SAP
CHƯƠNG TRÌNH LUYỆN THI
Specialized in Advanced Placement

ĐÁP ÁN ĐỀ THI ĐẠI HỌC 2013
MÔN THI: TOÁN KHỐI A&A1
Thời gian làm bài: 90 phút
(Đáp án – thang điểm gồm 08 trang)

Ngày thi: 04/07/2013

I. PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH (7,0 *điểm*)

Câu 1 (2,0 *điểm*):

a. Với $m=0$ ta có $y=-x^3+3x^2-1$

Khảo sát hàm số

- Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.
- Ta có $y'=-3x^2+6x$.

  $y'=0 \Leftrightarrow -3x^2+6x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$
- Sự biến thiên
  - Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$.
  - Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$.
  - Hàm số đạt cực đại là $y_{CĐ}=3$ tại $x=2$ và đạt cực tiểu là $y_{CT}=-1$ tại $x=0$.
- Giới hạn

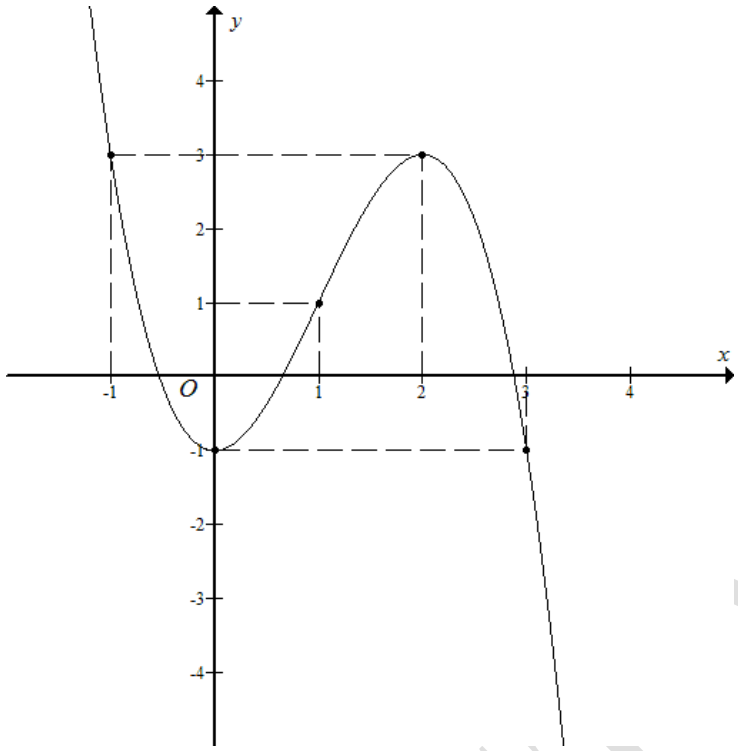
  Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x^3+3x^2-1\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x^3\left(-1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^3}\right)\right]=+\infty.$

  $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x^3+3x^2-1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^3\left(-1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^3}\right)\right]=-\infty.$
- Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	-1	↗	3	↘	$-\infty$

- Vẽ đồ thị

  Đồ thị hàm số đi qua các điểm $(-1;3);(0;-1);(1;1);(2;3)$ và $(3;-1)$.



b. $y=-x^3+3x^2+3mx-1$

$y'=-3x^2+6x+3m=3(-x+2x+m)$

Để hàm số (1) nghịch biến trên (0; $+\infty$) thì $y' \le 0$ trên (0; $+\infty$) hay

$-x^2+2x+m\le 0\ \forall x\in(0;+\infty)$

$\Leftrightarrow m\le x^2-2x\ \forall x\in(0;+\infty)$ (*)

Xét $g(x)=x^2-2x$ trên (0; $+\infty$)

$g'(x)=2x-2$

$g'(x)=0\Leftrightarrow x=1$

Suy ra $g(x)\ge g(1)=-1$.

(*) Xảy ra khi $m\le \min g(x)=-1; x\in(0;+\infty)$

Vậy $m \le$ -1.

Câu 2 (1,0 *điểm*):

Điều kiện: $\cos x\ne 0$.

