

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

ĐINH NGỌC QUANG

PHƯƠNG PHÁP DỒN VÀ GIẢM BIẾN TRONG BẤT ĐẲNG THỨC

LUẬN VĂN THẠC SĨ

Chuyên ngành : PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số : 60 46 40

Giáo viên hướng dẫn:
GS.TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU

THÁI NGUYÊN, 2012

Mục lục

Mở đầu	4
1 Một số dạng bất đẳng thức cổ điển và phương pháp giảm biến	7
1.1 Các bất đẳng thức hai biến liên quan đến giá trị trung bình .	7
1.2 Các bất đẳng thức n biến liên quan đến giá trị trung bình . .	10
1.3 Phương pháp giảm biến trong bất đẳng thức đại số	12
1.3.1 Tam thức bậc hai	13
1.3.2 Phương pháp tam thức bậc hai định hướng	14
1.3.3 Giảm biến trong bất đẳng thức đại số	15
2 Độ gần đều và phương pháp dồn biến	21
2.1 Độ gần đều	21
2.2 Hàm lồi và biểu diễn của hàm lồi	25
2.2.1 Hàm lồi, lõm	25
2.2.2 Biểu diễn hàm lồi, lõm	27
2.3 Phương pháp dồn biến	30
2.3.1 Dồn biến tổng quát	33
2.3.2 Một số định lý về dồn biến	35
3 Một số áp dụng	39
3.1 Một số kỹ thuật thường dùng trong giải bài toán bất đẳng thức	39
3.1.1 Kỹ thuật chuẩn hóa	39
3.1.2 Kỹ thuật sắp thứ tự bộ số	40
3.2 Kỹ thuật dồn biến	40
3.2.1 Dồn các biến bằng nhau	41

3.2.2	Dồn biến ra biên	45
3.2.3	Dồn biến trong lớp hàm lồi, lõm	48
3.2.4	Dồn biến trong lớp hàm đơn điệu	50
Kết luận		52
Tài liệu tham khảo		53

Mở đầu

Bất đẳng thức là một vấn đề khá cổ điển của toán học sơ cấp và đang ngày càng phát triển, đây cũng là một trong những phần toán học sơ cấp đẹp và thú vị nhất, vì thế luôn cuốn hút rất nhiều người quan tâm. Bất đẳng thức luôn giữ vị trí quan trọng trong các kì thi học sinh giỏi, thi đại học, Olympic quốc gia và quốc tế. Điểm đặc biệt và ấn tượng nhất của bất đẳng thức trong toán học sơ cấp đó là có rất nhiều bài toán khó, thậm chí là rất khó nhưng luôn có thể giải được bằng những kiến thức cơ sở, chủ yếu sử dụng các phép biến đổi, đánh giá sơ cấp để thu được kết quả.

Ngày nay, có rất nhiều các phương pháp chứng minh bất đẳng thức thông dụng như: phương pháp sử dụng các bất đẳng thức cổ điển, phương pháp tam thức bậc hai, phương pháp dùng đạo hàm, phương pháp phân tích bình phương S.O.S., phương pháp véc tơ, phương pháp tọa độ,... Trong những năm gần đây, GS.TSKH. Nguyễn Văn Mậu [1] đã giới thiệu phương pháp tam thức bậc hai định hướng. Đây là cơ sở để có phương pháp giảm biến. Phương pháp giảm biến có thể phát biểu bằng lời như sau: Phương pháp này dựa vào lát cắt và phép biến đổi đồng dạng để giảm số biến. Thông thường, phương pháp này hiệu quả trong trường hợp ba biến chuyển về biểu thức dạng hai biến. Cũng trong khoảng thời gian này, TS. Trần Nam Dũng và Gabriel Dospinescu [3] đã giới thiệu và trình bày phương pháp dồn biến (Mixing variables). Đây là phương pháp rất quan trọng và hiệu quả trong việc chứng minh các bất đẳng thức phức tạp. Phương pháp dồn biến có thể phát biểu một cách đơn giản như sau: Để chứng minh bất đẳng thức $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$ chúng ta đi chứng minh bất đẳng thức

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_1 + x_2}{2}, x_3, \dots, x_n\right).$$

Sau đó chúng ta đi chứng minh bất đẳng thức

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_1 + x_2}{2}, x_3, \dots, x_n\right) \geq 0.$$

Bất đẳng thức sau chỉ còn $n - 1$ biến và đơn giản hơn bất đẳng thức ban đầu (có n biến).

Mục đích của luận văn này là trình bày lại một cách tổng quan, có hệ thống các kiến thức cơ sở về một số bất đẳng thức cơ bản liên quan đến giá trị trung bình, bất đẳng thức Cauchy liên quan đến tam thức bậc hai và xét đến phương pháp giảm biến, bất đẳng thức Karamata, độ gần đều của bộ số và xét định lý dồn biến tổng quát như là hệ quả của chúng. Tiếp theo xét một số ứng dụng của phương pháp dồn biến trong các bài toán chứng minh bất đẳng thức thường gặp trong các kì thi học sinh giỏi và kì thi Olympic.

Luận văn gồm phần mở đầu, kết luận, tài liệu tham khảo và 3 chương.

Chương 1, trình bày một số bất đẳng thức cơ bản liên quan đến giá trị trung bình và bất đẳng thức Cauchy liên quan đến tam thức bậc hai. Các kiến thức này là cơ sở để trình bày các nội dung quan trọng ở cuối chương 1 và trong chương 2.

Chương 2, trình bày về độ gần đều, một số khái niệm và tính chất quan trọng của hàm lồi, lõm, từ đó đi đến trình bày phương pháp dồn biến tổng quát. Phương pháp dồn biến về cơ bản là cách thức làm giảm biến trong bất đẳng thức đại số.

Chương 3, trình bày một số áp dụng của phương pháp dồn biến và giảm biến giải các bài toán bất đẳng thức 3 biến, 4 biến.

Qua đây, chúng tôi xin được gửi lời cảm ơn sâu sắc đến thầy giáo, người hướng dẫn khoa học của chúng tôi, GS.TSKH. Nguyễn Văn Mậu, người đã đưa ra đề tài và tận tình hướng dẫn trong suốt quá trình nghiên cứu của chúng tôi. Đồng thời chúng tôi cũng chân thành cảm ơn các thầy cô trong khoa Toán - Tin học trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên, đã tạo mọi điều kiện về tài liệu và thủ tục hành chính để chúng tôi hoàn thành

luận văn này. Chúng tôi cũng gửi lời cảm ơn đến bạn bè, đặc biệt là các bạn học viên trong lớp Cao học Toán K4, đã động viên giúp đỡ chúng tôi trong quá trình học tập và làm luận văn.

Do thời gian hạn hẹp và khối lượng kiến thức lớn, chắc chắn luận văn không thể tránh khỏi những thiếu sót. Chúng tôi rất mong được sự chỉ bảo tận tình của các thầy cô và bạn bè đồng nghiệp. Chúng tôi xin chân thành cảm ơn.

Thái Nguyên, năm 2012
Học viên

Đinh Ngọc Quang

Chương 1

Một số dạng bất đẳng thức cổ điển và phương pháp giảm biến

Trong chương này chúng tôi trình bày một số bất đẳng thức cơ bản liên quan đến giá trị trung bình và bất đẳng thức Cauchy liên quan đến tam thức bậc hai để phục vụ cho việc trình bày các nội dung chính của luận văn trong các phần sau.

Các vấn đề được trình bày trong chương này được tham khảo và trích dẫn chủ yếu tại một số tài liệu [1], [3].

1.1 Các bất đẳng thức hai biến liên quan đến giá trị trung bình

Xuất phát từ bất đẳng thức cơ bản $x^2 \geq 0, \forall x$. Khi đó

$$(x - y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2xy \geq 4xy \Leftrightarrow (x + y)^2 \geq 4xy, \forall x, y.$$

Suy ra

$$\frac{x + y}{2} \geq \sqrt{xy}, \forall x, y \geq 0. \quad (1.1)$$

Bất đẳng thức (1.1) là một bất đẳng thức quen thuộc ở chương trình toán phổ thông. Ta gọi là bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân (gọi ngắn gọn là bất đẳng thức AM-GM¹) với 2 biến x, y .

¹Arithmetic Mean - Trung bình cộng, Geometric Mean - Trung bình nhân.

Định lý 1.1 (Bất đẳng thức AM-GM với 2 biến). Với x_1, x_2 không âm, ta có

$$\sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2}. \quad (1.2)$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2$.

Chứng minh. Với x_1, x_2 không âm, bình phương 2 vế bất đẳng thức (1.2) được

$$4x_1 x_2 \leq (x_1 + x_2)^2 \Leftrightarrow 4x_1 x_2 \leq x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 x_2 \Leftrightarrow 0 \leq (x_1 - x_2)^2$$

đúng với mọi x_1, x_2 .

Từ bất đẳng thức (1.1) ta thực hiện một vài biến đổi

$$\begin{aligned} \sqrt{xy} &\leq \frac{x+y}{2} \Leftrightarrow \frac{2xy}{x+y} \leq \sqrt{xy} \\ &\Leftrightarrow \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \leq \sqrt{xy}, \quad \forall x, y \geq 0. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Bất đẳng thức (1.3) là một Hệ quả trực tiếp của bất đẳng thức AM-GM với 2 biến, và được gọi là bất đẳng thức giữa trung bình nhân và trung bình điều hòa (gọi ngắn gọn là bất đẳng thức GM-HM²) với 2 biến x, y không âm.

Hệ quả 1.1 (Bất đẳng thức GM-HM với 2 biến). Cho x_1, x_2 là các số thực không âm, ta có

$$\frac{2}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}} \leq \sqrt{x_1 x_2}. \quad (1.4)$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2$.

Chứng minh. Sử dụng bất đẳng thức (1.2) đối với $x := \frac{1}{x}, y := \frac{1}{y}$, ta có

$$\sqrt{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y}} \leq \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}{2},$$

²Harmonic - Trung bình điều hòa.

hay

$$\frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \leq \sqrt{xy}.$$

Ta được điều cần chứng minh.

Từ bất đẳng thức (1.1), bình phương 2 vế ta được

$$xy \leq \frac{(x+y)^2}{4},$$

hay

$$2xy \leq x^2 + y^2 \Leftrightarrow \frac{(x+y)^2 - x^2 - y^2}{2} \leq \frac{x^2 + y^2}{2} \Leftrightarrow \frac{(x+y)^2}{4} \leq \frac{x^2 + y^2}{2},$$

lấy căn bậc hai 2 vế ta được

$$\frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \leq \sqrt{xy}, \quad \forall x, y \geq 0. \quad (1.5)$$

Bất đẳng thức (1.3) là một Hệ quả của bất đẳng thức AM-GM với 2 biến, và được gọi là bất đẳng thức giữa trung cộng và trung bình bậc hai (gọi ngắn gọn là bất đẳng thức AM-QM³) với 2 biến x, y không âm.

Hệ quả 1.2 (Bất đẳng thức AM-QM với 2 biến). Cho x, y là các số thực không âm, ta có

$$\frac{x+y}{2} \leq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}}. \quad (1.6)$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y$.

Chứng minh. Với x, y không âm, bình phương 2 vế bất đẳng thức (1.6) ta được

$$\frac{(x+y)^2}{4} \leq \frac{x^2 + y^2}{2} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{x^2 - 2xy + y^2}{4} \Leftrightarrow 0 \leq (x-y)^2$$

đúng với mọi x, y .

³Quadratic mean - Trung bình bậc hai (toàn phương).

Từ những chứng minh trên chúng ta rút ra được chuỗi bất đẳng thức với 2 biến x, y không âm như sau

$$\min\{x, y\} \leq \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \leq \max\{x, y\}. \quad (1.7)$$

1.2 Các bất đẳng thức n biến liên quan đến giá trị trung bình

Định lý 1.2 (Bất đẳng thức AM-GM (Theo [3])). Cho $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các số thực không âm, $n \geq 1$, khi đó

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}. \quad (1.8)$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Chứng minh. (Phương pháp chứng minh quy nạp Cauchy)⁴

Với $n = 1$, bất đẳng thức (1.8) hiển nhiên đúng.

