-2} = 0 \\ -a_{n+2} + 5a_{n+1} - 3a_n + a_{n-1} = 0 \\ -a_{n+3} + 5a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n = 0. \end{cases}$$

Cộng vế với vế được $-a_{n+3} + 4a_{n+2} + a_{n+1} + 2\sum_{k=1}^{n} a_k = 0$. Như vậy $a_{n+3} - 4a_{n+2} - a_{n+1} = 2\sum_{k=1}^{n} a_k$. □

Bổ đề 2.9.3. *Giả sử dãy (a_n) có hàm sinh thường $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ thỏa mãn $f(\alpha^s)$ được xác định với $s = 0, 1, \ldots, k$ và α là căn nguyên thủy bậc k của đơn vị. Khi đó có $\sum_{n=0}^{\infty} a_{nk} = \dfrac{f(1) + f(\alpha^2) + \cdots + f(\alpha^{k-1})}{k}$.*

Bài giải: Với hàm sinh thường $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + \cdots$ có

$$\begin{aligned}
f(1) &= \sum_{n=0}^{\infty}\big(a_{nk} + a_{nk+1} + \cdots + a_{(n+1)k-1}\big)\\
f(\alpha) &= \sum_{n=0}^{\infty}\big(a_{nk} + a_{nk+1}\alpha + \cdots + a_{(n+1)k-1}\alpha^{k-1}\big)\\
f(\alpha^2) &= \sum_{n=0}^{\infty}\big(a_{nk} + a_{nk+1}\alpha^2 + \cdots + a_{(n+1)k-1}\alpha^{2(k-1)}\big)\\
\cdots &= \cdots\\
f(\alpha^{k-1}) &= \sum_{n=0}^{\infty}\big(a_{nk} + a_{nk+1}\alpha^{k-1} + \cdots + a_{(n+1)k-1}\alpha^{(k-1)(k-1)}\big).
\end{aligned}$$

Bởi vì $1+\alpha^s+\alpha^{2s}+\cdots+\alpha^{s(k-1)} = 0$ với $s = 1, 2, \ldots, k-1$, nên khi cộng k đồng nhất thức trên ta nhận được $f(1)+f(\alpha^2)+\cdots+f(\alpha^{k-1}) = k\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{nk}$. $\square$

Ví dụ 2.9.4. *Với số nguyên dương n, hãy tính tổng $a_n = \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{3k}$. Xét tính tuần hoàn của dãy (a_n) và chỉ ra $a_n \vdots 3^{[n/2]-1}$.*

Bài giải: Xét hàm sinh thường $f(x)$ của dãy $(b_k = (-1)^k\binom{n}{k})$. Khi đó ta có hệ thức $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}x^k = (1-x)^n$. Như vậy, với $\alpha = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ có

$$a_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{3k} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{3k}\binom{n}{3k} = \frac{1}{3}\big(f(1)+f(\alpha)+f(\alpha^2)\big)$$

hay $a_n = \dfrac{(1-\alpha)^n + (1-\alpha^2)^n}{3} = \dfrac{\Big(\dfrac{3}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Big)^n + \Big(\dfrac{3}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Big)^n}{3}$. Tóm lại tổng $a_n = \dfrac{2(\sqrt{3})^n}{3}\cos\dfrac{n\pi}{6} = \begin{cases} 2.3^{3k-1}(-1)^k & \text{khi } n = 6k\\ 3^{3k}(-1)^k & \text{khi } n = 6k+1\\ 3^{3k}(-1)^k & \text{khi } n = 6k+2\\ 0 & \text{khi } n = 6k+3\\ 3^{3k+1}(-1)^{k+1} & \text{khi } n = 6k+4\\ 3^{3k+2}(-1)^{k+1} & \text{khi } n = 6k+5.\end{cases}$ Dễ dàng suy ra (a_n) không tuần hoàn và $a_n \vdots 3^{[n/2]-1}$. $\square$

Ví dụ 2.9.5. *Với mỗi số nguyên dương n, hãy tính tổng $a_n = \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{5n}{5k}$.*