Phương trình đã cho tương đương 1 + tan x = $2\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

$$\Leftrightarrow 1+\frac{\sin x}{\cos x}=2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin x+\cos x}{\cos x}=2(\sin x+\cos x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(\sin x+\cos x).\cos x-(\sin x+\cos x)}{\cos x}=0\quad (*)$$

Với $\cos x\ne 0$ ta có

$(*)\Leftrightarrow(\sin x+\cos x)(2\cos x-1)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x+\cos x=0\\ 2\cos x-1=0\end{array}\right.$$

MEGATEST.VN

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi \\ \cos x=\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{3}+l2\pi \qquad (k,l\in\mathbb{Z}) \\ x=-\dfrac{\pi}{3}+l2\pi \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có ba họ nghiệm là $-\dfrac{\pi}{4}+k\pi;\dfrac{\pi}{3}+l2\pi$ và $-\dfrac{\pi}{3}+l2\pi$ với $k,l\in\mathbb{Z}$.

Câu 3 (1,0 *điểm*):

$$\begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt[4]{x-1}-\sqrt{y^4+2}=y \quad (1) \\ x^2+2x(y-1)+y^2-6y+1=0 \quad (2) \end{cases}$$

Điều kiện: $x\ge 1$

Từ phương trình (2) ta có $x^2+2x(y-1)+(y-1)^2=4y$

$\Leftrightarrow (x+y-1)^2=4y$ (*).

Suy ra, $y\ge 0$.

Đặt $\sqrt[4]{x-1}=t$. Điều kiện $t\ge 0$.

Phương trình $(1)\Leftrightarrow \sqrt{t^4+2}+t=\sqrt{y^4+2}+y$

Khảo sát hàm số $f(t)=\sqrt{t^4+2}+t$. Với $t\ge 0$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{2t^3}{\sqrt{t^4+2}}+1>0$ với $\forall t\ge 0$.

Suy ra, hàm số đồng biến với $\forall t\ge 0$.

Do vậy, $(1)\Leftrightarrow t=y\Leftrightarrow y=\sqrt[4]{x-1}\Leftrightarrow x=y^4+1$.

Thay vào phương trình (*) ta được

$(y^4+1+y-1)^2=4y$

$\Leftrightarrow (y^4+y)^2=4y$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \\ y(y^3+1)^2=4 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \\ (y-1)(y^6+y^5+y^4+3y^3+3y^2+3y+4)=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=1 \end{array}\right.$$

Vậy $y=0\Rightarrow x=1$ và $y=1\Rightarrow x=2$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $x=1;y=0$ và $x=2;y=1$.

Câu 4 (1,0 *điểm*):

Ta có $I=\displaystyle\int_1^2 \frac{x^2-1}{x^2}\ln x\,\mathrm{d}x=\int_1^2 \ln x\,\mathrm{d}x-\int_1^2 \frac{1}{x^2}\ln x\,\mathrm{d}x$

- Tính $J=\displaystyle\int_1^2 \ln x\,\mathrm{d}x$.

MEGATEST.VN

Đặt $u=\ln x \Rightarrow \mathrm{d}u=\frac{1}{x}\mathrm{d}x$ và $\mathrm{d}v=\mathrm{d}x \Rightarrow v=x.$

Do vậy, $J=\int_1^2 \ln x\,\mathrm{d}x = x.\ln x\Big|_1^2 - \int_1^2 \mathrm{d}x = 2\ln 2 - x\Big|_1^2 = 2\ln 2-1.$

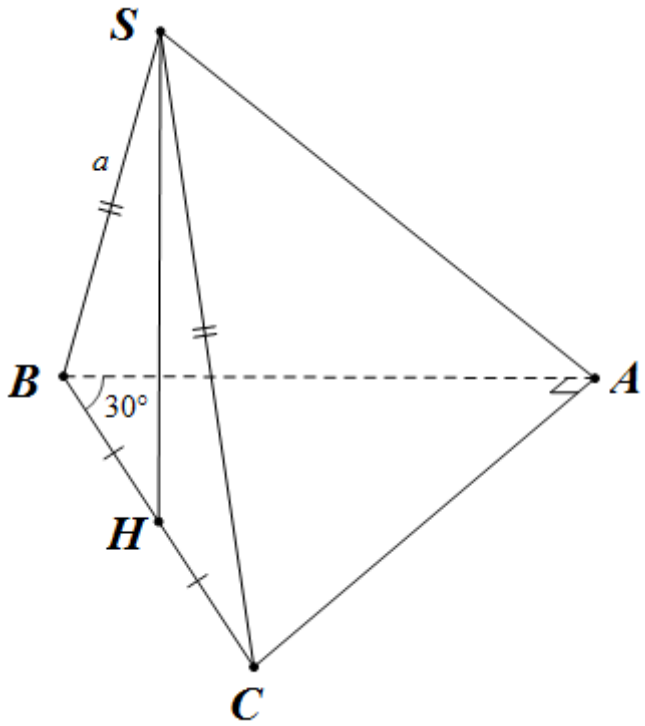
- Tính $K=\int_1^2 \frac{1}{x^2}\ln x\,\mathrm{d}x$.