Với $n = 2$, ta được bất đẳng thức (1.2) đã chứng minh là đúng ở Định lý 1.1.

• Giả thiết quy nạp: Giả sử bất đẳng thức (1.8) đúng với n số thực không âm $x_1, x_2, \dots, x_n, n \geq 1$.

• Cho $2n$ số thực không âm $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{2n}$, ta xét

$$\begin{aligned} \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{2n}}{2n} &= \frac{1}{2} \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} + \frac{x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_{2n}}{n} \right) \\ &\geq \frac{\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} + \sqrt[n]{x_{n+1} x_{n+2} \dots x_{2n}}}{2} \geq \left(\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \sqrt[n]{x_{n+1} x_{n+2} \dots x_{2n}} \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

hay

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{2n}}{2n} \geq \sqrt[2n]{x_1 x_2 \dots x_{2n}}. \quad (1.9)$$

Từ trường hợp $n = 1, n = 2$ và (1.9) suy ra (1.8) đúng với $n = 2^k, \forall k \geq 1$.

Đây chính là quy nạp theo hướng lên trên.

⁴Đây là kiểu quy nạp theo cặp hướng (lên-xuống) do Cauchy đề xuất năm 1821 (Cauchy A.L., cours d'Analyse de l'Ecole Royale Polytechnique, I^{re} partie, Analyse algèbrique, Paris, Debure, 1821) để chứng minh Định lý AM-GM [3].

• (Quy nạp hướng xuống dưới) Giả sử bất đẳng thức (1.8) đúng với n số thực không âm. Ta chứng minh nó đúng với $n - 1$ số không âm $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$. Xét

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n},$$

thay biến x_n bởi $\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}}{n-1}$ ta được

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}}{n-1}}{n} \geq \left[x_1 x_2 \dots x_{n-1} \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}}{n-1} \right]^{\frac{1}{n}},$$

hay

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}}{n-1} \geq \left[x_1 x_2 \dots x_{n-1} \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}}{n-1} \right) \right]^{\frac{1}{n}}.$$

Nâng lũy thừa bậc n cả 2 vế ta được

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}}{n-1} \right)^n \geq x_1 x_2 \dots x_{n-1} \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}}{n-1} \right).$$

Suy ra

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}}{n-1} \right)^{n-1} \geq x_1 x_2 \dots x_{n-1}.$$

Lấy căn bậc $n-1$ cả 2 vế ta được

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}}{n-1} \geq \sqrt[n-1]{x_1 x_2 \dots x_{n-1}}.$$

Ta được điều cần chứng minh.

Hệ quả trực tiếp của bất đẳng thức AM-GM là bất đẳng thức GM-HM.

Hệ quả 1.3 (Bất đẳng thức GM-HM). Cho $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các số thực không âm, $n \geq 1$, khi đó

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}. \quad (1.10)$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Chứng minh. Sử dụng bất đẳng thức AM-GM đối với bộ số $x_k := \frac{1}{x_k}$, ($k = 1, 2, \dots, n$), ta có ngay bất đẳng thức GM-HM.

Hệ quả của bất đẳng thức AM-GM là bất đẳng thức AM-QM. Tương tự như chứng minh bất đẳng thức AM-GM, bằng phương pháp chứng minh quay nạp Cauchy ta có thể chứng minh bất đẳng thức AM-QM.

Hệ quả 1.4 (Bất đẳng thức AM-QM). Cho $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các số thực không âm, $n \geq 1$, khi đó

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \leq \sqrt[n]{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}}. \quad (1.11)$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Từ những bất đẳng thức (1.8), (1.10), (1.11) và từ chuỗi bất đẳng thức (1.7), chúng ta tiếp tục rút ra được chuỗi bất đẳng thức với n biến $x_1, x_2, \dots, x_n$ không âm như sau

$$\begin{aligned} \min\{x_1, x_2, \dots, x_n\} &\leq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \\ &\leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \leq \sqrt[n]{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}} \leq \max\{x_1, x_2, \dots, x_n\}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

1.3 Phương pháp giảm biến trong bất đẳng thức đại số

Ở đây, chúng tôi trình bày một phương pháp làm giảm biến trong bất đẳng thức đại số. Phương pháp này dựa vào lát cắt và phép biến đổi đồng dạng để giảm số biến. Thông thường, phương pháp này hiệu quả trong trường hợp ba biến chuyển về biểu thức dạng hai biến.

Trong mục này chúng tôi sẽ trích dẫn một số kiến thức về tam thức bậc hai và các định lý về dấu của tam thức bậc hai, từ đó trình bày về phương pháp giảm biến trong bất đẳng thức đại số.

Các vấn đề trình bày trong mục này được chúng tôi tham khảo và trích dẫn chủ yếu từ tài liệu [1].

1.3.1 Tam thức bậc hai

Chúng ta vẫn xuất phát từ bất đẳng thức cơ bản

$$x^2 \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (1.13)$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$x = 0.$$

Gần với bất đẳng thức (1.13) là bất đẳng thức dạng sau:

$$(x_1 - x_2)^2 \geq 0, \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R},$$

hay

$$x_1^2 + x_2^2 \geq 2x_1x_2, \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2$.

Xét tam thức bậc hai

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0.$$

Khi đó

$$af(x) = \left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{\Delta}{4},$$

với $\Delta = b^2 - 4ac$.

Từ đây, chúng tôi trích dẫn một số kết quả sau.

Định lý 1.3 (Theo [1]). Xét tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

- i) Nếu $\Delta < 0$ thì $af(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
- ii) Nếu $\Delta = 0$ thì $af(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = -\frac{b}{2a}$.
- iii) Nếu $\Delta > 0$ thì $af(x) = a^2(x - x_1)(x - x_2)$ với

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \mp \frac{\sqrt{\Delta}}{2|a|}. \quad (1.14)$$

Trong trường hợp này, $af(x) < 0$ khi $x \in (x_1, x_2)$ và $af(x) > 0$ khi $x < x_1$ hoặc $x > x_2$.

Định lý 1.4 (Định lý đảo (Theo [1])). Điều kiện cần và đủ để tồn tại số α sao cho $af(\alpha) < 0$ là $\Delta > 0$ và $x_1 < \alpha < x_2$, trong đó $x_{1,2}$ là các nghiệm của $f(x)$ xác định theo (1.14).

Định lý 1.5 (Theo [1]). Với mọi tam thức bậc hai $f(x)$ có nghiệm thực đều tồn tại một nguyên hàm $F(x)$ là đa thức bậc ba, có ba nghiệm đều thực.

Định lý 1.6 (Theo [1]). Tam thức bậc hai $f(x) = 3x^2 + 2bx + c$ có nghiệm (thực) khi và chỉ khi hệ số b, c có dạng:

$$\begin{aligned} b &= \alpha + \beta + \gamma, \\ c &= \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha, \end{aligned} \quad (1.15)$$

trong đó $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

1.3.2 Phương pháp tam thức bậc hai định hướng

Xét đa thức thuần nhất bậc hai hai biến (xem như tam thức bậc hai đối với x)

$$\begin{aligned} F(x, y) &= ax^2 + bxy + cy^2, a \neq 0, \\ \Delta &:= (b^2 - 4ac)y^2. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Khi đó, nếu $\Delta \leq 0$ thì

$$aF(x, y) \geq 0, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Vậy khi $b^2 \leq 4ac$ và $a < 0$ thì hiển nhiên

$$ax^2 + cy^2 \geq |bxy|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Trường hợp riêng khi $a = c = 1, b = \pm 2$ ta nhận lại được kết quả

$$x^2 + y^2 \geq 2|xy|,$$

hay

$$\frac{u+v}{2} \geq \sqrt{uv}, u, v \geq 0.$$

Phương pháp "tam thức bậc hai định hướng" là phương pháp tìm giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) của biểu thức dạng toàn phương khi đã tường minh một

giá trị của nó. Khi đó để tìm giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) của biểu thức đã cho, ta chỉ cần quan tâm đến các giá trị lớn hơn (nhỏ hơn) của biểu thức mà thôi.

Để áp dụng vào các bài toán cực trị của một số dạng toán bậc hai, ta sử dụng tính chất của dạng phân thức bậc hai

$$y = \frac{a_1x^2 + b_1x + c_1}{a_2x^2 + b_2x + c_2},$$

với điều kiện

$$a_2 > 0, f_2(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2 > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Nhận xét 1.1. • Ở phương pháp đã nêu ở trên, đa thức thuần nhất bậc hai hai biến (1.16) được xem như tam thức bậc hai đối với x . Khi đó, từ bài toán hai biến x, y , biến y được coi như tham biến cho trước, thì ta chỉ phải làm việc với biến x . Vậy mục tiêu chính của phương pháp này là làm giảm số biến để đưa bài toán về dạng tam thức bậc hai, và có thể giải quyết được với các kiến thức về dấu của tam thức bậc hai.

- Đặc trưng của phương pháp này là giải quyết các bài toán tìm cực trị và gắn liền với các kiến thức về dấu của tam thức bậc hai.

Ta có thể trình bày tường minh phương pháp này thông qua bài toán sau

1.3.3 Giảm biến trong bất đẳng thức đại số

Bài toán 1.1 (Theo [1]). Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = \frac{a_1x^2 + b_1x + c_1}{a_2x^2 + b_2x + c_2},$$

với điều kiện

$$a_2 > 0, f_2(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2 > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Giải. Nhận xét rằng khi $x = 0$ thì $y(0) = \frac{c_1}{c_2}$ và khi $x \rightarrow \infty$ thì $y \rightarrow \frac{a_1}{a_2}$. Tiếp theo, ta xét các giá trị $y \neq \frac{c_1}{c_2}$ và $y \neq \frac{a_1}{a_2}$.

Giả sử y là một giá trị của biểu thức, $y \neq \frac{c_1}{c_2}$ và $y \neq \frac{a_1}{a_2}$. Khi đó phương trình tương ứng

$$\frac{a_1x^2 + b_1x + c_1}{a_2x^2 + b_2x + c_2} = y$$

phải có nghiệm, hay phương trình

$$(a_2y - a_1)x^2 + (b_2y - b_1)x + (c_2y - c_1) = 0 \quad (1.17)$$

phải có nghiệm.

Do (1.17) là phương trình bậc hai nên điều này tương đương với

$$\Delta = (b_2y - b_1)^2 - 4(a_2y - a_1)(c_2y - c_1) \geq 0,$$

hay

$$g(y) := (b_2^2 - 4a_2c_2)y^2 + 2(b_1b_2 + 2a_2c_1 + 2a_1c_2)y + b_1^2 - 4a_1c_1$$

phải có nghiệm. Vì $g(y)$ có $b_2^2 - 4a_2c_2 < 0$ nên theo Định lý đảo của tam thức bậc hai 1.4, thì

$$\Delta' = (b_1b_2 + 2a_1c_2 + a_2c_1)^2 - (4a_1c_1 - b_1^2)(4a_2c_2 - b_2^2) \geq 0 \quad (1.18)$$

và

$$y_1 \leq y \leq y_2,$$

với

$$y_{1,2} = \frac{b_1b_2 + 2a_2c_1 + 2a_1c_2 \pm \sqrt{\Delta'}}{b_2^2 - 4a_2c_2},$$

và Δ' được tính theo công thức (1.18).

Suy ra $\max y = y_2$ và $\min y = y_1$, đạt được khi ứng với mỗi $j (j = 1, 2)$, xảy ra đồng thời

$$\begin{cases} \Delta = (b_2y_j - b_1)^2 - 4(a_2y_j - a_1)(c_2y_j - c_1) = 0, \\ x_j = -\frac{1}{2} \frac{b_2y_j - b_1}{a_2y_j - a_1}. \end{cases}$$

Sau đây, chúng tôi trích dẫn ví dụ minh họa sau.

