

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

Lại Thị Quỳnh Nguyên

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP
GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT
PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số: 60.46.40

Người hướng dẫn khoa học
GS.TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU

THÁI NGUYÊN - NĂM 2011

Mục lục

Mở đầu	2
1 Một số hệ thức lượng giác cơ bản	4
1.1 Một số tính chất của hàm lượng giác cơ bản	4
1.2 Đẳng thức lượng giác và đồng nhất thức đại số	6
1.3 Một số tính chất của đa thức lượng giác	12
2 Một số phương pháp giải phương trình và bất phương trình lượng giác	20
2.1 Phương trình lượng giác đưa về dạng phương trình đại số . . .	20
2.2 Phương trình lượng giác giải bằng so sánh và ước lượng . . .	29
2.3 Bất phương trình lượng giác cơ bản	32
2.4 Các bất phương trình lượng giác hữu tỉ	34
2.5 Các bất phương trình lượng giác có chứa tham số	35
3 Một số ứng dụng của lượng giác trong đại số	39
3.1 Sử dụng lượng giác để chứng minh đẳng thức	39
3.2 Sử dụng lượng giác để chứng minh bất đẳng thức	42
3.3 Sử dụng lượng giác để giải phương trình, bất phương trình và hệ phương trình đại số	46
3.4 Sử dụng lượng giác trong bài toán cực trị	65
3.5 Sử dụng lượng giác trong các bài toán về dãy số	71
Kết luận	78
Tài liệu tham khảo	79

Mở đầu

Lượng giác là chuyên đề quan trọng trong chương trình toán phổ thông. Các bài toán lượng giác thường xuyên xuất hiện trong các đề thi tuyển sinh vào Đại học, Cao đẳng.

Việc giảng dạy lượng giác đã được đưa vào chương trình từ lớp 10 bậc trung học phổ thông, trong đó phần kiến thức về phương trình, bất phương trình lượng giác chiếm vai trò trọng tâm. Tuy nhiên, do thời gian hạn hẹp của chương trình phổ thông, không nêu được đầy đủ chi tiết tất cả các dạng bài toán về phương trình, bất phương trình lượng giác. Vì vậy học sinh thường gặp nhiều khó khăn khi giải các bài toán nâng cao về phương trình, bất phương trình lượng giác trong các đề thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng. Mặc dù đã có nhiều tài liệu tham khảo về lượng giác với các nội dung khác nhau, nhưng chưa có chuyên đề riêng khảo sát về phương trình và bất phương trình một cách hệ thống.

Đặc biệt, nhiều dạng toán về đại số và lượng giác có quan hệ chặt chẽ, khăng khít với nhau, không thể tách rời được. Nhiều bài toán lượng giác cần có sự trợ giúp của đại số, giải tích và ngược lại, ta có thể dùng lượng giác để giải một số bài toán về phương trình, bất phương trình và hệ phương trình trong đại số thông qua cách đặt ẩn phụ là những hàm lượng giác.

Do đó, để đáp ứng nhu cầu về giảng dạy, học tập và góp phần nhỏ bé vào sự nghiệp giáo dục, luận văn "Một số phương pháp giải phương trình và bất phương trình lượng giác" nhằm hệ thống các kiến thức cơ bản của lượng giác về phương trình, bất phương trình lượng giác kết hợp với kiến thức đại số, giải tích để tổng hợp, chọn lọc và phân loại các phương pháp giải phương trình, bất phương trình lượng giác và xây dựng một số lớp bài toán mới.

Luận văn được chia làm 3 chương.

Chương 1. Một số hệ thức lượng giác cơ bản

- Nhắc lại một số tính chất của hàm số lượng giác cơ bản: tính chất tuần

hoàn, phản tuần hoàn.

- Nêu một số đẳng thức lượng giác và đồng nhất thức đại số tương ứng.
- Nêu định nghĩa và một số tính chất của đa thức lượng giác.

Chương 2. Một số phương pháp giải phương trình và bất phương trình lượng giác

- Phân loại phương pháp giải một số dạng phương trình và bất phương trình lượng giác.
- Những ví dụ minh họa cho từng phương pháp.
- Một số bài tập ứng dụng.

Chương 3. Một số ứng dụng của lượng giác trong đại số

- Trình bày ứng dụng của lượng giác trong một số dạng toán đại số.
- Nêu các ví dụ minh họa đối với từng dạng toán.
- Một số bài tập ứng dụng.

Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đối với Giáo sư - TSKH Nguyễn Văn Mậu, người thầy đã trực tiếp hướng dẫn, cung cấp tài liệu và truyền đạt những kinh nghiệm nghiên cứu cho tôi.

Tôi xin chân thành cảm ơn các thầy, cô giáo trong khoa Toán - Tin, Phòng Đào tạo trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, trường Phổ thông Vùng cao Việt Bắc và bạn bè đồng nghiệp đã giúp đỡ, tạo điều kiện cho tôi hoàn thành bản luận văn này.

Thái Nguyên 2011
Lại Thị Quỳnh Nguyên

Chương 1

Một số hệ thức lượng giác cơ bản

1.1 Một số tính chất của hàm lượng giác cơ bản

1.1.1. Tính tuần hoàn, phản tuần hoàn

Xét hàm số $f(x)$ với tập xác định $D(f) \subset \mathbb{R}$, tập giá trị $R(f) \subset \mathbb{R}$.

Định nghĩa 1.1 (xem [1]). Hàm số $f(x)$ được gọi là hàm tuần hoàn (cộng tính) chu kỳ T ($T > 0$) trên M nếu $M \subset D(f)$ và

$$\begin{cases} \forall x \in M & \Rightarrow x \pm T \in M \\ f(x + T) & = f(x), \forall x \in M \end{cases}$$

Định nghĩa 1.2 (xem [1]). Cho $f(x)$ là hàm tuần hoàn trên M . Khi đó số T ($T > 0$) được gọi là chu kỳ cơ sở của $f(x)$ nếu $f(x)$ tuần hoàn với chu kỳ T mà không là hàm tuần hoàn với bất cứ chu kỳ nào bé hơn T .

Định nghĩa 1.3 (xem [1]). Hàm số $f(x)$ được gọi là hàm phản tuần hoàn (cộng tính) chu kỳ T ($T > 0$) trên M nếu $M \subset D(f)$ và

$$\begin{cases} \forall x \in M & \Rightarrow x \pm T \in M \\ f(x + T) & = -f(x), \forall x \in M \end{cases}$$

Định nghĩa 1.4 (xem [1]). Cho $f(x)$ là hàm phản tuần hoàn trên M . Khi đó số T ($T > 0$) được gọi là chu kỳ cơ sở của $f(x)$ nếu $f(x)$ là hàm phản tuần hoàn với chu kỳ T mà không là hàm phản tuần hoàn với bất cứ chu kỳ nào bé hơn T trên M .

Ví dụ 1.1. Chứng minh rằng 2π là chu kỳ cơ sở của hàm số $f(x) = \cos x$.

Giải. Tập xác định của hàm số $f(x)$ là $D(f) = \mathbb{R}$. Khi đó

$$\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow x \pm 2\pi \in \mathbb{R}.$$

và $f(x + 2\pi) = \cos(x + 2\pi) = \cos x = f(x)$.

Suy ra $f(x)$ là hàm tuần hoàn với chu kỳ 2π trên $\mathbb{R}$.

Giả sử tồn tại $0 < T_1 < 2\pi$ sao cho

$$f(x + T_1) = f(x) \Leftrightarrow \cos(x + T_1) = \cos x$$

Chọn $x = 0$ thì ta có $\cos T_1 = \cos 0 = 1$. (Mâu thuẫn với giả thiết $0 < T_1 < 2\pi$). Vậy, 2π là chu kỳ cơ sở của hàm số $f(x) = \cos x$.

Ví dụ 1.2 (IMO - 1968). Cho số thực a và hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x + a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - (f(x))^2}, \forall x \in \mathbb{R}. \quad (1.1)$$

Chứng minh rằng f là hàm số tuần hoàn.

Giải. Giả sử tồn tại hàm số $f(x)$ thỏa mãn yêu cầu bài ra. Để (1.1) có nghĩa, ta phải có $\frac{1}{2} \leq f(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Đặt $g(x) := f(x) - \frac{1}{2}$, ta có $0 \leq g(x) \leq \frac{1}{2}$ và khi đó (1.1) trở thành

$$g(x + a) = \sqrt{\frac{1}{4} - (g(x))^2}.$$

Như vậy, ta có $[g(x + a)]^2 = \frac{1}{4} - [g(x)]^2$. Lập luận tương tự ta được

$$[g(x + 2a)]^2 = \frac{1}{4} - [g(x + a)]^2.$$

Vì $g(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, nên từ đây ta có: $g(x + 2a) = g(x)$, tức là ta có $f(x + 2a) = f(x)$.

Vậy, $f(x)$ là hàm tuần hoàn trên $\mathbb{R}$ với chu kỳ $2a$.

1.1.2. Hàm tuần hoàn nhân tính

Định nghĩa 1.5 (xem [1]). Hàm $f(x)$ được gọi là hàm tuần hoàn nhân tính chu kỳ a , $0 < a \notin \{0, 1\}$ trên M nếu $M \subset D(f)$ và

$$\begin{cases} \forall x \in M & \Rightarrow a^{\pm 1}x \in M \\ f(ax) & = f(x), \forall x \in M. \end{cases}$$

Ví dụ 1.3. Xét $f(x) = \sin(2\pi \log_2 x)$. Khi đó $f(x)$ là hàm tuần hoàn nhân tính chu kỳ 2 trên $\mathbb{R}^+$.

Thật vậy, ta có: Với mọi $x \in \mathbb{R}^+$ thì $2^{\pm 1}x \in \mathbb{R}^+$ và

$$\begin{aligned} f(2x) &= \sin[2\pi \log_2(2x)] \\ &= \sin[2\pi(1 + \log_2 x)] \\ &= \sin(2\pi + 2\pi \log_2 x) \\ &= \sin(2\pi \log_2 x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}^+. \end{aligned}$$

Ví dụ 1.4. Cho ví dụ về hàm số liên tục và tuần hoàn nhân tính chu kỳ 5

$$f(5x) = f(x), \forall x > 0.$$

Giải. Ta có $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow 5^{\pm 1}x \in \mathbb{R}_+^*$ và

$$\log_5(5x) = 1 + \log_5 x \Leftrightarrow \pi \log_5(5x) = \pi + \pi \log_5 x.$$

Đặt $f(x) = \tan[\pi \log_5 x], \forall x > 0$, suy ra

$$\begin{aligned} f(5x) &= \tan[\pi \log_5(5x)] = \tan[\pi + \pi \log_5 x] \\ &= \tan[\pi \log_5 x] = f(x). \end{aligned}$$

Vậy, hàm số $f(x) = \tan(\pi \log_5 x)$ là một hàm số tuần hoàn nhân tính chu kỳ 5 trên $\mathbb{R}_+^*$.

1.2 Đẳng thức lượng giác và đồng nhất thức đại số

Ta thấy rằng đẳng thức lượng giác cơ bản dễ dẫn đến sự phong phú của hệ thống các đồng nhất thức lượng giác là công thức

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1, \forall t \in \mathbb{R}. \quad (1.2)$$

Gắn với hệ thức (1.2) là đồng nhất thức Lagrange

$$(2x)^2 + (1 - x^2)^2 = (1 + x^2)^2, \forall x \in \mathbb{R}. \quad (1.3)$$

Hai đồng nhất thức (1.2) và (1.3) là hai cách viết của cùng một hệ thức. Như vậy là với mỗi công thức lượng giác sẽ có một đồng nhất thức tương ứng.

1.2.1. Đồng nhất thức đại số liên quan đến hàm số cosin

Ta có công thức Euler

$$e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Khi đó

$$\begin{cases} \cos \alpha &= \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} \\ \sin \alpha &= \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i} \end{cases}$$

Từ đó suy ra $\cos(i\alpha) = \frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{2}$.

Như vậy hàm số $\cos t$ là biểu thức có dạng $\frac{1}{2} \left(a + \frac{1}{a} \right)$, cho nên, về mặt hình thức ta sẽ có nhiều biến đổi thu được từ các công thức liên quan đến biến $x \notin [-1; 1]$ giống như công thức đối với hàm số $\cos t$.

Ví dụ 1.5. Đồng nhất thức đại số ứng với công thức

$$\cos 2t = 2 \cos^2 t - 1$$

chính là công thức

$$\frac{1}{2} \left(a^2 + \frac{1}{a^2} \right) = 2 \left[\frac{1}{2} \left(a + \frac{1}{a} \right) \right]^2 - 1.$$

Ví dụ 1.6. Đồng nhất thức đại số ứng với công thức

$$\cos 3t = 4 \cos^3 t - 3 \cos t$$

chính là công thức

$$\frac{1}{2} \left(a^3 + \frac{1}{a^3} \right) = 4 \left[\frac{1}{2} \left(a + \frac{1}{a} \right) \right]^3 - 3 \left[\frac{1}{2} \left(a + \frac{1}{a} \right) \right].$$

hay

$$4x^3 - 3x = \frac{1}{2} \left(a^3 + \frac{1}{a^3} \right).$$

với

$$x = \frac{1}{2} \left(a + \frac{1}{a} \right), \quad a \neq 0.$$

Ví dụ 1.7. Đồng nhất thức đại số ứng với công thức

$$\cos 5t + \cos t = 2 \cos 3t \cos 2t$$

chính là công thức

$$\frac{1}{2} \left(a^5 + \frac{1}{a^5} \right) + \frac{1}{2} \left(a + \frac{1}{a} \right) = 2 \left[\frac{1}{2} \left(a^3 + \frac{1}{a^3} \right) \right] \left[\frac{1}{2} \left(a^2 + \frac{1}{a^2} \right) \right].$$

Từ đó sử dụng kết quả khai triển các hàm lượng giác $\cos 3t$ và $\cos 2t$ ta thu được đồng nhất thức đại số sau

$$\frac{1}{2} \left(a^5 + \frac{1}{a^5} \right) = -m + 2(4m^3 - 3m)(2m^2 - 1),$$

trong đó

$$m = \frac{1}{2} \left(a + \frac{1}{a} \right).$$

Ví dụ 1.8. Cho số thực m với $|m| > 1$. Tính giá trị của biểu thức

$$M = 8x^3 - 6x,$$

trong đó

$$x = \frac{1}{2} \left(\sqrt[3]{m + \sqrt{m^2 - 1}} + \sqrt[3]{m - \sqrt{m^2 - 1}} \right).$$

Giải. Vì $|m| > 1$ nên tồn tại số thực q để có hệ thức

$$m = \frac{1}{2} \left(q^3 + \frac{1}{q^3} \right).$$

Chọn

$$q = \sqrt[3]{m + \sqrt{m^2 - 1}}$$

thì ta được

$$\frac{1}{2} \left(q + \frac{1}{q} \right) = \frac{1}{2} \left(\sqrt[3]{m + \sqrt{m^2 - 1}} + \sqrt[3]{m - \sqrt{m^2 - 1}} \right) = x.$$

Theo ví dụ 1.6 thì $4x^3 - 3x = m$ nên $M = 2m$.

1.2.2. Đồng nhất thức đại số liên quan đến hàm số sin

Từ công thức Euler ta thu được hệ thức

$$i \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2}.$$

Suy ra biểu thức $i \sin(it)$ nhận giá trị thực. Điều này gợi ý cho ta cách chuyển đổi các đồng nhất thức đối với hàm số sin sang các đồng nhất thức đại số.

Ví dụ 1.9. Xét công thức khai triển

$$\sin 3t = 3 \sin t - 4 \sin^3 t.$$

Từ đây ta thu được công thức

$$i \sin(3it) = 3(i \sin it) - 4(i \sin it)^3.$$

Hệ thức đại số ứng với công thức trên là đồng nhất thức

$$\frac{1}{2} \left(a^3 - \frac{1}{a^3} \right) = 3 \left[\frac{1}{2} \left(a - \frac{1}{a} \right) \right] - 4 \left[\frac{1}{2} \left(a - \frac{1}{a} \right) \right]^3,$$

hay

$$4x^3 + 3x = \frac{1}{2} \left(a^3 - \frac{1}{a^3} \right),$$

với

$$x = \frac{1}{2} \left(a - \frac{1}{a} \right), \quad a \neq 0.$$

Ví dụ 1.10. Xét công thức biến đổi

$$\sin 5t + \sin t = 2 \sin 3t (1 - 2 \sin^2 t). \quad (1.4)$$

Từ đây ta thu được công thức

$$i \sin(5it) + i \sin it = 2i \sin(3it) (1 - 2(i \sin it)^2).$$

Hệ thức đại số ứng với công thức trên là đồng nhất thức

$$\frac{1}{2} \left(a^5 - \frac{1}{a^5} \right) + \frac{1}{2} \left(a - \frac{1}{a} \right) = 2 \left[\frac{1}{2} \left(a^3 - \frac{1}{a^3} \right) \right] \left[1 - \left(\frac{1}{2} \left(a^2 - \frac{1}{a^2} \right) \right)^2 \right].$$

Từ đó sử dụng kết quả khai triển các hàm lượng giác $\sin 3t$ và $\sin 2t$ ta thu được đồng nhất thức đại số sau

$$\frac{1}{2} \left(a^5 - \frac{1}{a^5} \right) = -m + 2(4m^3 + 3m)(2m^2 + 1),$$

trong đó

$$m = \frac{1}{2} \left(a - \frac{1}{a} \right).$$

Ví dụ 1.11. Cho số thực m . Tính giá trị của biểu thức

$$M = x^3 + \frac{3}{4}x,$$

trong đó

$$x = \frac{1}{2} \left(\sqrt[3]{m + \sqrt{m^2 + 1}} + \sqrt[3]{m - \sqrt{m^2 + 1}} \right).$$

Giải. Ta có với mọi m đều tồn tại số thực q để có hệ thức

$$m = \frac{1}{2} \left(q^3 - \frac{1}{q^3} \right).$$

Chọn

$$q = \sqrt[3]{m + \sqrt{m^2 + 1}}$$

thì ta được

$$\frac{1}{2} \left(q - \frac{1}{q} \right) = \frac{1}{2} \left(\sqrt[3]{m + \sqrt{m^2 + 1}} + \sqrt[3]{m - \sqrt{m^2 + 1}} \right) = x.$$

Theo ví dụ 1.9 thì $4x^3 + 3x = m$ nên $M = \frac{1}{4}m$.

Từ những kết quả nhận được, ta có thể giải và biện luận được nhiều dạng phương trình đại số bậc cao và công thức tính giá trị của một số biểu thức chứa căn thức.

Ví dụ 1.12. Giải và biện luận phương trình

$$4x^3 - 3x = m, m \in \mathbb{R}.$$

Giải.

- Với $|m| \leq 1$: Đặt $m = \cos \alpha$ ($= \cos(\alpha \pm 2\pi)$). Sử dụng đẳng thức lượng giác

$$\cos \beta = 4 \cos^3 \frac{\beta}{3} - 3 \cos \frac{\beta}{3},$$

ta thu được 3 nghiệm của phương trình là

$$x_1 = \cos \frac{\alpha}{3}, \quad x_{2,3} = \cos \frac{\alpha \pm 2\pi}{3}.$$

- Với $|m| > 1$: Đặt

$$m = \frac{1}{2} \left(a^3 + \frac{1}{a^3} \right),$$

với

$$a = \sqrt[3]{m \pm \sqrt{m^2 - 1}}.$$

Ta viết phương trình đã cho dưới dạng

$$4x^3 - 3x = \frac{1}{2} \left(a^3 + \frac{1}{a^3} \right),$$

hay

$$4x^3 - 3x = 4x_0^3 - 3x_0,$$

trong đó

$$x_0 = \frac{1}{2} \left(a + \frac{1}{a} \right).$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = x_0$. Dễ thấy đây là nghiệm duy nhất của phương trình.