Bài giải: Xét hàm sinh thường $f(x)$ của dãy $(b_k = (-1)^k\binom{5n}{k})$. Ta có hệ thức $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{5n}{k}x^k = (1-x)^{5n}$. Như vậy, với $\alpha = \cos\dfrac{2\pi}{5} + i\sin\dfrac{2\pi}{5}$ có

$$a_n = \sum_{k=0}^{5n}(-1)^k\binom{5n}{5k} = \sum_{k=0}^{5n}(-1)^{5k}\binom{5n}{5k} = \frac{1}{5}\sum_{k=0}^{4}f(\alpha^k)$$

hay $\dfrac{(1-\alpha)^{5n}+(1-\alpha^2)^{5n}+(1-\alpha^3)^{5n}+(1-\alpha^4)^{5n}}{5}$. Vậy nhận được tổng $a_{2m} = \dfrac{2^{10m+1}(-1)^m}{5}\big[\sin^{10m}\dfrac{\pi}{5} + \sin^{10m}\dfrac{2\pi}{5}\big]$ và $a_{2m+1} = 0$. □

Ví dụ 2.9.6. *Dãy (a_n) thỏa mãn $a_1 = -\dfrac{1}{2}$ và $a_{n+1} = \binom{n+1}{1}a_n + \binom{n+1}{2}a_{n-1} + \cdots + \binom{n+1}{n}a_1 + 1$ với mọi số nguyên $n > 1$. Chứng minh rằng a_{2011} nguyên và chia hết cho 2011.*

Bài giải: Dễ dàng kiểm tra $\Big(\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{x^k}{(k+1)!}\Big)\Big(1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_nx^n}{n!}\Big) = 1$. Như vậy $1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_nx^n}{n!} = \dfrac{x}{e^x-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{B_nx^n}{n!}$ theo Định lý 2.5.9. Do đó $a_n = B_n$ với mọi n. Đặc biệt $a_{2011} = B_{2011} = 0$ theo Hệ quả 2.5.10 và suy ra a_{2011} nguyên và chia hết cho 2011. □

Ví dụ 2.9.7. *Dãy (a_n) xác định qua $a_1 = 1$ và $a_n = 1.2.a_{n-1} - 2.3.a_{n-2} + \cdots + (-1)^n(n-1).n.a_1$ với mọi số nguyên $n \geqslant 2$. Chứng minh rằng, khi $n \geqslant 2$ luôn có $a_{n+3} + 2a_{n+2} + 5a_{n+1} + 6\sum\limits_{k=1}^{n}a_k = 8$.*

Bài giải: Xét $f(x) = a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$. Khi đó ta có hệ thức

$$f(x)(1.2.x - 2.3.x^2 + \cdots + (-1)^{n+1}n.(n+1).x^n + \cdots) = f(x) - x.$$

Từ $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$ ta suy ra $-1 + 2x - 3x^2 + \cdots = -\dfrac{1}{(x+1)^2}$. Lấy đạo hàm hai vế có $1.2.x - 2.3.x^2 + \cdots = \dfrac{2x}{(x+1)^3}$ và như vậy nhận được

$f(x) = \dfrac{x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x}{x^3 + 3x^2 + x + 1}$. Từ $f(x)(x^3+3x^2+x+1) = x^4+3x^3+3x^2+x$ ta nhân ra và so sánh hệ số của $x^n, n \geqslant 4$ ở hai vế, được $a_1 = 1, a_2 = 2$, và $a_3 = -2$, $a_4 + a_3 + 3a_2 = 0, a_{n+3} + a_{n+2} + 3a_{n+1} + a_n = 0$ với mọi số nguyên $n \geqslant 2$. Biểu diễn các mối quan hệ trong bảng hệ thức sau đây:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 + a_1 = 3 \\ a_3 + a_2 + 3a_1 = 3 \\ a_4 + a_3 + 3a_2 + a_1 = 1 \\ a_5 + a_4 + 3a_3 + a_2 = 0 \\ a_6 + a_5 + 3a_4 + a_3 = 0 \\ \cdots = \cdots \\ a_n + a_{n-1} + 3a_{n-2} + a_{n-3} = 0 \\ a_{n+1} + a_n + 3a_{n-1} + a_{n-2} = 0 \\ a_{n+2} + a_{n+1} + 3a_n + a_{n-1} = 0 \\ a_{n+3} + a_{n+2} + 3a_{n+1} + a_n = 0. \end{cases}$$