Ví dụ 1.1 (Theo [1]). Cho x, y là các số thực sao cho

$$2x^2 + y^2 + xy \geq 1.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M = x^2 + y^2.$$

Giải. Đặt $2x^2 + y^2 + xy = a, a \geq 1$. Khi đó

$$\frac{M}{a} = \frac{x^2 + y^2}{2x^2 + y^2 + xy}.$$

- Nếu $y = 0$ thì $\frac{M}{a} = \frac{1}{2}$.
- Nếu $y \neq 0$, đặt $t = \frac{x}{y}$, suy ra

$$\frac{M}{a} = \frac{t^2 + 1}{2t^2 + t + 1}.$$

Ta chỉ cần xác định các giá trị $\frac{M}{a} < \frac{1}{2}$, sao cho phương trình

$$\frac{M}{a} = \frac{t^2 + 1}{2t^2 + t + 1}$$

có nghiệm.

Nghĩa là phương trình

$$\left(2\frac{M}{a} - 1\right)t^2 + \frac{M}{a}t + \frac{M}{a} - 1 = 0$$

có nghiệm. Thế thì biệt thức Δ phải không âm. Ta có

$$\Delta = \left(\frac{M}{a}\right)^2 - 4\left(2\frac{M}{a} - 1\right)\left(\frac{M}{a} - 1\right) \geq 0,$$

hay

$$-7\left(\frac{M}{a}\right)^2 + 12\left(\frac{M}{a}\right) - 4 \geq 0.$$

Giải bất phương trình bậc hai này ta được

$$\frac{6 - 2\sqrt{2}}{7} \leq \frac{M}{a} \leq \frac{6 + 2\sqrt{2}}{7}.$$

Suy ra

$$M \geq \frac{6 - 2\sqrt{2}}{7}a \geq \frac{6 - 2\sqrt{2}}{7} = M_0.$$

Vậy $\min M = \frac{6 - 2\sqrt{2}}{7}$, đạt được khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x = M_1 y \\ 2x^2 + y^2 + xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = M_1 y \\ y = \pm \frac{\sqrt{2}(1 - 2M_0)}{\sqrt{2 - 7M_0 + 7M_0^2}} \end{cases}$$

với $M_1 = \frac{-M_0}{2(2M_0 - 1)}.$

Nhận xét 1.2. Bài toán minh họa phương pháp giảm biến trong bất đẳng thức đại số và cả ví dụ minh họa đều ở dạng 2 biến. Tuy nhiên, ta vẫn có thể dùng phương pháp này cho bất đẳng thức nhiều biến hơn, giả sử 3 biến. Chúng tôi sẽ trình bày bài toán 3 biến áp dụng phương pháp giảm biến này như bài toán sau.

Bài toán 1.2. Cho

$$x^2 + 2y^2 + 5z^2 = 1. \quad (1.19)$$

Chứng minh

$$M = xy + yz + zx \leq \frac{1}{2}.$$

Chứng minh. • Xét $z = 0$ thì (1.19) $\Leftrightarrow x^2 + 2y^2 = 1$ và $M = xy$.

Theo AM-GM ta có

$$1 = x^2 + 2y^2 \geq 2\sqrt{2}|xy|,$$

hay

$$M \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Khi đó, ta có được $M = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

- Xét $z \neq 0$, ta chỉ cần quan tâm đến các giá trị $M > \frac{1}{2\sqrt{2}}$ (vì ta đang cần chứng minh $M \leq \frac{1}{2}$).

Đặt $\frac{x}{z} = \alpha, \frac{y}{z} = \beta$. Khi đó

$$(1.19) \Leftrightarrow (\alpha^2 + 2\beta^2 + 5)z^2 = 1 \quad (1.20)$$

$$M = z^2(\alpha\beta + \beta + \alpha) = \frac{\alpha + \beta + \alpha\beta}{\alpha^2 + 2\beta^2 + 5}, M > \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

$$\Leftrightarrow M.\alpha^2 - (\beta + 1)\alpha + M(2\beta^2 + 5) - \beta = 0, \quad (\text{coi } \alpha \text{ là ẩn}) \quad (1.21)$$

phải có nghiệm. Suy ra

$$\begin{aligned} \Delta &= (\beta + 1)^2 - 4M(2M\beta^2 - \beta + 5M) \geq 0 \\ \Leftrightarrow (1 - 8M^2)\beta^2 + 2(2M + 1)\beta + 1 - 20M^2 &\geq 0. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Do đó

$$\begin{aligned} \Delta' &= (2M + 1)^2 - (1 - 8M^2)(1 - 20M^2) \geq 0 \\ \Leftrightarrow 4M + 32M^2 - 160M^4 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow 4M(1 + 8M - 40M^3) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{2}} < M &\leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Bài toán được chứng minh.

Bài toán 1.2 có thể trình bày yêu cầu của bài toán theo cách khác.

Bài toán 1.3. Cho

$$x^2 + 2y^2 + 5z^2 = 1. \quad (1.23)$$

Tìm giá trị lớn nhất của

$$M = xy + yz + zx.$$

Giải. Giải tương tự lời giải của Bài toán 1.2. Cuối cùng, khi ta đã tìm ra M đạt giá trị lớn nhất là $M = \frac{1}{2}$, thì ta tính β, α, z, x, y bằng cách thế $M = \frac{1}{2}$ lần lượt như sau.

Thế M vào (1.22) ta tính ra β .

Thế M, β vào (1.21) ta tính ra α .

Thế M, β, α vào (1.20) ta tính ra z .

Từ đó, suy ra x, y .

Chương 2

Độ gần đều và phương pháp dồn biến

Trong chương này, chúng tôi trình bày về độ gần đều, hàm lồi và biểu diễn của hàm lồi, từ đó trình bày phương pháp dồn biến dạng tổng quát.

Các vấn đề trình bày trong chương này được chúng tôi tham khảo và trích dẫn chủ yếu từ một số tài liệu [1], [3], [8], [4].

2.1 Độ gần đều

Xuất phát từ việc nhận thấy các giá trị trung bình đều bằng nhau khi và chỉ khi các số hạng trong dãy số thực không âm bằng nhau hay các cặp số trong dãy số thực không âm bằng nhau. Điều này làm chúng tôi nghĩ tới việc tìm hiểu về cặp giá trị gần bằng nhau trong dãy số và sự sắp xếp thứ tự của các cặp giá trị.

Từ bất đẳng thức (1.2)

$$x_1^2 + x_2^2 \geq 2x_1x_2, \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

Ta suy ra với mọi cặp số không âm x, y với tổng bằng 1 cho trước thì tích xy đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{1}{4}$ khi $x = y = \frac{1}{2}$. Tuy nhiên khi x, y biến đổi trong một miền và trong miền đó và x khác y thì chúng chỉ đạt được vị thế ở vị trí x và y gần nhau nhất. Từ đây ta phát biểu khái niệm độ gần đều như sau.

Định nghĩa 2.1 (Theo [1]). Xét các cặp số không âm x, y . Ta gọi hiệu

$$\rho(x, y) := \max\{x, y\} - \min\{x, y\}$$

là độ lệch của cặp số x, y hay là độ gần đều của cặp số x, y .

Nếu $\rho(x, y) = 0$ thì $x = y$, ta gọi x, y là cặp đều.

Nếu $x \neq y$ thì $\rho(x, y) > 0$, ta gọi độ gần đều của x, y bằng $\rho(x, y)$.

Để phân chia các trường hợp rõ ràng hơn, chúng ta phát biểu Định nghĩa 2.1 cho các trường hợp riêng như sau.

Nhận xét rằng, đối với các cặp số dương có chung tổng thì ta có thể phát biểu thứ tự các cặp đó rằng tích xy đạt giá trị lớn nhất trong trường hợp cặp số đó là đều, tức là $x = y$.

Định nghĩa 2.2. i) Xét các cặp số không âm x, y với tổng không đổi (để đơn giản, ta chọn $x + y = 1$). Ta gọi hiệu

$$\rho(x, y) := \max\{x, y\} - \min\{x, y\}$$

là độ lệch của cặp số x, y hay là độ gần đều của cặp số x, y .

ii) Cặp x_1, y_1 được gọi là gần đều hơn (độ lệch nhỏ hơn) cặp x_2, y_2 (hay cặp x_2, y_2 được gọi là xa đều hơn cặp x_1, y_1) nếu

$$\rho(x_1, y_1) \leq \rho(x_2, y_2).$$

Như vậy theo Định nghĩa 2.2 thì cặp x, y luôn có độ lệch $\rho(x, y) \geq 0$ và độ lệch bằng 0 khi và chỉ khi $x = y$, khi đó cặp x, y là cặp gần đều nhất và các cặp 0, 1 và 1, 0 sẽ là những cặp xa đều nhất.

Nhận xét rằng, đối với các cặp số dương có chung tích thì ta có thể phát biểu thứ tự các cặp đó rằng tổng $x + y$ đạt giá trị nhỏ nhất trong trường hợp cặp số đó là đều, tức là $x = y$.

Định nghĩa 2.3. i) Xét các cặp số không âm x, y với tích không đổi (để đơn giản, ta chọn $xy = a > 0$). Ta gọi hiệu

$$\rho(x, y) := \max\{x, y\} - \min\{x, y\}$$

là độ lệch của cặp số x, y hay là độ gần đều của cặp số x, y .

ii) Cặp x_1, y_1 được gọi là gần đều hơn (độ lệch nhỏ hơn) cặp x_2, y_2 (hay cặp x_2, y_2 được gọi là xa đều hơn cặp x_1, y_1) nếu

$$\rho(x_1, y_1) \leq \rho(x_2, y_2).$$

Như vậy theo Định nghĩa 2.3 thì cặp x, y luôn có độ lệch $\rho(x, y) \geq 0$ và độ lệch bằng 0 khi và chỉ khi $x = y$, khi đó cặp x, y là cặp gần đều nhất và các cặp 0, 1 và 1, 0 sẽ là những cặp xa đều nhất.

Thứ tự sắp được ngôn ngữ "gần đều dần" cho ta một cách tiếp cận tự nhiên với nhiều bài toán của thực tiễn. Sau đây, chúng tôi trình bày một bài toán làm ví dụ.

Bài toán 2.1. Khi ta có một cặp số x, y dương có tổng bằng 7. Ta có một loạt các bộ số: (1, 6), (2, 5), (3, 4) có tổng bằng 7. Tất cả có chung một đặc trưng

$$(x.y) \leq \left(\frac{7}{2}\right)^2.$$

Nếu xem xét kỹ ta thấy các tích

$$1.6 < 2.5 < 3.4.$$

Vậy cặp số có tổng không đổi thì khi x và y càng gần đều nhau thì tích càng lớn. Lúc này ta được thứ tự sắp chặt của bộ số đó.

Nhận xét 2.1. Khi ta có một cặp số tự nhiên x, y có tổng là một số lẻ thì cặp số đó sẽ không bao giờ là cặp số nguyên bằng nhau được. Khi đó, khái niệm gần đều nhất (mà không phải là đều) sẽ có ý nghĩa thực tiễn. Từ đây tiến gần đến trường hợp đều.

Từ các Định nghĩa 2.1, 2.2, 2.3, ta suy ra được thêm một số tính chất về độ gần đều của các cặp số không âm.

Với quy ước của Định nghĩa 2.2, ta có thể sắp thứ tự các tích xy với tổng $x + y = 1$ không đổi theo ngôn ngữ "gần đều" như sau.

Định lý 2.1 (Theo [1]). Xét các cặp số không âm x_j, y_j , với $j = 1, 2$ với tổng không đổi (để đơn giản ta chọn $x_j + y_j = 1$). Khi đó

$$x_1 y_1 \geq x_2 y_2$$

khi và chỉ khi cặp x_1, y_1 gần đều hơn cặp x_2, y_2 .

Chứng minh. Xét các cặp số không âm x, y với tổng bằng 1 không đổi. Không mất tính tổng quát, coi $0 \leq x < y$. Với mỗi $\epsilon > 0$ đủ nhỏ, để đảm bảo $x + \epsilon < y - \epsilon$ (chỉ cần chọn $\epsilon \in \left[0, \frac{y-x}{2}\right]$). Dễ thấy rằng cặp $x + \epsilon, y - \epsilon$ gần đều hơn cặp x, y đã cho. Ta chỉ cần chứng minh rằng

$$xy \leq (x + \epsilon)(y - \epsilon) \quad (2.1)$$

là đủ.

Điều này là hiển nhiên vì (2.1) tương đương với bất đẳng thức $\epsilon(y-x-\epsilon) \geq 0$.