Thật vậy, phương trình đã cho có nghiệm x_0 với $x_0 \notin [-1, 1]$. Do đó $|x_0| > 1$. Khi đó, từ hệ thức

$$4x^3 - 3x = 4x_0^3 - 3x_0$$

ta thu được

$$(x - x_0)[4x^2 + 4xx_0 + 4x_0^2 - 3] = 0.$$

Ta thấy phương trình $4x^2 + 4xx_0 + 4x_0^2 - 3 = 0$ có $\Delta' = 12 - 12x_0^2 < 0$ nên vô nghiệm.

Do vậy phương trình đã cho có một nghiệm duy nhất là

$$x = \frac{1}{2} \left(\sqrt[3]{m + \sqrt{m^2 - 1}} + \sqrt[3]{m - \sqrt{m^2 - 1}} \right).$$

Ví dụ 1.13. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n ($n \geq 2$) và với mọi a ta có

$$-(1+a^2)^n \leq (2a)^n + (1-a^2)^n \leq (1+a^2)^n. \quad (1.5)$$

Giải. Ta có (1.5) tương đương với

$$-1 \leq \left(\frac{2a}{1+a^2} \right)^n + \left(\frac{1-a^2}{1+a^2} \right)^n \leq 1$$

Đặt $a = \tan \frac{\alpha}{2}$ với $-\pi < \alpha < \pi$, ta có

$$\frac{2a}{1+a^2} = \sin \alpha; \quad \frac{1-a^2}{1+a^2} = \cos \alpha.$$

Khi đó (1.5) có dạng

$$-1 \leq \sin^n \alpha \cos \alpha + \cos^n \alpha \leq 1.$$

Thật vậy ta có

$$-1 \leq \sin \alpha \leq 1 \Rightarrow -\sin^2 \alpha \leq \sin^n \alpha \leq \sin^2 \alpha, \forall n \geq 2.$$

Tương tự ta cũng có

$$-1 \leq \cos \alpha \leq 1 \Rightarrow -\cos^2 \alpha \leq \cos^n \alpha \leq \cos^2 \alpha, \forall n \geq 2.$$

Do đó: $-1 \leq \sin^n \alpha \cos \alpha + \cos^n \alpha \leq 1$.

1.3 Một số tính chất của đa thức lượng giác

Định nghĩa 1.6 (xem[3]). Biểu thức

$$L_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad (1.6)$$

trong đó $a_0, a_k, b_k \in \mathbb{R}$ ($k = \overline{1, n}$); $a_n^2 + b_n^2 \neq 0$; $n \in \mathbb{N}^*$, được gọi là đa thức lượng giác bậc n (cấp n) với các hệ số a_0, a_k, b_k .

Định nghĩa 1.7 (xem[3]). Nếu trong (1.6) tất cả các b_k ($k = \overline{1, n}$) đều bằng 0 thì ta có đa thức lượng giác cấp n thuần $\cos$.

$$C_n(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \cdots + a_n \cos nx \quad (a_n \neq 0). \quad (1.7)$$

Nếu trong (1.6) tất cả các a_k ($k = \overline{1, n}$) đều bằng 0 thì ta có đa thức lượng giác cấp n thuần $\sin$

$$S_n(x) = b_0 + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \cdots + b_n \sin nx \quad (b_n \neq 0). \quad (1.8)$$

Tính chất 1.1 (xem[3]). Cho $S_n(x)$ và $S_m^*(x)$ là hai đa thức lượng giác. Khi đó:

- a) $S_n(x) + S_m^*(x)$ là đa thức bậc k với $k \leq \max\{n, m\}$.
- a) $S_n(x).S_m^*(x)$ là đa thức lượng giác bậc $n + m$.

Tính chất 1.2 (xem[3]). Đa thức lượng giác $L_n(x)$ với $a_0 = 0$ luôn có ít nhất một nghiệm.

Tính chất 1.3 (xem[3]). Với mọi đa thức lượng giác $L_n(x)$ luôn tồn tại các đa thức đại số $P_n(t)$ và $Q_{n-1}(t)$ sao cho

$$L_n(x) = P_n(\cos x) + \sin x Q_{n-1}(\cos x).$$

Tính chất 1.4 (xem[3]). Với mọi đa thức lượng giác $S_n(x)$ luôn tồn tại các đa thức đại số $Q_{n-1}(t)$ sao cho $L_n(x) = b_0 + \sin x Q_{n-1}(\cos x)$.

Tính chất 1.5 (xem[3]). $C_n(x) = P_n(\cos x)$ trong đó $P_n(t)$ là đa thức bậc n đối với t , có hệ số chính là $a_n = 2^{n-1}$. Ngược lại, với mọi đa thức $P_n(t)$ với hệ số chính bằng 1 qua phép đặt ẩn phụ $t = \cos x$ đều biến đổi về $C_n(x)$ với $a_n = 2^{1-n}$.

Các tính chất trên là hiển nhiên.

Bài toán 1.1. Cho $k, n \in \mathbb{Z}^+$ và r là số thực dương. Tính

$$1. C_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} r^k \cos kx.$$

$$2. S_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} r^k \sin kx.$$

Giải. Đặt $z = r(\cos x + i \sin x)$. Ta có số phức

$$\begin{aligned} C_n + S_n i &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} r^k (\cos kx + i \sin kx) = \sum_{k=0}^{n-1} z^k = \frac{1 - z^n}{1 - z} \\ &\dots\dots\dots \\ &= \frac{r^{n+1} \cos(n-1)x - r^n \cos nx - r \cos x + 1}{r^2 - 2r \cos x + 1} + \\ &+ i \frac{r^{n+1} \sin(n-1)x - r^n \sin nx - r \sin x + 1}{r^2 - 2r \cos x + 1}. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra:

$$\begin{aligned} 1. C_n &= \frac{r^{n+1} \cos(n-1)x - r^n \cos nx - r \cos x + 1}{r^2 - 2r \cos x + 1}. \\ 2. S_n &= \frac{r^{n+1} \sin(n-1)x - r^n \sin nx - r \sin x + 1}{r^2 - 2r \cos x + 1}. \end{aligned}$$

Bài toán 1.2. Chứng minh rằng

$$\begin{aligned} 1. \sum_{k=0}^n \sin(\alpha + kx) &= \frac{\sin \frac{(n+1)x}{2} \sin(\alpha + \frac{nx}{2})}{\sin \frac{\alpha}{2}}. \\ 2. \sum_{k=0}^n \cos(\alpha + kx) &= \frac{\sin \frac{(n+1)x}{2} \cos(\alpha + \frac{nx}{2})}{\sin \frac{\alpha}{2}}. \end{aligned}$$

Giải. Cách giải tương tự như đối với Bài toán 1.1.

Ví dụ 1.14. Cho α thỏa mãn $n\alpha = 2\pi$ với $n > k$; $n, k \in \mathbb{Z}$ và

$$f(x) = a_0 + \sum_{j=1}^k (a_j \cos jx + b_j \sin jx). \quad (1.9)$$

Chứng minh rằng

$$f(x + \alpha) + f(x + 2\alpha) + \dots + f(x + n\alpha) = na_0. \quad (1.10)$$

Giải. Nếu $f(x) = a_0$ thì hiển nhiên (1.10) đúng.

Bổ đề 1.1. Nếu (1.10) đúng với các hàm số $f_1(x)$ và $f_2(x)$ ($f_1(x)$ và $f_2(x)$ có dạng (1.9)) thì (1.10) cũng đúng với các hàm số $f(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$ ($f(x)$ cũng có dạng (1.9)).

Chứng minh: Ta có

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n f(x + i\alpha) &= \sum_{i=1}^n [c_1 f_1(x + i\alpha) + c_2 f_2(x + i\alpha)] \\ &= c_1 \sum_{i=1}^n f_1(x + i\alpha) + c_2 \sum_{i=1}^n f_2(x + i\alpha).\end{aligned}$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Bổ đề 1.2. Với a là góc tùy ý, β là góc không chia hết cho 2π nhưng $n\beta$ chia hết cho 2π thì

$$\sum_{k=1}^n \cos(a + k\beta) = 0; \quad \sum_{k=1}^n \sin(a + k\beta) = 0.$$

Chứng minh. Vận dụng bài toán 1.2.

Trở lại ví dụ đang xét: Do bổ đề 1.1 nên ta chỉ cần chứng minh (1.10) cho các hàm số dạng $f(x) = \cos mx$ và $f(x) = \sin mx$.

Nhận xét rằng với $0 < m < n$, $n\alpha = 2\pi$, $m\alpha = a$, $\beta = m\alpha$ thì β không chia hết cho 2π nhưng $n\beta$ chia hết cho 2π nên theo bài toán 1.2 ta được (1.10) đúng với các hàm số nói trên. Từ đó ta được điều phải chứng minh.

Ví dụ 1.15. Cho

$$C_n(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \cdots + a_n \cos nx \quad (a_n \neq 0).$$

Chứng minh rằng

$$C_n(0) - C_n\left(\frac{\pi}{n}\right) + C_n\left(\frac{2\pi}{n}\right) - C_n\left(\frac{3\pi}{n}\right) + \cdots - C_n\left(\frac{(2n-1)\pi}{n}\right) = 2na_n. \quad (1.11)$$

Giải.

Do $\cos\left(n.k\frac{\pi}{n}\right) = \cos k\pi = (-1)^k$ nên $C_n\left(k\frac{\pi}{n}\right) = C_{n-1}\left(k\frac{\pi}{n}\right) + a_n(-1)^k$.

Áp dụng ví dụ 1.13 cho hàm $C_{n-1}(x)$ ta được

$$\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}\left(0 + k\frac{2\pi}{n}\right) = (n-1)a_0,$$
$$\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}\left(\frac{(2k+1)\pi}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}\left(\frac{\pi}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right) = (n-1)a_0.$$

Do đó

$$C_n(0) - C_n\left(\frac{\pi}{n}\right) + C_n\left(\frac{2\pi}{n}\right) - C_n\left(\frac{3\pi}{n}\right) + \cdots - C_n\left(\frac{(2n-1)\pi}{n}\right)$$
$$= (n-1)a_0 - (n-1)a_0 + a_n[1 - (-1) + 1 - (-1) + \cdots + 1 - (-1)] = 2na_n.$$

Suy ra điều phải chứng minh.

Từ kết quả của ví dụ này ta được:

Hệ quả 1.1.

$$|C_n(0)| + \left|C_n\left(\frac{\pi}{n}\right)\right| + \left|C_n\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right| + \cdots + \left|C_n\left(\frac{(2n-1)\pi}{n}\right)\right| \geq 2n|a_n|.$$

Từ đó dễ thấy tồn tại k để $\left|C_n\left(k\frac{\pi}{n}\right)\right| \geq |a_n|$.

Hệ quả 1.2. Độ lệch so với 0 của đa thức lượng giác $C_n(x)$ không nhỏ hơn $|a_n|$.

Hệ quả 1.3. Độ lệch so với 0 của đa thức quy chuẩn $P_n(x)$ trên đoạn $[-1; 1]$ không nhỏ hơn 2^{1-n} .

Hệ quả 1.4. Đa thức quy chuẩn có độ lệch nhỏ nhất trên đoạn $[-1; 1]$ có dạng

$$P_n(\cos \alpha) = 2^{1-n} \cos n\alpha$$

hay là

$$P_n(x) = 2^{1-n} \cos(n \arccos x)$$

và độ lệch nhỏ nhất đó là 2^{1-n} .

Ví dụ 1.16. Cho $f(x) = b_0 + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \cdots + b_n \sin nx$, ($b_n \neq 0$) thỏa mãn $|f(x)| \leq |\sin x|$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng

$$|b_1 + 2b_2 + 3b_3 + \cdots + nb_n| \leq 1. \quad (1.12)$$

Giải. Ta có

$$\begin{aligned} |b_1 + 2b_2 + 3b_3 + \cdots + nb_n| &= |f'(0)| = \left| \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} \right| \\ &\leq \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{f(x) - f(0)}{x} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{f(x)}{\sin x} \right| \cdot \left| \frac{\sin x}{x} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{f(x)}{\sin x} \right| \leq 1. \end{aligned}$$

Ví dụ 1.17. Cho trước các số thực a, b, A, B . Xét đa thức lượng giác

$$f(x) = 1 - a \cos x - b \sin x - A \cos 2x - B \sin 2x.$$

Chứng minh rằng

$$\text{Nếu } f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \text{ thì } a^2 + b^2 \leq 2 \text{ và } A^2 + B^2 \leq 1.$$

Giải. Đặt $r^2 = a^2 + b^2$; $R^2 = A^2 + B^2$. Khi đó với α, β chọn thích hợp, ta có

$$a = r \cos \alpha, b = r \sin \alpha, a \cos x + b \sin x = r \cos(x - \alpha).$$

$$A = 2R \cos 2\beta, B = 2R \sin 2\beta, A \cos 2x + B \sin 2x = R \cos 2(x - \beta).$$

Suy ra

$$f(x) = 1 - r \cos(x - \alpha) - R \cos 2(x - \beta).$$

$$\text{Đặt } P = f\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right), Q = f\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right). \text{ Ta có}$$

$$P = 1 - \frac{r}{\sqrt{2}} - R \cos 2\left(\alpha - \beta + \frac{\pi}{4}\right), \quad Q = 1 - \frac{r}{\sqrt{2}} - R \cos 2\left(\alpha - \beta - \frac{\pi}{4}\right).$$

Nếu $r^2 > 2$ thì $1 - \frac{r}{\sqrt{2}} < 0$. Hai góc $2(\alpha - \beta + \frac{\pi}{4})$ và $2(\alpha - \beta - \frac{\pi}{4})$ có hiệu bằng π nên các cosin của chúng trái dấu. Bởi vậy, trong hai biểu thức

$R \cos 2(\alpha - \beta + \frac{\pi}{4})$ và $R \cos 2(\alpha - \beta - \frac{\pi}{4})$ có một biểu thức không âm.

Từ đó suy ra trong hai số P và Q có một số âm. Vậy ít nhất một trong hai giá trị $f(\alpha + \frac{\pi}{4})$ và $f(\alpha - \frac{\pi}{4})$ là số âm. Đó là điều vô lý (do $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$).

Vậy $r^2 < 2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \leq 2$.

Tương tự có

$$f(\beta) = 1 - r \cos(\beta - \alpha) - R \cos 0 = 1 - r \cos(\beta - \alpha) - R,$$

$$f(\beta + \pi) = 1 - r \cos(\beta - \alpha + \pi) - R.$$

Nếu $R > 1 \Rightarrow 1 - R < 0$, và do hai góc $\beta - \alpha + \pi$ và $\beta - \alpha$ có hiệu bằng π nên tương tự trên ta được một trong hai số $f(\beta)$ và $f(\beta + \pi)$ là số âm (vô lý).

Vậy $A^2 + B^2 \leq 1$.

Nhận xét 1.1. Ví dụ trên là trường hợp đặc biệt của định lý về đa thức lượng giác nhận giá trị không âm.

$$\text{Nếu } f(x) = 1 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \text{ thì}$$

$$a_i^2 + b_i^2 \leq 2, \forall i = \overline{1, n-1} \text{ còn } a_n^2 + b_n^2 \leq 1.$$

Ví dụ 1.18. Tồn tại hay không đa thức

$$P_n(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n \in \mathbb{R}[x] \quad (1.13)$$

và thỏa mãn $|P_n(x)| \leq 2, \forall x \in [-2, 2]$.

Giải. Xét $P_n(x) = 2 \cos(n \arccos \frac{x}{2})$ với $|x| \leq 2$.

Ta chứng minh $P_n(x)$ là đa thức có dạng (1.13).

Thật vậy: $P_0(x) = 2, P_1(x) = x, P_2(x) = x^2 - 2$ đều có dạng (1.13).

Giả sử $P_{n-1}(x), P_n(x)$ là các đa thức có dạng (1.13). Khi đó, do

$$P_{n+1}(x) = 2 \cos \left[(n+1) \arccos \frac{x}{2} \right] \text{ và } P_{n-1}(x) = 2 \cos \left[(n-1) \arccos \frac{x}{2} \right],$$

nên

$$P_{n+1}(x) + P_{n-1}(x) = 4 \cos \left(n \arccos \frac{x}{2} \right) \cos \left(\arccos \frac{x}{2} \right) = 2P_n(x) \frac{x}{2} = xP_n(x).$$

Suy ra

$$P_{n+1}(x) = xP_n(x) - P_{n-1}(x).$$

Vậy, $P_{n+1}(x)$ cũng có dạng (1.13).

Theo nguyên lý quy nạp ta được: $P_n(x)$ có dạng (1.13) với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Ngoài ra, với $|x| \leq 2$ thì $|P_n(x)| \leq 2$. Vậy tồn tại đa thức thỏa mãn yêu cầu đề bài, đa thức đó cho bởi công thức $P_n(x) = 2 \cos(n \arccos \frac{x}{2})$.

Ví dụ 1.19. Cho các đa thức $P_n(x)$, $n \in \mathbb{N}^*$ xác định như sau

$$P_1(x) = x^2 - 2; P_k(x) = P_1(P_{k-1}(x)), \quad (k = 2, 3, \dots).$$

Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, các nghiệm của phương trình

$$P_n(x) = x \tag{1.14}$$

đều thực và khác nhau.

Giải. Đặt $x = 2 \cos t, t \in [-\pi, \pi]$.

Bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được: $P_n(t) = 2 \cos 2^n t$ và $P_n(t)$ là đa thức có bậc là 2^n .

Do đó (1.14) trở thành

$$2 \cos 2^n t = 2 \cos t. \tag{1.15}$$

Ta có

$$(1.15) \Leftrightarrow 2^n t = t + k2\pi \text{ hoặc } 2^n t = -t + k2\pi.$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{k2\pi}{2^n - 1} \text{ hoặc } t = \frac{k2\pi}{2^n + 1}.$$

Vậy (1.14) có các nghiệm:

$$x_k = \cos \frac{k2\pi}{2^n - 1} \quad (k = \overline{0, 2^{n-1} - 1}), \tag{1.16}$$

$$x_j = \cos \frac{j2\pi}{2^n + 1} \quad (j = \overline{0, 2^{n-1}}). \tag{1.17}$$

Do hàm số $\cos$ nghịch biến trên $[-\pi, \pi]$ nên các nghiệm trong mỗi nhóm (1.16) và (1.17) đôi một khác nhau. Do $2^n - 1$ và $2^n + 1$ nguyên tố cùng nhau nên các nghiệm thuộc hai nhóm nghiệm khác nhau cũng đôi một khác nhau.

Tóm lại, (1.14) có $2^{n-1} + 2^{n-1} = 2^n$ nghiệm phân biệt, thuộc $\mathbb{R}$. Mặt khác, bậc của (1.14) cũng là 2^n nên từ đó suy ra mọi nghiệm của (1.14) đều thực và phân biệt.

Chương 2

Một số phương pháp giải phương trình và bất phương trình lượng giác

2.1 Phương trình lượng giác đưa về dạng phương trình đại số

2.1.1. Phương trình đẳng cấp đối với $\sin x$ và $\cos x$

1. Phương pháp chung

Dạng tổng quát của phương trình đẳng cấp bậc hai:

$$\sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = d, \quad (a^2 + b^2 > 0). \quad (2.1)$$

Phương pháp 1 (Lượng giác)

Dùng công thức hạ bậc đưa về phương trình bậc nhất đối với $\sin 2x$ và $\cos 2x$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x.$$

Khi đó

$$(2.1) \Leftrightarrow (c - a) \cos 2x + b \sin 2x = 2d - (a + c) \quad (2.2)$$

là phương trình bậc nhất đối với $\sin 2x$ và $\cos 2x$.

Phương pháp 2 (Đại số hoá)

- Nếu $\cos x = 0 \left(\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right)$ thì (2.1) trở thành

$$\sin^2 x = d.$$

- Nếu $c = d$ thì $\sin^2 x = 1$, suy ra $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ là nghiệm của

(2.1).

- Nếu $c \neq d$ thì $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ không phải là nghiệm của (2.1).