Đặt $u=\ln x \Rightarrow \mathrm{d}u=\frac{1}{x}\mathrm{d}x$ và $\mathrm{d}v=\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x \Rightarrow v=-\frac{1}{x}.$

Do vậy, $K=\int_1^2 \frac{1}{x^2}\ln x\,\mathrm{d}x = -\frac{\ln x}{x}\Big|_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = -\frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{x}\Big|_1^2 = \frac{1-\ln 2}{2}.$

Vậy $I=J+K=2\ln 2-1+\frac{1-\ln 2}{2}=\frac{3\ln 2-1}{2}.$

Câu 5 (1,0 *điểm*):



Gọi H là trung điểm cạnh BC. Suy ra $SH \perp (ABC)$.

+) ΔABC vuông ở A có $\hat{B}=30^0$

$\Rightarrow AB = BC.\cos 30^0 = a.\frac{\sqrt{3}}{2}$

$AC = BC.\sin 30^0 = \frac{a}{2}$

$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}BA.AC = \frac{1}{8}a^2\sqrt{3}$

Ta có đường cao $SH = SB.\sin 60° = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$\Rightarrow V_{SABC} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SH = \frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{8}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3}{16}$ (đvtt)

2) $AH=\frac{a}{2}$ (Trung tuyến tam giác ABC ứng với cạnh huyền BC)

$SH=\frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \mathrm{AS}=\sqrt{SH^2+AH^2}=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}=a$

Gọi I là trung điểm cạnh $AB \Rightarrow SI \perp AB$.

Ta có: $SI=\sqrt{IH^2+SH^2}=\sqrt{\left(\frac{a}{4}\right)^2+\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{13}}{4}$ $\left(IH=\frac{1}{2}AC\right)$.

Suy ra $S_{\Delta SAB}=\frac{1}{2}AB.SI=\frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{a\sqrt{13}}{4}=\frac{a^2\sqrt{39}}{16}$

Suy ra $V_{SABC}=\frac{1}{3}S_{\Delta SAB}.CK$ (CK là khoảng cách từ C đến (SAB)).

$\Rightarrow CK=\frac{3V_{S.ABC}}{S_{\Delta SAB}}=\frac{3.\frac{a^3}{16}}{\frac{a^2\sqrt{39}}{16}}=\frac{3a}{\sqrt{39}}$

Câu 6 (1,0 *điểm*):

Ta có $(a+c)(b+c)=4c^2$

$\Leftrightarrow \dfrac{(a+c)(b+c)}{c^2}=4$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{a}{c}+1\right).\left(\dfrac{b}{c}+1\right)=4$

Đặt $x=\dfrac{a}{c}; y=\dfrac{b}{c} \Rightarrow x>0, y>0$

$\left(\dfrac{a}{c}+1\right).\left(\dfrac{b}{c}+1\right)=4 \Leftrightarrow (x+1)(y+1)=4$

$\Leftrightarrow xy+x+y=3$

Đặt $x+y=S \Rightarrow xy=3-S$

Mặt khác:

$4xy \le (x+y)^2$

$\Rightarrow 4(3-S) \le S^2$

$\Leftrightarrow S^2+4S-12 \ge 0.$

$\Leftrightarrow (S-2)(S+6) \ge 0$

Do $S \ge 0 \Rightarrow S \ge 2$.

