

LỜI GIẢI ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN QUỐC GIA TRUNG QUỐC NĂM 2012

Đề TST 1.

Ngày 1.

Bài 1.

Cho các số phức x_i, y_i với $i = \overline{1, n}$ thỏa mãn $|x_i| = |y_i| = 1$ với mọi $i = \overline{1, n}$. Đặt

$$x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i, z_i = xy_i + yx_i - x_i y_i, i = \overline{1, n}$$

Chứng minh rằng $\sum_{i=1}^n |z_i| \leq n$.

Lời giải.

Ta có $|z_i| = |(x - x_i)(y - y_i) + xy| \leq |x - x_i||y - y_i| + |x||y|$ với mọi $i = \overline{1, n}$.

Do đó, từ bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta được:

$$\sum_{i=1}^n |z_i| \leq \sum_{i=1}^n (|x - x_i||y - y_i| + |x||y|) = \sum_{i=1}^n |x - x_i||y - y_i| + n|x||y| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n |x - x_i|^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n |y - y_i|^2} + n|x||y|$$

Hơn nữa với hai số phức $u = a + bi, v = c + di$ trong đó $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, ta có:

$$\begin{aligned} |u - v|^2 &= (a - c)^2 + (b - d)^2 = a^2 + c^2 + b^2 + d^2 - 2(ac + bd) \\ |u|^2 + |v|^2 &= a^2 + c^2 + b^2 + d^2 \end{aligned}$$

Suy ra $|u - v|^2 - (|u|^2 + |v|^2) = -2(ac + bd) = -2\operatorname{Re}(u\bar{v})$ (trong đó kí hiệu $\operatorname{Re}(x)$ là phần thực của số phức x , tương tự $\operatorname{Im}(x)$ là phần ảo của số phức x).

Do đó, $|u - v|^2 = |u|^2 + |v|^2 - 2\operatorname{Re}(u\bar{v})$. Áp dụng vào bài toán:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n |x - x_i|^2 &= \sum_{i=1}^n (|x|^2 + |x_i|^2 - 2\operatorname{Re}(xx_i)) = n|x|^2 + n - 2\sum_{i=1}^n \operatorname{Re}(xx_i) \\
&= n|x|^2 + n - 2\left(\operatorname{Re}(x) \cdot \sum_{i=1}^n \operatorname{Re}(\overline{x_i}) - \operatorname{Im}(x) \cdot \sum_{i=1}^n \operatorname{Im}(\overline{x_i})\right) \\
&= n|x|^2 + n - 2\left(n\operatorname{Re}(x)^2 + n\operatorname{Im}(x)^2\right) = n|x|^2 + n - 2n|x|^2 = n(1 - |x|^2)
\end{aligned}$$

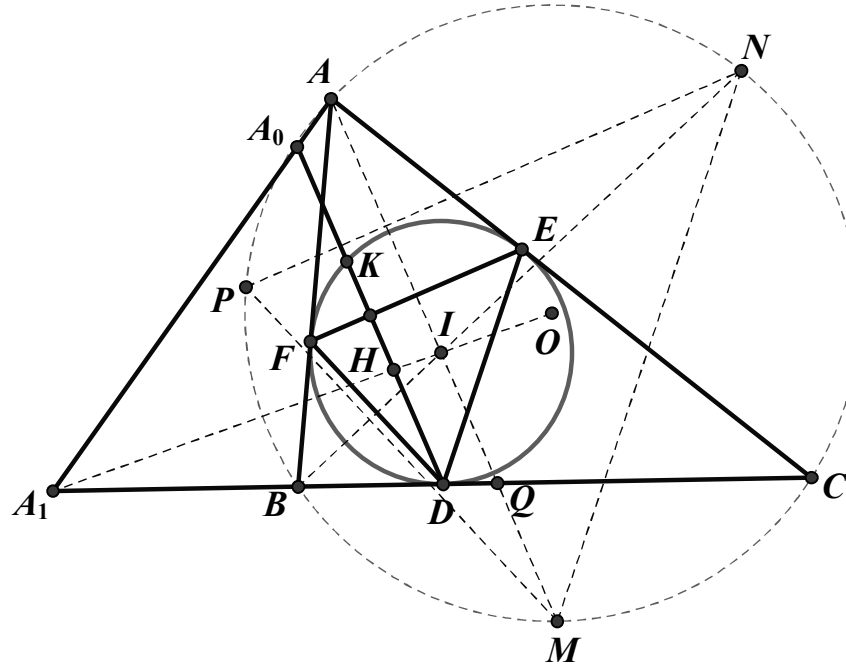
Từ đó suy ra $\sum_{i=1}^n |z_i| \leq n\left(\sqrt{1 - |x|^2}\sqrt{1 - |y|^2} + |x||y|\right) \leq n\sqrt{(1 - |x|^2 + |x|^2)(1 - |y|^2 + |y|^2)} = n$.

Ta có đpcm.

Bài 2.

Cho tam giác ABC nhọn, không cân ngoại tiếp đường tròn (I) . Gọi D, E, F lần lượt là tiếp điểm của đường tròn (I) lên các cạnh BC, CA, AB . Gọi A_0 là điểm đối xứng với D qua EF và A_1 là giao điểm của AA_0 với đường thẳng BC . Các điểm B_1, C_1 được xác định tương tự. Chứng minh rằng A_1, B_1, C_1 cùng nằm trên đường thẳng Euler của tam giác DEF .

Lời giải.



Gọi M, N, P lần lượt là giao điểm của các phân giác góc A, B, C với đường tròn (O) . Gọi R, r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác ABC .

Trước hết, ta sẽ chứng minh OI chính là đường thẳng Euler của tam giác DEF .

Thật vậy, gọi H là trực tâm của tam giác DEF và ta cần có O, I, H thẳng hàng.

Ta thấy rằng $MI = MB, PI = PB$ nên PM chính là trung trực của IB hay NI là đường cao của tam giác MNP . Tương tự, MI cũng là đường cao của tam giác MNP , suy ra I là trực tâm của tam giác MNP . Do hai tam giác MNP và DEF có các cạnh tương ứng cùng vuông góc với IA, IB, IC nên hai tam giác này đồng dạng với nhau.

Hơn nữa, tam giác MNP nội tiếp đường tròn bán kính R , tam giác DEF nội tiếp đường tròn bán kính r nên suy ra

$$\overrightarrow{OM} = \frac{R}{r} \overrightarrow{ID}, \overrightarrow{ON} = \frac{R}{r} \overrightarrow{IE}, \overrightarrow{OP} = \frac{R}{r} \overrightarrow{IF}$$

Cộng từng vế của các đẳng thức vector, ta có $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP} = \frac{R}{r} (\overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IF})$. Hơn nữa, ta cũng có

$$\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IF} = \overrightarrow{IH}$$

nên $\overrightarrow{OI} = \frac{R}{r} \overrightarrow{IH}$ hay O, I, H thẳng hàng.

Gọi K là giao điểm của DH với (I) . Dễ thấy H, K và A_0, D đối xứng với nhau qua đường thẳng EF nên $DK = A_0H$.

Tứ giác $ABMC$ nội tiếp đường tròn (O) nên theo định lý Ptolemy thì

$$AB \cdot MC + AC \cdot MB = AM \cdot BC \Leftrightarrow \frac{MC}{AM} = \frac{BC}{AB + AC} \text{ (do } MB = MC \text{)}$$

Gọi Q là chân đường phân giác góc A với BC thì $\frac{IQ}{IA} = \frac{BQ}{BA} = \frac{BC}{AB + AC}$.

Do hai tam giác MNP và DEF đồng dạng với nhau nên $\frac{DH}{DK} = \frac{MI}{AM} \Leftrightarrow \frac{DH}{A_0H} = \frac{MC}{AM}$.

Từ các đẳng thức trên, ta được $\frac{IQ}{IA} = \frac{DH}{A_0H}$. Theo định lí Thales đảo, dễ dàng có được ba

điểm A_1, I, H thẳng hàng hay A_1 nằm trên đường thẳng Euler của tam giác DEF .

Chứng minh hoàn toàn tương tự với các điểm B_1, C_1 .

Ta có đpcm.

Bài 3.

Với mỗi số nguyên dương n , ta đặt $x_n = C_{2n}^n$.

Chứng minh rằng tồn tại hai tập hợp vô hạn A, B sao cho $A \cap B = \emptyset$ và $\frac{\prod_{i \in A} x_i}{\prod_{i \in B} x_i} = 2012$.

Lời giải.

Ta thấy rằng

$$\frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{C_{2n}^n}{C_{2n-2}^{n-1}} = \frac{(2n)!}{n!n!} \cdot \frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!} = \frac{2n(2n-1)}{n^2} = \frac{2(2n-1)}{n}.$$

Do đó với $a, b \in \mathbb{Z}^+$ thì

$$\frac{x_a}{x_{a-1}} \cdot \frac{x_b}{x_{b-1}} = 4 \left(\frac{2a-1}{a} \right) \left(\frac{2b-1}{b} \right).$$

Ta sẽ chọn $k \in \mathbb{Z}^+$ sao cho

$$\left(\frac{2a-1}{a} \right) \left(\frac{2b-1}{b} \right) = \frac{8k-1}{2k} \Rightarrow b = \frac{2k(2a-1)}{a-4k}.$$

Chọn $a = 4k + 2$ hoặc $a = 6k$ thì đều có giá trị b nguyên và tương ứng là $b = k(8k + 3)$ hoặc $b = 12k - 1$.

Từ đó ta có

$$\frac{x_{4k+2}}{x_{4k+1}} \frac{x_{8k^2+3k}}{x_{8k^2+3k-1}} = \frac{2(8k-1)}{k} = \frac{x_{6k}}{x_{6k-1}} \frac{x_{12k-1}}{x_{12k-2}}.$$

Với $k \geq 100$, ta chọn

$$A_1 = \{4k+1, 6k, 12k-1, 8k^2+3k-1\}, B_1 = \{4k+2, 6k-1, 12k-2, 8k^2+3k\}, k \geq 100$$

$$A = A_0 \cup A_1, B = B_0 \cup B_1$$

Đến đây, ta thấy rằng tỉ số giữa tích của các giá trị x_i có chỉ số tương ứng lần lượt thuộc A_1, B_1 sẽ là 1 và chỉ cần chọn A_0, B_0 thích hợp.

Ta xét $A_0 = \{1, 5, 252\}, B_0 = 251$, dễ thấy

$$\frac{C_2^1 C_{10}^5 C_{504}^{252}}{C_{502}^{251}} = \frac{2 \cdot 252 \cdot 4 \cdot (2 \cdot 252 - 1)}{2 \cdot 252} = 2012.$$

Ta thấy rằng hai tập hợp A, B đều là các tập vô hạn, rời nhau và có $\frac{\prod_{i \in A} x_i}{\prod_{i \in B} x_i} = 2012$ nên

chúng thỏa mãn đề bài và ta có đpcm.