- Nếu $\cos x \neq 0 \left(\Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right)$ thì chia cả hai vế của (2.1) cho $\cos^2 x \neq 0$ ta được phương trình:

$$\begin{aligned} a \tan^2 x + b \tan x + c &= d(1 + \tan^2 x) \\ \Leftrightarrow (a - d) \tan^2 x + b \tan x + (c - d) &= 0. \end{aligned}$$

Đặt $\tan x = t$, ta đưa phương trình về dạng đại số:

$$(a - d)t^2 + bt + c - d = 0.$$

- Chú ý: Có thể kiểm tra $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ có là nghiệm của (2.1) hay không.

Với $x \neq k\pi$, chia cả hai vế của (2.1) cho $\sin^2 x$, đưa về phương trình:

$$(c - d) \cot^2 x + b \cot x + (a - d) = 0.$$

- Đối với phương trình đẳng cấp bậc cao cách giải tương tự như đối với bậc hai (phương pháp 2).

2. Các ví dụ

Ví dụ 2.1. Giải phương trình

$$\sin^2 x + 2 \sin x \cos x + 3 \cos^2 x = 3 \quad (2.3)$$

Giải. Ta có

$$\begin{aligned} (2.3) &\Leftrightarrow \frac{1 - \cos 2x}{2} + \sin 2x + 3 \frac{1 + \cos 2x}{2} = 3 \\ &\Leftrightarrow \sin 2x + \cos 2x = 1 \Leftrightarrow \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ 2x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + k2\pi. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Ví dụ 2.2. Giải phương trình:

$$3 \sin^2 x + 8 \sin x \cos x + 4 \cos^2 x = 0 \quad (2.4)$$

Giải.

- Với $\cos x = 0 \left(\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right)$ thì (2.4) trở thành
 $3 \sin^2 x = 0$. (Vô lý)

Vậy $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ không là nghiệm của phương trình (2.4).

- Với $\cos x \neq 0 \left(\Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right)$ chia cả hai vế của (2.4) cho $\cos^2 x \neq 0$ ta được phương trình:

$$\begin{aligned} 3 \tan^2 x + 8 \tan x + 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = -\frac{2}{3} \\ \tan x = -2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \arctan \left(-\frac{2}{3} \right) + k\pi \\ x = \arctan (-2) + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Ví dụ 2.3. Tìm m để phương trình sau đây có nghiệm

$$(m+3) \sin^2 x + (m+3) \sin x \cos x + \cos^2 x = 0. \quad (2.5)$$

Giải. Ta có

$$\begin{aligned} (2.5) &\Leftrightarrow \frac{m+3}{2} (1 - \cos 2x) + \frac{m+3}{2} \sin 2x + \frac{1 + \cos 2x}{2} = 0 \\ &\Leftrightarrow (m+3) \sin 2x - (m+2) \cos 2x = -m-4 \quad (2.6) \end{aligned}$$

Phương trình (2.5) có nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình (2.6) có nghiệm.

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (m+3)^2 + (m+2)^2 \geq (m+4)^2 \\ &\Leftrightarrow m^2 + 2m - 3 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -3 \\ m \geq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Ví dụ 2.4. Giải và biện luận phương trình

$$(m+1) \sin^2 x - \sin 2x + \cos 2x = 0. \quad (2.7)$$

Giải. Ta có

$$(2.7) \Leftrightarrow m \sin^2 x - 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = 0$$

- Với $m = 0$: phương trình trở thành

$$-2 \sin x \cos x + \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \cos x(-2 \sin x + \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \tan x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \arctan \frac{1}{2} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

- Với $m \neq 0$: Ta thấy $\cos x = 0$ không thỏa mãn phương trình (2.7) $\Rightarrow \cos x \neq 0$. Chia cả hai vế của phương trình (2.7) cho $\cos^2 x$, ta được

$$m \tan^2 x - 2 \tan x + 1 = 0$$

Đặt $\tan x = t$, ta có phương trình:

$$f(t) = mt^2 - 2t + 1 = 0. \quad (2.8)$$

Xét (2.8) có:
$$\begin{cases} \Delta' &= 1 - m \\ P &= \frac{1}{m} \\ S &= \frac{2}{m} \end{cases}$$

Ta lập bảng sau:

m	Δ	P	S	Nghiệm của (2.8)	Nghiệm x của (2.7)
$+\infty$	-	+	+	Vô nghiệm	Vô nghiệm
1	0			$t_1 = t_2 = 1$	$x = \frac{\pi}{4} + k\pi$
	+	+	+	$0 < t_1 < t_2$	$x = \alpha_1 + k\pi, x = \alpha_2 + k\pi$
0		$\parallel$	$\parallel$	$t = \frac{1}{2}$	$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = \arctan \frac{1}{2} + k\pi$
$-\infty$	+	-	-	$t_1 < 0 < t_2$	$x = \alpha_1 + k\pi, x = \alpha_2 + k\pi$

(trong đó $\alpha_1 = \arctan t_1, \alpha_2 = \arctan t_2$).

Bài tập áp dụng

- 1) Giải phương trình: $2 \sin^2 2x - 2\sqrt{3} \sin 2x \cos 2x = 3$.
- 2) Giải phương trình: $4 \sin^2 x - 3\sqrt{3} \sin 2x - 2 \cos^2 x = 4$.
- 3) Giải và biện luận theo tham số m phương trình sau

$$(5m - 2) \cos^2 x - (m + 1) \sin 2x = -1.$$

4) Tìm m để phương trình sau có nghiệm

$$3 \sin^2 x - 6 \sin x \cos x - 5 \cos^2 x + m = 0.$$

5) Giải phương trình: $\sin^6 x + \cos^6 x = 2 (\sin^8 x + \cos^8 x)$.

6) Tìm m để phương trình

$$\sin^4 x + \cos^4 x + \frac{1}{4}m \sin 4x - (2m + 1) \sin^2 x \cos^2 x = 0$$

có hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$.

2.1.2. Phương trình lượng giác đối xứng, phản đối xứng đối với $\sin x$ và $\cos x$

1. Phương pháp giải

• Phương pháp 1

Giải phương trình $f(\sin x \pm \cos x) = c$ (1) bằng 4 bước

- Bước 1: Kiểm tra $f(\sin x; \pm \cos x) = f(\pm \cos x; \sin x)$.

- Bước 2: Đặt $t = \sin x \pm \cos x \Rightarrow \begin{cases} |t| \leq \sqrt{2} \\ \sin x \cos x = \pm \frac{t^2 - 1}{2} \end{cases} \quad (2)$

Biến đổi (1) về phương trình đại số: $f(t) = 0$ (3), trong đó (3) là phương trình có cách giải cụ thể.

- Bước 3: Giải phương trình đại số (3) và giả sử (3) có nghiệm t_0 thỏa mãn (2).

- Bước 4: Dùng các tổng đặc biệt

$$\sin x \pm \cos x = \sqrt{2} \sin \left(x \pm \frac{\pi}{4}\right) = \pm \sqrt{2} \cos \left(x \mp \frac{\pi}{4}\right)$$

để giải một trong các phương trình lượng giác cơ bản

$$\sqrt{2} \sin \left(x \pm \frac{\pi}{4}\right) = \pm \sqrt{2} \cos \left(x \pm \frac{\pi}{4}\right) = t_0.$$

ta sẽ có các họ nghiệm x_0 của (1).

• Phương pháp 2

Giải phương trình $f(\sin x, \cos x) = c$ theo 4 bước

- Bước 1: Đặt $x = y + \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow y = x - \frac{\pi}{4}$ thì ta có

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos \left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos y$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \sin x \cos x &= \sin \left(y + \frac{\pi}{4}\right) \cos \left(y + \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{1}{2} \cos 2y = \frac{1}{2} (2 \cos^2 y - 1)\end{aligned}$$

- Bước 2: $f(\sin x; \cos x) = c \Leftrightarrow g(\cos y) = 0$ (1), trong đó $g(t)$ là đa thức bậc $n \geq 1$.

- Bước 3: Đặt $\cos y = t$ (*) thì (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} |t| \leq 1 & (2) \\ g(t) = 0 & (3) \end{cases}$, tìm nghiệm t_0 từ (3) thỏa mãn điều kiện (2).

- Bước 4: Từ (*) ta giải phương trình cơ bản $\cos \left(x - \frac{\pi}{4}\right) = t_0$.
Tìm được các nghiệm x_0 của phương trình $f(\sin x, \cos x) = c$.

• Nhận xét

- Đối với phương trình $f(\sin x, -\cos x) = c$ giải theo phương pháp 2 làm tương tự với việc đặt $x = y - \frac{\pi}{4}$ ta thu được $\sin x - \cos x = -\sqrt{2} \cos y$.

- Trong trường hợp đặc biệt

*) $a(\sin x + \cos x) + b \sin x \cos x + c = 0$ được gọi là phương trình đối xứng đối với $\sin x$ và $\cos x$.

*) $a(\sin x - \cos x) + b \sin x \cos x + c = 0$ được gọi là phương trình phản đối xứng đối với $\sin x$ và $\cos x$.

2. Các ví dụ

Ví dụ 2.5. Giải phương trình $\sin x \cos x - \sqrt{2}(\sin x + \cos x) + 1 = 0$.

Giải. Đặt $t = \sin x + \cos x \Rightarrow \begin{cases} |t| \leq \sqrt{2} \\ \sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2} \end{cases}$

Khi đó phương trình đã cho trở thành:

$$\begin{aligned}\frac{t^2 - 1}{2} - \sqrt{2}t + 1 &= 0 \Leftrightarrow t^2 - 2\sqrt{2}t + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 + \sqrt{2} > \sqrt{2} \text{ (loại)} \\ t = -1 + \sqrt{2} \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}\end{aligned}$$

Với $t = -1 + \sqrt{2}$ ta có

$$\sin x + \cos x = -1 + \sqrt{2} \Leftrightarrow \sin \left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + \arcsin \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} + k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} - \arcsin \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Ví dụ 2.6. Giải phương trình

$$(1 - \sin x \cos x)(\sin x + \cos x) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Giải. Đặt $x = y + \frac{\pi}{4}$ thì $y = x - \frac{\pi}{4}$ và

$$\begin{cases} \sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos y \\ \sin x \cos x = \frac{1}{2}(2 \cos^2 y - 1) \end{cases}$$

Khi đó phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned} & \left[1 - \frac{1}{2}(2 \cos^2 y - 1) \right] \sqrt{2} \cos y = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \Leftrightarrow & 2 \cos^3 y - 3 \cos y + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow & (\cos y - 1)(2 \cos^2 y + 2 \cos y - 1) = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \cos y = 1 \\ 2 \cos^2 y + 2 \cos y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos y = 1 \\ \cos y = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2} \\ \cos y = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2} \text{ (loại)} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = 1 \\ \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{4} \pm \arccos \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} + m2\pi \end{cases} \end{aligned}$$

2.1.3 Xây dựng phương trình đại số bậc cao dựa vào các hệ thức lượng giác

Ví dụ 2.7. Từ công thức

$$\sin 5\alpha = 16 \sin^5 \alpha - 20 \sin^3 \alpha + 5 \sin \alpha,$$

lấy $\sin \alpha = 2x$ ta được

$$\sin 5\alpha = 512x^5 - 160x^3 + 10x.$$

Chọn $5\alpha = \frac{\pi}{3}$, ta có

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{3}}{2} &= 512x^5 - 160x^3 + 10x \\ \Leftrightarrow 1024x^5 - 320x^3 + 20x - \sqrt{3} &= 0.\end{aligned}$$

Ta được bài toán sau

Bài toán 2.1. Giải phương trình

$$1024x^5 - 320x^3 + 20x - \sqrt{3} = 0.$$

Giải. Đặt $x = \frac{t}{2}$, thay vào phương trình đã cho ta được

$$32t^5 - 40t^3 + 10t = \sqrt{3} \Leftrightarrow 16t^5 - 20t^3 + 5t = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (2.9)$$

Ta có

$$\begin{aligned}\sin 5\alpha + \sin \alpha &= 2 \sin 3\alpha \cos 2\alpha \\ \Leftrightarrow \sin 5\alpha &= 2 (3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha) (1 - 2 \sin^2 \alpha) - \sin \alpha \\ \Leftrightarrow \sin 5\alpha &= 2 (8 \sin^5 \alpha - 10 \sin^3 \alpha + 3 \sin \alpha) - \sin \alpha \\ \Leftrightarrow \sin 5\alpha &= 16 \sin^5 \alpha - 20 \sin^3 \alpha + 5 \sin \alpha.\end{aligned} \quad (2.10)$$

Từ công thức (2.10) suy ra (2.9) có 5 nghiệm là

$$t = \sin \left(\frac{\pi}{15} + k \frac{2\pi}{5} \right), \quad k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm là

$$x = \frac{1}{2} \sin \left(\frac{\pi}{15} + k \frac{2\pi}{5} \right), \quad k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Ví dụ 2.8. Từ công thức

$$\cos 5\alpha = 16 \cos^5 \alpha - 20 \cos^3 \alpha + 5 \cos \alpha,$$

đặt $\cos \alpha = \frac{x}{2\sqrt{3}}$ ta được

$$\begin{aligned}\cos 5\alpha &= \frac{16x^5}{288\sqrt{3}} - \frac{20x^3}{24\sqrt{3}} + \frac{5x}{2\sqrt{3}} = \frac{x^5}{18\sqrt{3}} - \frac{5x^3}{6\sqrt{3}} + \frac{5x}{2\sqrt{3}} \\ &= \frac{x^5 - 15x^3 + 45x}{18\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

Chọn $5\alpha = \frac{\pi}{6}$, ta được

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x^5 - 15x^3 + 45x}{18\sqrt{3}} \Leftrightarrow x^5 - 15x^3 + 45x - 27 = 0.$$

Ta có bài toán sau:

Bài toán 2.2. Giải phương trình

$$x^5 - 15x^3 + 45x - 27 = 0.$$

Giải. Đặt $x = 2\sqrt{3}t$, thay vào phương trình đã cho ta được

$$\begin{aligned} 288\sqrt{3}t^5 - 360\sqrt{3}t^3 + 90\sqrt{3}t - 27 &= 0 \\ \Leftrightarrow 2(16t^5 - 20t^3 + 5t) &= \sqrt{3} \Leftrightarrow 16t^5 - 20t^3 + 5 = \cos \frac{\pi}{6}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Mặt khác ta có

$$\begin{aligned} \cos 5\alpha + \cos \alpha &= 2 \cos 3\alpha \cos 2\alpha \\ \Leftrightarrow \cos 5\alpha &= 2(4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha)(2 \cos^2 \alpha - 1) - \cos \alpha \\ \Leftrightarrow \cos 5\alpha &= 2(8 \cos^5 \alpha - 10 \cos^3 \alpha + 3 \cos \alpha) - \cos \alpha \\ \Leftrightarrow \cos 5\alpha &= 16 \cos^5 \alpha - 20 \cos^3 \alpha + 5 \cos \alpha. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Từ công thức (2.12) suy ra (2.11) có 5 nghiệm là

$$t = \cos \left(\frac{\pi}{30} + k \frac{2\pi}{5} \right), \quad k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Vậy phương trình đã cho có 5 nghiệm là

$$x = 2\sqrt{3} \cos \left(\frac{\pi}{30} + k \frac{2\pi}{5} \right), \quad k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Ví dụ 2.9. Từ công thức

$$\cos 6\alpha = 32 \cos^6 \alpha - 48 \cos^4 \alpha + 18 \cos^2 \alpha - 1,$$

đặt $\cos \alpha = x$ ta được

$$\cos 6\alpha = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1.$$

Chọn $6\alpha = \frac{\pi}{3}$, ta được

$$\frac{1}{2} = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1.$$

Ta có bài toán sau:

Bài toán 2.3. Giải phương trình

$$64x^6 - 96x^4 + 36x^2 - 3 = 0.$$

Giải. Ta có

$$\begin{aligned}\cos 6\alpha &= 2 \cos^2 3\alpha - 1 = 2 (4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha)^2 - 1 \\ &= 32 \cos^6 \alpha - 48 \cos^4 \alpha + 18 \cos^2 \alpha - 1.\end{aligned}\quad (2.13)$$

Phương trình đã cho tương đương với

$$32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1 = \cos \frac{\pi}{3}. \quad (2.14)$$

Từ công thức (2.13) suy ra (2.14) có 6 nghiệm là

$$x = \cos \left(\frac{\pi}{18} + k \frac{\pi}{3} \right), \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

2.2 Phương trình lượng giác giải bằng so sánh và ước lượng

2.2.1 Phương pháp

Sử dụng tính chất của các hàm số lượng giác và bất đẳng thức để đánh giá.

• **Dạng 1:**

$$\begin{cases} f(x) & \geq M \\ g(x) & \leq M \\ f(x) & = g(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) & = M \\ g(x) & = M \end{cases}$$

• **Dạng 2:**

$$\begin{cases} f(x) & \leq M \\ g(x) & \leq N \\ f(x) + g(x) & = M + N \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) & = M \\ g(x) & = N \end{cases}$$

• Dạng 3:

$$\begin{cases} |f_1(x)| & \leq 1 \\ |f_2(x)| & \leq 1 \\ \dots \\ |f_n(x)| & \leq 1 \\ f_1(x)f_2(x)\dots f_n(x) & = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |f_1(x)| & = 1 \\ |f_2(x)| & = 1 \\ \dots \\ |f_n(x)| & = 1 \end{cases}$$

2.2.2. Ví dụ áp dụng

Ví dụ 2.10. Giải phương trình

$$\sin^3 x + \cos^3 x = 2 - \sin^4 x. \quad (2.15)$$

Giải. Ta luôn có $|\sin x| \leq 1, |\cos x| \leq 1, \forall x$ nên

$$\sin^3 x + \cos^3 x \leq \sin^2 x + \cos^2 x \leq 1$$

và $2 - \sin^4 x \geq 1.$

Do đó

$$\begin{aligned} (2.15) &\Leftrightarrow \begin{cases} \sin^3 x + \cos^3 x = 1 \\ 2 - \sin^4 x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^3 x + \cos^3 x = 1 \\ \sin^4 x = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Ví dụ 2.11. Giải phương trình

$$\sin^{2010} x + \cos^{2010} x = 1. \quad (2.16)$$

Giải. Ta luôn có $|\sin x| \leq 1, |\cos x| \leq 1, \forall x$ nên

$$\begin{cases} \sin^{2010} x \leq \sin^2 x \\ \cos^{2010} x \leq \cos^2 x \end{cases} \Rightarrow \sin^{2010} x + \cos^{2010} x \leq \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Do đó (2.16) xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \sin^{2010} x = \sin^2 x \\ \cos^{2010} x = \cos^2 x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 x (\sin^{2008} x - 1) = 0 \\ \cos^2 x (\cos^{2008} x - 1) = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 x = 0 \\ \sin^{2008} x = 1 \\ \cos^2 x = 0 \\ \cos^{2008} x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ví dụ 2.12. Giải phương trình

$$\sin 2x \sin 8x = 1. \quad (2.17)$$

Giải. Ta luôn có $|\sin 2x| \leq 1, |\sin 8x| \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$ nên

$$\begin{aligned} (2.17) &\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = 1 \\ \sin 8x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \cos 8x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ 8x = \frac{\pi}{2} + l\pi \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{16} + l\frac{\pi}{8} \end{cases} \text{ (Hệ vô nghiệm).} \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Ví dụ 2.13. Giải phương trình

$$\left(\sin^3 \frac{x}{2} + \frac{1}{\sin^3 \frac{x}{2}}\right)^3 + \left(\cos^3 \frac{x}{2} + \frac{1}{\cos^3 \frac{x}{2}}\right)^3 = \frac{81}{4} \cos^2 4x. \quad (2.18)$$

Giải. Điều kiện $x \neq k\pi$.