Cộng vế với vế được $a_{n+3} + 2a_{n+2} + 5a_{n+1} + 6\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = 8.$ □

Ví dụ 2.9.8. *Dãy (a_n) xác định bởi $a_n = \dfrac{1.3.5\ldots(2n+1)}{2011^n.n!}$ với mọi số nguyên $n \geqslant 0$. Tính $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$.*

Bài giải: Hiển nhiên $a_{n+1} = \dfrac{2n+3}{2011(n+1)} a_n$ với mọi $n \geqslant 1$. Khi $n \to +\infty$ thì $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \to \dfrac{2}{2011}$. Như vậy chuỗi lũy thừa $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$ luôn luôn hội tụ. Từ hệ thức $2011(n+1)a_{n+1} = 2na_n + 3a_n$ suy ra $2011(n+1)a_{n+1}x^n = 2x(na_nx^{n-1}) + 3a_nx^n$. Cho $n = 0, 1, 2, \ldots$ và lấy tổng tất cả được $2011\big(\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{k+1}x^{k+1}\big)' = 2x\big(\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_kx^k\big)' + 3\big(\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_kx^k\big)$. Khi đó ta có hệ thức $2011\big(f(x) - 1\big)' = 2xff'(x) + 3f(x)$ hay $\big(2011 - 2x\big)f'(x) = 3f(x)$. Từ đây suy ra $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{3}{2011 - 2x}$. Lấy tích phân hai vế được $\ln f(x) = -\dfrac{3}{2}\ln(2011-2x) + a$ hay $f(x) = \big(2011-2x\big)^{-3/2}.e^a$. Vì $f(0) = 1$ nên $1 = 2011^{-3/2}.e^a$ hay $e^a = 2011^{3/2}$. Tóm lại ta có $f(x) = 2011^{3/2}.\big(2011-2x\big)^{-3/2}$. Với $x = 1$ có $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = \Big(\dfrac{2011}{2009}\Big)^{\frac{3}{2}}$. □

Ví dụ 2.9.9. *Dãy (a_n) xác định qua $a_1 = 1$ và $a_n = 1a_{n-1} + 2a_{n-2} + \cdots + (n-1)a_1$ với mọi số nguyên $n \geqslant 2$. Chứng minh $a_3 = 3a_2$ và $a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n = 0$ với mọi số nguyên $n \geqslant 2$ và xác định a_n theo n. Từ đó suy ra a_{2k+1} chia hết cho 3 khi $k \geqslant 1$.*

Bài giải: Xét $f(x) = a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$. Khi đó ta có

$$f(x)(1x + 2x^2 + \cdots + nx^n + \cdots) = f(x) - x.$$

Từ $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$ ta suy ra $1x + 2x^2 + \cdots = \dfrac{x}{(x-1)^2}$. Vậy $f(x) = x + \dfrac{x^2}{x^2 - 3x + 1}$ và được $f(x)(x^2 - 3x + 1) = x^3 - 2x^2 + x$. Nhân ra và so sánh hệ số của $x^n, n \geqslant 1$ ở hai vế, nhận được $a_1 = 1, a_2 = 1$, $a_3 = 3a_2$, và $a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n = 0$ với mọi số nguyên $n \geqslant 2$. Từ đó có công thức xác định a_n. □

Ví dụ 2.9.10. *Dãy (a_n) xác định qua $a_1 = 1$ và $a_{n+1} = \dfrac{2n+3}{4(n+1)}a_n$ với mọi số nguyên $n \geqslant 0$. Tính tổng $T = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$.*

Bài giải: Do $4(n+1)a_{n+1} = 2na_n + 3a_n$ nên $4(n+1)a_{n+1}x^n = 2xna_nx^{n-1} + 3a_nx^n$ với mọi số nguyên $n \geqslant 0$. Cộng tất cả các hệ thức này ta nhận được

$$4\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}x^{n+1}\Big)' = 2x\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n\Big)' + 3\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n.$$