Với quy ước của Định nghĩa 2.3, ta có thể sắp thứ tự các tổng $x + y$ với tích xy không đổi theo ngôn ngữ "gần đều" như sau.

Định lý 2.2 (Theo [1]). Xét các cặp số không âm x_j, y_j , với $j = 1, 2$ với tích không đổi (để đơn giản ta chọn $x_j y_j = 1$). Khi đó

$$x_1 + y_1 \leq x_2 + y_2$$

khi và chỉ khi cặp x_1, y_1 gần đều hơn cặp x_2, y_2 .

Chứng minh. Xét các cặp số dương x, y với tích bằng 1 không đổi. Không mất tính tổng quát, coi $0 < x < y$. Với mỗi $\epsilon > 1$, để đảm bảo $\epsilon x < (\epsilon)^{-1} y$ (chỉ cần chọn $\epsilon \in \left(1, \sqrt{\frac{y}{x}}\right)$).

Dễ thấy rằng cặp $x\epsilon, y(\epsilon)^{-1}$ gần đều hơn cặp x, y đã cho. Ta chỉ cần chứng minh rằng

$$x + y \geq x\epsilon + y(\epsilon)^{-1} \quad (2.2)$$

là đủ.

Điều này là hiển nhiên vì (2.2) tương đương với bất đẳng thức

$$\epsilon x \leq y.$$

Sau đây chúng tôi trích dẫn thêm một bài toán làm ví dụ về hai cặp số được sắp thứ tự.

Bài toán 2.2. Xét hai cặp số $(z, 2 - z)$ và $(y, 2 - y)$ với

$$1 \leq x \leq y \leq 2,$$

hoặc

$$0 \leq y \leq z \leq 1.$$

Khi đó, theo Định nghĩa 2.1, rõ ràng cặp số $(z, 2 - z)$ gần đều hơn so với cặp số $(y, 2 - y)$.

Từ đó chúng ta có một Định lý đóng vai trò quan trọng đối với hai cặp số sắp được thứ tự.

Định lý 2.3 (H. W. Melaughlin, F. T. Metcalf (Theo [1])). Với mọi cặp dãy số dương $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ sao cho $0 \leq y \leq z \leq 1$ và $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ sao cho $1 \leq z \leq y \leq 2$ hoặc ta đều có

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k^y b_k^{2-y} \right) \left(\sum_{k=1}^n a_k^{2-y} b_k^y \right) \geq \left(\sum_{k=1}^n a_k^z b_k^{2-z} \right) \left(\sum_{k=1}^n a_k^{2-z} b_k^z \right).$$

Đây chính là một dạng nội suy bất đẳng thức Cauchy trong $[0, 1]$.

2.2 Hàm lồi và biểu diễn của hàm lồi

2.2.1 Hàm lồi, lõm

Định nghĩa 2.4 (Hàm lồi). Một hàm số $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ được gọi là lồi nếu

$$f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y), \quad \forall x, y \in [a, b], \quad \forall t \in [0, 1].$$

Từ định nghĩa ta rút ra được một số nhận xét quan trọng như sau.

Nhận xét 2.2. 1. Khi $x_1 < x_2$ thì $x = tx_1 + (1 - t)x_2$ với mọi $t \in [0, 1]$.

Đều thuộc (x_1, x_2) và

$$t = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}, \quad 1 - t = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}.$$

2. Nếu f khả vi hai lần thì hàm f lồi khi và chỉ khi $f''(x) \geq 0, \quad \forall x \in [a, b]$.

3. Nếu f lồi thì f liên tục. Ngược lại, nếu f liên tục thì tính lồi của f là tương đương với $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$.

Tính lồi (Theo [8]) Một hàm số $f(x)$ là lõm lên (xuống) trên đoạn $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ nếu $f(x)$ nằm dưới (trên) đường thẳng nối các điểm $(a_1, f(a_1))$ và $(b_1, f(b_1))$,

$$a \leq a_1 \leq x \leq b_1 \leq b.$$

Hàm số lõm lên và xuống được gọi tương ứng là hàm lồi và hàm lõm.

Nếu f là hàm lồi trên đoạn $[a, b]$ và $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ là những số không âm có tổng bằng 1, thì

$$\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \dots + \lambda_n f(x_n) \geq f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n), \quad (2.3)$$

với bất kỳ $x_1, x_2, \dots, x_n$ trong đoạn $[a, b]$.

Nếu hàm số là lõm, bất đẳng thức sẽ đổi chiều.

Tương tự, ta cũng có định nghĩa hàm lồi (lõm) trên các tập $(a, b), [a, b), (a, b]$. Ta sẽ sử dụng ký hiệu $I(a, b)$ là nhằm ngầm định một trong bốn tập hợp $[a, b], (a, b), [a, b), (a, b]$.

Tiếp theo, chúng tôi sẽ trích dẫn một số tính chất của hàm lồi trên $I(a, b)$.

Tính chất sau cho phép ta dễ dàng kiểm chứng tính lồi (lõm) đối với một hàm số cho trước.

Định lý 2.4 (Jensen (Theo [1])). Giả sử $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$. Khi đó điều kiện cần và đủ để hàm số $f(x)$ lồi trên $I(a, b)$ là

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}, \quad \forall x_1, x_2 \in I(a, b). \quad (2.4)$$

Chứng minh. Nếu $f(x)$ là hàm lồi trên $I(a, b)$ thì ta có ngay (2.4) bằng cách chọn $t = \frac{1}{2}$ từ định nghĩa hàm lồi.

Giả sử có (2.4). Ta cần chứng minh rằng với $\forall t \in [0, 1]$ ta đều có

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2).$$

Nếu $t \in \mathbb{Q}$ ta có thể viết

$$t = \frac{m}{q}, \quad 1-t = \frac{n}{q},$$

trong đó $m, n \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$ và $m + n = q$. Bằng phương pháp quy nạp ta có ngay

$$\begin{aligned} f(tx_1 + (1-t)x_2) &= f\left(\frac{mx_1 + nx_2}{q}\right) \\ &\leq \frac{mf(x_1) + nf(x_2)}{q} = tf(x_1) + (1-t)f(x_2). \end{aligned}$$

Nếu t là số vô tỉ thì ta chọn dãy số hữu tỉ dương u_n trong khoảng $(0, 1)$ có giới hạn bằng t

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = t.$$

Khi đó, hiển nhiên dãy $v_n := 1 - u_n$ cũng nằm trong $(0, 1)$ và

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 1 - t.$$

Theo chứng minh trên ứng với trường hợp t hữu tỉ, thì

$$f(u_n x_1 + v_n x_2) \leq u_n f(x_1) + v_n f(x_2), \quad \forall n \in \mathbb{N}, x_1, x_2 \in I(a, b).$$

Chuyển qua giới hạn và sử dụng tính liên tục của $f(x)$, ta thu được

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2).$$

Định lý được chứng minh.

2.2.2 Biểu diễn hàm lồi, lõm

Trong phần này, chúng tôi trích dẫn chủ yếu các kết quả từ [1].

Để đơn giản cách trình bày, ta chỉ xét lớp các hàm lồi lõm khả vi bậc hai. Như vậy, hàm $f(x)$ đơn điệu tăng trong $I(a, b)$ khi và chỉ khi

$$f'(x) \geq 0, \quad \forall x \in I(a, b),$$

và hàm $f(x)$ lồi trên $I(a, b)$ khi và chỉ khi

$$f''(x) \geq 0, \quad \forall x \in I(a, b).$$

Từ đó, ta có nhận xét, khi hàm $f(x)$ lồi trên $I(a, b)$ thì đạo hàm bậc nhất của nó là một hàm đơn điệu tăng.

Do vậy, ta có thể phát biểu tính chất biểu diễn hàm lồi như sau.

Định lý 2.5 (Theo [1]). Hàm $f(x)$ lồi trên $I(a, b)$ khi và chỉ khi tồn tại hàm $g(x)$ đơn điệu tăng trong $I(a, b)$ và số $c \in (a, b)$, sao cho

$$f(x) = f(c) + \int_c^x g(t)dt.$$

Ở đây, chúng ta đặc biệt quan tâm đến một dạng biểu diễn hàm lồi, hàm lõm thông qua các hàm số bậc nhất, vì lớp hàm này đơn giản và dễ tính toán trên tập giá trị của chúng.

Để ý rằng, nếu $f(x)$ là hàm lồi liên tục trên $[a, b]$ và với số $t \in [0, 1]$ xảy ra đẳng thức

$$tf(a) + (1 - t)f(b) = f(ta + (1 - t)b)$$

thì $f(x)$ là hàm số bậc nhất.

Vì vậy, khi hàm số $f(x)$ lồi và khả vi trên $I(a, b)$ thì đồ thị của nó luôn luôn thuộc nửa mặt phẳng trên tạo nên bởi tiếp tuyến tại mỗi điểm tùy ý cho trước của đồ thị đó. Nói cách khác, nếu $f(x)$ lồi trên $I(a, b)$ thì với mỗi cặp $x_0, x \in I(a, b)$, ta đều có

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \quad (2.5)$$

Thật vậy, ta có (2.5) tương đương với

$$f'(x_0) \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \text{ khi } x > x_0; x_0, x \in I(a, b), \quad (2.6)$$

và

$$f'(x_0) \geq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \text{ khi } x < x_0; x_0, x \in I(a, b). \quad (2.7)$$

Các bất đẳng thức (2.6), (2.7) là hiển nhiên (theo Định lý Lagrange).

Dễ nhận thấy rằng (2.5) xảy ra đẳng thức khi $x_0 = x$. Vậy ta có thể viết (2.5) dưới dạng

$$f(x) = \max_{u \in I(a, b)} [f(u) + f'(u)(x - u)].$$

Tương tự, ta cũng có biểu diễn đối với hàm lõm.

Khi hàm số $f(x)$ lõm và khả vi trên $I(a, b)$ thì đồ thị của nó thuộc nửa mặt phẳng dưới tạo bởi tiếp tuyến tại mỗi điểm tùy ý thuộc đồ thị, tức là với mỗi cặp $x_0, x \in I(a, b)$, ta đều có

$$f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \quad (2.8)$$

Để nhận thấy rằng (2.8) xảy ra đẳng thức khi $x_0 = x$. Vậy ta có thể viết (2.8) dưới dạng

$$f(x) = \min_{u \in I(a, b)} [f(u) + f'(u)(x - u)]. \quad (2.9)$$

Vậy chúng ta đã có một dạng biểu diễn hàm lõm và lõm thông qua cực trị của các hàm số bậc nhất phụ thuộc tham biến. Phép biểu diễn này được gọi là biểu diễn á tuyến tính (theo Bellman) và nó đóng vai trò quan trọng như là một công cụ hữu hiệu trong nhiều bài toán cực trị và tối ưu.

Tương tự, ta cũng có biểu diễn đối với hàm lồi nhiều biến. Giả sử $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ là hàm số thực lồi khả vi theo từng biến trên $\mathbb{R}$. Khi đó, ứng với mọi bộ số $(z_1, z_2, \dots, z_n)$ mà

$$z_1 \geq z_2 \geq \dots \geq z_n,$$

ta đều có

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq F(z_1, z_2, \dots, z_n) + \sum_{i=1}^n (x_i - z_i) \frac{\partial F}{\partial z_i}.$$

Từ đó suy ra

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \max_{R(z)} \left[F(z_1, z_2, \dots, z_n) + \sum_{i=1}^n (x_i - z_i) \frac{\partial F}{\partial z_i} \right].$$

Nhìn vào Định nghĩa, các Định lý về hàm lõm và biểu diễn hàm lõm, ta có thể thấy mục tiêu đưa hàm hai hay nhiều biến giả sử như

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

về hàm một biến giả sử như

$$nf \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \right),$$

hay ta gọi đó là *dồn biến*.

2.3 Phương pháp dồn biến

Phương pháp dồn biến có tư tưởng làm giảm số biến trong bài toán, dựa vào phép nắn gần đều, nó giúp đưa bài toán về dạng đơn giản hơn.

Trước khi trình bày phương pháp dồn biến tổng quát, chúng tôi trích dẫn một số kết quả cơ sở.