Ta thấy $VP = \frac{81}{4} \cos^2 4x \leq \frac{81}{4}, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} VT &= \sin^6 \frac{x}{2} + \cos^6 \frac{x}{2} + \frac{\sin^6 \frac{x}{2} + \cos^6 \frac{x}{2}}{\sin^6 \frac{x}{2} \cos^6 \frac{x}{2}} + 4 \\ &= 4 + \left(\sin^6 \frac{x}{2} + \cos^6 \frac{x}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{\sin^6 \frac{x}{2} + \cos^6 \frac{x}{2}}\right) \\ &= 4 + \left(1 - \frac{3}{4} \sin^2 x\right) \left(1 + \frac{64}{\sin^6 x}\right) \\ &\geq 4 + \left(1 - \frac{3}{4}\right) (1 + 64) = \frac{81}{4}. \end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned} (2.18) &\Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 4x = 1 \\ \sin^2 x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 4x = 0 \\ \cos x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\frac{\pi}{4} \\ x = \frac{\pi}{2} + l\pi \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + m\pi, \quad m \in \mathbb{Z} \quad (\text{thỏa mãn điều kiện}). \end{aligned}$$

Ví dụ 2.14. Giải phương trình

$$2(\sin^4 x + \cos^4 x) + \frac{1}{\sin^8 x} + \frac{1}{\cos^8 x} = 33. \quad (2.19)$$

Giải. Ta có

$$\begin{aligned} VT &= 2(\sin^4 x + \cos^4 x) + \frac{1}{\sin^8 x} + \frac{1}{\cos^8 x} \\ &\geq 4\sin^2 x \cos^2 x + \frac{2}{\sin^4 x \cos^4 x} = P. \end{aligned}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\sin^2 x = \cos^2 x = \frac{1}{2}$.

Đặt $\sin^2 x \cos^2 x = t$, $\left(0 < t \leq \frac{1}{4}\right)$.

Ta có: $P(t) = 4t + \frac{2}{t^2}$ và $P'(t) = 4 - \frac{4}{t^3} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{4}$.

Ta thấy $P'(t) < 0, \forall t \in \left(0; \frac{1}{4}\right]$, do đó $P(t) \geq P\left(\frac{1}{4}\right) = 33$.

Vậy ta luôn có $VT \geq 33$. Suy ra để được phương trình đúng thì dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} t = \frac{1}{4} &\Leftrightarrow \frac{\sin^2 2x}{4} = \frac{1}{4} \\ &\Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Vậy phương trình (2.19) có nghiệm là $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$.

2.3 Bất phương trình lượng giác cơ bản

1. Định nghĩa

Bất phương trình lượng giác cơ bản có một trong các dạng:

$$\sin x \leq k, \quad \cos x > k, \quad \tan x \geq k, \dots$$

2. **Cách giải.** Sử dụng tính chất tuần hoàn (cộng tính) của hàm số lượng giác.

Ví dụ 2.15. Giải các bất phương trình lượng giác sau đây

1. $\cos x \geq \frac{1}{2}$.
2. $\sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Giải.

1. Ta biến đổi bất phương trình đã cho về dạng như sau

$$\begin{aligned} \cos x \geq \frac{1}{2} &\Leftrightarrow \cos x \geq \cos \frac{\pi}{3} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x_0 \geq \cos \frac{\pi}{3} \\ 0 \leq x_0 \leq \frac{\pi}{3} \\ x = \pm x_0 + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x_0 \leq \frac{\pi}{3} \\ x = \pm x_0 + k2\pi \end{cases} \end{aligned}$$

2. Ta biến đổi bất phương trình đã cho về dạng như sau

$$\begin{aligned} \sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2} &\Leftrightarrow \sin x \leq \sin \frac{\pi}{3} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x_0 \leq \sin \frac{\pi}{3} \\ -\frac{\pi}{2} \leq x_0 \leq \frac{\pi}{2} \\ \begin{cases} x = x_0 + k2\pi \\ x = \pi - x_0 + k2\pi \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \leq x_0 \leq \frac{\pi}{3} \\ \begin{cases} x = x_0 + k2\pi \\ x = \pi - x_0 + k2\pi \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

Ví dụ 2.16. Giải các bất phương trình lượng giác sau đây

1. $2 \cos^2 x - 1 \leq 0$.
2. $3 \tan^2 2x - 1 \leq 0$.

Giải. Ta có

$$\begin{aligned} 1. \quad 2 \cos^2 x - 1 \leq 0 &\Leftrightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \cos x \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &\Leftrightarrow \frac{\pi}{4} + k\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

2. Ta có

$$3 \tan^2 2x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{3}} \leq \tan 2x \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{6} + k\pi \leq 2x \leq \frac{\pi}{6} + k\pi$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

2.4 Các bất phương trình lượng giác hữu tỉ

Ví dụ 2.17. Giải bất phương trình $\cos x + \cos 2x + \cos 3x > 0$.

Giải. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\cos 2x + (\cos x + \cos 3x) > 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x (1 + 2 \cos x) > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x > 0 \\ 1 + 2 \cos x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x > 0 \\ \cos x > -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x < 0 \\ 1 + 2 \cos x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x < 0 \\ \cos x < -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi \\ -\frac{2\pi}{3} + k2\pi < x < \frac{4\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{4} + k2\pi < x < \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ -\frac{2\pi}{3} + k2\pi < x < \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{3\pi}{4} + k\pi \\ \frac{2\pi}{3} + k2\pi < x < \frac{4\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5\pi}{4} + k\pi < x < \frac{4\pi}{3} + k\pi \end{cases}$$

Ví dụ 2.18. Giải bất phương trình $\frac{1 - 4 \sin^2 x}{\cos 2x + \cos x} \leq 2$.

Giải. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{1 - 4(1 - \cos^2 x)}{\cos 2x + \cos x} - 2 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{4 \cos^2 x - 3}{2 \cos^2 x + \cos x - 1} - 2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2 \cos x + 1}{2 \cos^2 x + \cos x - 1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2 \cos x + 1}{(2 \cos x - 1)(\cos x + 1)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 < \cos x \leq -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} < \cos x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2\pi}{3} + k2\pi < x < \frac{4\pi}{3} + k2\pi \\ -\frac{\pi}{3} + k2\pi < x < \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases}$$

Ví dụ 2.19. Giải bất phương trình $5 + 2 \cos 2x \leq 3|1 - 2 \sin x|$.

Giải. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} 1 - 2 \sin x \geq 0 \\ 5 + 2 \cos 2x \leq 3(1 - 2 \sin x) \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} 1 - 2 \sin x < 0 \\ 5 + 2 \cos 2x \leq 3(2 \sin x - 1) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad & \begin{cases} 1 - 2 \sin x \geq 0 \\ 5 + 2 \cos 2x \leq 3(1 - 2 \sin x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \leq \frac{1}{2} \\ 6 \sin x + 2 \cos 2x + 2 \leq 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \leq \frac{1}{2} \\ 2 \sin^2 x - 3 \sin x - 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \leq \frac{1}{2} \\ (\sin x - 2)(2 \sin x + 1) \geq 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \sin x \leq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{5\pi}{6} + k2\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{6} + k2\pi. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad & \begin{cases} 1 - 2 \sin x < 0 \\ 5 + 2 \cos 2x \leq 3(2 \sin x - 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x > \frac{1}{2} \\ 6 \sin x - 2 \cos 2x - 8 \leq 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x > \frac{1}{2} \\ 2 \sin^2 x + 3 \sin x - 5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x > \frac{1}{2} \\ (\sin x - 1)(2 \sin x + 5) \geq 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi. \end{aligned}$$

Vậy, bất phương trình đã cho có nghiệm là

$$x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, \quad -\frac{5\pi}{6} + k2\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{6} + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

2.5 Các bất phương trình lượng giác có chứa tham số

Ví dụ 2.20. Cho bất phương trình $\sqrt{3} \sin^2 x + \frac{1}{2} \sin 2x \geq m$.

1. Tìm m để bất phương trình vô nghiệm.
2. Tìm nghiệm của bất phương trình $\sqrt{3} \sin^2 x + \frac{1}{2} \sin 2x \geq \sqrt{3}$ thỏa mãn điều kiện $\log(x^2 + x + 1) < 1$.

Giải.

1. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}\sqrt{3} \cdot \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right) + \frac{1}{2} \sin 2x \geq m &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x - \frac{1}{2} \sin 2x \leq \frac{\sqrt{3}}{2} - m \\ &\Leftrightarrow \cos \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) \leq \frac{\sqrt{3}}{2} - m.\end{aligned}$$

Bất phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi

$$\frac{\sqrt{3}}{2} - m < -1 \Leftrightarrow m > \frac{\sqrt{3}}{2} + 1.$$

2. Với $m = \sqrt{3}$, bất phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned}\cos \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) \leq -\frac{\sqrt{3}}{2} &\Leftrightarrow \frac{5\pi}{6} + k2\pi \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{7\pi}{6} + k2\pi \\ &\Leftrightarrow \frac{\pi}{3} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + k\pi.\end{aligned}\quad (2.20)$$

Mặt khác

$$\begin{aligned}\log(x^2 + x + 1) < 1 &\Leftrightarrow x^2 + x + 1 < 10 \Leftrightarrow x^2 + x - 9 < 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{-1 - \sqrt{37}}{2} < x < \frac{-1 + \sqrt{37}}{2}.\end{aligned}\quad (2.21)$$

Từ (2.20) và (2.21) ta suy ra tập nghiệm của bất phương trình đã cho là

$$S = \left[-\frac{2\pi}{3}; -\frac{\pi}{2} \right] \cup \left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2} \right] \cdot \cdot$$

Ví dụ 2.21. Tìm m để bất phương trình

$$|3 \sin^2 x + 2m \sin x \cos x + \cos^2 x + m| \leq 3$$

ng nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Giải. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}&\left| 3 \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2} + m \sin 2x + \frac{1 + \cos 2x}{2} + m \right| \leq 3 \\ &\Leftrightarrow |m \sin 2x - \cos 2x + m + 2| \leq 3 \\ &\Leftrightarrow \left| \sqrt{m^2 + 1} \left(\frac{m}{\sqrt{m^2 + 1}} \sin 2x - \frac{1}{\sqrt{m^2 + 1}} \cos 2x \right) + m + 2 \right| \leq 3.\end{aligned}$$

Đặt $\cos \alpha = \frac{m}{\sqrt{m^2 + 1}}$, $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{m^2 + 1}}$, khi đó ta có bất phương trình sau

$$\begin{aligned} & \left| \sqrt{m^2 + 1} \sin(2x - \alpha) + m + 2 \right| \leq 3 \\ \Leftrightarrow & -m - 5 \leq \sqrt{m^2 + 1} \sin(2x - \alpha) \leq 1 - m \\ \Leftrightarrow & \frac{-(m + 5)}{\sqrt{m^2 + 1}} \leq \sin(2x - \alpha) \leq \frac{1 - m}{\sqrt{m^2 + 1}}. \end{aligned}$$

Như vậy, bài toán được thỏa mãn khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \frac{-(m + 5)}{\sqrt{m^2 + 1}} \leq -1 \\ \frac{1 - m}{\sqrt{m^2 + 1}} \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + 5 \geq \sqrt{m^2 + 1} \\ 1 - m \geq \sqrt{m^2 + 1} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 1 - m \geq 0 \\ m + 5 \geq 0 \\ (1 - m)^2 \geq m^2 + 1 \\ (m + 5)^2 \geq m^2 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 \leq m \leq 1 \\ 2m \leq 0 \\ 10m \geq -24 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{12}{5} \leq m \leq 0. \end{aligned}$$

Ví dụ 2.22. Giải và biện luận bất phương trình

$$(m + 1) \cos 2x + m(1 + \sin 2x) < 0. \quad (2.22)$$

Giải.

1. Xét $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow \cos 2x = -1, \sin 2x = 0.$

Khi đó, bất phương trình (2.22) trở thành: $-(m + 1) + m < 0$ (luôn đúng).

2. Xét $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi.$

Đặt $t = \tan x \Rightarrow \sin 2x = \frac{2t}{1 + t^2}$, $\cos 2x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$, ta được bất phương trình

$$\begin{aligned} & (m + 1) \frac{1 - t^2}{1 + t^2} + m \left(1 + \frac{2t}{1 + t^2} \right) < 0 \\ \Leftrightarrow & (m + 1)(1 - t^2) + m(t + 1)^2 < 0 \\ \Leftrightarrow & (t + 1)(-t + 2m + 1) < 0. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Đặt $f(t) = (t+1)(-t+2m+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 2m+1 \end{cases}$

- Nếu $m > -1$ thì $t = 2m+1 > -1$, khi đó ta có

$$(2.23) \Leftrightarrow \begin{cases} t < -1 \\ t > 2m+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{2} + k\pi < x < -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ \alpha + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi, \end{cases}$$

trong đó $\tan \alpha = 2m+1$, $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

- Nếu $m = -1$ thì ta có

$$(2.23) \Leftrightarrow (t+1)^2 > 0 \Leftrightarrow t \neq -1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$$

- Nếu $m < -1$ thì $2m+1 < -1$, khi đó

$$(2.23) \Leftrightarrow \begin{cases} t > -1 \\ t < 2m+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \alpha + k\pi \\ -\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi, \end{cases}$$

Chương 3

Một số ứng dụng của lượng giác trong đại số

3.1 Sử dụng lượng giác để chứng minh đẳng thức

Khi giải các bài toán về chứng minh đẳng thức và bất đẳng thức, trong một số trường hợp ta có thể chuyển chúng thành các bài toán lượng giác để giải khiến cho việc giải bài toán được dễ dàng hơn, công việc này được gọi là phương pháp lượng giác hóa.

Ví dụ 3.1. Cho $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ thỏa mãn điều kiện sau

$$xy + yz + zx = 1. \quad (3.1)$$

Chứng minh rằng

$$x\sqrt{\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{1+x^2}} + y\sqrt{\frac{(1+z^2)(1+x^2)}{1+y^2}} + z\sqrt{\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{1+z^2}} = 2.$$

Giải.

Đặt $x = \tan \alpha, y = \tan \beta, z = \tan \gamma$ với $\alpha, \beta, \gamma \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Khi đó (3.1) có dạng

$$\tan \alpha \tan \beta + \tan \beta \tan \gamma + \tan \gamma \tan \alpha = 1$$

$$\Leftrightarrow \tan \alpha (\tan \beta + \tan \gamma) = 1 - \tan \beta \tan \gamma$$

$$\Leftrightarrow \tan \alpha = \frac{1 - \tan \beta \tan \gamma}{\tan \beta + \tan \gamma} = \cot(\beta + \gamma)$$

$$\Leftrightarrow \alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

Do $\alpha + \beta + \gamma \in [0; \frac{3\pi}{2})$ nên $0 \leq \frac{\pi}{2} + k\pi < \frac{3\pi}{2}$ hay $-\frac{1}{2} \leq k < 1$.

Vì $k \in \mathbb{Z}$ nên $k = 0$. Vậy: $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$.

Ta có

$$\begin{aligned} x\sqrt{\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{1+x^2}} &= \tan \alpha \sqrt{\frac{(1+\tan^2 \beta)(1+\tan^2 \gamma)}{1+\tan^2 \alpha}} \\ &= \tan \alpha \frac{\cos \alpha}{\cos \beta \cos \gamma} = \frac{\sin \alpha}{\cos \beta \cos \gamma} = \frac{\cos(\beta + \gamma)}{\cos \beta \cos \gamma} \\ &= \frac{\cos \beta \cos \gamma - \sin \beta \sin \gamma}{\cos \beta \cos \gamma} \\ &= 1 - \tan \beta \tan \gamma = 1 - yz. \end{aligned}$$

Tương tự

$$\begin{aligned} y\sqrt{\frac{(1+z^2)(1+x^2)}{1+y^2}} &= 1 - zx. \\ z\sqrt{\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{1+z^2}} &= 1 - xy. \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} x\sqrt{\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{1+x^2}} + y\sqrt{\frac{(1+z^2)(1+x^2)}{1+y^2}} + z\sqrt{\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{1+z^2}} \\ = 3 - (xy + yz + zx) = 2. \end{aligned}$$

Ví dụ 3.2. Cho $0 < a, b, c < 1$ và

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc = 1. \quad (3.2)$$

Chứng minh rằng

$$abc + 1 = c\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)} + \sqrt{(1-b^2)(1-c^2)} + \sqrt{(1-c^2)(1-a^2)}.$$

Giải.

Vì $0 < a, b, c < 1$, nên ta đặt $a = \cos \alpha, b = \cos \beta, c = \cos \gamma$ với $0 < \alpha, \beta, \gamma < \frac{\pi}{2}$.

Khi đó (3.2) trở thành

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha) + \frac{1}{2}(1+\cos 2\beta) + \cos^2 \gamma + [\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)] \cos \gamma = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) + \cos^2 \gamma + [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)] \cos \gamma = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos(\alpha + \beta)[\cos(\alpha - \beta) + \cos \gamma] + \cos \gamma[\cos \gamma + \cos(\alpha - \beta)] = 0$$

$$\Leftrightarrow [\cos(\alpha + \beta) + \cos \gamma][\cos(\alpha - \beta) + \cos \gamma] = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos(\alpha + \beta) + \cos \gamma = 0 \text{ (do } \cos(\alpha - \beta) + \cos \gamma > 0, \forall \alpha, \beta, \gamma \in (0, \frac{\pi}{2}))$$

$$\Leftrightarrow \alpha + \beta = \pi - \gamma.$$

Vậy $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

Khi đó đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma + 1 = \cos \gamma \sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma + \cos \beta \sin \gamma \sin \alpha$$

$$\Leftrightarrow \cos \gamma \cos(\alpha + \beta) - \sin(\alpha + \beta) \sin \gamma + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos(\alpha + \beta + \gamma) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos(\alpha + \beta + \gamma) = -1, \text{ điều này đúng do } \alpha + \beta + \gamma = \pi.$$

Vậy bài toán được chứng minh.

Ví dụ 3.3. Cho $x \neq \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, y \neq \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, z \neq \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ và thỏa mãn điều kiện

$$x + y + z = xyz.$$

Chứng minh rằng

$$\frac{3x - x^3}{1 - 3x^2} + \frac{3y - y^3}{1 - 3y^2} + \frac{3z - z^3}{1 - 3z^2} = \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2} \cdot \frac{3y - y^3}{1 - 3y^2} \cdot \frac{3z - z^3}{1 - 3z^2}.$$

Giải.

Đặt $x = \tan \alpha, y = \tan \beta, z = \tan \gamma$ với $\alpha, \beta, \gamma \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Do $x + y + z = xyz$ nên $\tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma = \tan \alpha \tan \beta \tan \gamma$.

Suy ra

$$\tan \alpha + \tan \beta = -\tan \gamma(1 - \tan \alpha \tan \beta). \quad (3.3)$$

Vì $x + y + z = xyz$ nên $xy \neq 1$.

Thật vậy, giả sử ngược lại $xy = 1$ ta có $x + y + z = z \Rightarrow x + y = 0$ hay

$x = -y$ khi đó $xy = 1 \Leftrightarrow -x^2 = 1$ (vô lý).

Vậy $xy \neq 1$ hay $\tan \alpha \tan \beta \neq 1$ nên đẳng thức (3.3) tương đương với

$$\tan(\alpha + \beta) = -\tan \gamma.$$

Do đó

$$\alpha + \beta + \gamma = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Suy ra

$$3\alpha + 3\beta + 3\gamma = 3k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

và vì vậy

$$\tan(3\alpha + 3\beta) = -\tan 3\gamma.$$

hay

$$\tan 3\alpha + \tan 3\beta + \tan 3\gamma = \tan 3\alpha \tan 3\beta \tan 3\gamma. \quad (3.4)$$

Mặt khác, sử dụng công thức

$$\tan 3t = \frac{3 \tan t - \tan^3 t}{1 - 3 \tan^2 t},$$

thay vào (3.4), ta có ngay điều phải chứng minh.

3.2 Sử dụng lượng giác để chứng minh bất đẳng thức

Ví dụ 3.4. Cho $x, y, z \in (0; 1)$ và $xy + yz + zx = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{x}{1-x^2} + \frac{y}{1-y^2} + \frac{z}{1-z^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Giải. Đặt $x = \tan \alpha$, $y = \tan \beta$, $z = \tan \gamma$.