Nhận xét.

Ở trên thay vì chọn $\left(\frac{2a-1}{a}\right)\left(\frac{2b-1}{b}\right) = \frac{8k-1}{2k}$, ta có thể chọn $\left(\frac{2a-1}{a}\right)\left(\frac{2b-1}{b}\right) = \frac{4k-1}{k}$ cũng ra được các dãy tương tự thỏa mãn đề bài.

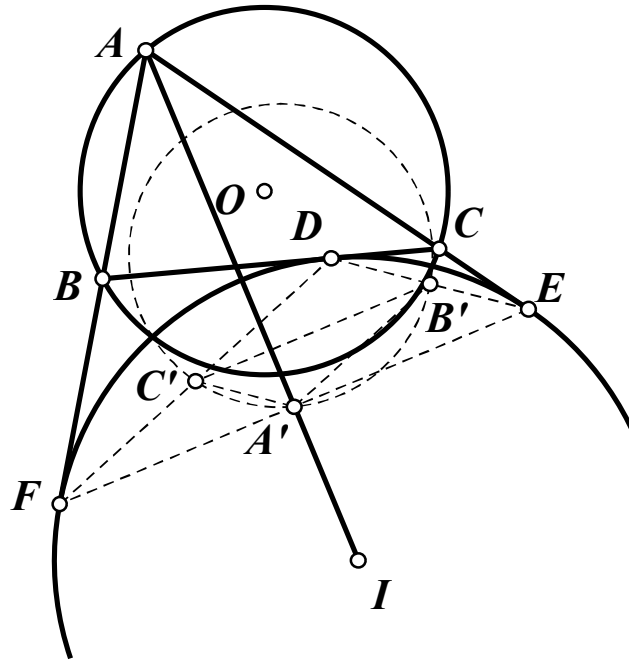
Ngày 2.

Bài 1.

Cho trước hai đường tròn ω_1, ω_2 . Gọi S là tập hợp tất cả các tam giác ABC thỏa mãn ω_1, ω_2 lần lượt là đường tròn ngoại tiếp và đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác ABC . Giả sử ω_2 tiếp xúc với các đường thẳng BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F .

Chứng minh rằng nếu tập S khác rỗng thì trọng tâm của tam giác DEF cố định.

Lời giải.



Gọi I, r_a lần lượt là tâm và bán kính của đường tròn ω_2 .

Xét phép nghịch đảo tâm I với phương tích r_a^2 , dễ thấy các yếu tố I, r_a cố định nên phép biến hình này là duy nhất.

Giả sử A', B', C' lần lượt là trung điểm của đoạn DE, EF, FD thì theo hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có $IA \cdot IA' = r_a^2$; suy ra Ω biến A' thành A .

Tương tự với các đỉnh B, C .

Do đó, Ω biến A', B', C' lần lượt thành A, B, C và nó cũng sẽ biến đường tròn ngoại tiếp tam giác $A'B'C'$ thành đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Suy ra Ω biến đường tròn Euler của tam giác DEF thành ω_1 nên đường tròn Euler này cố định. (*)

Gọi K, G, H lần lượt là tâm đường tròn Euler, trọng tâm và trực tâm của tam giác DEF .

Rõ ràng K là trung điểm IH nên $KI = \frac{1}{2}HI$ và $GI = \frac{1}{3}HI$ nên $\frac{KI}{GI} = \frac{3}{2}$.

Do đó K cố định nên suy ra G cũng cố định. Ta có đpcm.

Bài 2.

Với mỗi số nguyên dương n , ta kí hiệu $\tau(n)$ là số phần tử của tập hợp tất cả các ước nguyên dương của n . Một số nguyên dương n được gọi là “số tốt” nếu $\tau(m) < \tau(n)$ với mọi $m < n$.

Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương k cho trước, luôn tồn tại hữu hạn số tốt không chia hết cho k .

Lời giải.

Gọi G là tập hợp tất cả các số tốt nêu trong đề bài, dễ thấy G khác rỗng.

Trước hết, ta sẽ chứng minh hai bổ đề sau:

Bổ đề 1.

Giả sử $p_1 < p_2 < p_3 < \dots$ là các số nguyên tố được xếp thứ tự tăng dần. Nếu xét α, r là các số nguyên dương với $a \in G$ thỏa mãn điều kiện $p_r^\alpha \mid a$ thì $n = \left(\prod_{i=1}^r p_i \right)^\alpha \mid a$.

Chứng minh.

Kí hiệu $v_p(a)$ là số mũ lớn nhất của p trong khai triển a thành thừa số nguyên tố.

Giả sử rằng kết luận trên sai thì tồn tại $1 \leq i < r$ mà $v_{p_i}(a) = \beta < \alpha$, khi đó, ta có

$$b = \frac{a}{p_i^\beta p_r^\alpha} p_i^\alpha p_r^\beta < a \text{ và } \tau(b) = \tau(a), \text{ mâu thuẫn do } a \in G.$$

Bổ đề được chứng minh.

Bổ đề 2.

Với mỗi số nguyên tố p_t , tồn tại một số nguyên dương M mà với mỗi $a \in G$, nếu $a > M$ thì $p_t \mid a$.

Chứng minh.

Xét số nguyên dương α thỏa mãn $2^\alpha > p_t$ và đặt $M = (p_1 p_2 p_3 \dots p_{t-1})^{3\alpha}$.

Với mỗi $a \in G$, giả sử $a > M$ và $(a, p_t) = 1$.

Theo bổ đề 1 thì tất cả các ước của a đều thuộc tập hợp $\{p_1, p_2, p_3, \dots, p_{t-1}\}$, suy ra tồn tại một giá trị $1 \leq i \leq t-1$ mà $v_{p_i}(a) = \beta > 3\alpha$.

Tuy nhiên, ta lại có $p_i^\alpha \geq 2^\alpha > p^t$ nên $b = \frac{a}{p_i^\alpha} p_t < a$.

Do $2(\beta - \alpha + 1) > \beta + 1$ nên ta có $\tau(b) > \tau(a)$, mâu thuẫn.

Bổ đề được chứng minh.

Bổ đề 3.

Với mỗi số nguyên tố p_t và α là số nguyên dương, tồn tại một số nguyên dương M mà với mỗi $a \in G$, nếu $a > M$ thì $p_t^\alpha \mid a$.

Chứng minh.

Xét một số nguyên tố thỏa mãn $p_r > p_t^\alpha$, theo bổ đề 2 thì tồn tại số nguyên dương M mà với mỗi $a \in G$, nếu $a > M$ thì $v_{p_r}(a) = \gamma > 1$.

Nếu $v_{p_t}(a) = \beta < \alpha$ thì $b = \frac{a}{p_t^\alpha} p_t^\alpha < a$, nhưng do $\frac{\gamma}{\gamma+1} \frac{\alpha + \beta + 1}{\beta + 1} \geq \frac{2\gamma}{\gamma+1} \geq 1$ hay $\tau(b) \geq \tau(a)$, lại mâu thuẫn.

Bổ đề được chứng minh.

Trở lại bài toán,

Giả sử ước nguyên tố lớn nhất của k là p_t , xét một số nguyên dương α thỏa mãn $2^\alpha > k$.

Suy ra với mỗi số nguyên tố p mà $p \mid k$ và $v_p(k) < \alpha$ thì $k \mid n = \left(\prod_{i=1}^t p_i \right)^\alpha$.

Theo bổ đề 3, tồn tại một số nguyên dương M mà với mỗi $a \in G, a > M$ thì $n \mid a$ hay nói cách khác là $k \mid a$.

Vậy tập hợp các số tốt không chia hết cho k là hữu hạn. Ta có đpcm.

Bài 3.

Xét $n \in \mathbb{Z}$ và hàm số $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ thỏa mãn

$$f(x + y + f(y)) = f(x) + ny \text{ với mọi } x, y \in \mathbb{Z}.$$

Hãy tìm tất cả các hàm số f thỏa mãn điều kiện trên.

Lời giải.

Xét các trường hợp của n :

- Với $n = 0$, ta có $f(x + y + f(y)) = f(x), \forall x, y \in \mathbb{Z}$.

Nếu $y + f(y) = 0, \forall y \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow f(y) = -y$ là một hàm số thỏa mãn đề bài.

Nếu tồn tại $y_0 \in \mathbb{Z}$ mà $f(y_0) + y_0 \neq 0$ thì khi đó $f(x + y + f(y)) = f(x)$ là hàm số tuần hoàn với chu kỳ dương dương nhỏ nhất phải chia hết $y + f(y)$.

Gọi $T > 0$ là chu kỳ nguyên dương nhỏ nhất của hàm số trong trường hợp này.

Do đó $f(x + T) = f(x), \forall x$, do tính nhỏ nhất của T nên $T \mid (y + f(y))$ hay tồn tại hàm số $g(x)$ sao cho $f(x) + x = g(x)T$ với mọi x .

$$\text{Ta có } g(x + T) = \frac{f(x + T) + x + T}{T} = \frac{f(x) + x}{T} + 1 = g(x) + 1.$$

Suy ra, tồn tại hàm số $h(x): \{0, 1, 2, \dots, T-1\} \rightarrow \mathbb{Z}$ thỏa mãn $g(x) = \left\lfloor \frac{x}{T} \right\rfloor + h\left(x - T \left\lfloor \frac{x}{T} \right\rfloor\right)$.

Do đó, ta có $f(x) = g(x)T - x, \forall x \in \mathbb{Z}$ với $g(x)$ được xác định như trên, thỏa mãn đề bài.

- Nếu $n > 0$, đặt $f(0) = a$ thì trong đẳng thức đã cho, cho $x = y = 0$, ta có $f(0) = 0$.

Tiếp tục cho $x = a, y = 0$, ta được $f(2a) = a$.

Ta lại thay $x = 0, y = a$ thì $a = f(2a) = a + na \Rightarrow f(0) = a = 0$.

Trong đẳng thức đã cho, thay $x = 0$ thì $f(y + f(y)) = ny$ (*).

Trong (*), cho $y = x + f(x)$ thì

$$f(x + f(x) + f(x + f(x))) = n(x + f(x)) \Leftrightarrow f(nx + x + f(x)) = n(x + f(x)),$$

mà $f(nx + x + f(x)) = f(nx) + nx$ nên $nx + nf(x) = f(nx) + nx \Leftrightarrow nf(x) = f(nx), \forall x \in \mathbb{Z}$.

Giả sử $f(x) = f(y)$ thì $f(y) + nx = f(y + x + f(x)) = f(x + y + f(y)) = f(x) + ny \Rightarrow x = y$ hay $f(x)$ là đơn ánh trên $\mathbb{Z}$.

Với mỗi số nguyên m , đặt $k(m) = [(m+1) + f(m+1)] - [m + f(m)]$.