Định lý 2.6 (Điều kiện Schur (Theo [1])). Điều kiện cần và đủ để hai bộ dãy số đơn điệu giảm $\{x_k, y_k : k = 1, 2, \dots, n\}$, thỏa mãn các điều kiện

$$\begin{cases} x_1 \geq y_1 \\ x_1 + x_2 \geq y_1 + y_2 \\ \dots\dots\dots \\ x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} \geq y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n = y_1 + y_2 + \dots + y_n \end{cases} \quad (2.10)$$

là giữa chúng có một phép biến đổi tuyến tính dạng

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j, i = 1, 2, \dots, n,$$

trong đó

$$a_{kl} \geq 0, \sum_{j=1}^n a_{kj} = 1, \sum_{j=1}^n a_{jl} = 1; k, l = 1, 2, \dots, n.$$

Ta gọi hai bộ dãy số $\{x_k, y_k : k = 1, 2, \dots, n\}$ thỏa mãn điều kiện (2.10) là dãy $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ trội hơn dãy $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$, hay dãy $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ gần đều hơn dãy $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Định lý 2.7 (Karamata (Theo [1])). Cho hàm $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai tại mọi $x \in (a, b)$ sao cho $f'(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$ và $f''(x) > 0, \forall x \in (a, b)$. Giả sử $x_1, x_2, \dots, x_n$ và $y_1, y_2, \dots, y_n$ là các số $\in [a, b]$ đồng thời thỏa mãn các điều kiện

$$x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \text{ và } y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n$$

và

$$\begin{cases} x_1 \geq y_1 \\ x_1 + x_2 \geq y_1 + y_2 \\ \dots\dots\dots \\ x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} \geq y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq y_1 + y_2 + \dots + y_n \end{cases}$$

Khi đó, ta luôn có

$$\sum_{k=1}^n f(x_k) = \max_{t_1, \dots, t_n \in I(a,b)} \left[\sum_{i=1}^n f(t_i) + \sum_{i=1}^n (x_i - t_i) f'(t_i) \right] \geq \sum_{k=1}^n f(y_k). \quad (2.11)$$

Chứng minh. Sử dụng biểu diễn đối với hàm lồi ta có

$$\begin{aligned} & f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) = \\ &= \max_{t_1, \dots, t_n \in I(a,b)} \left[\sum_{i=1}^n f(t_i) + \sum_{i=1}^n (x_i - t_i) f'(t_i) \right]. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Không mất tính tổng quát, ta giả thiết bộ số $t_1, t_2, \dots, t_n \in I(a, b)$ cũng là một bộ số giảm, tức là

$$t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_n.$$

Khi đó, ta chỉ cần chứng minh rằng

$$\begin{aligned} & x_1 f'(t_1) + x_2 f'(t_2) + \dots + x_n f'(t_n) \geq \\ & \geq y_1 f'(t_1) + y_2 f'(t_2) + \dots + y_n f'(t_n). \end{aligned}$$

Sử dụng biến đổi Abel

$$\begin{aligned} & x_1 f'(t_1) + x_2 f'(t_2) + \dots + x_n f'(t_n) = \\ &= S_1[f'(t_1) - f'(t_2)] + S_2[f'(t_2) - f'(t_3)] + \dots + \\ & \quad + S_{n-1}[f'(t_{n-1}) - f'(t_n)], \end{aligned}$$

với

$$S_k(x) := x_1 + x_2 + \dots + x_k.$$

Vì $f''(x) > 0$ nên $f'(x_k) \leq f'(x_{k-1})$. Mặt khác, do $S_k(x) \geq S_k(y)$ ($k = 1, 2, \dots, n-1$) và vì $S_n(x) \geq S_n(y)$ và $f'(t_n) \geq 0$. Ta được ngay điều cần chứng minh.

Từ đây ta có được định hướng về dồn biến trong lớp hàm lồi, lõm, được trình bày như sau.

Dồn biến trong lớp hàm lồi, lõm

Cho hai bộ số $x_1, x_2, \dots, x_n$ và $y_1, y_2, \dots, y_n$ thỏa mãn

$$x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \text{ và } y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n$$

và

$$\begin{cases} x_1 \geq y_1 \\ x_1 + x_2 \geq y_1 + y_2 \\ \dots\dots\dots \\ x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} \geq y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq y_1 + y_2 + \dots + y_n. \end{cases}$$

Khi đó, với hàm số $f(x)$ thỏa mãn

$$f''(x) \geq 0, x \in (a, b)$$

và

$$f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) \geq f(y_1) + f(y_2) + \dots + f(y_n).$$

Ta luôn có

$$f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) \geq 2f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + f(x_3) + \dots + f(x_n). \quad (2.13)$$

Nhìn vào (2.13), ta có thể thấy mục tiêu của chúng ta là đưa hai hay nhiều hàm một biến

$$f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$$

về một hàm một biến giả sử như

$$nf\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right).$$

Đây là một công cụ dồn biến tốt. Chúng ta có thể sử dụng để đưa tất cả các biến bằng nhau (gọi là dồn biến toàn cục). Tuy nhiên, những bài toán như vậy không phải là đa số, và những bất đẳng thức sử dụng được dồn biến dạng (2.13) thì các biến phải nằm trong các biểu thức độc lập nhau, để có thể viết thành dạng

$$f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n). \quad (2.14)$$

Như đã trình bày ở trên, không có nhiều bất đẳng thức có thể viết thành dạng (2.14), mà ta sẽ phải làm việc với dạng tổng quát hơn là

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Như vậy tư tưởng chính của dồn biến là thay vì mong muốn có ngay một cách dồn biến toàn cục, chúng ta hy vọng có thể từng bước đơn giản bài toán bằng cách giảm dần số biến.

2.3.1 Dồn biến tổng quát

Nhận xét rằng, điều kiện (2.10) cho ta một thuật toán nắn đều một bộ số cho trước bằng phương pháp biến đổi tuyến tính. Ta nhận thấy phép biểu diễn hàm lồi (lõm) một biến có thể mở rộng cho hàm lồi nhiều biến. Cụ thể là, ứng với mọi hàm lồi $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$, ta đều có

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \max_{(t_1, \dots, t_n)} \left[F(t_1, t_2, \dots, t_n) + \sum_{i=1}^n (x_i - t_i) \frac{\partial F}{\partial t_i} \right]. \quad (2.15)$$

Sử dụng cách chứng minh tương tự chứng minh Định lý 2.7, ta thu được Định lý sau.

Định lý 2.8 (Theo [1]). Giả sử $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ thỏa mãn điều kiện (2.11). Khi đó, với mọi cặp bộ số đơn điệu giảm $(x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n)$, thỏa mãn điều kiện Schur (2.10), ta đều có

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq F(y_1, y_2, \dots, y_n). \quad (2.16)$$

Nhận xét 2.3. Có thể nói rằng, Định lý 2.8 cho ta một công cụ rất mạnh để thực hiện quá trình làm đều và thuật toán dồn biến để chứng minh nhiều dạng bất đẳng thức phức tạp.

Thật vậy, từ (2.16) ta có ngay Hệ quả.

Hệ quả 2.1 (Dồn biến tổng quát). Giả sử cho $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ là một hàm lồi n biến. Khi đó với mọi bộ số đơn điệu giảm $x_1, x_2, \dots, x_n$ ta có

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq F(y, y, x_3, \dots, x_n), \quad (2.17)$$

trong đó, $y = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

Chứng minh. Xét hai bộ số $x_1, x_2, \dots, x_n$ và $\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_1 + x_2}{2}, x_3, \dots, x_n$, ta thấy

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 \geq \frac{x_1 + x_2}{2} \\ x_1 + x_2 \geq \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{x_1 + x_2}{2} \\ x_1 + x_2 + x_3 \geq \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{x_1 + x_2}{2} + x_3 \\ \dots\dots\dots \\ x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} \geq \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{x_1 + x_2}{2} + x_3 + \dots + x_{n-1} \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n = \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{x_1 + x_2}{2} + x_3 + \dots + x_n. \end{array} \right.$$

Rõ ràng hai bộ số đã cho thỏa mãn điều kiện Schur (2.10). Khi đó, áp dụng Định lý 2.8 ta được điều phải chứng minh.

Điều kiện (2.17) có thể biến đổi thành một số dạng khác như

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, \dots, x_n) &\geq F(\sqrt{x_1 x_2}, \sqrt{x_1 x_2}, x_3, \dots, x_n), \\ F(x_1, x_2, \dots, x_n) &\geq F\left(\frac{2}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}}, \frac{2}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}}, x_3, \dots, x_n\right), \\ F(x_1, x_2, \dots, x_n) &\geq F\left(\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}}, \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}}, x_3, \dots, x_n\right). \end{aligned}$$

Ngoài ra, còn nhiều dạng khác nữa tùy theo yêu cầu của bài toán.

Sau đây, chúng tôi trích dẫn một vài ví dụ sử dụng phương pháp dồn biến tổng quát.

Ví dụ 2.1 (Bất đẳng thức AM-GM). Chứng minh rằng với mọi số thực dương $x_1, x_2, \dots, x_n$ ta luôn có

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq n \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}.$$

Chứng minh. Đặt $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 + x_2 + \dots + x_n - n \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$.

Theo (1.2) ta có

$$x_1 + x_2 \geq 2\sqrt{x_1 x_2} = \sqrt{x_1 x_2} + \sqrt{x_1 x_2}$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2 \geq 0$$

suy ra

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq f(\sqrt{x_1 x_2}, \sqrt{x_1 x_2}, x_3, \dots, x_n).$$

Do đó $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq f(t, t, \dots, t) = 0$ trong đó $t = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$.

Như vậy, tư tưởng chính của phương pháp này là làm giảm dần số biến trong bất đẳng thức, dần đưa bất đẳng thức về dạng đơn giản hơn, để có thể giải quyết bài toán. Ta có thể gọi ngắn gọn cho cách hiểu toàn bộ phương pháp này là giảm biến.

Sau đây, chúng tôi trình bày các kết quả về dồn biến của một số tác giả, được tham khảo từ [4].

2.3.2 Một số định lý về dồn biến

Khi nói về các Định lý về dồn biến, ta nghĩ tới 2 kết quả đầu tiên hết sức ấn tượng, là Định lý dồn biến mạnh (SMV¹), và Định lý dồn biến không xác định (UMV²). Trong một số trường hợp, chúng ta sẽ sử dụng các định lý dồn biến này.

Bổ đề 2.1 (Theo [4]). Giả sử $x_1, x_2, \dots, x_n$ là một bộ số thực tùy ý. Ta thực hiện liên tiếp phép biến đổi sau.

1. Chọn $j, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ là hai chỉ số sao cho

$$x_i = \min\{x_1, x_2, \dots, x_n\}, x_j = \max\{x_1, x_2, \dots, x_n\}.$$

2. Thay x_i và x_j bởi $\frac{x_i + x_j}{2}$ (nhưng vẫn giữ đúng thứ tự của chúng trong dãy số).

Khi đó sau vô hạn lần thực hiện biến đổi nói trên thì mỗi số a_i đều tiến tới giới hạn

$$x = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

¹Stronger Mixing Variable - Dồn biến mạnh - của Phạm Kim Hùng

²Undefined Mixing Variable - dồn biến không xác định - của Đinh Ngọc An

Ta gọi phép biến đổi ở Bổ đề 2.1 là Δ . Từ Bổ đề 2.1, ta suy ra được kết quả trực tiếp sau, có tên là "Dồn biến mạnh". Dồn biến mạnh sẽ là 1 công cụ đặc lực giúp ta giải quyết được các bài toán bất đẳng thức cực trị đạt được tại tâm (các giá trị bằng nhau).

Định lý 2.9 (Dồn biến mạnh SMV (Theo [4])). Nếu $f : I \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$, $I = [\alpha, \beta] \times [\alpha, \beta] \times \cdots \times [\alpha, \beta]$ với $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ là hàm liên tục đối xứng và bị chặn dưới thỏa mãn điều kiện

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq f(y_1, y_2, \dots, y_n)$$

với $y_1, y_2, \dots, y_n$ là bộ số thu được từ bộ số $x_1, x_2, \dots, x_n$ theo phép biến đổi Δ , thì ta có $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq f(x, x, \dots, x)$ với $x = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$.