Do $x, y, z \in (0, 1)$ nên có thể chọn

$$\alpha, \beta, \gamma \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right). \quad (3.5)$$

Ta có

$$xy + yz + zx = 1 \Leftrightarrow \tan \alpha \tan \beta + \tan \beta \tan \gamma + \tan \gamma \tan \alpha = 1.$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \tan \alpha (\tan \beta + \tan \gamma) = 1 - \tan \beta \tan \gamma \\
&\Leftrightarrow \frac{\tan \beta + \tan \gamma}{1 - \tan \beta \tan \gamma} = \frac{1}{\tan \alpha} \\
&\Leftrightarrow \tan(\beta + \gamma) = \cot \alpha.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Từ (3.5) và (3.6) suy ra $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2\alpha + 2\beta + 2\gamma = \pi$

$$\Rightarrow \tan 2\alpha + \tan 2\beta + \tan 2\gamma = \tan 2\alpha \tan 2\beta \tan 2\gamma. \tag{3.7}$$

Ta có

$$2\left(\frac{x}{1-x^2} + \frac{y}{1-y^2} + \frac{z}{1-z^2}\right) = \tan 2\alpha + \tan 2\beta + \tan 2\gamma. \tag{3.8}$$

Do $\alpha, \beta, \gamma \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ nên $2\alpha, 2\beta, 2\gamma \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Suy ra $\tan 2\alpha, \tan 2\beta, \tan 2\gamma$ là các số dương.

Theo bất đẳng thức AM - GM ta có

$$\tan 2\alpha + \tan 2\beta + \tan 2\gamma \geq 3\sqrt[3]{\tan 2\alpha \tan 2\beta \tan 2\gamma}. \tag{3.9}$$

Từ (3.7) và (3.9) ta suy ra

$$\begin{aligned}
&\tan 2\alpha + \tan 2\beta + \tan 2\gamma \geq 3\sqrt[3]{\tan 2\alpha \tan 2\beta \tan 2\gamma} \\
&\Leftrightarrow (\tan 2\alpha + \tan 2\beta + \tan 2\gamma)^2 \geq 27 \\
&\Leftrightarrow \tan 2\alpha + \tan 2\beta + \tan 2\gamma \geq 3\sqrt{3}.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Kết hợp (3.8) và (3.10) ta có điều phải chứng minh.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Ví dụ 3.5. Cho $x^2 + y^2 = 1, u^2 + v^2 = 1$. Chứng minh rằng

$$|x(u+v) + y(u-v)| \leq \sqrt{2}.$$

Giải.

Từ $x^2 + y^2 = 1$, ta có thể đặt $x = \cos \alpha, y = \sin \alpha$.

Tương tự từ $u^2 + v^2 = 1$, ta có thể đặt $u = \cos \beta, v = \sin \beta$.

Khi đó

$$\begin{aligned}
x(u+v) + y(u-v) &= \cos \alpha (\sin \beta + \cos \beta) + \sin \alpha (\cos \beta - \sin \beta) \\
&= \cos(\alpha + \beta) + \sin(\alpha + \beta) \\
&= \sqrt{2} \sin\left(\alpha + \beta + \frac{\pi}{4}\right).
\end{aligned}$$

Suy ra $|x(u+v) + y(u-v)| \leq \sqrt{2}$.

Dấu "=" xảy ra khi $\alpha + \beta + \frac{\pi}{4} = k2\pi \Leftrightarrow \alpha + \beta = -\frac{\pi}{4} + k2\pi$.

$$\Leftrightarrow \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} xu - yv &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ x^2 + y^2 &= 1 \\ u^2 + v^2 &= 1 \end{cases}$$

Ví dụ 3.6. Cho tam thức bậc hai $ax^2 + bx + c$ thỏa mãn điều kiện

$$\sqrt{1-x^2} |ax^2 + bx + c| \leq 1, \forall x \in [-1; 1].$$

Chứng minh rằng

$$1. |a| \leq 4.$$

$$2. |ax^2 + bx + c| \leq 3, \forall x \in [-1; 1].$$

Giải.

1) Đặt $x = \cos t$, từ giả thiết ta có

$$|\sin t(a \cos^2 t + b \cos t + c)| \leq 1, \forall t,$$

do đó

$$\left| \sin \frac{\pi}{6} \left(a \cos^2 \frac{\pi}{6} + b \cos \frac{\pi}{6} + c \right) \right| \leq 1 \Leftrightarrow \left| \frac{3a}{8} + \frac{b\sqrt{3}}{4} + \frac{c}{2} \right| \leq 1$$

$$\left| \sin \frac{\pi}{2} \left(a \cos^2 \frac{\pi}{2} + b \cos \frac{\pi}{2} + c \right) \right| \leq 1 \Leftrightarrow |c| \leq 1$$

$$\left| \sin \frac{5\pi}{6} \left(a \cos^2 \frac{5\pi}{6} + b \cos \frac{5\pi}{6} + c \right) \right| \leq 1 \Leftrightarrow \left| \frac{3a}{8} - \frac{b\sqrt{3}}{4} + \frac{c}{2} \right| \leq 1.$$

Mà

$$\begin{aligned} |a| &= \frac{4}{3} \left| \frac{3a}{8} + \frac{b\sqrt{3}}{4} + \frac{c}{2} - c + \frac{3a}{8} - \frac{b\sqrt{3}}{4} + \frac{c}{2} \right| \\ &\leq \frac{4}{3} \left(\left| \frac{3a}{8} + \frac{b\sqrt{3}}{4} + \frac{c}{2} \right| + |c| + \left| \frac{3a}{8} - \frac{b\sqrt{3}}{4} + \frac{c}{2} \right| \right). \end{aligned}$$

Do đó

$$|a| \leq \frac{4}{3} \cdot 3 = 4.$$

2) Nếu $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq x \leq 1$ thì

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= \frac{1}{3} \left(\frac{3a}{8} + \frac{b\sqrt{3}}{4} + \frac{c}{2} \right) (4x^2 + 2\sqrt{3}x) - \frac{1}{3}c(4x^2 - 3) \\ &\quad + \frac{1}{3} \left(\frac{3a}{8} - \frac{b\sqrt{3}}{4} + \frac{c}{2} \right) (4x^2 - 2\sqrt{3}x). \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} |ax^2 + bx + c| &\leq \frac{1}{3} \left| \left(\frac{3a}{8} + \frac{b\sqrt{3}}{4} + \frac{c}{2} \right) (4x^2 + 2\sqrt{3}x) \right| + \frac{1}{3} |c(4x^2 - 3)| \\ &\quad + \frac{1}{3} \left| \left(\frac{3a}{8} - \frac{b\sqrt{3}}{4} + \frac{c}{2} \right) (4x^2 - 2\sqrt{3}x) \right| \end{aligned}$$

hay

$$\begin{aligned} |ax^2 + bx + c| &\leq \frac{1}{3} |4x^2 + 2\sqrt{3}x + 4x^2 - 3 + 4x^2 - 2\sqrt{3}x| \\ &\Leftrightarrow |ax^2 + bx + c| \leq 4x^2 - 1 \leq 3, \forall x \in \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1 \right]. \end{aligned}$$

Tương tự ta có

$$|ax^2 + bx + c| \leq 3, \forall x \in \left[-1, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

Nếu $-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ thì $x^2 \leq \frac{3}{4}$. Khi đó ta có

$$\sqrt{1 - x^2} \geq \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = \frac{1}{2} \geq \frac{1}{3}.$$

Suy ra $|ax^2 + bx + c| \leq \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \leq 3$.

Vậy $|ax^2 + bx + c| \leq 3, \forall x \in [-1, 1]$, bài toán được chứng minh.

Ví dụ 3.7. Cho bốn số dương a_1, a_2, a_3, a_4 . Chứng minh rằng trong bốn số ấy bao giờ cũng chọn được hai số a_i, a_j ($i \neq j$) sao cho

$$0 \leq \frac{a_i - a_j}{1 + a_i + a_j + 2a_i a_j} < 2 - \sqrt{3}.$$

Giải.

Đặt $b_i = 1 + \frac{1}{a_i}$ ($i = 1, 2, 3, 4$). Do $a_i > 0$ nên $b_i > 1$.

Đặt $b_i = \tan \alpha_i$ thì $\frac{\pi}{4} < \alpha_i < \frac{\pi}{2}$, ($i = \overline{1, 4}$).

Như vậy trong khoảng $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ có 4 số $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, vậy phải tồn tại hai số α_i, α_j sao cho

$$0 \leq \alpha_j - \alpha_i < \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{12}. \quad (3.11)$$

Từ (3.11) ta có

$$0 \leq \tan(\alpha_j - \alpha_i) < \tan \frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{\tan \alpha_j - \tan \alpha_i}{1 + \tan \alpha_i \tan \alpha_j} < 2 - \sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{b_j - b_i}{1 + b_i b_j} < 2 - \sqrt{3} &\Leftrightarrow 0 \leq \frac{\left(1 + \frac{1}{a_j}\right) - \left(1 + \frac{1}{a_i}\right)}{1 + \left(1 + \frac{1}{a_j}\right) \left(1 + \frac{1}{a_i}\right)} < 2 - \sqrt{3} \\ &\Leftrightarrow 0 \leq \frac{a_i - a_j}{1 + a_i + a_j + 2a_i a_j} < 2 - \sqrt{3}. \end{aligned}$$

3.3 Sử dụng lượng giác để giải phương trình, bất phương trình và hệ phương trình đại số

Phương pháp chung

Khi giải phương trình, bất phương trình, hệ phương trình đại số, nhiều khi ta gặp phải các phương trình, bất phương trình, hệ phương trình rất khó khăn trong việc tìm ra nghiệm của nó. Trong số đó có những bài toán ta có thể chuyển về bài toán lượng giác thì cách giải sẽ đơn giản và dễ dàng hơn. Việc chuyển từ phương trình, bất phương trình, hệ phương trình đại số về phương trình, bất phương trình, hệ phương trình lượng giác được gọi là "lượng giác hóa" các phương trình, bất phương trình, hệ phương trình đại số.

Trong quá trình này ta thường dùng các phép đặt

$$x = \sin t, x = \cos t, x = \tan t, \dots$$

được thể hiện qua các mệnh đề sau:

Mệnh đề 3.1 (xem [2]). Nếu $-1 \leq x \leq 1$ thì có một số α với $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ sao cho $\sin \alpha = x$ và một số β với $0 \leq \beta \leq \pi$ sao cho $\cos \beta = x$.

Mệnh đề 3.2 (xem [2]). Nếu $0 \leq x \leq 1$ thì có một số α và một số β với $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$ sao cho $\sin \alpha = x, \sin \beta = x$.

Mệnh đề 3.3 (xem [2]). Với mỗi số thực x có một số α với $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ sao cho $\tan \alpha = x$.

Mệnh đề 3.4 (xem [2]). Nếu các số thực x, y thỏa mãn hệ thức $x^2 + y^2 = 1$ thì có một số α với $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ sao cho $x = \cos \alpha$ và $y = \sin \alpha$.

Nhận xét 3.1. Nếu $x \in [a, b]$ thì có thể đặt

$$x = \frac{b-a}{2} \cos t + \frac{b+a}{2} \quad \text{với } 0 \leq t \leq \pi$$

$$\text{hoặc } x = \frac{b-a}{2} \sin t + \frac{b+a}{2} \quad \text{với } -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\text{hoặc } x = (b-a) \cos^2 t + a \quad \text{với } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\text{hoặc } x = \tan t \quad \text{với } \arctan a \leq t \leq \arctan b.$$

Nhận xét 3.2. Các dấu hiệu nhận biết một bài toán có thể giải được bằng phương pháp lượng giác hóa

- Tập xác định của biến số x là tập giá trị của một hàm số lượng giác nào đó.
- Có một trở ngại cần khắc phục, chẳng hạn bậc cao, căn thức, điều kiện phức tạp, khó xử lý.
- Trong đề bài (ở giả thiết hoặc kết luận) có một bộ phận tương tự với một công thức lượng giác nào đó. Ví dụ:

+) Bộ phận $1 + x^2$ tương tự với công thức $1 + \tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}$.

- +) Bộ phận $4x^3 - 3x$ tương tự với công thức $4\cos^3 t - 3\cos t = \cos 3t$.
- +) Bộ phận $2x^2 - 1$ tương tự với công thức $2\cos^2 t - 1 = \cos 2t$.
- +) Bộ phận $\frac{2x}{1-x^2}$ tương tự với công thức $\tan 2t = \frac{2\tan t}{1-\tan^2 t}$.
- +) Bộ phận $\frac{x+y}{1-xy}$ tương tự với công thức $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1-\tan \alpha \tan \beta}$.

Các ví dụ

Ví dụ 3.8. Giải phương trình

$$x^3 + \sqrt{(1-x^2)^3} = x\sqrt{2-2x^2}. \quad (3.12)$$

Giải. Điều kiện $1-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$.

Đặt $x = \cos t, t \in [0, \pi] \Rightarrow \sin t \geq 0, \forall t \in [0, \pi]$.

Khi đó phương trình (3.12) trở thành

$$\begin{aligned} \cos^3 t + \sqrt{(1-\cos^2 t)^3} &= \cos t \sqrt{2-2\cos^2 t} \\ \Leftrightarrow \cos^3 t + \sin^3 t &= \sqrt{2} \sin t \cos t \\ \Leftrightarrow (\sin t + \cos t)(1 - \sin t \cos t) &= \sqrt{2} \sin t \cos t. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Đặt $z = \sin t + \cos t, z \in [-1, \sqrt{2}]$ vì $t \in [0, \pi] \Rightarrow \sin t \cos t = \frac{z^2 - 1}{2}$.

Phương trình (3.13) trở thành

$$\begin{aligned} z \left(1 - \frac{z^2 - 1}{2} \right) &= \sqrt{2} \cdot \frac{z^2 - 1}{2} \\ \Leftrightarrow z^3 + \sqrt{2}z^2 - 3z - \sqrt{2} &= 0 \Leftrightarrow (z - \sqrt{2})(z^2 + 2\sqrt{2} + 1) = 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} z = \sqrt{2} \\ z = 1 - \sqrt{2} \\ z = -1 - \sqrt{2} < -1 \Rightarrow \text{loại.} \end{cases} \\ \bullet \text{ Với } z = \sqrt{2} \text{ ta có } \begin{cases} \sin t + \cos t &= \sqrt{2} \\ \sin t \cos t &= \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Suy ra $\cos t$ là nghiệm của phương trình $x^2 - \sqrt{2}x + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

- Với $z = 1 - \sqrt{2}$ ta có $\begin{cases} \sin t + \cos t &= 1 - \sqrt{2} \\ \sin t \cos t &= 1 - \sqrt{2} \end{cases}$

Suy ra $\cos t$ là nghiệm của phương trình

$$x^2 - (1 - \sqrt{2})x + 1 - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 - \sqrt{2} \pm \sqrt{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 3)}}{2}.$$

Vậy, phương trình (3.12) có các nghiệm là

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x = \frac{1 - \sqrt{2} \pm \sqrt{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 3)}}{2}.$$

Ví dụ 3.9. Giải phương trình

$$4x^3 - 3x - \frac{1}{2} = 0. \quad (3.14)$$

Giải. Đặt $f(x) = 4x^3 - 3x - \frac{1}{2}$, ta có $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f(-1) = -\frac{3}{2}$, $f(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$, $f(0) = -\frac{1}{2}$, $f(1) = \frac{1}{2}$ nên theo tính chất của hàm số liên tục phương trình (3.14) có ít nhất 3 nghiệm phân biệt (trên mỗi khoảng $(-1, -\frac{1}{2})$, $(-\frac{1}{2}, 0)$, $(0, 1)$ phương trình (3.14) có ít nhất một nghiệm mà ba khoảng đó tách rời nhau). Nhưng (3.14) là phương trình bậc 3 nên nó có nhiều nhất 3 nghiệm phân biệt.

Do đó, phương trình (3.14) có 3 nghiệm phân biệt đều thuộc khoảng $(-1, 1)$.

Đặt $x = \cos t$, $t \in (0, \pi)$, phương trình (3.14) trở thành

$$4\cos^3 t - 3\cos t - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \cos 3t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 3t = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 3t = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện $t \in (0, \pi)$ ta có $t_1 = \frac{\pi}{9}$, $t_2 = \frac{5\pi}{9}$, $t_3 = \frac{7\pi}{9}$.

Vậy, (3.14) có nghiệm là: $x_1 = \cos \frac{\pi}{9}$, $x_2 = \cos \frac{5\pi}{9}$, $x_3 = \cos \frac{7\pi}{9}$.

Ví dụ 3.10. Giải phương trình

$$x + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = 2\sqrt{2}. \quad (3.15)$$

Giải. Điều kiện $x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

Mặt khác phương trình (3.15) có nghiệm khi và chỉ khi $x > 0$, do đó điều kiện có nghiệm của (3.15) là $x > 1$.

Với điều kiện này ta đặt $x = \frac{1}{\cos t}$, $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Khi đó phương trình (3.15) trở thành

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos t} + \frac{\frac{1}{\cos t}}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t} - 1}} &= 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\cos t} + \frac{1}{\sin t} = 2\sqrt{2} \\ \Leftrightarrow \sin t + \cos t &= 2\sqrt{2} \sin t \cos t \Leftrightarrow \sin \left(t + \frac{\pi}{4}\right) = \sin 2t \\ \Leftrightarrow \begin{cases} t + \frac{\pi}{4} = 2t + k2\pi \\ t + \frac{\pi}{4} = \pi - 2t + k2\pi \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \\ t = \frac{\pi}{4} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ta được $t = \frac{\pi}{4}$ thỏa mãn, suy ra $x = \sqrt{2}$.
Vậy phương trình đã cho có nghiệm là: $x = \sqrt{2}$.

Ví dụ 3.11. Giải phương trình

$$8^x + 15^x = 17^x. \quad (3.16)$$

Giải. Chia cả hai vế của phương trình cho 17^x , ta được

$$\left(\frac{8}{17}\right)^x + \left(\frac{15}{17}\right)^x = 1.$$

$$\text{Do } \left(\frac{8}{17}\right)^2 + \left(\frac{15}{17}\right)^2 = 1 \text{ nên tồn tại } \alpha \in [0, 2\pi] \text{ sao cho } \begin{cases} \cos \alpha = \frac{8}{17} \\ \sin \alpha = \frac{15}{17} \end{cases}$$

Khi đó ta có phương trình

$$\cos^x \alpha + \sin^x \alpha = 1.$$

Dễ thấy $x = 2$ là nghiệm của phương trình.

Ta chứng minh $x = 2$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Thật vậy,

- Nếu $x < 2$ thì ta có $\begin{cases} \sin^x \alpha > \sin^2 \alpha \\ \cos^x \alpha > \cos^2 \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \cos^x \alpha + \sin^x \alpha > 1$.

Suy ra phương trình không được nghiệm đúng.

- Nếu $x > 2$ thì ta có $\begin{cases} \sin^x \alpha < \sin^2 \alpha \\ \cos^x \alpha < \cos^2 \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \cos^x \alpha + \sin^x \alpha < 1$.

Suy ra phương trình không được nghiệm đúng.

Vậy, phương trình đã cho có nghiệm là $x = 2$.

Ví dụ 3.12. Chứng minh rằng phương trình

$$16x^5 - 20x^3 + 5x + 2 = 0 \quad (3.17)$$

có nghiệm duy nhất. Tìm nghiệm đó.

Giải.

- Xét $x \in [-1, 1]$: Đặt $x = \cos \alpha, \alpha \in [0, \pi]$, phương trình đã cho trở thành

$$16 \cos^5 \alpha - 20 \cos^3 \alpha + 5 \cos \alpha + 2 = 0 \Leftrightarrow \cos 5\alpha + 2 = 0 \quad (\text{Vô nghiệm}).$$

- Xét $x \notin [-1, 1] \Leftrightarrow |x| > 1$:

Khi đó tồn tại duy nhất giá trị $a \in \mathbb{R}, |a| > 1$ mà $x = \frac{1}{2} \left(a + \frac{1}{a} \right)$, giá trị a đó là $x - \sqrt{x^2 - 1}$ nếu $x < -1$; là $x + \sqrt{x^2 - 1}$ nếu $x > 1$.