Trong đẳng thức đã cho, thay $x = 0, y = m$, ta có $f(m+1 + f(m+1)) = n(m+1)$.

Cũng trong đẳng thức đã cho, tiếp tục thay $x = k(m), y = m$, ta được

$$f(m+1 + f(m+1)) = f(k(m) + m + f(m)) = f(k(m)) + nm$$

Suy ra $f(k(m)) = n$, hơn nữa do $f(x)$ đơn ánh nên $f(m)$ là một cấp số cộng và $f(0) = 0$. Do đó, tồn tại hằng số c sao cho $f(m) = mc$. Thay vào đẳng thức đã cho, ta có

$$cx + ny + f(x) + ny = f(x + y + f(y)) = c(x + y + f(y)) = c(x + y + cy) \Leftrightarrow n = c(c+1).$$

Hơn nữa, ta thấy rằng $c \in \mathbb{Z}$ nên $c(c+1) \geq 0$ nên với $n < 0$ hoặc n dương nhưng không biểu diễn được dưới dạng trên thì không tồn tại hàm số $f(x)$.

Vậy với $n = 0$ thì $f(x) = -x$ hoặc $f(x) = g(x)T - x$ với $g(x) = \left\lfloor \frac{x}{T} \right\rfloor + h\left(x - T\left\lfloor \frac{x}{T} \right\rfloor\right)$ trong đó $h(x)$ là hàm số $h(x): \{0, 1, 2, \dots, T-1\} \rightarrow \mathbb{Z}$.

Với $n > 0$ thỏa mãn tồn tại số $c \in \mathbb{Z}$ để $c(c+1) = n$ thì ta có $f(x) = cx, \forall x \in \mathbb{Z}$ hoặc $f(x) = -(c+1)x, \forall x \in \mathbb{Z}$.

Với $n < 0$ hoặc $n > 0$ nhưng không tồn tại $c \in \mathbb{Z}$ sao cho $c(c+1) = n$ thì không tồn tại hàm số thỏa mãn đề bài.

Đề TST 2.

Bài 1.

Cho một đồ thị đơn G . Gọi một tập hợp gồm t đỉnh là t -clique nếu chúng đôi một kề nhau. Một đỉnh được nối với tất cả các đỉnh trong đồ thị thì gọi đó là đỉnh trung tâm.

Cho 2 số nguyên n, k thỏa mãn $\frac{3}{2} \leq \frac{1}{2}n < k < n$. Một đồ thị G thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

(1) G không chứa $(k+1)$ -clique.

(2) Nếu ta thêm vào G một cạnh bất kì sẽ thu được một $(k+1)$ -clique.

Tìm số đỉnh trung tâm nhỏ nhất của G .

Lời giải.

Ta thấy rằng điều kiện $\frac{1}{2}n < k < n$ có thể viết lại thành $k+1 \leq n \leq 2k-1$.

Định nghĩa $N(X)$ là tập hợp các đỉnh kề với tất cả các đỉnh thuộc X (quy ước một đỉnh bất kì cũng kề với chính nó).

Ta sẽ chứng minh rằng với các số n, k thỏa mãn điều kiện trên thì G có ít nhất $2k-n$ đỉnh trung tâm. Để chứng minh điều này, ta dùng cách xây dựng tập các đỉnh trung tâm của G như sau:

Vì $n \geq k+1$ nên tồn tại 2 đỉnh u, v không kề nhau.

Đặt $T = \{u, v\}$, S là một $(k-1)$ -clique kề với cả u và v (có nghĩa là u, v có cạnh nối với tất cả các đỉnh của S) và $U = G \setminus (T \cup S)$.

Dễ thấy rằng $|S| = k-1 = 2k-n+|U|$.

Do đó tồn tại các phân hoạch $T, S, U, (T \cup S) \subseteq N(S)$ và $|S| \geq 2k-n-|U|$, trong đó S là tập không rỗng (*). Ta có hai trường hợp sau

- Trường hợp 1.

Nếu $U = \emptyset$ thì $G = N(S)$ do đó S chứa các đỉnh trung tâm và $|S| \geq 2k-n$. Kết luận đúng trong trường hợp này.

- Trường hợp 2.

Nếu $U \neq \emptyset$ thì tồn tại đỉnh $u \in U$.

Nếu $S \subseteq N(u)$ thì chọn $S' = S, U' = U \setminus \{u\}, T' = T \cup \{u\}$.

Rõ ràng $|S'| \geq 2k - n + |U'|$ và $(T' \cup S') \subseteq N(S')$ nên ta quay trở lại (*). Ngược lại sẽ tồn tại đỉnh $v \in S$ sao cho u, v không kề nhau. Theo điều kiện (2) đã cho, tồn tại $(k-1)$ -clique kề với u, v và tạo thành từ các tập hợp $U_0 \subseteq U \setminus \{u\}, T_0 \subseteq T, S_0 \subseteq S \setminus \{v\}$.

Lại theo điều kiện (1) thì $|T_0| + |S| \leq k$.

$$\begin{aligned} \text{Từ đây suy ra } k-1 &= |U_0| + |T_0| + |S_0| \leq k + |U_0| - |S| + |S_0| \\ \text{hay } |S_0| &\geq |S| - |U_0| - 1 \geq 2k - n + |U| - |U_0| - 1 \geq 0. \end{aligned}$$

Do vậy S_0 không rỗng, ta đặt $U' = U \setminus (\{u\} \cup U_0), T' = T \cup \{u\} \cup (S \setminus S_0) \cup U_0, S' = S_0$ rồi trở lại (*). Vì sau mỗi bước như vậy thì U giảm ngặt nên đến một lúc nào đó, ta sẽ có $U = \emptyset$. Theo trường hợp 1, kết luận đúng.

Vậy số đỉnh trung tâm nhỏ nhất là $2k - n$.

Bài 2.

Chứng minh rằng tồn tại số thực dương C thỏa mãn tính chất:

Với mỗi $n \geq 2$ và tập hợp X là tập con của tập $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ thỏa mãn $|X| \geq 2$, tồn tại các số x, y, z, w thuộc X (không nhất thiết phân biệt) thỏa mãn

$$0 < |xy - zw| < C\alpha^{-4} \text{ với } \alpha = \frac{|X|}{n}.$$

Lời giải.

Đặt $\Delta = C_1 \frac{n^2}{|X|^2}$ với C_1 là số thực dương sẽ được xác định sau.

Chia đoạn $[0; n]$ thành các miền, mỗi miền có độ dài Δ và miền cuối cùng có thể có độ

dài nhỏ hơn Δ . Tổng số các miền không vượt quá $\frac{n}{\Delta} + 1 = \frac{|X|^2}{C_1 n} + 1 < \frac{2|X|^2}{C_1 n}$.

Do có tất cả $|X|$ phần tử thuộc về tập hợp X nên theo nguyên lí Dirichlet, tồn tại một miền $I \subset [0; n]$ sao cho trong đó có chứa $\frac{nC_1}{2|X|}$ phần tử thuộc tập hợp X .

Xét tập hợp $M = \left\{ x \mid x = \frac{x_1 + x_2}{2}, x_1, x_2 \in X \cap I \right\}$.

Ta thấy rằng $|M| \geq \frac{C_1 n}{4|X|} \left(\frac{C_1 n}{2|X|} - 1 \right) > \frac{C_1^2 n^2}{8|X|^2}$. Dễ thấy rằng các phần tử thuộc tập M là các số nguyên dương hoặc là các số thập phân có phần thập phân là 0,5 nên có nhiều nhất là $2|I| + |I| < 4|I| = 4C_1 \frac{n^2}{|X|^2}$ số khác nhau trong chúng.

Đến đây, ta chọn C_1 sao cho $\frac{C_1^2}{8} > 4C_1 \Leftrightarrow C_1 > 32$. Khi đó, theo nguyên lí Dirichlet, tồn tại các số $x_1, y_1, x_2, y_2 \in X \cap I$ sao cho $\frac{x_1 + y_1}{2} = \frac{x_2 + y_2}{2}$.

Tiếp theo, ta sẽ đánh giá $|x_1 y_2 - x_2 y_1|$.

Ta có $|x_1 y_1 - x_2 y_2| = \left| \frac{(x_1 - y_1)^2}{4} - \frac{(x_2 - y_2)^2}{4} \right| < 2|I|^2 = 2C_1^2 \frac{n^4}{|X|^4}$.

Chọn hằng số $C = 2C_1^2$ thì ta luôn chọn được $|x_1 y_1 - x_2 y_2| < C \alpha^{-4}$.

Suy ra tồn tại 4 số nguyên dương thỏa mãn đề bài nên ta có đpcm.

Bài 3.

Cho a_1, a_2 với $a_1 < a_2$ là các số nguyên cho trước. Với $n \geq 3$, số a_n là số nguyên dương nhỏ nhất lớn hơn a_{n-1} và a_n có thể được biểu diễn một cách duy nhất dưới dạng tổng của $a_i + a_j$ mà $1 \leq i < j \leq n-1$.

Chứng minh rằng nếu tồn tại hữu hạn các số chẵn trong dãy $\{a_n\}$ thì dãy $\{a_{n+1} - a_n\}$ tuần hoàn, nghĩa là tồn tại số nguyên dương T mà $a_{n+1+T} - a_{n+T} = a_{n+1} - a_n, \forall n$.

Lời giải.

Cách 1.

Xét a_n là số lẻ với $n > N$. Với n đủ lớn, ta thấy rằng $a_n = a_k + a_l$ với $k < l$ với $k \leq N$, điều này có nghĩa là :

(1) $k \leq N \Rightarrow a_l \geq a_n - N \Rightarrow l \geq n - N$.

(2) Nếu $k < l$ khi cả hai số này đủ lớn thì $a_{l+i} - a_{k+i} = d, i = 1, 2, 3, \dots, N$ khi $a_{l+N+1} - a_{k+N+1} = d$.

(3) Với n đủ lớn thì ta có $a_{n+1} - a_n \leq a_N$. Xét

$$f : \mathbb{N}^N \rightarrow \mathbb{N}^N : (x_1, x_2, x_3, \dots, x_N) \rightarrow (0, x_2 - x_1, x_3 - x_1, x_N - x_1).$$

Nếu $f(a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+N-1}) = (b_1, b_2, \dots, b_N)$ thì $b_i < (N-1)a_N, i = 1, 2, 3, \dots, N$.

Theo nguyên lí Dirichlet thì tồn tại số nguyên dương n, T sao cho

$$f(a_{n+T}, a_{n+T+1}, \dots, a_{n+T+N-1}) = f(a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+N-1}), \text{ ở đây ta giả sử } n \text{ đủ lớn.}$$

Điều này có nghĩa là $a_{n+T+i} - a_{n+i} = d, i = 0, 1, 2, \dots, N-1$.

Theo (2) thì $a_{n+T+N} - a_{n+N} = d$.