Khi sử dụng Định lý SMV để dồn biến thì ta chỉ cần chọn ra số nhỏ nhất và số lớn nhất. Ứng dụng hiệu quả nhất của Định lý SMV là chứng minh bất đẳng thức 4 biến.

Phép biến đổi Δ có thể khác hơn, chẳng hạn thay thành

$$\sqrt{xy}, \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}, \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}},$$

hoặc bất kỳ một dạng trung bình nào khác. Tùy theo giả thiết của bài toán mà ta cần chọn cách dồn biến cho phù hợp.

Ví dụ 2.2 (IMO Shortlist 1997, Việt Nam). Giả sử a, b, c, d là các số thực không âm có tổng bằng 1. Hãy chứng minh bất đẳng thức

$$abc + bcd + cda + dab \leq \frac{1}{27} + \frac{176}{27}abcd.$$

Chứng minh. Không mất tính tổng quát của bài toán ta giả sử $a \leq b \leq c \leq d$. Xét

$$f(a, b, c, d) = abc + bcd + cda + dab - \frac{176}{27}abcd,$$

$$f(a, b, c, d) = ac(b + d) + bd \left(a + c - \frac{176}{27}ac \right).$$

Từ giả thiết suy ra

$$a + c \leq \frac{1}{2}(a + b + c + d) = \frac{1}{2}.$$

Do đó

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{c} \geq \frac{4}{a+c} \geq 8 \geq \frac{176}{27} \Rightarrow f(a, b, c, d) \leq f\left(a, \frac{b+d}{2}, c, \frac{b+d}{2}\right).$$

Ta chỉ xét phép biến đổi Δ với (b, c, d) và theo kết quả đã chứng minh

$$f(a, b, c, d) \leq f(a, t, t, t), t = \frac{b+c+d}{3}.$$

Cuối cùng ta chỉ cần chứng minh nếu $a + 3t = 1$ thì

$$3at^2 + t^3 \leq \frac{1}{27} + \frac{176}{27}at^3.$$

Ta có thể chứng minh điều này, khi thay $a = 1 - 3t$ ta có bất đẳng thức hiển nhiên sau

$$(1 - 3t)(4t - 1)^2(11t + 1) \geq 0.$$

Bất đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = d = \frac{1}{4}$ hoặc $a = b = c = \frac{1}{3}, d = 0$ hoặc các hoán vị tương ứng.

Bài toán được chứng minh [4].

Kế tiếp chúng tôi trích dẫn thêm một kết quả có tên "dồn biến không xác định". Dồn biến không xác định đòi hỏi giả thiết đặt lên 2 biến bất kỳ, tuy nhiên nó cho phép ta dung hòa cả 2 trường hợp cực trị đạt được tại tâm (các giá trị bằng nhau) và tại biên (có 1 giá trị bằng 0) dưới một dạng tổng quát.

Định lý 2.10 (Dồn biến không xác định UBV (Theo [4])). Cho f là một hàm liên tục đối xứng xác định trên tập $U(\subset \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(\dots, x, \dots, y, \dots) \geq \min \left(f(\dots, \frac{x+y}{2}, \dots, \frac{x+y}{2}, \dots), f(\dots, 0, \dots, x+y, \dots) \right).$$

Khi đó với mọi bộ $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in U$ thì

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq \min\{C_t\}_{t=0}^{n-1}.$$

Trong đó C_t là giá trị của hàm f khi có t số bằng 0 và các số còn lại bằng nhau. Nói cách khác, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sẽ đạt được khi và chỉ khi trong các số $x_1, x_2, \dots, x_n$ có t số bằng 0, các số còn lại bằng nhau. Ở đây t là một giá trị nguyên nào đó trong $\{0, 1, \dots, n-1\}$.

Phạm vi ứng dụng hiệu quả của Định lý UMV là chứng minh bất đẳng thức n biến.

Ví dụ 2.3 (IMO Shortlist). Cho a, b, c, d là các số thực không âm có tổng bằng 1. Chứng minh rằng

$$abc + bcd + cda + dab \leq \frac{1}{27} + \frac{176}{27}abcd.$$

Chứng minh. Xét

$$\begin{aligned} f(a, b, c, d) &= abc + bcd + cda + dab - \frac{176}{27}abcd \\ &= ab(c + d) + cd(a + b) - \frac{176}{27}abcd. \end{aligned}$$

Dễ thấy

$$\begin{aligned} f(a, b, c, d) &\leq f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c, d\right) \\ \Leftrightarrow (c+d)\left(ab - \frac{(a+b)^2}{4}\right) + \frac{176}{27}cd\left(\frac{(a+b)^2}{4} - ab\right) &\leq 0 \Leftrightarrow \frac{176}{27}cd \leq c+d. \\ f(a, b, c, d) &\leq f(0, a+b, c, d) \\ \Leftrightarrow ab(c+d - \frac{176}{27}abcd) &\leq 0 \Leftrightarrow c+d \leq \frac{176}{27}cd. \end{aligned}$$

Từ các chứng minh trên suy ra

$$f(a, b, c, d) \leq \max\left(f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c, d\right), f(0, a+b, c, d)\right).$$

Theo định lý UMV, suy ra $\max f(a, b, c, d)$ đạt được khi trong các số a, b, c, d có một số bằng 0 hoặc $a = b = c = d = 1$. Từ đó ta có điều phải chứng minh [4].

Chương 3

Một số áp dụng

Trong chương này chúng tôi trích dẫn những bài toán bất đẳng thức áp dụng phương pháp dồn biến.

Các vấn đề trình bày trong chương này được chúng tôi tham khảo và trích dẫn chủ yếu từ một số tài liệu [3], [8], [4].

3.1 Một số kỹ thuật thường dùng trong giải bài toán bất đẳng thức

Trước khi đi vào những bài toán áp dụng, chúng tôi trích dẫn một số kỹ thuật hay dùng trong giải bài toán bất đẳng thức sử dụng phương pháp dồn biến, nhằm mục đích giúp cho lời giải bài toán ngắn gọn hơn, và có thể đơn giản hơn.

3.1.1 Kỹ thuật chuẩn hóa

Đối với một số bài toán bất đẳng thức ở dạng thuần nhất đồng bậc, một phương pháp hiệu quả để giải là ta có thể chuẩn hóa theo nhiều cách khác nhau tùy thuộc vào đặc điểm của từng bài toán. Việc chuẩn hóa thích hợp sẽ tăng thêm giả thiết của bài toán, từ đó ta có các bước biến đổi hoặc đánh giá để có lời giải gọn gàng và đẹp dễ.

Các bài toán bất đẳng thức thường gặp đa phần có ba biến. Do đó để dễ tiếp cận với kỹ thuật chuẩn hóa, chúng ta sẽ xem xét kỹ thuật này trong bài toán bất đẳng thức có ba biến.

Hàm thuần nhất Hàm f gọi là thuần nhất cấp k trên miền xác định D nếu $f(ta, tb, tc) = t^k f(a, b, c), \forall (a, b, c) \in D^3$.

Kỹ thuật chuẩn hóa bất đẳng thức Giả sử ta cần chứng minh bất đẳng thức $f(a, b, c) \geq 0$. Khi đó ta có: $f(ta, tb, tc) = t^k f(a, b, c) \geq 0$ với $t > 0$.

Như vậy, ta có thể giả sử rằng a, b, c thỏa mãn một điều kiện nào đó (được cho phép trong miền D) và chứng minh bất đẳng thức trong trường hợp này. Giả sử ta chứng minh được bất đẳng thức với bộ ba số $(x, y, z) \in D^3$, khi đó với mọi $(a, b, c) \in D^3$, đặt $a = tx, b = ty, c = tz, t > 0$ (luôn tồn tại t như thế). Khi đó $f(a, b, c) = t^k f(x, y, z) \geq 0$ và có điều phải chứng minh.

Còn một dạng bất đẳng thức thuần nhất khác, đó là $g(a, b, c) \geq 0$, trong đó $g(ta, tb, tc) = g(a, b, c), \forall t \in D$.

3.1.2 Kỹ thuật sắp thứ tự bộ số

Trong quá trình giải bài toán bất đẳng thức, việc giả sử $a = \min\{a, b, c\}$ là một kỹ thuật rất hay được áp dụng để dồn biến. Nếu bất đẳng thức ba biến đối xứng thì ta có thể giả sử $a \leq b \leq c$ (hoặc $a \geq b \geq c$), còn trong trường hợp bất đẳng thức ba biến hoán vị thì ta có thể giả sử $a = \min\{a, b, c\}$ (hoặc $a = \max\{a, b, c\}$).

3.2 Kỹ thuật dồn biến

Chúng ta sắp xếp các cặp giá trị để được các cặp giá trị đều nhau, cứ làm như vậy chúng ta sẽ dần đưa tất cả các giá trị đều nhau (đưa tất cả các biến bằng nhau), hoặc đưa một số cặp giá trị đều nhau (đưa một số cặp giá trị bằng nhau).

Để đơn giản và dễ tiếp cận hơn, chúng tôi sẽ trình bày nhưng mô tả của chúng tôi về dạng bài toán bất đẳng thức 3 biến. Bài toán bất đẳng thức 3 biến có dạng $f(x, y, z) \geq 0$, với x, y, z là các biến số thực thỏa mãn những tính chất nhất định.

3.2.1 Dồn các biến bằng nhau

Mục tiêu của chúng ta là đưa bài toán bất đẳng thức về trường hợp dấu bằng xảy ra khi tất cả các biến đều bằng nhau (ta gọi là cực trị đạt tại tâm), hoặc trường hợp dấu bằng xảy ra khi một số các biến bằng nhau (ta gọi là cực trị đạt được có tính đối xứng).

Chúng tôi đưa bài toán về dạng $f(x, y, z) \geq f(t, t, z)$, với t là giá trị phù hợp tùy theo mối liên hệ giữa x, y, z (ta gọi là dồn hai biến bằng nhau). Sau đó ta có bài toán dạng $f(t, t, z) \geq 0$. Tiếp tục làm theo phương pháp trên thì sẽ được bài toán dạng $f(u, u, u) \geq 0$, đây là dạng bất đẳng thức một biến, dễ dàng kiểm tra để hoàn tất chứng minh.

Chúng ta sẽ đến với bài toán áp dụng đầu tiên là một bất đẳng thức rất quen thuộc trong chương trình toán trung học, bất đẳng thức Nesbitt.

Bài toán 3.1 (Bất đẳng thức Nesbitt). Chứng minh rằng với mọi a, b, c dương ta có

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Chứng minh. Đặt $f(a, b, c) = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}$ và $t = \frac{a+b}{2}$. Khi đó dễ thấy

$$f(a, b, c) = \frac{a^2 + b^2 + c(a+b)}{ab + c^2 + c(a+b)} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{2t^2 + 2tc}{t^2 + c^2 + 2ct} + \frac{c}{2t} = f(t, t, c).$$

Do đó

$$f(a, b, c) \geq g(t', t', t') = \frac{3}{2} \text{ với } t' = \frac{a+b+c}{3}.$$

Bài toán được chứng minh [4].

Bài toán 3.2 (AM-GM với 3 biến). Cho x, y, z không âm, chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x+y+z}{3}. \quad (3.1)$$

Chứng minh. Do bất đẳng thức (3.1) đồng bậc nên bằng cách chuẩn hóa ta có thể giả sử

$$x + y + z = 1. \quad (3.2)$$

Viết lại bài toán dưới dạng $f(x, y, z) \geq 0$ với $f(x, y, z) = 1 - 27xyz$. Ta thấy rằng khi thay x và y bởi $t = \frac{x+y}{2}$ thì điều kiện (3.2) vẫn bảo toàn (tức là vẫn có $t + t + z = 1$), nên ta chỉ phải xem xét sự thay đổi của xyz .

Theo bất đẳng thức AM-GM thì $t^2 \geq xy$, nên $t^2z \geq xyz$. Vậy $f(x, y, z) \geq f(t, t, z)$.