$$P=\frac{32a^3}{(b+3c)^3}+\frac{32b^3}{(a+3c)^3}-\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{c}$$

$$P=32\left(\frac{\left(\frac{a}{c}\right)^3}{\left(\frac{b+3c}{c}\right)^3}+\frac{\left(\frac{b}{c}\right)^3}{\left(\frac{a+3c}{c}\right)^3}\right)-\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{c}$$

$$P=32\left(\frac{x^3}{(y+3)^3}+\frac{y^3}{(x+3)^3}\right)-\sqrt{\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2}$$

$$P=32\left(\frac{x^3}{(y+3)^3}+\frac{y^3}{(x+3)^3}\right)-\sqrt{x^2+y^2}$$

Áp dụng $4\left(m^3+n^3\right) \ge \left(m+n\right)^3$

(Vì $\left(m+n\right)\left(m-n\right)^2 \ge 0$ với mọi $m,n>0$)

$$P \ge 8.\left(\frac{x}{y+3}+\frac{y}{x+3}\right)^3-\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\Leftrightarrow P \ge 8.\left(\frac{x^2+3x+y^2+3y}{xy+3x+3y+9}\right)^3-\sqrt{x^2+y^2}$$

MEGATEST.VN

thay $S = x + y;\ xy = 3 - S\ ;(S \ge 2)$

$$P \ge 8\left(\frac{(x+y)^2 + 3(x+y) - 2xy}{xy + 3(x+y) + 9}\right)^3 - \sqrt{(x+y)^2 - 2xy}$$

$$\Leftrightarrow P \ge 8\left(\frac{S^2 + 3S - 2(3-S)}{3 - S + 3S + 9}\right)^3 - \sqrt{S^2 - 2(3-S)}$$

$$\Leftrightarrow P \ge 8\left(\frac{(S-1)(S+6)}{2(S+6)}\right)^3 - \sqrt{S^2 - 2(3-S)}$$

$$\Leftrightarrow P \ge (S-1)^3 - \sqrt{S^2 + 2S - 6};\quad S \ge 2$$

coi đây là hàm ẩn S ta có

$$P'_{(S)} = 3(S-1)^2 - \frac{S+1}{\sqrt{S^2+2S-6}} \ge 3 - \frac{S+1}{\sqrt{S^2+2S-6}}$$

$$\frac{3\sqrt{S^2+2S-6} - (S+1)}{\sqrt{S^2+2S-6}} \ge 0 \text{ (với } S \ge 2 \text{)}$$

Suy ra $P \ge P_{(2)} = 1 - \sqrt{2}$ suy ra

$P_{\min} = 1 - \sqrt{2} \Leftrightarrow x + y = 2;\ x.y = 1 \Leftrightarrow x = y = 1 \Leftrightarrow a = b = c = 1.$

II. PHẦN RIÊNG (3,0 *điểm*) *Thí sinh chỉ được làm một trong hai phần (phần A hoặc B)*

A. Theo chương trình Chuẩn

Câu 7.a (1,0 *điểm*):

Điểm $C(t;-2t-5)$ thuộc đường thẳng $2x + y + 5 = 0.$

Gọi I là trung điểm của AC.

Ta có tọa độ của I là $I\left(\frac{t-4}{2};\frac{-2t+3}{2}\right).$

Xét tam giác vuông ABD ta có $IA = \frac{1}{2}BD$.

Xét tam giác vuông BND ta có $IN = \frac{1}{2}BD.$

Suy ra, $IN = IA$

$\Leftrightarrow IN^2 = IA^2$

$$\Leftrightarrow \left(5 - \frac{t-4}{2}\right)^2 + \left(-4 - \frac{-2t+3}{2}\right)^2 = \left(-4 - \frac{t-4}{2}\right)^2 + \left(8 - \frac{-2t+3}{2}\right)^2$$

$\Leftrightarrow t = 1.$

Suy ra $C(1;-7).$

Ta có $AIND$ là hình bình hành. Suy ra, $\overrightarrow{IN} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

Suy ra, $\begin{cases} 1 - x_B = 5 + \frac{3}{2} \\ -7 - y_B = -4 + \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = -\frac{11}{2} \\ y_B = -\frac{5}{2} \end{cases}$

Vậy $B\left(-\frac{11}{2};\frac{-5}{2}\right);C(1;-7).$

MEGATEST.VN

Câu 8.a (1,0 *điểm*):

Mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(1;7;3)$ và vuông góc với đường thẳng (Δ) có phương trình là

$-3(x-1)-2(y-7)+1(z-3)=0 \Leftrightarrow -3x-2y+z+14=0$.

Điểm M thuộc đường thẳng (Δ) nên có tọa độ $M(6-3t;-1-2t;-2+t)$ với $t \in \mathbb{R}$.