Đặt $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_nx^n$. Khi đó $4(f-1)' = 2xf' + 3f$ hay $(4-2x)f' = 3f$ và suy ra $\dfrac{f'}{f} = \dfrac{3}{2}\dfrac{1}{2-x}$. Như vậy $(\ln f)' = -\dfrac{3}{2}(\ln(2-x))'$. Dễ dàng có $f(x) = (2-x)^{-\frac{3}{2}}e^a$. Vì $f(0) = a_0 = 1$ nên $e^a = 2^{\frac{3}{2}}$. Tóm lại $f(x) = \Big(1 - \dfrac{x}{2}\Big)^{-\frac{3}{2}}$. Với $x = 1$ có $T = f(1) = 2\sqrt{2}$. □

Ví dụ 2.9.11. *Dãy* (a_n) *xác định qua* $a_1 = 1$ *và* $a_{n+1} = \dfrac{2n+5}{3(n+2)}a_n$ *với mọi số nguyên* $n \geqslant 0$. *Chứng minh rằng* $\sum\limits_{n=0}^{k} a_n < \dfrac{22}{5}$.

Bài giải: Do $3(n+2)a_{n+1} = 2(n+1)a_n + 3a_n$ nên $3(n+2)a_{n+1}x^{n+1} = 2x(n+1)a_nx^n + 3a_nx^{n+1}$ với mọi số nguyên $n \geqslant 0$. Cộng tất cả các hệ thức này ta nhận được

$$3\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}x^{n+2}\Big)' = 2x\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^{n+1}\Big)' + 3\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^{n+1}.$$

Đặt $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_nx^{n+1}$. Khi đó $3(f - x)' = 2xf' + 3f$ hay $(3-2x)f' = 3f + 3$. Đặt $g(x) = f(x) + 1$. Khi đó $\dfrac{g'}{g} = \dfrac{3}{3-2x}$. Như vậy $(\ln g)' = -\dfrac{3}{2}(\ln(3-2x))'$. Dễ dàng có $g(x) = (3-2x)^{-\frac{3}{2}}e^a$. Vì $g(0) = a_0 = 1$ nên $e^a = 3^{\frac{3}{2}}$. Tóm lại $g(x) = 1 + \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_nx^{n+1} = \Big(1 - \dfrac{2x}{3}\Big)^{-\frac{3}{2}}$. Với $x = 1$ có $T = g(1) - 1 = 3\sqrt{3} - 1$. Do vậy $\sum\limits_{n=0}^{k} a_n < \dfrac{22}{5}$. □

Ví dụ 2.9.12. *Dãy* (a_n) *xác định qua* $a_0 = 1$ *và* $a_{n+1} = na_n - 2n^2 + 5n - 3$ *với mọi số nguyên* $n \geqslant 0$. *Xác định* a_n *theo* n *và chứng minh* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{a_{n+1}}{n!} = -e$.

Bài giải: Xét hàm sinh mũ của dãy (a_n) là $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{a_n}{n!}x^n$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned} f' &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{na_n - 2n^2 + 5n - 3}{n!}x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{na_n}{n!}x^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n^2 - 5n + 3}{n!}x^n = xf' - (2x^2 - 5x + 3)e^x. \end{aligned}$$

Như vậy $f' = (2x-3)e^x$ và suy ra $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{a_{n+1}}{n!}x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{2n-3}{n!}x^n$. Vậy $a_{n+1} =$

$2n-3$ hay $a_n = 2n-5$ với $n \geqslant 1$. Từ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{a_{n+1}}{n!} x^n = (2x-3)e^x$ ta nhận được $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{a_{n+1}}{n!} = -e$ khi $x = 1$. $\square$

Ví dụ 2.9.13. *Chứng minh rằng* $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{\binom{2k}{k}}{k+1} \dfrac{\binom{2(n-k)}{n-k}}{n-k+1} = \dfrac{\binom{2(n+1)}{n+1}}{n+2}$.

Bài giải: Xét $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{\binom{2n}{n}}{n+1} x^n$ với $0 < |x| < \dfrac{1}{4}$. Bởi vì $1 + xf(x)^2 \equiv f(x)$ theo Ví dụ 2.3.9 nên $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{\binom{2k}{k}}{k+1} \dfrac{\binom{2(n-k)}{n-k}}{n-k+1} = \dfrac{\binom{2(n+1)}{n+1}}{n+2}$ qua việc so sánh hệ số của x^{n+1} ở hai vế. $\square$

Ví dụ 2.9.14. *Xét dãy số hữu tỷ* $a_1 = 1, a_n = -\Big(\dfrac{a_{n-1}}{1!} + \dfrac{a_{n-2}}{2!} + \cdots + \dfrac{a_1}{(n-1)!}\Big)$ *với mọi số nguyên* $n \geqslant 2$. *Tìm tất cả các số nguyên dương* n *để* $n!a_{n+1} = 1$.