Lúc đó

$$\begin{aligned} 16x^5 &= \frac{1}{2} \left[\left(a^5 + \frac{1}{a^5} \right) + 5 \left(a^3 + \frac{1}{a^3} \right) + 10 \left(a + \frac{1}{a} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(a^5 + \frac{1}{a^5} \right) + 5 \left(a + \frac{1}{a} \right)^3 - 5 \left(a + \frac{1}{a} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(a^5 + \frac{1}{a^5} \right) + 20x^3 - 5x. \end{aligned}$$

Suy ra phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{1}{20} \left(a^5 + \frac{1}{a^5} \right) + 2 = 0.$$

Đặt $t = a^5$ thì ta sẽ có $a^5 = -2 - \sqrt{3}$.

Vậy, phương trình (3.17) có nghiệm thực duy nhất là

$$x = \frac{\sqrt[5]{-2 - \sqrt{3}} + \sqrt[5]{-2 + \sqrt{3}}}{2}.$$

Ví dụ 3.13. Phương trình

$$8x(1 - 2x^2)(8x^4 - 8x^2 + 1) = 1 \quad (3.18)$$

có bao nhiêu nghiệm nằm trong khoảng $(0, 1)$?

Giải. Đặt $x = \sin t$, $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Phương trình đã cho trở thành

$$8 \sin t (1 - 2 \sin^2 t) (8 \sin^4 t - 8 \sin^2 t + 1) = 1 \Leftrightarrow 8 \sin t \cos 2t \cos 4t = 1. \quad (3.19)$$

Vì $0 < t < \frac{\pi}{2}$ nên $\cos t \neq 0$. Nhân hai vế của (3.19) với $\cos t$ ta được

$$8 \sin t \cos t \cos 2t \cos 4t = \cos t \Leftrightarrow \sin 8t = \cos t \Leftrightarrow \sin 8t = \sin \left(\frac{\pi}{2} - t\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8t = \frac{\pi}{2} - t + k2\pi \\ 8t = \frac{\pi}{2} + t + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{9} \\ t = \frac{\pi}{14} + k\frac{2\pi}{7} \end{cases}$$

Vì $0 < t < \frac{\pi}{2}$ nên ta có các giá trị thỏa mãn là

$$t_1 = \frac{\pi}{18}, t_2 = \frac{\pi}{14}, t_3 = \frac{5\pi}{18}, t_4 = \frac{5\pi}{14}.$$

Khi đó phương trình (3.18) có các nghiệm là:

$$x_1 = \sin \frac{\pi}{18}, x_2 = \sin \frac{\pi}{14}, x_3 = \sin \frac{5\pi}{18}, x_4 = \sin \frac{5\pi}{14}.$$

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm nằm trong khoảng $(0, 1)$.

Ví dụ 3.14. Chứng minh rằng phương trình

$$64x^6 - 96x^4 + 36x^2 - 3 = 0 \quad (3.20)$$

có nghiệm x_0 thỏa mãn điều kiện

$$\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}{2} < x_0 < \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}{2}.$$

Giải. Ta tìm nghiệm thuộc khoảng $(0, 1)$ của phương trình (3.20).

Đặt $x = \cos t$, $0 < t < \frac{\pi}{2}$. Ta được phương trình

$$\begin{aligned} 64 \cos^6 t - 96 \cos^4 t + 36 \cos^2 t - 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow 2[2(16 \cos^6 t - 24 \cos^4 t + 9 \cos^2 t) - 1] &= 1 \\ \Leftrightarrow 2(4 \cos^3 t - 3 \cos t)^2 - 1 &= \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2 \cos^2 3t - 1 = \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \cos 6t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 6t &= \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \Leftrightarrow t = \pm \frac{\pi}{18} + k\frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

Khi đó, nghiệm $t_0 = \frac{\pi}{18}$ thỏa mãn bài toán. Thật vậy:

Từ các công thức $\cos^2 \frac{t}{4} = \frac{1 + \cos \frac{t}{2}}{2}$, $\cos^2 \frac{t}{2} = \frac{1 + \cos t}{2}$ với $0 < t < \frac{\pi}{2}$.

Ta có: $\cos^2 \frac{t}{4} = \frac{1 + \sqrt{\frac{1 + \cos t}{2}}}{2} = \frac{2 + \sqrt{2 + 2 \cos t}}{4}$.

Suy ra $\cos \frac{t}{4} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2 + 2 \cos t}}}{2}$.

Với $t = \frac{\pi}{4}$ và $t = \frac{\pi}{6}$, ta được

$$\cos \frac{\pi}{16} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}{2}, \quad \cos \frac{\pi}{24} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}{2}.$$

Như vậy điều kiện về nghiệm x_0 tương đương với $\frac{\pi}{24} < x < \frac{\pi}{16}$. Theo lập luận trên ta có $t_0 = \frac{\pi}{18}$ thỏa mãn đề bài.

Ví dụ 3.15. Giải bất phương trình

$$\frac{1}{1 - x^2} > \frac{3x}{\sqrt{1 - x^2}} - 1. \quad (3.21)$$

Giải. Điều kiện $1 - x^2 > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1$.

Đặt $x = \sin t$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \cos t > 0$.

Bất phương trình (3.21) trở thành

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 - \sin^2 t} > \frac{3 \sin t}{\sqrt{1 - \sin^2 t}} - 1 \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{\cos^2 t} > \frac{3 \sin t}{\cos t} - 1 \Leftrightarrow \tan^2 t - 3 \tan t + 2 > 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \tan t < 1 \\ \tan t > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{4} \\ \arctan 2 < t < \frac{\pi}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Do đó

$$(3.21) \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) < x < \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ \sin(\arctan 2) < x < \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\arctan 2) < x < 1 \end{cases}$$

(Do hàm số sin đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Mặt khác $\sin(\arctan 2) = \frac{\tan(\arctan 2)}{\sqrt{1 + \tan^2(\arctan 2)}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Vậy bất phương trình (3.21) có nghiệm là

$$-1 < x < \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ hoặc } \frac{2}{\sqrt{5}} < x < 1.$$

Ví dụ 3.16. Giải bất phương trình

$$\sqrt{x^2 + a^2} \leq x + \frac{2a^2}{\sqrt{x^2 + a^2}}. \quad (3.22)$$

Giải. Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Đặt $x = |a| \arctan \alpha$, $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Khi đó phương trình (3.22) có dạng

$$\begin{aligned} & \frac{|a|}{\cos \alpha} \leq |a| \tan \alpha + \frac{2a^2}{|a|} \cos \alpha \\ \Leftrightarrow & 1 \leq \sin \alpha + 2 \cos^2 \alpha \Leftrightarrow 2 \sin^2 \alpha - \sin \alpha - 1 \leq 0 \\ \Leftrightarrow & -\frac{1}{2} \leq \sin \alpha \leq 1 \Leftrightarrow \tan \alpha \geq -\frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x \geq \frac{|a|}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm là: $x \geq \frac{|a|}{\sqrt{3}}$.

Ví dụ 3.17. Tìm m để bất phương trình sau có nghiệm

$$\sqrt{x} + \sqrt{1-x} > m\sqrt{x-x^2} + 1.$$

Giải. Điều kiện $0 \leq x \leq 1$.

Đặt $x = \cos^2 t$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, ta thu được bất phương trình

$$\cos t + \sin t > m \sin t \cos t + 1. \quad (3.23)$$

Đặt $u = \cos t + \sin t$, $u \in [1, \sqrt{2}] \Rightarrow \sin t \cos t = \frac{u^2 - 1}{2}$.

Khi đó (3.23) trở thành

$$2u > m(u^2 - 1) + 2 \Leftrightarrow 2(u - 1) > m(u^2 - 1). \quad (3.24)$$

- Nếu $u = 1$ thì (3.24) $\Leftrightarrow 2.0 > m.0$ (vô lý). Suy ra BPT không có nghiệm $u = 1$.
- Nếu $u \in (1; \sqrt{2}]$ thì ta có $u - 1 > 0, u + 1 > 0$ nên

$$(3.24) \Leftrightarrow m < \frac{2}{u+1} = f(u).$$

Bất phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi bất phương trình (3.23) có nghiệm $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ hay là (3.24) có nghiệm $u \in [1, \sqrt{2}]$.

Điều kiện cần và đủ để xảy ra điều đó là $m < \sup_{(1, \sqrt{2}]} f(u)$.

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $m < 1$.

Bây giờ ta chuyển sang xét lớp phương trình vô tỉ xuất phát từ đẳng thức lượng giác.

Ví dụ 3.18. Từ phương trình $\cos 3t = \sin t$, $t \in [0, \pi]$, ta thấy phương trình này tương đương với

$$4 \cos^3 t - 3 \cos t = \sqrt{1 - \cos^2 t}.$$

Đặt $x = \cos t$ ta được bài toán sau

Bài toán 3.1. Giải phương trình

$$4x^3 - 3x = \sqrt{1 - x^2}.$$

Giải. Điều kiện $-1 \leq x \leq 1$.

Đặt $x = \cos t$, $t \in [0, \pi] \Rightarrow \sin t \geq 0$. Phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned} 4 \cos^3 t - 3 \cos t = \sin t &\Leftrightarrow \cos 3t = \cos \left(\frac{\pi}{2} - t \right) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 3t = \frac{\pi}{2} - t + k2\pi \\ 3t = -\frac{\pi}{2} + t + k2\pi \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \\ t = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} \end{aligned}$$

Vì $t \in [0, \pi]$ nên ta có: $t_1 = \frac{\pi}{8}$, $t_2 = \frac{5\pi}{8}$, $t_3 = \frac{3\pi}{4}$.

Vậy, phương trình đã cho có nghiệm là:

$$x_1 = \cos \frac{\pi}{8}, \quad x_2 = \cos \frac{5\pi}{8}, \quad x_3 = \cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Bài toán 3.2. Giải phương trình

$$4x^3 - 12x^2 + 9x - 1 = \sqrt{2x - x^2}.$$

Giải. Điều kiện $0 \leq x \leq 2$. Phương trình đã cho tương đương với

$$4(x-1)^3 - 3(x-1) = \sqrt{1 - (x-1)^2}. \quad (3.25)$$

Đặt $x - 1 = \cos t$, $t \in [0, \pi] \Rightarrow \sin t \geq 0$, phương trình (3.25) trở thành

$$\begin{aligned} 4 \cos^3 t - 3 \cos t = \sin t &\Leftrightarrow \cos 3t = \cos \left(\frac{\pi}{2} - t \right) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 3t = \frac{\pi}{2} - t + k2\pi \\ 3t = -\frac{\pi}{2} + t + k2\pi \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \\ t = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} \end{aligned}$$

Vì $t \in [0, \pi]$ nên ta có: $t_1 = \frac{\pi}{8}$, $t_2 = \frac{5\pi}{8}$, $t_3 = \frac{3\pi}{4}$.

Vậy, phương trình đã cho có nghiệm là:

$$x_1 = 1 + \cos \frac{\pi}{8}, \quad x_2 = 1 + \cos \frac{5\pi}{8}, \quad x_3 = 1 + \cos \frac{3\pi}{4} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ví dụ 3.19. Từ phương trình $\cos 3t = \cos \frac{t}{2}$, $t \in [0, \pi]$, ta thấy phương trình này tương đương với

$$8 \cos^3 t - 6 \cos t = \sqrt{2(1 + \cos t)}.$$

Đặt $x = 2 \cos t$, ta được bài toán sau

Bài toán 3.3. Giải phương trình

$$x^3 - 3x = \sqrt{x + 2}. \quad (3.26)$$

Giải. Điều kiện $x \geq -2$. Nếu $x > 2$ thì

$$x^3 - 3x = x + x(x^2 - 4) > x > \sqrt{2x} = \sqrt{x + x} > \sqrt{x + 2}.$$

Vậy, $x > 2$ không thỏa mãn phương trình (3.26).

Xét $-2 \leq x \leq 2$. Đặt $x = 2 \cos t$, $t \in [0, \pi]$, phương trình (3.26) trở thành

$$\begin{aligned} 8 \cos^3 t - 6 \cos t = \sqrt{2(1 + \cos t)} &\Leftrightarrow 4 \cos^3 t - 3 \cos t = \cos \frac{t}{2} \\ \Leftrightarrow \cos 3t = \cos \frac{t}{2} &\Leftrightarrow \begin{cases} 3t = \frac{t}{2} + k2\pi \\ 3t = -\frac{t}{2} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = k\frac{4\pi}{5} \\ t = k\frac{4\pi}{7} \end{cases} \end{aligned}$$

Vì $t \in [0, \pi]$ nên ta có: $t_1 = 0$, $t_2 = \frac{4\pi}{7}$, $t_3 = \frac{4\pi}{5}$.

Vậy, phương trình đã cho có nghiệm là:

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 2 \cos \frac{4\pi}{7}, \quad x_3 = 2 \cos \frac{4\pi}{5}.$$

Ví dụ 3.20. Từ phương trình $\sin 3t = \cos t$, $t \in [0, \pi]$, ta thấy phương trình này tương đương với

$$\begin{aligned} 3 \sin t - 4 \sin^3 t = \cos t &\Leftrightarrow \sin t(3 - 4 \sin^2 t) = \cos t \\ \Leftrightarrow \sqrt{1 - \cos^2 t}(4 \cos^2 t - 1) = \cos t &\Leftrightarrow \sqrt{1 - \cos^2 t} = \frac{\cos t}{4 \cos^2 t - 1}. \end{aligned}$$

Đặt $x = \cos t$ ta được bài toán sau

Bài toán 3.4. Giải phương trình

$$\sqrt{1-x^2} = \frac{x}{4x^2-1}.$$

Giải. Điều kiện $-1 \leq x \leq 1, x \neq \pm \frac{1}{2}$.

Đặt $x = \cos t, t \in [0, \pi] \setminus \{\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\} \Rightarrow \sin t \geq 0$. Phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned} \sqrt{1-\cos^2 t} &= \frac{\cos t}{4\cos^2 t-1} \Leftrightarrow \sqrt{1-\cos^2 t} (4\cos^2 t-1) = \cos t \\ \Leftrightarrow \sin t (3-4\sin^2 t) &= \cos t \Leftrightarrow 3\sin t - 4\sin^3 t = \cos t \\ \Leftrightarrow \sin 3t &= \cos t \Leftrightarrow \sin 3t = \sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 3t = \frac{\pi}{2}-t+k2\pi \\ 3t = \pi - \frac{\pi}{2}+t+k2\pi \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2} \\ t = \frac{\pi}{4}+k\pi \end{cases} \end{aligned}$$

Vì $t \in [0, \pi]$ nên ta có: $t_1 = \frac{\pi}{8}, t_2 = \frac{5\pi}{8}, t_3 = \frac{\pi}{4}$.

Vậy, phương trình đã cho có nghiệm là:

$$x_1 = \cos \frac{\pi}{8}, \quad x_2 = \cos \frac{5\pi}{8}, \quad x_3 = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ví dụ 3.21. Từ phương trình $\sin 5t = \cos t, t \in [0, \pi]$, ta thấy phương trình này tương đương với

$$\begin{aligned} 16\sin^5 t - 20\sin^3 t + 5\sin t &= \cos t \\ \Leftrightarrow \sin t(16\sin^4 t - 20\sin^2 t + 5) &= \cos t \\ \Leftrightarrow \sin t [16(1-\sin^2 t)^2 - 12(1-\sin^2 t) + 1] &= \cos t \\ \Leftrightarrow \sin t(16\cos^4 t - 12\cos^2 t + 1) &= \cos t \\ \Leftrightarrow \sqrt{1-\cos^2 t} &= \frac{\cos t}{16\cos^4 t - 12\cos^2 t + 1}. \end{aligned}$$

Đặt $x = \cos t$, ta được bài toán sau

Bài toán 3.5. Giải phương trình

$$\sqrt{1-x^2} = \frac{x}{16x^4-12x^2+1}.$$

Giải. Điều kiện $-1 \leq x \leq 1$, $16x^4 - 12x^2 + 1 \neq 0$.

Đặt $x = \cos t$, $t \in [0, \pi]$, $16 \cos^4 t - 12 \cos^2 t + 1 \neq 0 \Rightarrow \sin t \geq 0$.

Phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned}\sqrt{1 - \cos^2 t} &= \frac{\cos t}{16 \cos^4 t - 12 \cos^2 t + 1} \\ \Leftrightarrow \sqrt{1 - \cos^2 t} (16 \cos^4 t - 12 \cos^2 t + 1) &= \cos t \\ \Leftrightarrow \sin t [16(1 - \sin^2 t)^2 - 12(1 - \sin^2 t) + 1] &= \cos t \\ \Leftrightarrow \sin t (16 \sin^4 t - 20 \sin^2 t + 5) &= \cos t \\ \Leftrightarrow 16 \sin^5 t - 20 \sin^3 t + 5 \sin t &= \cos t \Leftrightarrow \sin 5t = \cos t \\ \Leftrightarrow \sin 5t = \sin \left(\frac{\pi}{2} - t \right) &\Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{3} \\ t = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \end{cases}\end{aligned}$$

Vì $t \in [0, \pi]$ nên ta có:

$$t_1 = \frac{\pi}{12}, \quad t_2 = \frac{\pi}{8}, \quad t_3 = \frac{5\pi}{12}, \quad t_4 = \frac{5\pi}{8}, \quad t_5 = \frac{9\pi}{12}.$$

Vậy, phương trình đã cho có nghiệm là:

$$x_1 = \cos \frac{\pi}{12}, \quad x_2 = \cos \frac{\pi}{8}, \quad x_3 = \cos \frac{5\pi}{12}, \quad x_4 = \cos \frac{5\pi}{8}, \quad x_5 = \cos \frac{3\pi}{4}.$$

Ví dụ 3.22. Từ phương trình $\sin 5t = \cos 3t$, $t \in [0, \pi]$, ta thấy phương trình này tương đương với

$$\begin{aligned}16 \sin^5 t - 20 \sin^3 t + 5 \sin t &= \cos 3t \\ \Leftrightarrow \sin t (16 \sin^4 t - 20 \sin^2 t + 5) &= 4 \cos^3 t - 3 \cos t \\ \Leftrightarrow \sin t [16(1 - \sin^2 t)^2 - 12(1 - \sin^2 t) + 1] &= 4 \cos^3 t - 3 \cos t \\ \Leftrightarrow \sin t (16 \cos^4 t - 12 \cos^2 t + 1) &= 4 \cos^3 t - 3 \cos t \\ \Leftrightarrow \sqrt{1 - \cos^2 t} (16 \cos^4 t - 12 \cos^2 t + 1) &= 4 \cos^3 t - 3 \cos t.\end{aligned}$$

Đặt $x = \cos t$ ta được bài toán sau

Bài toán 3.6. Giải phương trình

$$\sqrt{1 - x^2} (16x^4 - 12x^2 + 1) = 4x^3 - 3x.$$

Giải. Điều kiện $-1 \leq x \leq 1$.