Từ đó suy ra $a_{m+T} - a_m = d, \forall m \geq n \Rightarrow \forall m \geq n, a_{m+1+T} - a_{m+T} = a_{m+1} - a_m$.

Ta có đpcm.

Cách 2.

Do dãy số đã cho chỉ chứa hữu hạn số chẵn nên ta có thể giả sử chúng là

$$a_{i_1} \leq a_{i_2} \leq a_{i_3} \leq \dots \leq a_{i_m}.$$

Khi đó, tồn tại một số N sao cho với mọi $r \geq N$ thì a_r là số lẻ, tuy nhiên $a_r = a_i + a_j$ nên hai số a_i, a_j khác tính chẵn lẻ.

Điều này có nghĩa là $a_{r+1} - a_r \leq a_{i_m}$ với mọi $r \geq N$.

Với $n \geq N$ xét tập hợp

$S_n = \{a_n - a_{n-1}, a_n - a_{n-2}, \dots, a_n - a_{n-k}\}$ với k là số nguyên dương lớn nhất thỏa mãn điều kiện $a_n - a_{n-k} \leq a_{i_m}$.

Khi đó, rõ ràng ta có $k \leq a_{i_m}$ và từ $a_n - a_{n-j}$ bị chặn nên tồn tại hữu hạn tập hợp S_n .

Các tập hợp S_n có thể xác định được các giá trị i_s thỏa mãn $a_{n+1} = a_{i_s} + a_j$ nên S_n được xác định duy nhất xác giá trị $a_{n+1} - a_n$ và xác định duy nhất tập hợp S_{n+1} .

Do có hữu hạn tập hợp S_n nên dãy $\{S_n\}$ nêu trên là dãy lặp hay dãy $\{a_{n+1} - a_n\}$ cũng là dãy lặp với các giá trị $n \geq N$ đủ lớn.

Ta có đpcm.

Ngày 2.

Bài 1.

Cho $n \geq 2$ là số tự nhiên.

Chứng minh rằng tồn tại hữu hạn các bộ n số nguyên dương $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

(i) $a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_n$.

(ii) $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) = 1$.

(iii) $a_1 = \sum_{i=1}^n (a_i, a_{i+1})$ với quy ước $a_{n+1} = a_1$.

Lời giải.

Đặt $d_i = (a_i, a_{i+1})$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$ trong đó $a_{n+1} \equiv a_1$. Theo giả thiết, ta thấy rằng,

$$a_1 - d_1 \geq a_2, a_2 - d_2 \geq a_3, \dots, a_{n-1} - d_{i-1} \geq a_n, i = 1, 2, 3.$$

Đưa vào dãy đã cho, ta được

$$d_1 + d_2 + \dots + d_n = a_1 \geq d_1 + a_2 \geq d_1 + d_2 + a_2 \geq \dots \geq d_1 + d_2 + \dots + d_{n-1} + a_n$$

Từ đây suy ra $d_n \geq a_n$, nhưng do $d_n = (a_n, a_1)$ nên $d_n \leq a_n$ hay đẳng thức phải xảy ra.

Do đó, ta có $a_i - a_{i+1} = d_i, \forall i = \overline{1, n}$.

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh rằng tồn tại vô số dãy số thỏa mãn đề bài.

Ta thấy rằng với dãy số thỏa mãn đề bài, tồn tại hữu hạn các số nguyên dương r_i sao

cho $a_i = \frac{r_i}{r_i + 1} a_{i+1}, \forall i = \overline{1, n}$. Do $(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1$ nên $(a_2, a_3, \dots, a_n) = 1$ và $a_n \mid a_1$.

Ta sẽ chứng minh bài toán bằng quy nạp

- Với $n = 2$, do $a_2 \mid a_1$ nên ta có thể viết $a_2 = m, a_1 = km$ với $k, m \in \mathbb{Z}^+$. Hơn nữa, do $(a_1, a_2) = 1$ nên $m = 1$ mà $a_1 = (a_1, a_2) + (a_2, a_1) = 2$ nên với $n = 2$, tồn tại đúng một dãy thỏa mãn đề bài.

- Giả sử bài toán đúng với $n - 1$, ta sẽ chứng minh rằng tồn tại hữu hạn dãy số thỏa mãn trong trường hợp n phần tử.

Ta có hai trường hợp:

+ Nếu a_2 không chia hết cho a_n , đặt $a_2 = \frac{p}{q} a_n$ với $p, q \in \mathbb{Z}^+$ và $(p, q) = 1, q > 1$.

Do $a_1 = \frac{r_1}{r_1 + 1} a_2, a_n \mid a_1$ nên suy ra $\frac{p}{q} \frac{r_1}{r_1 + 1}$ là số nguyên dương. Với mỗi a_2 , tồn tại hữu hạn các giá trị r_1 và cũng do có hữu hạn các dãy $n - 1$ thỏa mãn nên từ đó suy ra trong trường hợp này, số bộ n phần tử là hữu hạn.

+ Nếu a_2 chia hết cho a_n thì theo nguyên lý quy nạp, tồn tại hữu hạn dãy $a_2, a_3, \dots, a_n$ và do cách xác định $a_1 = \sum_{i=1}^n (a_i, a_{i+1})$, ta thấy rằng tồn tại hữu hạn dãy số thỏa mãn đề bài.

Do đó, theo nguyên lý quy nạp, bài toán được chứng minh.

Bài 2.

Cho hai số nguyên dương $m, n > 1$ và các số thực dương r, s thỏa mãn $r < s$. Với mọi $a_{ij} \geq 0$ là các số thực không đồng thời bằng 0, hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$f = \frac{\left(\sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m a_{ij}^s \right)^{\frac{r}{s}} \right)^{\frac{1}{r}}}{\left(\sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n a_{ij}^s \right)^{\frac{s}{r}} \right)^{\frac{1}{s}}}$$

Lời giải.

Đặt biểu thức cần tìm giá trị nhỏ nhất là $f(m, n, r, s)$. Ta sẽ chứng minh rằng

$$\max f(m, n, r, s) = \min(m, n)^{\frac{1}{r} - \frac{1}{s}}.$$

Đặt $b_{ij} = a_{ij}^r, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ và đặt $k = \frac{r}{s}$, ta cần chứng minh rằng

$$\sum_{j=1}^n \sqrt[k]{\sum_{i=1}^m b_{ij}^k} \leq \min(m, n)^{1 - \frac{1}{k}} \sqrt[k]{\sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n b_{ij} \right)^k} \quad (*)$$

Ta sẽ chứng minh mệnh đề sau

Nếu $c_1 \geq c_2 \geq \dots \geq c_n \geq 0$ và $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0, k \geq 1$ và nếu đặt $S = \sum_{i=1}^n x_i$ thì

$$\sum_{i=1}^n \sqrt[k]{c_i + x_i^k} \leq \sqrt[k]{c_n + S^k} + \sum_{i=1}^n \sqrt[k]{c_i} \quad (**)$$

Thật vậy, nếu $c_n = 0$ thì bất đẳng thức (*) đúng do từ $\sqrt[k]{c_i + x_i^k} \leq x_i + \sqrt[k]{c_i}, i = \overline{1, n}$, ta có thể

suy ra $\sum_{i=1}^n \sqrt[k]{c_i + x_i^k} \leq S + \sum_{i=1}^n \sqrt[k]{c_i}$.

Đặt $d_i = \sqrt[k]{c_i}, i = \overline{1, n}$, ta viết lại bất đẳng thức (**) dưới dạng

$$\sum_{i=1}^n d_i \sqrt[k]{1 + \left(\frac{x_i}{d_i}\right)^k} \leq d_n \sqrt[k]{1 + \left(\frac{S}{d_n}\right)^k} + \sum_{i=1}^n d_i.$$

Đặt $g(x) = \sqrt[k]{x^k + 1}, x \geq 0$ thì g là hàm lồi vì $g''(x) = (k-1)x^{k-2}(x^k + 1)^{\frac{1}{k}-2} \geq 0$ với mọi số thực dương x . Hơn nữa, $\frac{S}{d_n} \geq \frac{x_i}{d_i}, \forall i$ nên theo bất đẳng thức Karamata thì bất đẳng thức (**) đúng. Bổ đề được chứng minh.

Trở lại bài toán, đặt $S_i = \sum_{j=1}^n b_{ij}$, theo bổ đề ở trên, trong vế trái của bất đẳng thức (*), ta có thể thay các số b_{ij} bởi các số b'_{ij} sao cho với mỗi $1 \leq i \leq m$, tồn tại duy nhất một giá trị j mà $1 \leq j \leq n$ sao cho $b'_{ij} = S_i$ và $b_{ij} = 0$ với các giá trị khác đồng thời không ảnh hưởng đến giá trị vế trái của bất đẳng thức (*). Suy ra tồn tại một phân hoạch $P = \{A_1, A_2, \dots, A_l\}$ của tập hợp $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ sao cho

$$\sum_{j=1}^n \sqrt[k]{\sum_{i=1}^m b_{ij}^k} \leq \sum_{j=1}^n \sqrt[k]{\sum_{i=1}^m b'_{ij}^k} = \sum_{j=1}^l \sqrt[k]{\sum_{i \in A_j} S_i^k}.$$

Hơn nữa, theo bất đẳng thức về trung bình lũy thừa, ta có

$$\sum_{j=1}^l \sqrt[k]{\sum_{i \in A_j} S_i^k} \leq l^{1-\frac{1}{k}} \sqrt[k]{\sum_{j=1}^l \left(\sqrt[k]{\sum_{i \in A_j} S_i^k} \right)^k} = l^{1-\frac{1}{k}} \sqrt[k]{\sum_{i=1}^m S_i^k}.$$

Ta cũng có $l \leq n$ và $l \leq m$ nên $l = \min(m, n)$. Bất đẳng thức (*) đúng.

Đẳng thức xảy ra khi $a_{ij} = 1$ nếu $i = j$ và $a_{ij} = 0$ nếu $i \neq j$. Ta có đpcm.

Bài 3.

Cho một số nguyên dương $n \geq 2$, một hàm số $f: \mathbb{Z} \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, n\}$ gọi là tốt, nếu với mỗi số nguyên dương k thỏa $1 \leq k \leq n-1$ thì tồn tại một số nguyên $j(k)$ thỏa mãn với mọi số nguyên m thì $f(m + j(k)) \equiv f(m + k) - f(m) \pmod{n+1}$

Tìm số các hàm số "tốt".

Lời giải.

Để giải quyết bài toán, ta chứng minh các nhận xét sau:

Nhận xét 1.

Hàm số f là hàm toàn ánh và có chu kì dương nhỏ nhất là n .