Cuối cùng để ý là $z = 1 - 2t$ nên ta có

$$f(t, t, z) = 1 - 27t^2z = 1 - 27t^2(1 - 2t) = (1 + 6t)(1 - 3t)^2 \geq 0.$$

Bài toán đã được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $x = y$ và $3t = 1$, nghĩa là $x = y = \frac{1}{3}$, tương đương với $x = y = z$.

Bài toán được chứng minh.

Bài toán 3.3 (Bất đẳng thức Schur). Cho $a, b, c \geq 0$, chứng minh rằng

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq a^2(b + c) + b^2(a + c) + c^2(a + b).$$

Chứng minh. Xét $f(a, b, c) = a^3 + b^3 + c^3 + 3abc - a^2(b + c) - b^2(a + c) - c^2(a + b)$. Đặt $t = \frac{b+c}{2}$, ta hy vọng có $f(a, b, c) \geq f(a, t, t)$. Xét

$$d = f(a, b, c) - f(a, t, t) = \left[b + c - \frac{5}{4}a \right] (b - c)^2.$$

Ta thấy với a, b, c là các số không âm tùy ý thì không chắc có $d \geq 0$. Tuy nhiên, nếu giả sử $a = \min\{a, b, c\}$ thì ta vẫn có $d \geq 0$. Khi đó ta chỉ còn phải chứng minh $f(a, t, t) \geq 0$. Nhưng bất đẳng thức này tương đương với $a(a - t)^2 \geq 0$ nên hiển nhiên đúng. Vậy bài toán đã được chứng minh.

Bài toán 3.4 (Gabriel Dospinescu). Chứng minh rằng nếu $a, b, c > 0$ sao cho $a^2 + b^2 + c^2 = 3$, thì

$$a^3(b + c) + b^3(c + a) + c^3(a + b) \leq 6.$$

Chứng minh. Đặt $f(a, b, c) = a^3(b + c) + b^3(c + a) + c^3(a + b)$, và đặt $t = \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{2}}$. Ta có

$$f(a, b, c) - f(a, t, t) = -a^3(2t - b - c) + a(b^3 + c^3 - 2t^3) + t^2(2bc - 2t^2).$$

Giả sử $a = \min\{a, b, c\}$. Thì

$$b^3 + c^3 - 2t^3 = (b + c)(b^2 - bc + c^2) - 2t^3 \leq 2t(b^2 - bc + c^2) - 2t^3 = t(b - c)^2.$$

Như vậy, ta có bất đẳng thức

$$-a^3(2t - b - c) + at(b - c)^2 - t^2(b - c)^2 \leq 0,$$

với mỗi $2t - b - c \geq 0$ và $a \leq t$. Do đó, ta cần chứng minh rằng $a^2 + 2t^2 = 3$, thì $f(a, t, t) \leq 6$. Ta có thể viết

$$a^3t + at^3 + t^4 \leq 3 \Leftrightarrow at(3 - t^2) \leq 3 - t^4$$

$$(3 - 2t^2)t^2(3 - t^2)^2 \leq (3 - t^4)^2$$

điều này tương đương với

$$3(t^2 - 1)^2(t^4 - 3t^2 + 3) \geq 0.$$

Bài toán được chứng minh [3].

Bài toán 3.5 (Kwant). Cho $x, y, z > 0$. Chứng minh rằng

$$2(a^2 + b^2 + c^2) + 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \geq (a + b + c)^2.$$

Chứng minh. Đặt $f(a, b, c) = 2(a^2 + b^2 + c^2) + 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} - (a + b + c)^2$. Từ f ta nhận thấy có thể dồn hai biến theo trung bình nhân ($\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$ không đổi). Ta có

$$\begin{aligned} f(a, b, c) - f(a, \sqrt{bc}, \sqrt{bc}) &= 2(b^2 + c^2 - 2bc) + (a + 2\sqrt{bc})^2 - (a + b + c)^2 \\ &= (\sqrt{b}\sqrt{c})^2[(\sqrt{b} + \sqrt{c})^2 - 2a]. \end{aligned}$$

Như vậy, nếu $a = \min\{a, b, c\}$ (ta có thể hy vọng giả thiết đó) thì ta có

$$f(a, b, c) \geq f(a, \sqrt{bc}, \sqrt{bc}).$$

Do đó, việc chứng minh bất đẳng thức ban đầu, đủ để thấy rằng $f(a, b, b) \geq 0$ với mọi a, b . Nhưng bất đẳng thức này tương đương với

$$2(a^2 + 2b^2) + 3\sqrt[3]{a^2b^4} \geq (a + 2b)^2,$$

hay

$$a^2 + 3\sqrt[3]{a^2b^4} \geq 4ab.$$

Điều này đúng bởi bất đẳng thức AM-GM với $a^2, \sqrt[3]{a^2b^4}, \sqrt[3]{a^2b^4}, \sqrt[3]{a^2b^4}$.

Bài toán được chứng minh [3].

Bài toán 3.6 (Gabriel Dospinescu, Mircea Lascu, Marian Tetiva). Chứng minh rằng với những số thực dương bất kỳ a, b, c , ta có

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 3 \geq (1+a)(1+b)(1+c).$$

Chứng minh. Đặt $f(a, b, c) = a^2 + b^2 + c^2 + abc + 2 - a - b - c - ab - bc - ca$. Ta cần chứng minh rằng tất cả các giá trị của f đều không âm. Nếu $a, b, c > 3$ thì ta hiển nhiên có $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < 1$, có nghĩa là

$$f(a, b, c) > a^2 + b^2 + c^2 + 2 - a - b - c > 0.$$

Do đó, chúng ta có thể giả sử rằng $a \leq 3$ và đặt $m = \frac{b+c}{2}$. Dễ dàng tính được

$$f(a, b, c) - f(a, m, m) = \frac{(3-a)(b-c)^2}{4} \geq 0,$$

và do đó có thể chứng minh được rằng $f(a, m, m) \geq 0$, tức là

$$(a+1)m^2 - 2(a+1)m + a^2 - a + 2 \geq 0. \quad (3.3)$$

Rõ ràng bất đẳng thức (3.3) đúng, bởi vì biệt thức Δ của phương trình bậc hai từ (3.3) là $\Delta = -4(a+1)(a-1)^2 \leq 0$. Bài toán được chứng minh [8].

Bây giờ, chúng tôi trích dẫn một bài toán bất đẳng thức 4 biến sử dụng phương pháp dồn biến mạnh SMV để chứng minh như sau.

Bài toán 3.7 (Bất đẳng thức Tukervici). Chứng minh rằng với mọi số thực dương a, b, c, d ta có

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 2abcd \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2d^2 + d^2a^2 + a^2c^2 + b^2d^2.$$

Chứng minh. Giả sử $a \geq b \geq c \geq d$. Xét

$$f(a, b, c, d) = a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 2abcd - a^2b^2 - b^2c^2 - c^2d^2 - d^2a^2 - a^2c^2 - b^2d^2$$

$$= a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 2abcd - a^2c^2 - b^2d^2 - (a^2 + c^2)(b^2 + d^2).$$

Suy ra

$$f(a, b, c, d) - f(\sqrt{ac}, b, \sqrt{ac}, d) = (a^2 - c^2) - (b^2 + d^2)(a - c)^2 \geq 0.$$

Do đó theo định lý SMV, xét với phép biến đổi Δ của (a, b, c) , ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức khi $a = b = c = t \geq d$. Bất đẳng thức lúc này tương đương với

$$3t^4 + d^4 + 2t^3d \geq 3t^4 + 3t^2d^2 \Leftrightarrow d^4 + t^3d + t^3d \geq 3t^2d^2.$$

Hiển nhiên đúng theo bất đẳng thức AM-GM. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = d$ hoặc $a = b = c, d = 0$ hoặc các hoán vị.

Bài toán được chứng minh [4].

Tiếp theo, chúng tôi trình bày thêm một trường hợp áp dụng phương pháp dồn biến sau đây.

3.2.2 Dồn biến ra biên

Thông thường các bài toán bất đẳng thức thường sử dụng phương pháp dồn biến đều (dồn các biến bằng nhau) thì chiều ngược lại ta phải sử dụng dồn biến ra biên.

Giả sử, xét bất đẳng thức $f(x, y, z) \geq 0$ với $x, y, z \geq 0$, ta có thể hy vọng vào đánh giá $f(x, y, z) \geq f(0, s, t)$, trong đó s, t là các đại lượng phù hợp từ các biến x, y, z . Ta cố gắng chọn s, t sao cho hiệu $d = f(x, y, z) - f(0, s, t)$ đơn giản và dễ dàng đánh giá. Cuối cùng ta chỉ việc kiểm tra $f(0, s, t) \geq 0$.

Trong Bài toán 3.3, ta đã thấy cách chứng minh bất đẳng thức này bằng cách dồn 2 biến bằng nhau. Tuy nhiên, ngoài điểm $a = b = c$, đẳng thức còn xảy ra khi $a = b, c = 0$ (và các hoán vị). Do đó, ta có thể chứng minh bất đẳng thức này như sau.

Bài toán 3.8 (Bất đẳng thức Schur). Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq a^2(b + c) + b^2(c + a) + c^2(a + b).$$

Chứng minh. Đặt $f(a, b, c) = a^3 + b^3 + c^3 + 3abc - a^2(b+c) - b^2(c+a) - c^2(a+b)$. Ta hy vọng sẽ có $f(a, b, c) \geq f(0, s, t)$ với $s = \frac{a+b}{2}, t = \frac{a+c}{2}$. Ta xét hiệu

$$d_a = f(a, b, c) - f\left(0, \frac{a+b}{2}, \frac{a+c}{2}\right) = a(a+b-2c)(a+c-2b).$$

Tương tự ta cũng có các hiệu

$$d_b = f(a, b, c) - f\left(0, \frac{b+a}{2}, \frac{b+c}{2}\right) = b(a+b-2c)(b+c-2a),$$

$$d_c = f(a, b, c) - f\left(0, \frac{c+a}{2}, \frac{c+b}{2}\right) = c(a+c-2b)(b+c-2a).$$

Do tính đối xứng nên ta giả sử $d_a = \max\{d_a, d_b, d_c\}$. Khi đó nếu $d_a < 0$ thì

$$0 > d_a d_b d_c = abc(a+b-2c)^2(b+c-2a)^2(c+a-2b)^2.$$

Điều này là mâu thuẫn với giả thiết $a, b, c \geq 0$.

Vậy $d_a \geq 0$ nên $f(a, b, c) \geq f(0, s, t)$ với $s = \frac{a+b}{2}, t = \frac{a+c}{2}$. Cuối cùng ta thấy

$$f(0, s, t) = t^3 + s^3 - t^2s - ts^2 = (t+s)(t-s)^2 \geq 0.$$

Chứng minh được hoàn tất.

Sau đây, là một bài toán mà không thể áp dụng dồn biến để đưa tất cả các biến bằng nhau, mà chỉ có thể áp dụng dồn biến ra biên.

Bài toán 3.9 (Hojoo Lee). Cho $a, b, c \geq 0$,

$$ab + bc + ca = 1. \quad (3.4)$$

Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{5}{2}. \quad (3.5)$$

Chứng minh. Dễ thấy đẳng thức không thể xảy ra khi $a = b = c$. Ta có thể nhầm được đẳng thức xảy ra khi $a = b = 1, c = 0$ và các hoán vị. Khi đó ta chứng minh bất đẳng thức theo hướng đưa một giá trị bằng 0.

Xét $c = 0$, khi đó ta cần chứng minh

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a+b} \geq \frac{5}{2}, \text{ với } a, b = 1. \quad (3.6)$$

Đặt $s = a + b$ thì bất đẳng thức (3.6) tương đương với

$$s + \frac{1}{s} \geq \frac{5}{2},$$

hay

$$(2s - 1)(s - 2) \geq 0.$$

Bất đẳng thức này là hiển nhiên vì $s = a + b \geq 2\sqrt{ab} = 2$. Vậy công việc của ta bây giờ là dồn một biến về 0.