Đặt $x = \cos t$, $t \in [0, \pi] \Rightarrow \sin t \geq 0$. Phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned} & \sqrt{1 - \cos^2 t} (16 \cos^4 t - 12 \cos^2 t + 1) = 4 \cos^3 t - 3 \cos t \\ \Leftrightarrow & \sin t (16 \cos^4 t - 12 \cos^2 t + 1) = 4 \cos^3 t - 3 \cos t \\ \Leftrightarrow & \sin t [16(1 - \sin^2 t)^2 - 12(1 - \sin^2 t) + 1] = \cos 3t \\ \Leftrightarrow & \sin t (16 \sin^4 t - 20 \sin^2 t + 5) = \cos 3t \\ \Leftrightarrow & 16 \sin^5 t - 20 \sin^3 t + 5 \sin t = \cos 3t \Leftrightarrow \sin 5t = \cos 3t \\ \Leftrightarrow & \sin 5t = \sin \left(\frac{\pi}{2} - 3t \right) \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{4} \\ t = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Vì $t \in [0, \pi]$ nên ta có:

$$t_1 = \frac{\pi}{16}, \quad t_2 = \frac{\pi}{4}, \quad t_3 = \frac{5\pi}{16}, \quad t_4 = \frac{9\pi}{16}, \quad t_5 = \frac{13\pi}{16}.$$

Vậy, phương trình đã cho có nghiệm là:

$$x_1 = \cos \frac{\pi}{16}, \quad x_2 = \cos \frac{\pi}{4}, \quad x_3 = \cos \frac{5\pi}{16}, \quad x_4 = \cos \frac{9\pi}{16}, \quad x_5 = \cos \frac{13\pi}{16}.$$

Ví dụ 3.23. Từ phương trình $\sin \left(3t - \frac{\pi}{4} \right) = \sin \left(t + \frac{\pi}{4} \right)$, $t \in [0, \pi]$, ta thấy phương trình này tương đương với

$$\begin{aligned} & \sin 3t - \cos 3t = \sin t + \cos t \\ \Leftrightarrow & 3 \sin t - 4 \sin^3 t - 4 \cos^3 t + 3 \cos t = \sin t + \cos t \\ \Leftrightarrow & 2 \cos t + 3 \sin t - 4 \sin^3 t = 4 \cos^3 t + \sin t \\ \Leftrightarrow & 2 \cos t + \sin t (3 - 4 \sin^2 t) = 4 \cos^3 t + \sin t \\ \Leftrightarrow & 2 \cos t + \sqrt{1 - \cos^2 t} (4 \cos^2 t - 1) = 4 \cos^3 t + \sqrt{1 - \cos^2 t}. \end{aligned}$$

Đặt $x = \cos t$ ta được bài toán sau

Bài toán 3.7. Giải phương trình

$$2x + (4x^2 - 1)\sqrt{1 - x^2} = 4x^3 + \sqrt{1 - x^2}.$$

Giải. Điều kiện $-1 \leq x \leq 1$.

Đặt $x = \cos t$, $t \in [0, \pi] \Rightarrow \sin t \geq 0$. Phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned} 2 \cos t + (4 \cos^2 t - 1) \sqrt{1 - \cos^2 t} &= 4 \cos^3 t + \sqrt{1 - \cos^2 t} \\ \Leftrightarrow 2 \cos t + \sin t [4(1 - \sin^2 t) - 1] &= 4 \cos^3 t + \sin t \\ \Leftrightarrow 2 \cos t + \sin t (3 - 4 \sin^2 t) &= 4 \cos^3 t + \sin t \\ \Leftrightarrow 3 \sin t - 4 \sin^3 t - 4 \cos^3 t + 3 \cos t &= \sin t + \cos t \\ \Leftrightarrow \sin 3t - \cos 3t = \sin t + \cos t &\Leftrightarrow \sin \left(3t - \frac{\pi}{4} \right) = \sin \left(t + \frac{\pi}{4} \right) \\ \Leftrightarrow \sin 5t = \sin \left(\frac{\pi}{2} - 3t \right) &\Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{4} \\ t = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} \end{aligned}$$

Vì $t \in [0, \pi]$ nên ta có:

$$t_1 = \frac{\pi}{16}, \quad t_2 = \frac{\pi}{4}, \quad t_3 = \frac{5\pi}{16}, \quad t_4 = \frac{9\pi}{16}, \quad t_5 = \frac{13\pi}{16}.$$

Vậy, phương trình đã cho có nghiệm là:

$$x_1 = \cos \frac{\pi}{16}, \quad x_2 = \cos \frac{\pi}{4}, \quad x_3 = \cos \frac{5\pi}{16}, \quad x_4 = \cos \frac{9\pi}{16}, \quad x_5 = \cos \frac{13\pi}{16}.$$

Ví dụ 3.24. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x + x^2y &= y \\ 2y + y^2z &= z \\ 2z + z^2x &= x \end{cases} \quad (3.27)$$

Giải.

Nếu $x^2 = 1$ thì từ phương trình đầu của hệ ta có $\pm 2 = 0$ (vô lý).

Vậy $x^2 \neq 1$.

Tương tự ta cũng có $y^2 \neq 1$, $z^2 \neq 1$. Do đó

$$(3.27) \Leftrightarrow \begin{cases} y &= \frac{2x}{1 - x^2} \\ z &= \frac{2y}{1 - y^2} \\ x &= \frac{2z}{1 - z^2} \end{cases} \quad (3.28)$$

Đặt $x = \tan t$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \{\pm\frac{\pi}{4}\}$, khi đó (3.28) trở thành

$$\begin{cases} y = \frac{2 \tan t}{1 - \tan^2 t} = \tan 2t \\ z = \frac{2 \tan 2t}{1 - \tan^2 2t} = \tan 4t \\ x = \frac{2 \tan 4t}{1 - \tan^2 4t} = \tan 8t \end{cases} \quad (*)$$

Từ $x = \tan t$ và từ (*) ta có $\tan 8t = \tan t \Leftrightarrow 8t = t + k\pi \Leftrightarrow t = k\frac{\pi}{7}$.

Vì $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \{\pm\frac{\pi}{4}\}$ nên ta được $k \in \{\pm 3, \pm 2, \pm 1, 0\}$.

Vậy hệ phương trình đã cho có 7 nghiệm là

$$\begin{cases} x = \tan \frac{k\pi}{7} \\ y = \tan \frac{k2\pi}{7} \\ z = \tan \frac{k4\pi}{7} \end{cases}, \quad k \in \{\pm 3, \pm 2, \pm 1, 0\}.$$

Ví dụ 3.25. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = 4\left(y + \frac{1}{y}\right) = 5\left(z + \frac{1}{z}\right) \\ xy + yz + zx = 1 \end{cases} \quad (3.29)$$

Giải.

Nhận xét rằng nếu (x, y, z) là một nghiệm của hệ thì $(-x, -y, -z)$ cũng là nghiệm và x, y, z phải cùng dấu.

Giả sử rằng $x > 0, y > 0, z > 0$. Từ (3.29) ta suy ra

$$3\left(\frac{x^2 + 1}{2x}\right) = 4\left(\frac{y^2 + 1}{2y}\right) = 5\left(\frac{z^2 + 1}{2z}\right).$$

Đặt $x = \tan \frac{\alpha}{2}, y = \tan \frac{\beta}{2}, z = \tan \frac{\gamma}{2}$, $(\alpha, \beta, \gamma \in (0, \pi))$.

Ta có

$$\frac{1}{\sin \alpha} = \frac{x^2 + 1}{2x}, \frac{1}{\sin \beta} = \frac{y^2 + 1}{2y}, \frac{1}{\sin \gamma} = \frac{z^2 + 1}{2z}.$$

Suy ra

$$\frac{3}{\sin \alpha} = \frac{4}{\sin \beta} = \frac{5}{\sin \gamma}. \quad (3.30)$$

Ta chứng minh rằng nếu $\tan a \tan b + \tan b \tan c + \tan c \tan a = 1$ thì $\tan(a + b + c)$ không xác định.

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned}\tan(a + b + c) &= \frac{\tan(a + b) + \tan c}{1 - \tan(a + b) \tan c} \\ &= \frac{\tan(a + b) + \tan c}{1 - \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} \tan c} \\ &= \frac{[\tan(a + b) + \tan c] (1 - \tan a \tan b)}{1 - [\tan a \tan b + \tan a \tan c + \tan b \tan c]}.\end{aligned}$$

Vì $\tan a \tan b + \tan b \tan c + \tan c \tan a = 1$ nên $\tan(a + b + c)$ không xác định.

Áp dụng điều này ta có $xy + yz + zx = 1$ nên $\tan\left(\frac{\alpha + \beta + \gamma}{2}\right)$ không xác định.

Vì $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \pi)$ ta suy ra $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ hay chúng là 3 góc của một tam giác.

Theo (3.30) và theo định lý sin ta có thể giả thiết 3 cạnh của tam giác đó là 3, 4, 5. Từ đó

$$\begin{aligned}x = \tan \frac{\alpha}{2} &= \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1 - \frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{3}, \\ y = \tan \frac{\beta}{2} &= \frac{1 - \cos \beta}{\sin \beta} = \frac{1 - \frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{1}{2}, \\ z = \tan \frac{\gamma}{2} &= \frac{1 - \cos \gamma}{\sin \gamma} = \frac{1 - 0}{1} = 1.\end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\right)$ và $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, -1\right)$.

Ví dụ 3.26. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} |x| + |y| &= 1 \\ x^2 + y^2 &= m \end{cases} \quad (1) \quad (3.31)$$

Giải. Từ phương trình (1) ta có $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$. Do đó ta có thể đặt

$$|x| = \sin^2 t, \quad |y| = \cos^2 t.$$

Khi đó phương trình (1) trở thành: $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ (luôn đúng với mọi $t \in \mathbb{R}$).

Từ đó ta có hệ phương trình (3.31) tương đương với:

$$\sin^4 t + \cos^4 t = m \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow (\sin^2 t + \cos^2 t)^2 - 2 \sin^2 t \cos^2 t = m$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2t = m$$

$$\Leftrightarrow \cos 4t = 4m - 3 \quad (3)$$

Hệ đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow$ Phương trình (3) có nghiệm $\Leftrightarrow -1 \leq 4m - 3 \leq 1$.

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq m \leq 1.$$

Bài tập tương tự:

Bài 1: Giải các phương trình và bất phương trình sau

1) $\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}} = x(1 + 2\sqrt{1 - x^2})$.

2) $\sqrt[3]{6x + 1} = 8x^3 - 4x - 1$.

3) $(1 - m^2)^x + (2m)^x = (1 + m^2)^x, \quad (0 < m < 1)$.

4) $(3 + 2\sqrt{2})^x = (\sqrt{2} - 1)^x + 3$.

5) $3^{x^3+x+2} + (x^3 - 3x + 1) \cdot 3^{2x-x^3} = 3^{4x+1}$.

6) $\sqrt{1-x} + \sqrt{x} > \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Bài 2: Giải các hệ phương trình sau

1)
$$\begin{cases} x^3(1+3y) &= 8 \\ x(y^3-1) &= 6 \end{cases}$$

2)
$$\begin{cases} x^3 - 3x &= y(1 - 3x^2) \\ y^3 - 3y &= z(1 - 3y^2) \\ z^3 - 3z &= x(1 - 3z^2) \end{cases}$$

3)
$$\begin{cases} (x^2 + xy)(y + 2z) &= \frac{1}{8} \\ x^2 + y^2 + 3xy + 4xz + 2yz &= -\frac{3}{4} \\ x + y + z &= 0 \end{cases} \quad (x < 0 < y, z).$$

$$4) \begin{cases} x - \frac{1}{x} = 2y \\ y - \frac{1}{y} = 2z \\ z - \frac{1}{z} = 2x \end{cases}.$$

3.4 Sử dụng lượng giác trong bài toán cực trị

Thường gặp trong việc giải các bài toán với hàm nhiều ẩn ở dạng "Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $u = f(x, y)$ biết $x^2 + y^2 = 1$."

Khi đó ta lựa chọn việc đặt $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi)$.

Các bước thực hiện:

- Lượng giác hóa hàm số.
- Thực hiện tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số lượng giác.
- Kết luận

Ví dụ 3.27 (Đề thi Tuyển sinh ĐH, CĐ - 2008B). Cho x, y là hai số thực thỏa mãn $x^2 + y^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{2(x^2 + 6xy)}{1 + 2xy + 2y^2}.$$

Giải. Vì $x^2 + y^2 = 1$ nên đặt $x = \sin t, y = \cos t, t \in [0, 2\pi)$. Khi đó

$$P = \frac{2(\sin^2 t + 6 \sin t \cos t)}{1 + 2 \sin t \cos t + 2 \cos^2 t} = \frac{1 - \cos 2t + 6 \sin 2t}{\cos 2t + \sin 2t + 2}.$$

Gọi y_0 là một giá trị tùy ý của P . Điều đó có nghĩa là phương trình sau (ẩn là t) có nghiệm

$$\begin{aligned} \frac{1 - \cos 2t + 6 \sin 2t}{\cos 2t + \sin 2t + 2} &= y_0 \\ \Leftrightarrow (6 - y_0) \sin 2t - (y_0 + 1) \cos 2t &= 2y_0 - 1. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Vì (3.32) có nghiệm nên ta phải có:

$$(6 - y_0)^2 + (y_0 + 1)^2 \geq (2y_0 - 1)^2$$

$$\Leftrightarrow y_0^2 + 3y_0 - 18 \geq 0 \Leftrightarrow -6 \leq y_0 \leq 3.$$

Vậy: $\max P = 3$ và $\min P = -6$.

Ví dụ 3.28. Cho $x^2 + y^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$A = x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x}.$$

Giải. Vì $x^2 + y^2 = 1$ nên đặt $x = \cos t, y = \sin t, t \in [0, 2\pi)$. Khi đó ta có

$$A = \cos t \sqrt{1 + \sin t} + \sin t \sqrt{1 + \cos t}.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} A^2 &= \left(\cos t \sqrt{1 + \sin t} + \sin t \sqrt{1 + \cos t} \right)^2 \\ &\leq (\cos^2 t + \sin^2 t) (1 + \sin t + 1 + \cos t) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow A^2 \leq 2 + \sin t + \cos t = 2 + \sqrt{2} \sin \left(t + \frac{\pi}{4} \right) \Rightarrow A \leq \sqrt{2 + \sqrt{2}}.$$

$$\text{Ta có: } A = \sqrt{2 + \sqrt{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{1 + \sin t}}{\cos t} = \frac{\sqrt{1 + \cos t}}{\sin t} \\ \sin \left(t + \frac{\pi}{4} \right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4}$$

(vì $0 \leq t < 2\pi$),

$$\text{tức là } \sin t = \cos t = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ hay } x = y = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Vậy: } \max A = \sqrt{2 + \sqrt{2}} \Leftrightarrow x = y = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ví dụ 3.29. Xét các số thực a, b, c thỏa mãn điều kiện $abc + a + c = b$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{2}{a^2 + 1} - \frac{2}{b^2 + 1} + \frac{3}{c^2 + 1}.$$

Giải. Ta có $abc + a + c = b \Leftrightarrow a + c = b(1 - ac)$.

Nếu $ac = 1$ thì $a + c = 0 \Leftrightarrow a = -c \Rightarrow a^2 = -1$ (vô lý). Vậy, $ac \neq 1$.

$$\text{Khi đó ta có } b = \frac{a + c}{1 - ac}.$$

Đặt $a = \tan \alpha, c = \tan \beta \Rightarrow b = \tan(\alpha + \beta)$, với $\alpha, \beta, \gamma > 0$ và $\alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$.
 Khi đó

$$\begin{aligned} P &= \frac{2}{\tan^2 \alpha + 1} - \frac{2}{\tan^2 \beta + 1} + \frac{3}{\tan^2 \gamma + 1} \\ &= 2 \cos^2 \alpha - 2 \cos^2(\alpha + \beta) + 3 \cos^2 \beta \\ &= \cos 2\alpha + 1 - \cos[2(\alpha + \beta)] - 1 + 3 \cos^2 \beta \\ &= 2 \sin \beta \sin(2\alpha + \beta) + 3(1 - \sin^2 \beta) \\ &= \frac{10}{3} - 3 \left[\sin \beta - \frac{1}{3} \sin(2\alpha + \beta) \right]^2 - \frac{1}{3} \cos^2(2\alpha + \beta) \leq \frac{10}{3}. \end{aligned}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \beta &= \frac{1}{3} \sin(2\alpha + \beta) \\ \cos(2\alpha + \beta) &= 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha + \beta &= \frac{\pi}{2} \\ \sin \beta &= \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\text{Vì } \sin \beta = \frac{1}{3} \text{ nên } \cos \beta = \frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \tan \beta = \frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow c = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

$$\text{Lại có } \tan 2\alpha = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \cot \beta = 2\sqrt{2} \Rightarrow \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \tan \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad b = \tan(\alpha + \beta) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha = \sqrt{2}.$$

$$\text{Vậy: } \max P = \frac{10}{3} \text{ khi } a = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad b = \sqrt{2}, \quad c = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Ví dụ 3.30. Xét các số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện

$$2006ac + ab + bc = 2006.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{2}{a^2 + 1} - \frac{2}{b^2 + 2006^2} + \frac{3}{c^2 + 1}.$$

Giải. Từ giả thiết suy ra

$$ac + \frac{ab}{2006} + \frac{bc}{2006} = 1.$$

Vì $a, b, c > 0$ nên tồn tại $A, B, C \in (0, \pi)$ sao cho $A + B + C = \pi$.

Và vì:

$$\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2} = 1 = ac + \frac{ab}{2006} + \frac{bc}{2006}$$

nên nếu đặt $a = \frac{A}{2}$, $\frac{b}{2006} = \frac{B}{2}$, $c = \frac{C}{2}$ thì ta có

$$\begin{aligned} P &= \frac{2}{\tan^2 \frac{A}{2} + 1} - \frac{2}{\frac{1}{\tan^2 \frac{B}{2} + 1}} + \frac{3}{\tan^2 \frac{C}{2} + 1} \\ &= 2 \cos^2 \frac{A}{2} - 2 \sin^2 \frac{B}{2} + 3 \cos^2 \frac{C}{2} \\ &= \cos A + \cos B + 3 - 3 \sin^2 \frac{C}{2} \\ &= -3 \sin^2 \frac{C}{2} + 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 3 \\ &= -3 \left[\sin \frac{C}{2} - \frac{1}{3} \cos \frac{A-B}{2} \right]^2 - \frac{1}{3} \sin^2 \frac{A-B}{2} + \frac{10}{3} \leq \frac{10}{3}. \end{aligned}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \frac{C}{2} = \frac{1}{3} \cos \frac{A-B}{2} \\ \sin \frac{A-B}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = B \\ \sin \frac{C}{2} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\text{Vì } \sin \frac{C}{2} = \frac{1}{3} \text{ nên } \cos \frac{C}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \tan \frac{C}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} = c.$$

$$\text{Mặt khác: } \tan A = \tan \left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2} \right) = \cot \frac{C}{2} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{2 \tan \frac{A}{2}}{1 - \tan^2 \frac{A}{2}} = 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \tan \frac{A}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} = a \Rightarrow b = 2006 \tan \frac{B}{2} = 1003\sqrt{2}.$$

$$\text{Vậy } \max P = \frac{10}{3} \text{ khi } a = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad b = 1003\sqrt{2}, \quad c = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Ví dụ 3.31. Trong các nghiệm (x, y) của bất phương trình

$$x^2 + y^2(x + y) \geq 1. \quad (3.33)$$

Hãy tìm các nghiệm sao cho $(x + y)$ đạt giá trị lớn nhất.

Giải. Ta xét hai trường hợp

- Nếu $x^2 + y^2 > 1$ thì ta có

$$(3.33) \Leftrightarrow x + y > x^2 + y^2$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{2}. \quad (3.34)$$

Mặt khác $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$ là phương trình đường tròn tâm $I\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, bán kính $R = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Vì vậy tập hợp các điểm $M(x; y)$ là nghiệm của bất phương trình $x + y \geq x^2 + y^2$ là hình tròn tâm $I\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$,

bán kính $R = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\text{Đặt } \begin{cases} x - \frac{1}{2} = r \cos \varphi \\ y - \frac{1}{2} = r \sin \varphi \end{cases}, \quad \text{với } r \geq 0 \text{ và } 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Khi đó (3.34) trở thành: $r \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ và $0 \leq \varphi \leq 2\pi$,

đồng thời $x + y = 1 + r(\cos \varphi + \sin \varphi) = 1 + r\sqrt{2} \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)$

suy ra $x + y \leq 1 + \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 1 = 2$.

Ta có

$$\begin{aligned} x + y = 2 &\Leftrightarrow \begin{cases} r = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} r = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \varphi = \frac{\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

- Nếu $0 < x^2 + y^2 < 1$ thì (3.33) $\Leftrightarrow 0 < x + y \leq x^2 + y^2$.

Rõ ràng với mọi cặp (x, y) thỏa mãn điều kiện trên ta đều có

$$x + y \leq x^2 + y^2 \leq 1.$$

Vậy $\max(x + y) = 2$ khi $x = 1, y = 1$.