Thật vậy, xét $m \in \mathbb{Z}^+$ và giả sử tồn tại số nguyên dương k sao cho $1 \leq k \leq n-1$ và $f(m+k) = f(m)$ thì khi đó, $f(m+j(k)) \equiv f(m+k) - f(m) = 0 \pmod{n+1}$, điều này vô lí do $f: \mathbb{Z} \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, n\}$.

Do đó, $f(m), f(m+1), \dots, f(m+n-1)$ đôi một khác nhau và

$$\{f(m), f(m+1), \dots, f(m+n)\} = \{1, 2, \dots, n\}.$$

Suy ra f là hàm toàn ánh. Tương tự, thay m bởi $m+1$, ta có

$$\{f(m+1), f(m+2), \dots, f(m+n)\} = \{1, 2, \dots, n\}.$$

Dễ thấy rằng từ đây, ta có $f(m) = f(m+n)$ hay $f(m)$ tuần hoàn với chu kì dương nhỏ nhất là n .

Đến đây, do f là hàm tuần hoàn ta có thể giả sử $0 \leq j(k) \leq n-1$ với mọi $1 \leq k \leq n-1$.

Nhận xét 2.

Ta luôn có $j(u) \neq j(v)$ với mọi $1 \leq u < v \leq n-1$.

Thật vậy, giả sử ngược lại rằng tồn tại các số u, v sao cho $1 \leq u < v \leq n-1$ và $j(u) = j(v)$.

Khi đó, ta có $f(m+u) - f(m) \equiv f(m+j(u)) \equiv f(m+j(v)) \equiv f(m+v) - f(m) \pmod{n+1}$.

Suy ra $f(m+u) \equiv f(m+v) \pmod{n+1}$ mà $1 \leq f(m+u), f(m+v) \leq n$ nên ta phải có

$$f(m+u) = f(m+v),$$

vô lí do $1 \leq u < v \leq n-1$.

Nhận xét 3.

Với mọi $1 \leq k \leq n-1$ thì tồn tại $j^{(\ell)}(k) = 0$ trong đó $j^{(\ell)}(k)$ là hàm hợp ℓ lần của j .

Cũng bằng phản chứng, ta giả sử tồn tại k với $1 \leq k \leq n-1$ mà $j^{(\ell)}(k) = 0$ với mọi $\ell \in \mathbb{N}$.

Đễ dàng thấy rằng $f(m + j^{(\ell)}(k)) \equiv f(m+k) - \ell f(m) \pmod{n+1}$.

Từ $\{j(k), j^{(2)}(k), \dots, j^{(n)}(k)\} \subseteq \{1, 2, \dots, n-1\}$, theo nguyên lí Dirichlet, ta thấy rằng tồn tại hai số u, v mà $1 \leq u < v \leq n$ và $j^{(u)}(k) = j^{(v)}(k)$. Khi đó, ta có

$$f(m+k) - uf(m) \equiv f(m + j^{(u)}(k)) \equiv f(m + j^{(v)}(k)) \equiv f(m+k) - vf(m) \pmod{n+1}$$

Suy ra $(n+1) \mid (v-u)f(m)$ với mọi $m \in \mathbb{Z}$.

Tuy nhiên, điều này vô lí do $1 \leq v-u \leq n-1$ và tồn tại số m sao cho $f(m) = 1$.

Nhận xét 4.

Tồn tại hàm số f khi và chỉ khi $n+1$ là số nguyên tố.

Thật vậy, ta thấy rằng với mỗi k mà $1 \leq k \leq n-1$ thì tồn tại số $\ell_k \in \mathbb{N}$ nhỏ nhất sao cho $j^{(\ell_k)}(k) = 0$. Khi đó, $f(m + j^{(\ell)}(k)) \equiv f(m+k) - \ell f(m) \pmod{n+1}$ với mọi $1 \leq \ell \leq \ell_k$.

Suy ra

$$f(m) = f(m + j^{(\ell_k)}(k)) \equiv f(m+k) - \ell_k f(m) \Rightarrow (\ell_k + 1)f(m) \equiv f(m+k) \pmod{n+1}.$$

Do đó, $(\ell_k + 1)^n f(m) \equiv (\ell_k + 1)^{n-1} f(m+k) \equiv \dots \equiv f(m+nk) \equiv f(m) \pmod{n+1}$ hay

$$(\ell_k + 1)^n \equiv 1 \pmod{n+1} \text{ với mọi } k \text{ mà } 1 \leq k \leq n-1 (*).$$

Rõ ràng $1 \leq \ell_k \leq n$ với $u \neq v, \ell_u \neq \ell_v$ (nếu $\ell_u = \ell_v$ thì

$$f(m+u) \equiv (\ell_u + 1)f(m) \equiv (\ell_v + 1)f(m) \equiv f(m+v) \pmod{n+1}, \text{ dẫn đến } u = v, \text{ mâu thuẫn.}$$

Hơn nữa, $\ell_k \neq n$ vì nếu không thì $\ell_k = n$ dẫn đến

$$f(m+k) \equiv (\ell_k + 1)f(m) \equiv 0 \pmod{n+1}, \text{ mâu thuẫn.}$$

Từ đó suy ra rằng $\{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_{n-1}\} = \{1, 2, \dots, n-1\}$ và từ (*), ta thấy rằng $a^n \equiv 1 \pmod{n+1}$ với mọi $2 \leq a \leq n$, suy ra $n+1$ là số nguyên tố.

Nhận xét 5.

Nếu $n+1$ là số nguyên tố thì hàm số $n \cdot \phi(n)$ thỏa mãn đề bài.

Thật vậy,

Theo nhận xét 4, tồn tại ℓ nhỏ nhất mà $1 \leq \ell \leq n$ và $j^{(\ell)}(1) = 0$, suy ra

$$f(m+1) \equiv (\ell+1)f(m) \pmod{n+1} \text{ với mọi } m \in \mathbb{Z}.$$

Do đó $f(m) \equiv (\ell+1)^m f(0) \pmod{n+1}$ và từ f là một toàn ánh, $\ell+1$ phải là một căn nguyên thủy của $g \pmod{p=n+1}$.

Từ đó suy ra mọi hàm số f thỏa mãn đề bài đều có dạng $f(m) \equiv g^m f(0) \pmod{n+1}$, trong đó, các hàm đều phải thỏa mãn $j(k)$ là bậc của $g^k - 1$ (do $1 \leq k \leq n-1, g^k \neq 0$ nên bậc này tồn tại).

Ta có tất cả $\phi(p-1) = \phi(n)$ cách để chọn hàm g và n cách để chọn $f(0) \in \{1, 2, \dots, n\}$ nên có tất cả $n \cdot \phi(n)$ hàm số thỏa đề bài.

Bài toán được giải quyết hoàn toàn.

ĐỀ TST 3.

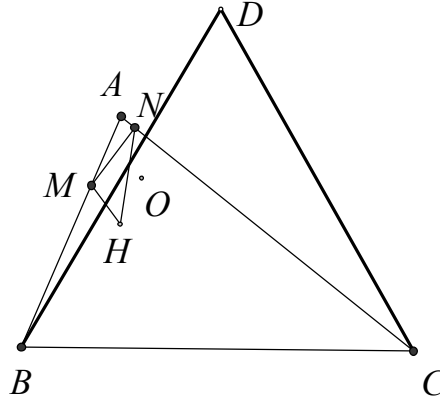
Ngày 1.

Bài 1.

Cho tam giác ABC nhọn có $\angle A > 60^\circ$, trực tâm H . Gọi M, N lần lượt là các điểm thuộc các cạnh AB, AC sao cho $\angle HMB = \angle HNC = 60^\circ$. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HMN . Giả sử D là điểm nằm cùng phía với A so với BC sao cho tam giác DBC đều.

Chứng minh rằng H, O, D thẳng hàng.

Lời giải.



Cách 1.

Gọi T là trực tâm của tam giác HMN , đường thẳng HM, CA cắt nhau tại P ; đường thẳng HN, BA cắt nhau tại Q . Dễ thấy các điểm N, M, P, Q cùng thuộc một đường tròn.

Do $\angle THM = \angle OHN$ nên $\angle PQH - \angle OHN = \angle NMH - \angle THM = 90^\circ$ hay

$$HO \perp PQ. \quad (1)$$

Gọi R là điểm đối xứng với C qua đường thẳng HP , ta có $HC = HR$.

Ta có $\angle HPC + \angle HCP = (\angle BAC - 60^\circ) + (90^\circ - \angle BAC) = 30^\circ$ nên $\angle CHR = 60^\circ$.

Suy ra $\triangle HCR$ là tam giác đều.

Hơn nữa, do $\angle HPC = \angle HQB$ và $\angle HCP = \angle HBQ$ nên $\triangle PHC \sim \triangle QHB(g.g)$.

Suy ra $\triangle PHR \sim \triangle QHB(g.g)$ và $\triangle QHP \sim \triangle BHR(g.g)$.

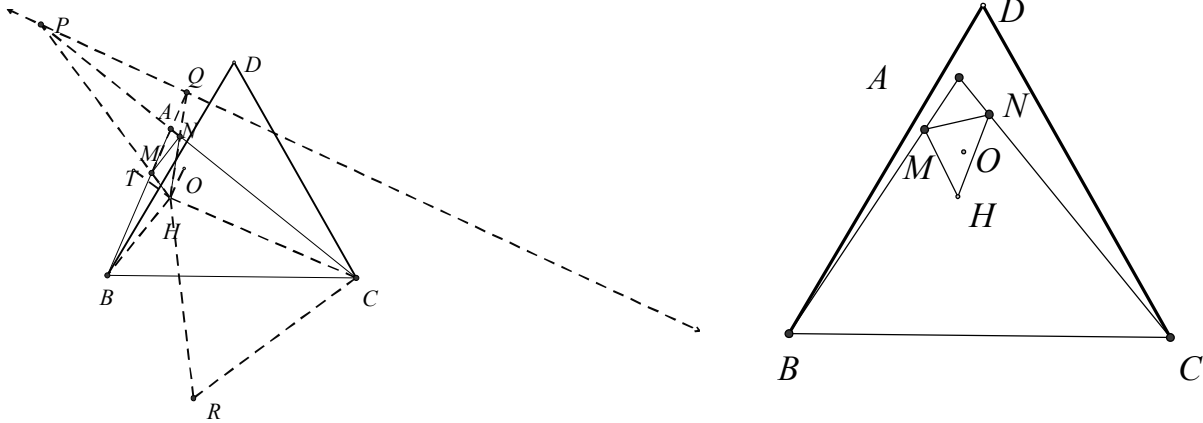
Xét $\angle(UV, XY)$ tạo bởi hai vector $\overrightarrow{UV}$ và $\overrightarrow{XY}$ (chiều dương là ngược chiều kim đồng hồ).

Do $\angle PHR = 150^\circ$ nên ta có $\angle(PQ, RB) = \angle(HP, HR) = 150^\circ$, $\triangle BCD$ và $\triangle RCH$ là các tam giác đều nên $\triangle BRC$ và $\triangle DHC$ đồng dạng.