Bài giải: Ta có $a_n = 2a_n + \Big(\dfrac{a_{n-1}}{1!} + \dfrac{a_{n-2}}{2!} + \cdots + \dfrac{a_1}{(n-1)!}\Big)$ với mọi số nguyên $n \geqslant 2$. Đặt $f(x) = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$. Khi đó

$$\begin{aligned} & f(x)\Big(2 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\Big) \\ = \;& 2a_1x + (2a_2 + \frac{a_1}{1!})x^2 + (2a_3 + \frac{a_2}{1!} + \frac{a_1}{2!})x^3 + \cdots \\ = \;& 2a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \cdots = f(x) + x. \end{aligned}$$

Vậy $f(x)(1 + e^x) = f(x) + x$ hay $f(x) = xe^{-x}$. Từ đây suy ra đồng nhất

$$a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots = x\Big(1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots\Big).$$

Do đó $a_{n+1} = \dfrac{(-1)^n}{n!}$ với mọi số nguyên $n \geqslant 1$. Để $n!a_{n+1} = 1$ cần và đủ n là số chẵn. $\square$

Ví dụ 2.9.15. *Xét* $n \geqslant 3$ *số nguyên dương* $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \cdots \leqslant a_{n-1} \leqslant a_n$ *với tính chất: Không có ba số nào là độ dài ba cạnh một tam giác không suy biến. Xác định giá trị nhỏ nhất của* $\dfrac{a_n}{a_1}$ *mà nó có thể đạt được.*

Bài giải: Ta biết ba số $0 < a \leqslant b \leqslant c$ là độ dài ba cạnh tam giác khi và chỉ khi $c < a + b$. Vậy không có ba số hạng bất kỳ của dãy của dãy là độ dài ba cạnh một tam giác không suy biến thì $a_p \geqslant a_q + a_r$ với mọi p, q, r và $p > q, r$. Vì dãy là dãy không giảm nên ta chỉ cần xét $a_i + a_{i+1} \leqslant a_{i+2}$ với $i = 1, 2, \ldots, 2009$. Với định nghĩa $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \geqslant \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ khi và chỉ khi $a \geqslant c$ và $b \geqslant d$ ta có bất đẳng thức

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} \geqslant \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} \geqslant \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}, n \geqslant 2.$$

Giả sử $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Khi đó ta nhận được $a_n \geqslant ca_2 + da_1$ và suy ra $a_n \geqslant (c+d)a_1$. Do đó $\dfrac{a_n}{a_1} \geqslant c + d$. Do đó $\dfrac{a_n}{a_1}$ nhỏ nhất là bằng $c + d$ khi dãy là n số hạng đầu của dãy Fibonacci và giá trị nhỏ nhất của tỉ số đó bằng $a_n = \dfrac{a^n - b^n}{\sqrt{5}}$ với $a = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ và $b = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. $\square$

Ví dụ 2.9.16. *Xét dãy* $a_1 = 1, a_n = 1^2 a_{n-1} + 2^2 a_{n-2} + \cdots + (n-1)^2 a_1$ *với mọi số nguyên* $n \geqslant 2$. *Khi đó* $\begin{cases} a_2 = 4a_1 - 3, a_3 = 4a_2 - 2a_1 + 3 \\ a_{n+3} = 4a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n, n \geqslant 2. \end{cases}$

Bài giải: Đặt $f(x) = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$. Khi đó tích hai chuỗi

$$\begin{aligned} & f(x)\Big(1^2 x + 2^2 x^2 + 3^2 x^3 + \cdots\Big) \\ = \ & 1^2 a_1 x^2 + (1^2 a_2 + 2^2 a_1)x^3 + (1^2 a_3 + 2^2 a_2 + 3^2 a_1)x^4 + \cdots \\ = \ & a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \cdots = f(x) - x. \end{aligned}$$