Ví dụ 3.32. Trong tất cả các nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ z^2 + t^2 = 9 \\ xt + yz \geq 12 \end{cases} \quad (*)$$

hãy tìm nghiệm (x, y, z, t) sao cho $(x + z)$ đạt giá trị lớn nhất.

Giải. Theo bài ra ta có

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2 = 1 \\ \left(\frac{z}{3}\right)^2 + \left(\frac{t}{3}\right)^2 = 1 \\ xt + yz \geq 12 \end{cases}$$

Đặt $\begin{cases} \frac{x}{4} = \cos \alpha \\ \frac{y}{4} = \sin \alpha \end{cases}$, với $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ và $\begin{cases} \frac{z}{3} = \cos \beta \\ \frac{t}{3} = \sin \beta \end{cases}$, với $0 \leq \beta \leq 2\pi$.

Khi đó (*) trở thành $\cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta \geq 1 \Leftrightarrow \sin(\alpha + \beta) \geq 1$
suy ra $\sin(\alpha + \beta) = 1 \Leftrightarrow \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$.

Ta có

$$|x + z| = |4 \cos \alpha + 3 \cos \beta| = |4 \cos \alpha + 3 \sin \alpha| = |5 \sin(\varphi + \alpha)| \leq 5,$$

với $\sin \varphi = \frac{4}{5}$, $\cos \varphi = \frac{3}{5}$.

Từ đó $z + x = 5$ khi $\sin(\varphi + \alpha) = 1 \Rightarrow \varphi + \alpha = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} - \varphi$.

$$\Rightarrow x = 4 \cos \alpha = 4 \sin \varphi = \frac{16}{5}, \quad y = 4 \sin \alpha = 4 \cos \varphi = \frac{12}{5},$$

$$z = 3 \cos \beta = 3 \cos \varphi = \frac{9}{5}, \quad t = 3 \sin \beta = 3 \sin \varphi = \frac{12}{5}.$$

Vậy $\max(x + z) = 5$ khi $x = \frac{16}{5}, y = \frac{12}{5}, z = \frac{9}{5}, t = \frac{12}{5}$.

Bài tập tương tự

Bài 1: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $u = 2x + 3\sqrt{3}y + 2$ với $4x^2 + 9y^2 = 16$.

Bài 2: Giả sử x, y là các số thay đổi thỏa mãn $x > 0, y > 0$ và $x + y = 1$.
Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x}{\sqrt{1-x}} + \frac{y}{\sqrt{1-y}}.$$

Bài 3: Cho x, y, z là các số dương và thỏa mãn $xy + yz + zx = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$A = x(1 - y^2)(1 - z^2) + y(1 - z^2)(1 - x^2) + z(1 - x^2)(1 - y^2).$$

Bài 4: Cho các số thực a, b, c dương thỏa mãn

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc = 1.$$

Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$T = \frac{1}{1-a^2} + \frac{1}{1-b^2} + \frac{1}{1-c^2} - (a^2 + b^2 + c^2).$$

3.5 Sử dụng lượng giác trong các bài toán về dãy số

Lượng giác đóng vai trò quan trọng trong toán dãy số, không những là một dạng toán khó mà là còn là một phương pháp giải. Phương pháp ta đề cập đến trong phần này chính là phương pháp lượng giác hóa các bài toán. Phương pháp này không hề có cơ sở hay định lý rõ ràng nào mà cần nhiều sự khéo léo cũng như tất cả các kiến thức giải tích và lượng giác. Do vậy thông qua từng bài toán chúng ta sẽ tìm được lối đi riêng cho bản thân.

Ví dụ 3.33. Cho hai dãy số $\{a_n\}, \{b_n\}$ như sau: với $a < b$ cho trước,

$$a_1 = \frac{a+b}{2}; \quad b_1 = \sqrt{aa_1}$$

$$a_2 = \frac{a_1+b_1}{2}; \quad b_2 = \sqrt{a_2b_1}$$

...

$$a_n = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}; \quad b_n = \sqrt{a_nb_{n-1}}.$$

1. Tìm $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

2. Tìm $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Giải.

1. Đặt $\cos \alpha = \frac{a}{b}$, $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} a_1 &= b \cos^2 \frac{\alpha}{2} \\ b_1 &= b \cos \frac{\alpha}{2} \end{cases}$$

Khi đó

$$\begin{cases} a_2 = \frac{a_1 + b_1}{2} = \frac{b}{2} \left(\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \right) = b \cos \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2^2} \\ b_2 = \sqrt{a_2 b_1} = \sqrt{b^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2^2}} = b \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2^2} \end{cases}$$

Bằng quy nạp ta dễ dàng có

$$\begin{cases} a_n = b \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2^2} \dots \cos \frac{\alpha}{2^{n-1}} \cos^2 \frac{\alpha}{2^n} = \frac{b \sin \alpha \cos \frac{\alpha}{2^n}}{2^n \sin \frac{\alpha}{2^n}} \\ b_n = b \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2^2} \dots \cos \frac{\alpha}{2^{n-1}} \cos \frac{\alpha}{2^n} = \frac{b \sin \alpha}{2^n \sin \frac{\alpha}{2^n}} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } b_n = \frac{b \sin \alpha}{2^n \sin \frac{\alpha}{2^n}} = \frac{\frac{\alpha}{2^n} b \sin \alpha}{\sin \frac{\alpha}{2^n} \alpha} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{b \sin \alpha}{\alpha}.$$

$$2. \text{ Ta cũng có } a_n = b_n \cos \frac{\alpha}{2^n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{\alpha}{2^n} = \frac{b \sin \alpha}{\alpha}.$$

Ví dụ 3.34 (Đề thi HSG Quốc Gia - 1993). Cho $a_0 = 2, b_0 = 1$. Lập hai dãy số $\{a_n\}, \{b_n\}$ với $n = 0, 1, 2, \dots$ theo quy tắc sau

$$a_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}; b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} b_n}.$$

Chứng minh rằng các dãy $\{a_n\}, \{b_n\}$ có cùng một giới hạn khi $n \rightarrow \infty$. Tìm giới hạn đó?

Giải. Ta có

$$\begin{aligned} a_0 = 2 &= \frac{1}{\frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{3}} \pi, b_0 = 1, \\ a_1 &= \frac{2a_0 b_0}{a_0 + b_0} = \frac{2}{\frac{1}{a_0} + \frac{1}{b_0}} = \frac{2}{\cos \frac{\pi}{3} + 1} = \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{6}}, \\ b_1 &= \sqrt{a_1 b_0} = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{6}}. \end{aligned}$$

Từ đó, bằng quy nạp ta chứng minh rằng:

$$\begin{aligned} a_n &= \left(\cos \frac{\pi}{2 \cdot 3} \cos \frac{\pi}{2^2 \cdot 3} \cdots \cos \frac{\pi}{2^{n-1} \cdot 3} \cos^2 \frac{\pi}{2^n \cdot 3} \right)^{-1} \\ b_n &= \left(\cos \frac{\pi}{2 \cdot 3} \cos \frac{\pi}{2^2 \cdot 3} \cdots \cos \frac{\pi}{2^{n-1} \cdot 3} \cos \frac{\pi}{2^n \cdot 3} \right)^{-1}, \quad \forall n \geq 1. \end{aligned}$$

Mặt khác:

$$\cos \frac{\pi}{2 \cdot 3} \cos \frac{\pi}{2^2 \cdot 3} \cdots \cos \frac{\pi}{2^{n-1} \cdot 3} \cos \frac{\pi}{2^n \cdot 3} = \frac{\sin \frac{\pi}{3}}{2^n \sin \frac{\pi}{2^n \cdot 3}}, \quad \forall n \geq 1.$$

Khi đó

$$a_n = \frac{2^n \sin \frac{\pi}{2^n \cdot 3}}{\sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{2^n \cdot 3}}, \quad (3.35)$$

$$b_n = \frac{2^n \sin \frac{\pi}{2^n \cdot 3}}{\sin \frac{\pi}{3}}. \quad (3.36)$$

Từ (3.35) và (3.36) ta suy ra tồn tại $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ và $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

Ngoài ra

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \sin \frac{\pi}{2^n \cdot 3}}{\sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{2^n \cdot 3}} = \frac{\frac{\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{2\sqrt{3}\pi}{9}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} b_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{\pi}{2^n \cdot 3} = \frac{2\sqrt{3}\pi}{9}. \end{aligned}$$

Vậy, hai dãy $\{a_n\}, \{b_n\}$ có cùng một giới hạn khi $n \rightarrow \infty$ là $\frac{2\sqrt{3}\pi}{9}$.

Ví dụ 3.35. Cho dãy $\{u_n\}$ xác định bởi

$$\begin{cases} u_1 = 2; u_2 = 8 \\ u_n = 4u_{n-1} - u_{n-2} \end{cases} \quad \text{và} \quad S_n = \sum_{i=1}^n \operatorname{arccot} u_i^2.$$

Tìm $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$?

Giải. Ta cần biết

$$\arctan \left(\frac{x+y}{1-xy} \right) = \arctan x + \arctan y,$$

$$\operatorname{arccot} \left(\frac{1+xy}{y-x} \right) = \operatorname{arccot} x - \operatorname{arccot} y.$$

Ta sẽ chứng minh: $u_n^2 - u_{n+1}u_{n-1} = 4, \forall n \geq 2$.

Thật vậy:

$$\begin{aligned} u_n(4u_{n-1}) &= u_{n-1}(4u_n) \\ \Rightarrow u_n(u_n + u_{n-2}) &= u_{n-1}(u_{n+1} + u_{n-1}) \\ \Rightarrow u_n^2 - u_{n+1}u_{n-1} &= u_{n-1}^2 - u_nu_{n-2} = \dots = u_2^2 - u_3u_1 = 4. \end{aligned}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} \operatorname{arccot} u_n^2 &= \operatorname{arccot} \left[u_n \left(\frac{4u_n}{4} \right) \right] = \operatorname{arccot} \left[\frac{u_n(u_{n+1} + u_{n-1})}{u_n^2 - u_{n+1}u_{n-1}} \right] \\ &= \operatorname{arccot} \left[\frac{\frac{u_{n+1}}{u_n} \cdot \frac{u_n}{u_{n-1}} + 1}{\frac{u_n}{u_{n-1}} - \frac{u_{n+1}}{u_n}} \right] = \operatorname{arccot} \frac{u_{n+1}}{u_n} - \operatorname{arccot} \frac{u_n}{u_{n-1}}. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra: } \sum_{i=1}^n \operatorname{arccot} u_i^2 = \operatorname{arccot} u_1^2 + \sum_{i=2}^n \operatorname{arccot} u_i^2.$$

Ta sẽ chứng minh rằng $\frac{u_{n-1}}{u_n}$ có giới hạn bởi vì $0 < u_{n-1} < u_n \Rightarrow \frac{u_{n-1}}{u_n} < 1$.

Mặt khác $\left\{ \frac{u_{n-1}}{u_n} \right\}$ là dãy giảm, suy ra $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n-1}}{u_n} \leq 1$.

$$\text{Mà } u_n = 4u_{n-1} - u_{n-2} \Rightarrow 1 = 4 \frac{u_{n-1}}{u_n} - \frac{u_{n-2}}{u_n} \Rightarrow 1 = 4 \frac{u_{n-1}}{u_n} - \frac{u_{n-2}}{u_{n-1}} \cdot \frac{u_{n-1}}{u_n}.$$

Nếu đặt $x = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n-1}}{u_n}$ thì ta có

$$1 = 4x - x^2 \Rightarrow x = 2 + \sqrt{3} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n-1}}{u_n} = 2 + \sqrt{3}.$$

$$\text{Vậy: } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \operatorname{arccot} (2 + \sqrt{3}) = \frac{\pi}{12}.$$

Ví dụ 3.36. Cho dãy $\{u_n\}$ xác định như sau

$$\begin{cases} u_1 &= \sqrt{e^{\sqrt{3}}} \\ u_2 &= \sqrt{e} \\ u_{n+1} \cdot u_{n-1} &= u_n^{\sqrt{3}} \end{cases} \quad (\forall n \geq 2)$$

a. Chứng minh rằng: $\frac{1}{e} \leq u_n \leq e, \forall n \in \mathbb{Z}^+.$

b. Lập dãy số $\{v_n\}$ biết: $v_n = (u_1 \cdot u_2 \dots u_n)^{\frac{1}{n}}$. Tìm $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n$?

Giải.

a. Ta chứng minh $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{Z}^+.$

Thật vậy: $u_1 > 0, u_2 > 0$. Giả sử $u_k > 0, \forall k \geq 3$. Ta có $u_{k+1} = \frac{u_k^{\sqrt{3}}}{u_{k-1}} > 0$.

Vậy: $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{Z}^+.$

Ta lại có:

$$\sqrt{e^{\sqrt{3}}} = e^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = e^{\cos \frac{\pi}{6}},$$

$$\sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}} = e^{\sin \frac{\pi}{6}}.$$

Giả sử $u_n = e^{\cos \frac{n\pi}{6}}, \forall n \in \mathbb{Z}^+.$

Ta có

$$u_{n+1} = \frac{u_n^{\sqrt{3}}}{u_{n-1}} = \frac{e^{\sqrt{3} \cos \frac{n\pi}{6}}}{e^{\cos \frac{(n-1)\pi}{6}}} = e^{\cos \frac{(n+1)\pi}{6}}.$$

Vậy $u_n = e^{\cos \frac{n\pi}{6}}, \forall n \in \mathbb{Z}^+.$

Ta lại có: $\frac{1}{e} \leq e^{\cos \frac{n\pi}{6}} \leq e$ và là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$. Suy ra điều phải chứng minh.

b. Ta có:

$$v_n = \sqrt[n]{u_1 u_2 \dots u_n} = e^{\frac{1}{n} (\cos \frac{\pi}{6} + \cos \frac{2\pi}{6} + \dots + \cos \frac{n\pi}{6})}$$

$$= e^{\frac{1}{2n \sin \frac{\pi}{12}} (\sin \frac{(2n+1)\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{12})}.$$

$$\Leftrightarrow v_n = e^{\frac{1}{n \sin \frac{\pi}{12}} \cdot \cos \frac{(n+1)\pi}{12} \cdot \sin \frac{n\pi}{12}}.$$

Mặt khác ta lại có:
$$\frac{-1}{n \sin \frac{\pi}{12}} \leq \frac{\cos \frac{(n+1)\pi}{12} \cdot \sin \frac{n\pi}{12}}{n \sin \frac{\pi}{12}} \leq \frac{1}{n \sin \frac{\pi}{12}}.$$

Mà:
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{n \sin \frac{\pi}{12}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n \sin \frac{\pi}{12}} = 0.$$

Vậy
$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = e^0 = 1.$$

Ví dụ 3.37 (Đề thi HSG Quốc Gia - 1990). Cho dãy số $\{x_n\}, n \in \mathbb{N}, |x_1| < 1$ được xác định bởi hệ thức

$$x_{n+1} = \frac{-x_n + \sqrt{3 - 3x_n^2}}{2}.$$

- a. Cần có thêm điều kiện gì đối với x_1 để dãy số toàn dương ?
b. Dãy số này có tuần hoàn không? Tại sao?

Giải.

a. Để $x_n > 0$, trước hết ta phải có $x_1 > 0$ và $x_2 > 0$.

Nhưng $x_2 > 0$ tức là $\sqrt{3 - 3x_1^2} > x_1 \Leftrightarrow x_1^2 < \frac{3}{4}$.

Suy ra: $0 < x_1 < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ngược lại, nếu $0 < x_1 < \frac{\sqrt{3}}{2}$ thì tồn tại $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ sao cho $\sin \alpha = x_1$. Khi đó

$$x_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha = \sin \left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right), \quad 0 < \frac{\pi}{3} - \alpha < \frac{\pi}{3}.$$

Ta lại có: $x_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) - \frac{1}{2} \sin \left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = \sin \alpha$.

Từ đó suy ra: $x_1 = x_3 = \dots = \sin \alpha > 0$.

Vậy điều kiện là $0 < x_1 < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

b. Xét hai trường hợp đối với x_1 :

- Trường hợp $x_1 > 0$:

- Nếu $x_2 \geq 0$ thì tương tự phần a) ta có: $x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$ và

$$x_1 = x_3 = \dots; \quad x_2 = x_4 = \dots$$

- Nếu $x_2 < 0$ thì $x_3 > 0$ và cũng có $x_3 = x_1$.

Thật vậy:

$$x_2 = \frac{-x_1 + \sqrt{3 - 3x_1^2}}{2} \Leftrightarrow \sqrt{3 - 3x_1^2} = 2x_2 + x_1 \quad (3.37)$$

$$\Rightarrow 3 - 3x_1^2 = (2x_1 + x_2)^2. \quad (3.38)$$

Do (3.37) ta có $2x_1 + x_2 > 0$. Suy ra:

$$2x_1 + x_2 = x_1 + (x_1 + x_2) > x_1 - x_2 > 0 \quad (x_1 \geq 0, x_2 < 0).$$

Vì thế từ (3.38) ta có: $x_1 = \frac{-x_2 + \sqrt{3 - 3x_2^2}}{2} = x_3$.

Tương tự $x_2 = x_4 = \dots$

Vậy ta có $\{x_n\}$ là dãy tuần hoàn.

- Trường hợp $x_1 < 0$:

Khi đó $x_2 > 0$ và theo trường hợp 1 suy ra $\{x_n\}$ kể từ số hạng thứ 2 trở đi là dãy tuần hoàn.

Kết luận

Mục tiêu của luận văn "Một số phương pháp giải phương trình và bất phương trình lượng giác" nhằm hệ thống các kiến thức cơ bản của lượng giác về phương trình, bất phương trình lượng giác kết hợp với kiến thức đại số, giải tích để tổng hợp, chọn lọc và phân loại các phương pháp giải phương trình, bất phương trình lượng giác và xây dựng một số lớp bài toán mới. Luận văn đã đạt được một số kết quả chính như sau:

1. Khảo sát tính tuần hoàn và phản tuần hoàn (cộng tính và nhân tính) của hàm số lượng giác và trình bày các ví dụ và bài tập minh họa.
2. Hệ thống một số phương pháp giải phương trình và bất phương trình lượng giác thường gặp.
3. Đưa ra một số cách xây dựng phương trình đa thức bậc cao, phương trình vô tỉ giải được dựa vào các hệ thức và phương trình lượng giác cơ bản.
4. Phần cuối của luận văn, tác giả đưa ra một số dạng toán của đại số và giải tích được giải bằng phương pháp lượng giác hóa và được minh họa bằng một số bài tập tiêu biểu được lựa chọn từ các đề thi Olympic toán khu vực và Quốc tế. Mỗi bài tập đều có hướng dẫn cách giải.

Mặc dù đã hết sức cố gắng và nghiêm túc trong quá trình học tập và nghiên cứu khoa học nhưng do thời gian và khả năng có hạn, chắc chắn luận văn này còn có những thiếu sót. Tác giả mong nhận được nhiều ý kiến đóng góp của quý thầy giáo, cô giáo và các bạn đồng nghiệp để luận văn được hoàn thiện hơn.

Tài liệu tham khảo

- [1] Nguyễn Văn Mậu, 1995, *Phương trình hàm* NXB GD
- [2] Nguyễn Văn Mậu (Chủ biên), Trần Nam Dũng, Nguyễn Vũ Lương, Nguyễn Minh Tuấn, 2008, *Chuyên đề chọn lọc: Lượng giác và áp dụng*
- [3] Nguyễn Văn Mậu, Phạm Thị Bạch Ngọc, 2003, *Một số bài toán chọn lọc về lượng giác*, NXB GD.
- [4] Nguyễn Văn Mậu, 2007, *Các bài toán nội suy và áp dụng*, NXB GD.
- [5] Tạp chí Toán học và tuổi trẻ.
- [6] Nguyễn Vũ Lương (Chủ biên), Nguyễn Hữu Độ, Phạm Văn Hùng, Nguyễn Ngọc Thắng, 2008, *Lượng giác*, NXB GD.
- [7] Phan Huy Khải, 2009, *Lượng giác*, NXB GD.