Do đó, $\angle(RB, HD) = \angle(CR, CH) = -60^\circ$ nên

$$\angle(PQ, HD) = \angle(PQ, RB) + \angle(RB, HD) = 150^\circ - 60^\circ = 90^\circ \text{ hay } DH \perp PQ. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta thấy rằng các điểm H, O, D thẳng hàng, ta có đpcm.



Cách 2.

Xét mặt phẳng phức có O là tâm, trong mặt phẳng đó, giả sử tọa vị các điểm lần lượt là

$$H = 1, \quad N = e^{2\alpha i}, \quad M = e^{-2\beta i}.$$

Khi đó, $|NH| = 2 \sin \alpha$, $|MH| = 2 \sin \beta$, và $\angle HCA = \angle HBA = \frac{5\pi}{6} - (\alpha + \beta)$.

Do $\frac{C-H}{N-H} = e^{-(\alpha+\beta-\frac{\pi}{6})i} \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{3}}{\sin(\frac{5\pi}{6}-\alpha-\beta)}$ nên ta có:

$$C = e^{-(\alpha+\beta-\frac{\pi}{6})i} \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{3}}{\sin(\frac{5\pi}{6}-\alpha-\beta)} \cdot 2 \sin \alpha \cdot e^{(\alpha+\frac{\pi}{2})i} + 1 = \frac{\sqrt{3} \sin \alpha \cdot e^{(\frac{2\pi}{3}-\beta)i}}{\cos(\alpha+\beta-\frac{\pi}{3})} + 1, \quad (1)$$

Tương tự, ta tính được

$$B = e^{(\alpha+\beta-\frac{\pi}{6})i} \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{3}}{\sin(\frac{5\pi}{6}-\alpha-\beta)} \cdot 2 \sin \beta \cdot e^{-(\beta+\frac{\pi}{2})i} + 1 = \frac{\sqrt{3} \sin \beta \cdot e^{(\alpha-\frac{2\pi}{3})i}}{\cos(\alpha+\beta-\frac{\pi}{3})} + 1. \quad (2)$$

Do $\triangle BCD$ là tam giác đều nên $D = -\omega B - \omega^2 C$ và $\bar{D} = -\omega^2 \bar{B} - \omega \bar{C}$.

Với điều kiện H, O, D thẳng hàng nên suy ra $D = \bar{D}$ hay $B + \omega C = \omega \bar{B} + \bar{C}$.

Từ (1) và (2), ta được

$$B + \omega C = \frac{\sqrt{3} \sin \beta \cdot e^{(\alpha - \frac{2\pi}{3})i}}{\cos(\alpha + \beta - \frac{\pi}{3})} + 1 + \frac{\sqrt{3} \sin \alpha \cdot e^{(\frac{4\pi}{3} - \beta)i}}{\cos(\alpha + \beta - \frac{\pi}{3})} + \omega,$$

$$\omega \bar{B} + \bar{C} = \frac{\sqrt{3} \sin \alpha \cdot e^{(\beta - \frac{2\pi}{3})i}}{\cos(\alpha + \beta - \frac{\pi}{3})} + 1 + \frac{\sqrt{3} \sin \beta \cdot e^{(\frac{4\pi}{3} - \alpha)i}}{\cos(\alpha + \beta - \frac{\pi}{3})} + \omega.$$

Ta chỉ cần chứng minh rằng

$$\sin \beta \cdot e^{(\alpha - \frac{2\pi}{3})i} + \sin \alpha \cdot e^{(\frac{4\pi}{3} - \beta)i} = \sin \beta \cdot e^{(\frac{4\pi}{3} - \alpha)i} + \sin \alpha \cdot e^{(\beta - \frac{2\pi}{3})i}.$$

Tuy nhiên, so sánh hai vế, ta thấy đẳng thức hiển nhiên đúng. Ta có đpcm.

Bài 2.

Xét số nguyên dương $k \geq 2$. Chứng minh rằng tồn tại k số nguyên dương $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ đôi một khác nhau sao cho tồn tại các số nguyên không âm $b_1, b_2, b_3, \dots, b_k$ và

$c_1, c_2, c_3, \dots, c_k$ thỏa mãn $a_i \leq b_i \leq 2a_i, i = 1, 2, 3, \dots, k$ và nếu $\prod_{i=1}^k b_i^{c_i} < \prod_{i=1}^k b_i$ thì ta cũng có

$$k \prod_{i=1}^k b_i^{c_i} < \prod_{i=1}^k b_i.$$

Lời giải.

Trước hết, ta sẽ giải một bài toán tổng quát hơn là

Xét số nguyên dương $k \geq 2$. Chứng minh rằng tồn tại n số nguyên dương $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ thỏa mãn các điều kiện:

(i) $2a_i < a_{i+1}, i = 1, 2, 3, \dots, n-1$.

(ii) Với mọi $b_i \in [a_i, 2a_i] \cap \mathbb{Z}$, nếu $\prod_{i=1}^k b_i^{c_i} < \prod_{i=1}^k b_i$ thì ta cũng có $k \prod_{i=1}^k b_i^{c_i} < \prod_{i=1}^k b_i$.

Cố định số nguyên dương $k \geq 2$, ta sẽ chứng minh bài toán bằng quy nạp theo n .

- Với $n = 1$, ta chọn $c_1 = 0, a_1 > k$ thì với mỗi b_1 mà $a_1 \leq b_1 \leq 2a_1$ thì dễ thấy rằng luôn có

$$b_1^{c_1} = 1 < k < a_1 \leq b_1 \text{ và } kb_1^{c_1} = k < a_1 \leq b_1.$$

Bài toán đúng với $n = 1$.

Giả sử rằng tồn tại n số nguyên dương $x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n$ và thỏa mãn các điều kiện (i), (ii).

Khi đó, để chứng minh bài toán vẫn đúng trong trường hợp $n + 1$, ta sẽ xây dựng một bộ có $n + 1$ phần tử thỏa đề bài bằng cách chọn thêm một số nguyên dương x_{n+1} sao

$$\text{cho } x_{n+1} > 2x_n \text{ và } \frac{x_{n+1}}{2x_n} > k \left(\frac{2x_n}{x_1} \right)^n.$$

Đặt $a_i = tx_i, i = 1, 2, 3, \dots, n + 1$ trong đó t là một số nguyên dương đủ lớn sao cho hai điều kiện sau đây được thỏa mãn đồng thời:

$$a_1^{n+1} > 2^n a_2 a_3 \dots a_{n+1} \text{ và}$$

$$k2^{n-1} a_{n+1}^{n-1} < a_1 a_2 \dots a_n.$$

Tiếp theo, ta sẽ chứng bộ số $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n+1})$ này thỏa mãn hai điều kiện (i) và (ii).

Xét các số số nguyên dương $b_i \in [a_i, 2a_i]$ với $i = 1, 2, 3, \dots, n + 1$ và các số nguyên không âm

$$c_1, c_2, c_3, \dots, c_{n+1} \text{ sao cho } \prod_{i=1}^{n+1} b_i^{c_i} < \prod_{i=1}^{n+1} b_i.$$

$$\text{Ta sẽ chứng minh rằng khi đó, ta cũng có } k \prod_{i=1}^{n+1} b_i^{c_i} < \prod_{i=1}^{n+1} b_i.$$

Ta xét các trường hợp sau:

$$\text{- Xét } \sum_{i=1}^{n+1} c_i \leq n \text{ thì } k \prod_{i=1}^{n+1} b_i^{c_i} \leq kb_{n+1}^n \leq k2^{n-1} a_{n+1}^{n-1} b_{n+1} \leq a_1 a_2 \dots a_n b_{n+1} \leq \prod_{i=1}^{n+1} b_i, \text{ thỏa điều kiện (ii).}$$

- Xét $\sum_{i=1}^{n+1} c_i \geq n + 2$ thì $\prod_{i=1}^{n+1} b_i \leq 2^n a_2 a_3 \dots a_{n+1} b_1 < a_1^{n+1} b_1 \leq b_1^{n+2} \leq \prod_{i=1}^{n+1} b_i^{c_i}$, điều này mâu thuẫn với cách chọn các bộ số này nên trường hợp này không thể xảy ra.

$$\text{- Xét } \sum_{i=1}^{n+1} c_i = n + 1, \text{ ta xét ba trường hợp như sau:}$$

+ Nếu $c_{n+1} \geq 2$ thì ta có

$$\frac{\prod_{i=1}^{n+1} b_i^{c_i}}{\prod_{i=1}^{n+1} b_i} \geq \frac{b_{n+1}}{b_n} \left(\frac{b_1}{b_n} \right)^{n-1} \geq \frac{a_{n+1}}{2a_n} \left(\frac{a_1}{2a_n} \right)^{n-1} = \frac{x_{n+1}}{2x_n} \left(\frac{x_1}{2x_n} \right)^{n-1} > 1, \text{ mâu thuẫn với cách chọn bộ số.}$$

Do đó, trường hợp này cũng không thể xảy ra.

+ Nếu $c_{n+1} = 1$ thì $\frac{\prod_{i=1}^{n+1} b_i^{c_i}}{\prod_{i=1}^{n+1} b_i} = \frac{\prod_{i=1}^n b_i^{c_i}}{\prod_{i=1}^n b_i}$ và $\frac{b_i}{t} \in [x_i, 2x_i], i = 1, 2, 3, \dots, n$ nên ta có $k \prod_{i=1}^{n+1} b_i^{c_i} < \prod_{i=1}^{n+1} b_i$

theo nguyên lí quy nạp.

+ Nếu $c_{n+1} = 0$ thì $\frac{\prod_{i=1}^{n+1} b_i^{c_i}}{\prod_{i=1}^{n+1} b_i} \geq \frac{b_{n+1}}{b_n} \left(\frac{b_n}{b_1} \right)^n \geq \frac{a_{n+1}}{2a_n} \left(\frac{a_n}{2a_1} \right)^n = \frac{x_{n+1}}{2x_n} \left(\frac{x_n}{2x_1} \right)^n > k$, thỏa điều kiện (ii).

Từ đây suy ra, trong mọi trường hợp, luôn tồn tại bộ $n+1$ số thỏa mãn.

Theo nguyên lí quy nạp, bài toán được chứng minh.

Bài 3.

Tìm giá trị nhỏ nhất có thể có của c sao cho với mọi đa thức monic có bậc 2012

$$P(x) = x^{2012} + a_{2011}x^{2011} + a_{2010}x^{2010} + \dots + a_1x + a_0,$$

ta có thể xây dựng được đa thức $Q(x)$ từ đó bằng cách nhân -1 vào một số hệ số của đa thức $P(x)$ nêu trên sao cho với mỗi nghiệm phức z của đa thức $Q(x)$ này thì ta luôn có bất đẳng thức sau $|\operatorname{Im} z| \leq c |\operatorname{Re} z|$.