Từ $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \cdots$ ta suy ra chuỗi lũy thừa sau:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-x)^2} &= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + 6x^5 + \cdots. \text{ Do đó nhận được} \\ \frac{x}{(1-x)^2} &= 1x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 + 6x^6 + \cdots \text{ và có biểu diễn} \\ \frac{x(1+x)}{(1-x)^3} &= 1^2 x + 2^2 x^2 + 3^2 x^3 + 4^2 x^4 + 5^2 x^5 + 6^2 x^6 + \cdots. \text{ Như thế} \end{aligned}$$

$f(x)\Big(\dfrac{x(1+x)}{(1-x)^3}\Big) = f(x) - x$ hay $f(x)\Big[x^3 - 2x^2 + 4x - 1\Big] = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x.$
Từ đồng nhất $\Big[a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots\Big]\Big[x^3 - 2x^2 + 4x - 1\Big] = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x$ suy ra $a_3 = 4a_2 - 2a_1 + 3, a_{n+3} = 4a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n$ với mọi $n \geqslant 2.$ $\square$

Ví dụ 2.9.17. *Xét dãy* $a_1 = 1, a_n = -1a_{n-1} + 2a_{n-2} - \cdots + (-1)^{n-1}(n-1)a_1$ *với mọi số nguyên* $n \geqslant 2$. *Khi đó ta có*

(i) $a_2 = -1, a_3 + 3a_2 = 0, a_{n+2} + 3a_{n+1} + a_n = 0, n \geqslant 2.$

(ii) *Tìm dư của phép chia* a_n *cho 3.*

Bài giải: (i) Đặt $f(x) = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$. Tích hai chuỗi lũy thừa

$$\begin{aligned} F(x) &= f(x)\Big(-1x + 2x^2 - 3x^3 + \cdots\Big) \\ &= -1a_1x^2 + (-1a_2 + 2a_1)x^3 + (-1a_3 + 2a_2 - 3a_1)x^4 + \cdots \\ &= a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + \cdots = f(x) - x. \end{aligned}$$

Từ $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdots$ suy ra chuỗi lũy thừa sau đây:

$$\frac{-1}{(1+x)^2} = -1 + 2x - 3x^2 + 4x^3 - 5x^4 + 6x^5 - \cdots.$$ Do đó nhận được

$$\frac{-x}{(1+x)^2} = -1x + 2x^2 - 3x^3 + 4x^4 - 5x^5 + 6x^6 - \cdots.$$ Thế vào $F(x)$ có

$f(x)\Big(\dfrac{-x}{(1+x)^2}\Big) = f(x) - x$ hay $f(x)\Big[x^2 + 3x + 1\Big] = x^3 + 2x^2 + x$. Từ đồng nhất $\Big[a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots\Big]\Big[x^2 + 3x + 1\Big] = x^3 + 2x^2 + x$ sẽ suy ra ngay $a_1 = 1, a_2 + 3a_1 = 2, a_3 + 3a_2 = 0, a_{n+2} + 3a_{n+1} + a_n = 0, n \geqslant 2.$
(ii) Ta có $a_3 \equiv 0 (\bmod 3)$. Vì $a_{n+2} + 3a_{n+1} + a_n = 0$ nên $a_{n+2} + a_n \equiv 0 (\bmod 3)$ khi $n \geqslant 2$. Do đó, khi số nguyên $k \geqslant 1$ có $\begin{cases} a_{2k+1} \equiv 0 (\bmod 3) \\ a_{4k+2} \equiv a_2 \equiv 2 (\bmod 3) \\ a_{4k} \equiv 1 (\bmod 3). \end{cases}$ $\square$

Ví dụ 2.9.18. *Xét dãy* (a_n), *trong đó* $a_n = \dfrac{1.3.5.7\ldots(2n+1)}{4^n.n!}$ *với mọi số nguyên* $n \geqslant 0$. *Đặt* $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_kx^k$. *Tìm công thức đóng và tính* $f(1)$.