Đặt $f(a, b, c) = \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}$. Ta hy vọng

$$f(a, b, c) \geq f\left(a+b, \frac{1}{a+b}, 0\right)$$

(đảm bảo điều kiện (3.4)). Ta xét hiệu

$$\begin{aligned} d &= f(a, b, c) - f\left(a+b, \frac{1}{a+b}, 0\right) \\ &= \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+\frac{1-ab}{a+b}} + \frac{1}{b+\frac{1-ab}{a+b}}\right) - \left(\frac{1}{a+b} + a+b + \frac{1}{a+b+\frac{1}{a+b}}\right) \\ &= \frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} - 1 - \frac{1}{1+(a+b)^2}. \end{aligned}$$

Quy đồng lên ta thấy $d \geq 0$ nếu $2(1-ab) \geq ab(a+b)^2$.

Giả sử $c = \max\{a, b, c\}$ thì $2(1-ab) = 2c(a+b) \geq ab(a+b)^2$. Vậy lúc này $d \geq 0$. Bài toán được chứng minh.

Nhận xét 3.1. Quan sát phương pháp dồn biến đã trình bày ở Mục 3.2.1, Mục 3.2.2, ta thấy rằng, để chứng tỏ $f(x, y, z) \geq f(t, t, z)$, ta chỉ việc xét hiệu $d = f(x, y, z) - f(t, t, z)$, rồi tìm cách đánh giá sao cho $d \geq 0$. Phương pháp này tỏ ra rất hiệu quả trong việc chứng minh các bài toán bất đẳng thức cổ điển, vì nó thiên về biến đổi đại số. Tuy nhiên, có rất nhiều bài toán bất đẳng thức nếu sử dụng phương pháp này lại cho ra những biểu thức khá phức tạp và việc chứng minh một bài toán bất đẳng thức trở nên khá công kềnh, chẳng hạn như hàm $f(x, y, z) = x^k + y^k + z^k$.

3.2.3 Đồn biến trong lớp hàm lồi, lõm

Hàm lồi có thể ứng dụng trong rất nhiều bất đẳng thức cổ điển. Ta đã trình bày về đồn biến trong lớp hàm lồi, lõm tại chương 2. Tuy nhiên, để đơn giản và dễ tiếp cận hơn, chúng ta sẽ trình bày lại cách áp dụng đồn biến trong lớp hàm lồi, lõm với bất đẳng thức 3 biến.

Cho hai bộ số x_1, x_2, x_3 và y_1, y_2, y_3 thỏa mãn

$$x_1 \geq x_2 \geq x_3 \text{ và } y_1 \geq y_2 \geq y_3$$

và

$$\begin{cases} x_1 \geq y_1 \\ x_1 + x_2 \geq y_1 + y_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = y_1 + y_2 + y_3. \end{cases}$$

Khi đó, với hàm số $f(x)$ thỏa mãn

$$f''(x) \geq 0, x \in (a, b)$$

và

$$f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) \geq f(y_1) + f(y_2) + f(y_3).$$

Ta luôn có

$$f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) \geq 2f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + f(x_3). \quad (3.7)$$

Nhìn vào (3.7), ta có thể thấy mục tiêu của chúng ta là đưa

$$f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)$$

về một hàm một biến giả sử như

$$3f\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{n}\right).$$

Sau đây, chúng tôi trình bày một số bài toán áp dụng của phương pháp đồn biến trong lớp hàm lồi, lõm.

Ví dụ 3.1 (Bất đẳng thức AM-GM). Cho $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các số thực không âm, $n \geq 1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}. \quad (3.8)$$

Chứng minh. Lấy logarit hai vế, ta chuyển bất đẳng thức (3.8) về dạng

$$\ln \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \right) \geq \frac{\ln(x_1) + \ln(x_2) + \cdots + \ln(x_n)}{n}.$$

Hàm số $f(x) = \ln(x)$ đi từ $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ khả vi hai lần và $f''(x) = -x^{-2} < 0, \forall x > 0$. Do đó, hàm $g(x) = -f(x)$ sẽ thỏa mãn $g''(x) > 0, \forall x > 0$. Vậy g là hàm lồi. Từ đó, áp dụng bất đẳng thức Jensen ta có điều phải chứng minh.

Trên thực tế, việc sử dụng hàm lồi để dồn biến không có nhiều bài toán áp dụng để cho ngay kết quả, tuy nhiên nó có thể giúp giải quyết 1 trường hợp nào đó của bài toán, các trường hợp còn lại ta có thể chứng minh bằng cách khác. Ví dụ sau sẽ cho thấy điều này.

Bài toán 3.10. Cho các số thực x, y, z có tổng bằng 1. Chứng minh rằng

$$\frac{x}{1+x^2} + \frac{y}{1+y^2} + \frac{z}{1+z^2} \leq \frac{9}{10}. \quad (3.9)$$

Chứng minh. Xét $f(t) = \frac{t}{1+t^2}$ thì bất đẳng thức (3.9) tương đương

$$f(x) + f(y) + f(z) \leq 3f\left(\frac{x+y+z}{3}\right).$$

Do đó, nếu $-f$ là hàm lồi thì coi như bài toán được giải quyết.

Ta có

$$-f''(t) = \frac{2t(3-t^2)}{(1+t^2)^3},$$

nên $-f''(t) \geq 0, \forall t \in [0, \sqrt{3}]$. Vậy nếu $x, y, z \in [0, \sqrt{3}]$ thì bài toán được giải quyết.

Trong trường hợp còn lại thì chắc chắn ta sẽ có dấu bất đẳng thức thực sự. Do vậy cứ việc chia thành nhiều trường hợp con để xét.

Có thể giả sử $x \geq y \geq z$ lưu ý $x + y + z = 1$ và $x, y, z \notin [0, 1]$ nên z phải âm. Suy ra $f(z) < 0$.

- Nếu $y < 0$ suy ra $x > 0$ và $f(y) < 0$, ta có

$$f(x) + f(y) + f(z) < f(x) < \frac{1}{2} < \frac{9}{10}.$$

- Nếu $y > 0$ suy ra $x > 0$ và lưu ý $f(y), f(x)$ nghịch biến trên $[\sqrt{3}, +\infty]$ do đó

$$f(x) + f(y) + f(z) < f(x) + f(y) < f(\sqrt{3}) + f(\sqrt{3}) < \frac{9}{10}.$$

Bài toán được chứng minh.

3.2.4 Dồn biến trong lớp hàm đơn điệu

Giả sử, để chứng minh $f(x, y, z) \geq f(t, t, z)$ với $t = \frac{x+y}{2}$, ta xét hàm số $g(s) = f(t+s, t-s, z)$ với $s \geq 0$. Sau đó chứng minh g tăng với $s \geq 0$ (ta thường dùng đạo hàm). Suy ra $g(s) \geq g(0)$, $\forall s \geq 0$, sau đó ta sẽ được điều cần chứng minh.

Sau đây, chúng tôi trình bày một bài toán áp dụng minh họa cho dồn biến trong lớp hàm đơn điệu.

Bài toán 3.11 (VMO 2002). Chứng minh rằng với những số thực tùy ý x, y, z sao cho

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9,$$

thì bất đẳng thức

$$2(x+y+z) \leq xyz + 10$$

đúng.

Chứng minh. Cho $f(x, y, z) = 2(x+y+z) - xyz$. Ta thấy rằng $f(x, y, z) \leq 10$ khi $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

Bỏ điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ như cũ, ta sẽ dồn 2 biến về dạng trung bình bậc hai.

Xem xét

$$f\left(x, \sqrt{\frac{y^2 + z^2}{2}}, \sqrt{\frac{y^2 + z^2}{2}}\right) - f(x, y, z) =$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \left(x + 2\sqrt{\frac{y^2 + z^2}{2}} \right) - x\frac{y^2 + z^2}{2} - 2(x + y + z) + xyz = \\
&= 2(-y - z) - 2x\frac{y - z}{2} = 2(y - z) \left[\frac{2}{y + z} - \frac{x}{2} \right].
\end{aligned}$$

Nếu $x, y, z > 0$, ta xét 2 trường hợp

Trường hợp thứ nhất: $0 \leq x \leq y \leq z$, thì

$$2(x + y + z) - xyz \leq 2\sqrt{3(x^2 + y^2 + z^2)} - 1 = 6\sqrt{3} - 1 \leq 10.$$

Trường hợp thứ 2: $0 < x \leq 1$, thì

$$\begin{aligned}
&2(x + y + z) - xyz < 2(x + y + z) \leq \\
&\leq 2x + 2\sqrt{2(y^2 + z^2)} = 2x + 2\sqrt{2(9 - x^2)} = g(x).
\end{aligned}$$

Chúng ta có $g'(x) = 2 - 2x = 0$, suy ra $g(x) \leq g(1) = 10$.

Nếu ở giữa những số x, y, z có một số âm, không mất tính tổng quát, ta giả sử rằng $x < 0$ thì

$$f \left(x, \sqrt{\frac{y^2 + z^2}{2}}, \sqrt{\frac{y^2 + z^2}{2}} \right) - f(x, y, z) \geq 0.$$

Khi đó, ta chỉ cần chứng minh rằng

$$f \left(x, \sqrt{\frac{y^2 + z^2}{2}}, \sqrt{\frac{y^2 + z^2}{2}} \right) \leq 10,$$

hay

$$2x + 2\sqrt{2(9 - x^2)} - \frac{x(9 - x^2)}{2} \leq 10,$$

hay

$$h(x) = x^3 - 5x + 4\sqrt{2(9 - x^2)} \leq 20.$$

Ta có $h'(x) = 3x^2 - 5 - 4x\sqrt{\frac{2}{9 - x^2}}$. Giải phương trình $h'(x) = 0$ (khi $x < 0$), ta tìm được $x = -1$. Đó là điểm cực trị của h , vì thế $h(x) \leq h(-1) = 20$.

Bài toán được chứng minh [3].

Kết luận

Phương pháp giảm biến và dồn biến là một trong các hướng đang phát triển mạnh mẽ trong phương pháp chứng minh bất đẳng thức nói riêng, và của ngành phương pháp toán sơ cấp nói chung. Sự phát triển vượt bậc này chính là nhờ sự phát hiện về định hướng làm giảm số biến để đơn giản hóa việc chứng minh bài toán bất đẳng thức.

Luận văn trình bày được một số vấn đề như sau:

1. Trình bày các kiến thức cơ sở về một số bất đẳng thức cơ bản liên quan đến giá trị trung bình.
2. Trình bày các kiến thức về tam thức bậc hai, từ đó trình bày phương pháp giảm biến trong bất đẳng thức đại số.
3. Trình bày kiến thức cơ sở về độ gần đều, hàm lồi, từ đó trình bày phương pháp dồn biến tổng quát.
4. Ttrích dẫn một số kết quả về dồn biến của một số tác giả.
5. Trình bày một số áp dụng của phương pháp dồn biến.

Tài liệu tham khảo

- [1] Nguyễn Văn Mậu, 2006, *Bất đẳng thức, Định lý và áp dụng*, NXB GD.
- [2] Nguyễn Văn Mậu, 2007, *Các bài toán nội suy và áp dụng*, NXB GD.
- [3] Nguyễn Văn Mậu (Chủ biên), 2009, *Bất đẳng thức và một số vấn đề liên quan*, NXBGD.
- [4] Phạm Kim Hùng, 2007, *Sáng tạo bất đẳng thức*, NXB Tri thức.
- [5] J.Michael Steele, 2004, *Cauchy Schwarz master class*, Cambridge.
- [6] V.Cirtoaje, 2002, *On Popoviciu's Inequality for Convex Function*, Gazeta Matematica A, 4(2002), 247-253.
- [7] M.S.Klamkin, 2000-2003, *On a "Problem of the Month", Cruz Mathematicorum with Mathematical Mayhem*.
- [8] Mitrinovic D.S., Pecaric J.E., Fink A.M., 1993, *Classical and New Inequalities in Analysis*, Cluwer Academic Publishers.
- [9] A.Lupas, 1982, *On an Inequality for Convex Function*, Gazeta Matematica A, (1982), 1-2.
- [10] T. Popoviciu, 1965, *Sur certaines inegalites qui caracterisent les fonctions convex*, Analele Stiintifice ale Univ, Iasi, Sectia Mat. 11B (1965), 155-164.
- [11] V.Cirtoaje, 1996, *Amer. Math. Monthly* 103 (1996) 427-428.