Lời giải.

Ta sẽ chứng minh rằng $c \geq \cot \frac{\pi}{4022}$.

Xét đa thức $P(x) = x^{2012} - x$. Bằng cách thay đổi hệ số của $P(x)$ theo quy tắc đã nêu (nhân -1 vào một số hệ số), ta có thể thu được 4 đa thức sau $P(x)$, $-P(x)$, $Q(x) = x^{2012} + x$ và $-Q(x)$.

Chú ý rằng $P(x)$ và $-P(x)$ có cùng tập nghiệm, một nghiệm trong số chúng là $z_1 = \cos \frac{1006}{2011} \pi + i \sin \frac{1006}{2011} \pi$.

Hơn nữa, $Q(x)$ và $-Q(x)$ cũng có cùng tập nghiệm, tất cả các nghiệm này đều trái dấu với nghiệm của đa thức $P(x)$, điều này có được là do $Q(x) = P(-x)$.

Suy ra luôn tồn tại một nghiệm của $Q(x)$ là $z_2 = -z_1$ nên ta phải có

$$c \geq \min \left(\frac{|\operatorname{Im} z_1|}{|\operatorname{Re} z_1|}, \frac{|\operatorname{Im} z_2|}{|\operatorname{Re} z_2|} \right) = \cot \frac{\pi}{4022}.$$

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh rằng $c = \cot \frac{\pi}{4022}$ thỏa mãn đề bài. Xét một đa thức monic bậc 2012 có hệ số thực viết dưới dạng tổng quát là:

$$P(x) = x^{2012} + a_{2011}x^{2011} + a_{2010}x^{2010} + \cdots + a_1x + a_0$$

Bằng cách thay đổi các hệ số này thích hợp, ta thu được

$$R(x) = b_{2012}x^{2012} + b_{2011}x^{2011} + b_{2010}x^{2010} + \cdots + b_1x + b_0,$$

trong đó, $b_{2012} = 1$ và với $j = 1, 2, \dots, 2011$ thì $b_j = \begin{cases} |a_j|, & j \equiv 0, 1 \pmod{4} \\ -|a_j|, & j \equiv 2, 3 \pmod{4} \end{cases}$.

Ta sẽ chứng minh rằng tất cả các nghiệm z của đa thức $R(x)$ đều thỏa mãn $|\operatorname{Im} z| \leq c |\operatorname{Re} z|$.

Giả sử ngược lại rằng tồn tại đa thức $R(x)$ có nghiệm z_0 mà $|\operatorname{Im} z_0| > c |\operatorname{Re} z_0|$. Dễ thấy rằng khi đó $z_0 \neq 0$, giả sử rằng argument của số phức này nhỏ hơn $\theta = \frac{\pi}{4022}$, trường hợp còn lại chỉ cần xét số phức liên hợp với nó. Ta có hai trường hợp sau:

- Nếu z_0 nằm trong góc phần tư thứ nhất, đặt $\angle(z_0, i) = \alpha < \theta$, trong đó kí hiệu $\angle(z_0, i)$ là góc hợp bởi z_0 và i theo ngược chiều kim đồng hồ.

Với các số $0 \leq j \leq 2012$ mà $j \equiv 0, 2 \pmod{4}$ thì $\angle(b_j z_0^j, 1) = j\alpha \leq 2012\alpha < 2012\theta$; còn với $j \equiv 1, 3 \pmod{4}$ thì $\angle(b_j z_0^j, i) = j\alpha < 2011\theta$ hay $\angle(b_j z_0^j, i) = \alpha$. Do đó, với mỗi $b_j z_0^j$ có argument nằm trong $[2\pi - 2012\alpha, 2\pi) \cup [0, \frac{1}{2}\pi - \alpha]$ với độ lớn của miền này là

$$2012\alpha + \frac{1}{2}\pi - \alpha = \frac{1}{2}\pi + 2011\alpha < \pi$$

hay $b_j z_0^j$, $0 \leq j \leq 2012$ không chứa 0, mâu thuẫn.

- Nếu z_0 nằm trong góc phần tư thứ hai, đặt $\angle(i, z_0) = \alpha < \theta$ với $j \equiv 0, 2 \pmod{4}$, thì $\angle(1, b_j z_0^j) = j\alpha < 2012\theta$ với $j \equiv 1, 3 \pmod{4}$ thì $\angle(i, b_j z_0^j) = j\alpha \leq 2011\alpha < \frac{\pi}{2}$ nên với mỗi $b_j z_0^j$ có góc nằm trong $[0, \frac{\pi}{2} + 2011\alpha]$ thì độ lớn của miền này là $\frac{\pi}{2} + 2011\alpha < \pi$ và $b_j z_0^j$, $0 \leq j \leq 2012$ không chứa 0, cũng mâu thuẫn.

Tóm lại, giá trị nhỏ nhất cần tìm của c là $\cot \frac{\pi}{4022}$.

Ngày 2.

Bài 1.

Cho số nguyên dương $n \geq 4$ và xét các tập hợp $A, B \subseteq \{1, 2, 3, \dots, n\}$ thỏa mãn điều kiện

Với mọi $a \in A, b \in B$ thì $ab + 1$ là số chính phương. Chứng minh rằng

$$\min\{|A|, |B|\} \leq \log_2 n.$$

Lời giải.

Trước hết, ta sẽ chứng minh bổ đề sau:

Với hai tập hợp A, B thỏa đề bài, nếu a, a' là hai số nguyên dương thuộc tập hợp A và $a < a'$, b, b' là hai số nguyên dương thuộc tập hợp B và $b < b'$ thì ta luôn có $a'b' > 4ab$.

Chứng minh.

Ta thấy rằng vì $(a' - a)(b' - b) > 0$ nên $(ab + 1)(a'b' + 1) > (ab' + 1)(a'b + 1)$. Từ đây suy ra

$$\sqrt{(ab+1)(a'b'+1)} > \sqrt{(ab'+1)(a'b+1)}.$$

Theo giả thiết thì cả hai vế đều là các số chính phương lớn hơn 0 nên ta cũng phải có

$$\sqrt{(ab+1)(a'b'+1)} > \sqrt{(ab'+1)(a'b+1)} + 1 \text{ hay}$$

$$(ab+1)(a'b'+1) > \left(\sqrt{(ab'+1)(a'b+1)} + 1 \right)^2.$$

Khai triển bất đẳng thức này, ta có

$$ab + a'b' > ab' + a'b + 2\sqrt{(ab'+1)(a'b+1)} + 1 > ab' + a'b + 2\sqrt{ab' \cdot a'b}$$

Do $a < a'$ và $b < b'$ nên $ab' + a'b > ab$; từ bất đẳng thức ở trên thì $a'b' > 2\sqrt{ab' \cdot a'b}$ hay $a'b' > 4ab$.

Bổ đề được chứng minh.

Trở lại bài toán, đặt $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}, B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ trong đó

$$a_1 < a_2 < \dots < a_m \text{ và } b_1 < b_2 < \dots < b_n.$$

Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $m \leq n$.

Vì $a_1 b_1 + 1$ là các số chính phương lớn hơn 1 nên $a_1 b_1 \neq 1, 2$.

Nếu $a_1 b_1 = 3$ thì ta có thể giả sử $a_1 = 1, b_1 = 3$.

Do các số $a_1 b_2 + 1, a_2 b_1 + 1$ cũng đều là các số chính phương và $a_1 < a_2, b_1 < b_2$ nên dễ dàng thấy rằng $a_2 \geq 5, b_2 \geq 8$ hay $a_2 b_2 > 5 \cdot 8 > 4^2$.

Do đó, từ $a_1 b_1 \geq 4$, ta cũng có $a_2 b_2 > 4^2$.

Áp dụng bổ đề chứng minh ở trên, ta có

$$a_{k+1} b_{k+1} > 4a_k b_k, \quad k = 1, 2, \dots, m-1.$$

Nếu $a_1 b_1 \geq 4$ thì $n^2 \geq a_m b_m > 4a_{m-1} b_{m-1} > \dots > 4^{m-1} a_1 b_1 \geq 4^m$.

Nếu $a_2 b_2 > 4^2$ thì $n^2 \geq a_m b_m > 4a_{m-1} b_{m-1} > \dots > 4^{m-2} a_2 b_2 > 4^m$.

Từ đó suy ra $m \leq \log_2 n$, đây chính là điều phải chứng minh.

Bài 2.

Tìm tất cả các số nguyên dương $k \geq 3$ thỏa mãn tính chất:

Tồn tại các số nguyên dương m, n sao cho

$$1 < m < k, 1 < n < k \text{ và } (m, k) = (n, k) = 1, m + n > k, \text{ đồng thời } k \mid (m-1)(n-1).$$

Lời giải.

Trước hết, ta thấy rằng nếu tồn tại số nguyên tố p sao cho $p^2 \mid k$ thì ta có thể chọn

$$m = n = k - \frac{k}{p} + 1 \quad \text{và} \quad \text{dễ dàng thấy rằng} \quad m + n = 2 \left(\frac{p-1}{p} \right) k + 2 > k,$$

$$(m-1)(n-1) = \frac{(p-1)^2 k^2}{p^2} \text{ là số nguyên nên thỏa mãn điều kiện đề bài.}$$

Xét số k không có ước nguyên tố nào có lũy thừa lớn hơn 1.

Nếu số k có hai ước nguyên tố $p_1 > q_1 \geq 3$, nên $(p_1 - 2)(p_2 - 2) \geq 4$, $p_1 p_2 \mid k$.

Đặt $k = p_1 p_2 \cdots p_r$ trong đó $p_1, p_2, \dots, p_r$ đôi một khác nhau, $r \geq 2$.

Trong hai số $(p_1 - 1)p_2 p_3 \cdots p_r + 1$ và $(p_1 - 2)p_2 p_3 \cdots p_r + 1$ có ít nhất một số nguyên tố cùng nhau với p_1 (vì nếu ngược lại thì p_1 chia hết hiệu của chúng là $p_2 p_3 \cdots p_r$, mâu thuẫn).

Xét số nguyên dương m mà $1 < m < k$, $(m, k) = 1$.

Tương tự, ta cũng có $(p_2 - 1)p_1 p_3 \cdots p_r + 1$ và $(p_2 - 2)p_1 p_3 \cdots p_r + 1$ là ước nguyên tố của n với $1 < n < k$, $(n, k) = 1$.

Do đó, $p_1 p_2 \cdots p_r \mid (m-1)(n-1)$ hay

$$\begin{aligned} m + n &\geq (p_1 - 2)p_2 p_3 \cdots p_r + 1 + (p_2 - 2)p_1 p_3 \cdots p_r + 1 \\ &= k + ((p_1 - 2)(p_2 - 2) - 4)p_3 \cdots p_r + 2 > k. \end{aligned}$$

thỏa mãn điều kiện đề bài.