Bài giải: Vì $a_{n+1} = \dfrac{2n+3}{4(n+1)} a_n$ với mọi n nên $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \to \dfrac{1}{2} < 1$. Vậy $f(x)$ hội tụ. Dễ dàng chỉ ra $\big(f(x) - a_0\big)' = 2xf'(x) + 3f(x)$. Vậy $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{3}{2}\dfrac{1}{2-x}$ hay $f(x) = \big(2-x\big)^{-\dfrac{3}{2}} e^c$. Bởi vì $f(0) = a_0 = 1$ nên $e^c = 2^{3/2}$. Tóm lại $f(x) = \Big(\dfrac{2-x}{2}\Big)^{-\dfrac{3}{2}}$ và $f(1) = 2^{3/2}$. □

Một số ví dụ tham khảo

Ví dụ 2.9.19. [VMO-1997] *Cho dãy số nguyên* (a_n) $_{,}n \in N$ *được xác định như sau:* $a_0 = 1, a_1 = 45$ *và* $a_{n+2} = 45a_{n+1} - 7a_n$ *với mọi* $n = 0, 1, 2, \ldots.$ *Khi đó hãy*

(i) *Tính số ước dương của* $a_{n+1}^2 - a_n a_{n+2}$ *theo n.*

(ii) *Chứng minh rằng* $1997a_n^2 + 7^{n+1}.4$ *là số chính phương với mỗi n.*

Ví dụ 2.9.20. [VMO-1998-A] *Cho dãy số nguyên* (a_n) $_{,}n \in N$ *được xác định như sau:* $a_0 = 20, a_1 = 100$ *và* $a_{n+2} = 4a_{n+1} + 5a_n + 20$ *với mọi* $n = 0, 1, 2, \ldots.$ *Khi đó hãy*

(i) *Tìm số nguyên dương h nhỏ nhất có tính chất* $a_{n+h} - a_n$ *chia hết cho 1998.*

(ii) *Tìm số hạng tổng quát của dãy.*

Ví dụ 2.9.21. [VMO-2011] *Cho dãy số nguyên* (a_n) $_{,}n \in N$ *được xác định như sau:* $a_0 = 1, a_1 = -1$ *và* $a_n = 6a_{n-1} + 5a_{n-2}$ *với mọi* $n = 2, 3, 4 \ldots.$ *Khi đó hãy*

(i) *Chứng minh rằng* $a_{2012} - 2010$ *chia hết cho 2011.*

(ii) *Tìm số hạng tổng quát của dãy .*

Kết luận của luận văn

Trong luận văn tác giả đã trình bầy được các nội dung chính sau đây:

(1) Vành, ước của không, miền nguyên, đồng cấu, trường, vành đa thức và nghiệm.

(2) Vành các chuỗi lũy thừa hình thức, khái niệm hàm sinh mũ và hàm sinh thường cùng một vài dãy số liên quan.

(3) Nghiên cứu một số dãy số Fibonacci, dãy Catalan, dãy Stirling và dãy các đa thức Bernoulli, Hàm sinh Dirichlet và hàm Zeta-Riemann, tích vô hạn.

(4) Tính được một số công thức đóng của một số dãy và chứng minh Đồng nhất thức Newton.

Do thời gian và dung lượng nên luận văn mới chỉ dừng lại ở mức tìm hiểu và giới thiệu về "Vành các chuỗi luỹ thừa hình thức" và một số "Hàm sinh" cơ bản về dãy số. Trong thời gian tới, nếu điều kiện cho phép, tác giả sẽ nghiên cứu, tìm hiểu kỹ hơn để có thể đưa ra một số kết quả có tính ứng dụng thực tiễn hơn phục vụ quá trình học tập và giảng dạy.

Trong quá trình thực hiện luận văn chắc chắn không tránh khỏi thiếu sót. Tác giả rất mong nhận được những ý kiến đóng góp của thầy cô và bạn bè để hoàn thiện luận văn tốt hơn.

Tác giả xin chân thành cảm ơn.

Tài liệu tham khảo

[1] H.X. Sính, *Đại số đại cương,* NXB Giáo dục, 2001.

[2] N.V. Hải, N.K. Minh và H.Q. Vinh, *Các bài thi Olympic Toán THPT Việt Nam (1990-2006),* NXB Giáo dục, 2007.

[3] R. Merris, *Combinatorics*, PWS publishing company 20 Park Plaza, Boston, MA 02116-4324.

[4] K.H. Wehrahn, *Combinatorics-An Introduction*, Carslaw Publications 1992.