Nếu k chỉ có hai ước nguyên tố là p_1, p_2 thì $(p_1 - 2)(p_2 - 2) \geq 4$, $p_1 p_2 \mid k$.

Dễ thấy rằng $k \geq 3$ thì có thể 15, 30 hoặc có dạng $p, 2p$ trong đó p là số nguyên tố.

Khi đó, các số có dạng $k = p, 2p, 30$ sẽ không thỏa mãn đề bài.

Với $k = 15$, ta có thể chọn $m = 11, n = 13$.

Do đó, với $k \geq 3$ thì tất cả các số cần tìm là các số các số tự nhiên trừ 30 và các số có dạng $p, 2p$ với p là số nguyên tố.

Bài 3.

Trong một hình vuông được tạo bởi 2012×2012 ô vuông có chứa những con bọ, trong một ô vuông có nhiều nhất 1 con bọ. Vào một thời điểm nào đó, những con bọ này bay lên rồi lại đậu xuống lại vào các ô vuông, mỗi ô vuông cũng có nhiều nhất một con bọ. Đối với mỗi con bọ, có thể xem đoạn thẳng có hướng nối tâm của ô vuông lúc đầu và tâm của lúc sau mà nó đậu lên tạo thành một vector.

Với một số lượng bọ ban đầu, xét tất cả những trường hợp có thể xảy ra với các vị trí đầu tiên và cuối cùng của những con bọ, hãy tìm độ dài lớn nhất của tổng các vector.

Lời giải.

Xét mặt phẳng chứa hình vuông đã cho là mặt phẳng tọa độ Oxy với O là tâm của hình vuông lớn.

Gọi tập hợp các tâm của tất cả các ô vuông nhỏ là S , tập hợp những điểm mà những con bọ dừng lại lúc đầu là $M_1 \subseteq S$, tập hợp những điểm mà những con bọ rơi xuống lúc sau là $M_2 \subseteq S$.

Bỏ qua trường hợp một con bọ ở cùng một nơi lúc đầu và lúc sau. Xét phép đặt tương ứng từ M_1 đến M_2 là f .

Để đơn giản, với một điểm $x \in S$, ta kí hiệu x là vector có điểm đầu là O , điểm cuối là x . Ta có tổng các vector được tính bằng
$$V = \sum_{v \in M_1} (f(v) - v) = \sum_{u \in M_2} u - \sum_{u \in M_1} v.$$

Dễ thấy rằng $M_1, M_2 \subseteq S, |M_1| = |M_2|$; đồng thời, do ta cần tìm giá trị lớn nhất của độ dài của vector V nêu trên nên chỉ cần xét trường hợp $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ (bởi vì nếu M_1, M_2 có giao khác rỗng thì phần giao của chúng sẽ cho các vector có độ dài bằng 0).

Do cách chọn M_1, M_2 hữu hạn nên sẽ tồn tại một cặp (M_1, M_2) nào đó mà $|V|$ đạt giá trị lớn nhất và hiển nhiên giá trị V đó khác 0. Qua O kẻ đường thẳng l vuông góc với V .

Ta sẽ chứng minh các bổ đề sau:

Bổ đề 1.

Nếu $|V|$ đạt giá trị cực đại thì đường thẳng l không đi qua bất kì điểm nào của S và M_1, M_2 nằm ở hai phía khác nhau so với l .

Chứng minh.

Đầu tiên ta thấy rằng $M_1 \cup M_2 = S$ vì nếu không thì do $|S| = 2012^2$ là số chẵn nên có ít nhất hai điểm a, b không có trong $M_1 \cup M_2$, có thể giả sử góc tạo bởi $a - b$ và V không quá 90° thì $|V + (a - b)| > |V|$ (nếu góc đó lớn hơn 90° thì xét $b - a$). Suy ra nếu thêm a vào M_2 , thêm b vào M_1 (hoặc ngược lại) thì $|V|$ tăng lên, mâu thuẫn do $|V|$ đạt giá trị cực đại.

Hơn nữa, $M_2 = -M_1$ vì nếu không thì trong M_1, M_2 đều có chứa ít nhất một cặp điểm đối xứng, cụ thể là $a, b \in S$ sao cho $a, -a \in M_1; b, -b \in M_2$.

Có thể giả sử $a - b$ và V hợp thành góc không quá 90° thì

$$\left| \sum_{u \in (M_2 \setminus \{b\}) \cup \{a\}} u - \sum_{v \in (M_1 \setminus \{a\}) \cup \{b\}} v \right| = |V + 2(a - b)| > |V|.$$

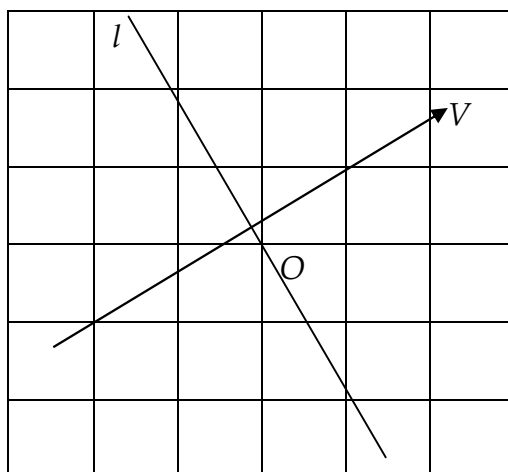
Điều này cũng mâu thuẫn với tính lớn nhất của $|V|$ hay M_1, M_2 là tập hợp các điểm đối xứng với nhau.

Ta cũng có l không đi qua bất kì điểm nào thuộc S vì nếu không thì do l đi qua O nên nếu l đi qua một điểm $a \in M_1$ thì nó cũng đi qua $-a \in M_2$. Khi đó, ta đổi chỗ, thay a vào M_2 , thay $-a$ vào M_1 thì tổng vector là $V + 4a$, chú ý rằng góc hợp bởi a và V là 90° nên $|V + 4a| > |V|$, mâu thuẫn.

Cuối cùng, ta cũng phải có M_2 là tập hợp các điểm nằm về một phía so với l , giả sử đây là phía có chứa điểm cuối của vector V và M_1 nằm về phía ngược lại vì nếu không

thì về phía có điểm cuối của vector V , tồn tại hai điểm a, b lần lượt thuộc M_1, M_2 thì góc hợp bởi $a-b$ và V nhỏ hơn 90° ; tương tự, ta lại thay a vào M_2 , b vào M_1 thì sẽ có

$|V + 2(b-a)| > |V|$, mâu thuẫn với tính lớn nhất của $|V|$.



Bổ đề 2.

Đặt $S_k = \left\{ (x, y) \in S \mid |x| = k - \frac{1}{2} \vee |y| = k - \frac{1}{2} \right\}$.

Xét l là một đường thẳng qua O nhưng không qua bất kì điểm nào của S_k . Gọi những điểm thuộc S_k nằm về một phía nào đó của l là A_k , phía còn lại là B_k .

Khi đó, giá trị lớn nhất của $|V_k| = \left| \sum_{u \in A_k} u - \sum_{v \in B_k} v \right|$ đạt được khi l vuông góc với V_k .

Chứng minh.

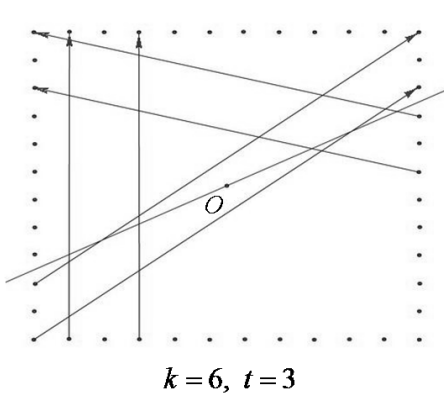
Các điểm của S_k nằm vào phía trong hình vuông lớn và dễ dàng thấy rằng các điểm này lập thành 4 đỉnh của hình vuông với cạnh có độ dài $2k$ là

$$A \left(k - \frac{1}{2}, k - \frac{1}{2} \right), B \left(-k + \frac{1}{2}, k - \frac{1}{2} \right), C \left(-k + \frac{1}{2}, -k + \frac{1}{2} \right), D \left(k - \frac{1}{2}, -k + \frac{1}{2} \right).$$

Do tính đối xứng, đường thẳng l cắt đoạn AD và góc nghiêng không âm, như vậy giao điểm giữa l và AD nằm giữa điểm thứ t và $t+1$ của S_k tính từ trên xuống. Ta có

$$\begin{aligned} V_k &= (2k-2)(2k-1)\vec{j} + (2k-t)\left(-(2k-1)\vec{i} + t\vec{j}\right) + t\left((2k-1)\vec{i} + (2k-t)\vec{j}\right) \\ &= -2(2k-1)(k-t)\vec{i} + 2\left(-(k-t)^2 + 3k^2 - 3k + 1\right)\vec{j} \end{aligned}$$

trong đó i, j là các vector đơn vị. Đặt $(k-t)^2 = u, 0 \leq u \leq k^2$ thì



$$\begin{aligned} \frac{1}{4}|V_k|^2 &= (2k-1)^2 u + u^2 - 2(3k^2 - 3k + 1)u + (3k^2 - 3k + 1)^2 \\ &= u^2 - (2k^2 - 2k + 1)u + (3k^2 - 3k + 1)^2 \end{aligned}$$

Các biểu thức trên có liên quan đến hàm số bậc hai của u với trục đối xứng là $u = k^2 - k + \frac{1}{2}$ nên dễ thấy rằng khi $u = 0$, $\frac{1}{4}|V_k|^2$ đạt giá trị lớn nhất hay $|V_k|$ đạt giá trị lớn nhất; lúc này, ta cũng có $t = k$ và l vuông góc với V_k .

Trở lại bài toán ban đầu,

Do tính đối xứng, ta chỉ cần xét trường hợp góc nghiêng không âm nhỏ hơn 90° ; gọi M_1, M_2 là những tập hợp điểm nằm về hai phía của l .

Đặt $M_2 \cap S_k = A_k, M_1 \cap S_k = B_k, V_k = \sum_{u \in A_k} u - \sum_{v \in B_k} v$ thì

$$|V| = \left| \sum_{k=1}^{1006} V_k \right| \leq \sum_{k=1}^{1006} |V_k| \Rightarrow |V|_{\max} \leq \sum_{k=1}^{1006} |V_k|_{\max}$$

Xét một đường thẳng l là đường thẳng đi qua O , song song với các cạnh của hình vuông thì M_2 nằm ở nửa phần trên, M_1 nằm ở nửa phần dưới và tất cả các giá trị $|V_k|$ đều đạt cực đại.

Suy ra $|V|_{\max} = 2 \cdot 1006^3$.

Vậy giá trị lớn nhất cần tìm là $2 \cdot 1006^3$. Bài toán được giải quyết hoàn toàn.