Ta có $AM^2=(-6-3t-1)^2+(-1-2t-7)^2+(-2+t-3)^2=14t^2-8t+114$.

Theo giả thiết $AM=2\sqrt{30} \Leftrightarrow AM^2=120$

$\Leftrightarrow 14t^2-8t+114=120$

$\Leftrightarrow 14t^2-8t-6=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-\dfrac{3}{7} \end{array}\right.$

Với $t=1$ ta có $M(3;-3;-1)$.

Với $t=-\dfrac{3}{7}$ ta có $M\left(\dfrac{51}{7};-\dfrac{1}{7};-\dfrac{17}{7}\right)$.

Vậy có hai điểm thỏa mãn là $M(3;-3;-1)$ và $M\left(\dfrac{51}{7};-\dfrac{1}{7};-\dfrac{17}{7}\right)$.

Câu 9.a (1,0 *điểm*):

Số các phần tử trong tập hợp S là $A_7^3=210$ số

Số các số chẵn trong tập hợp S là $A_6^2.3=90$ số.

Xác suất chọn được số phần tử chẵn là $P=\dfrac{90}{210}=42,86\%$.

B. Theo chương trình Nâng cao

Câu 7.b (1,0 *điểm*):

$(\Delta): x-y=0$

$(C): R=\sqrt{10}, AB=4\sqrt{2}$

Gọi I là tâm đường tròn.

Gọi M là trung điểm AB.

Ta có $MA=\dfrac{AB}{2}=2\sqrt{2}$.

Suy ra, $IM=\sqrt{IA^2+AM^2}=\sqrt{2}$.

Gọi N và giao điểm của hai tiếp tuyến A và B.

$\Rightarrow N \in (Oy) \Rightarrow N(0;b)$

$d(N,\Delta)=MN=\dfrac{MA^2}{IA}=4\sqrt{2}=\dfrac{|b|}{\sqrt{2}}$.

Ta có

$\Rightarrow b=\pm 8$

+) $b=8 \Rightarrow N(0;8)$.

Phương trình đường thẳng IN là $x+y-8=0$.

Suy ra, $I(t;8-t)$.

Và $IN=IM+MN=5\sqrt{2}$.

Suy ra, $IN^2=2t^2=50 \Leftrightarrow t=\pm 5$.

MEGATEST.VN

Với $t=5\Rightarrow I(5;3)$ thỏa mãn vì *I* và *N* khác phía với bờ là *AB*.

Với $t=-5\Rightarrow I(-5;13)$ loại vì *I* và *N* cùng phía với bờ là *AB*.

Vậy phương trình đường tròn là $(x-5)^2+(y-3)^2=10$.

+) b= -8 $\Rightarrow N(0;-8)$.

Phương trình đường thẳng *IN* là $x+y-8=0$.

Suy ra, $I(t;-8-t)$.

Và $IN=IM+MN=5\sqrt{2}$.

Suy ra, $IN^2=2t^2=50\Leftrightarrow t=\pm 5$.

Với $t=5\Rightarrow I(5;-13)$ loại vì *I* và *N* cùng phía với bờ là *AB*.

Với $t=-5\Rightarrow I(-5;-3)$ thỏa mãn vì *I* và *N* khác phía với bờ là *AB*.

Vậy phương trình đường tròn là $(x+5)^2+(y+3)^2=10$.

Vậy có hai đường tròn là $(x-5)^2+(y-3)^2=10$ và $(x+5)^2+(y+3)^2=10$.

Câu 8.b (1,0 *điểm*):

$(P): 2x+3y+z-11=0$

$(S): x^2+y^2+z^2-2x+4y-2z-8=0$

(S) có tâm $I(1;-2;1)$, $R=\sqrt{14}$.

$$d_{(I,(P))}=\frac{|2.1-3.2+1.1-11|}{\sqrt{2^2+3^2+1^2}}=\frac{14}{\sqrt{14}}=R.$$

Vậy mặt phẳng (*P*) tiếp xúc với mặt chiếu (*S*) $\Rightarrow$ đpcm.

Lập phương trình đường thẳng (Δ)

$$\begin{cases}\text{qua } I(1;-2;1)\\ \vec{u}_\Delta=\vec{n}_{(P)}=(2;3;1)\end{cases}\text{ suy ra } (\Delta)\begin{cases}x=1+2t\\ y=-2+3t\\ z=1+t\end{cases}$$

Tọa độ tiếp điểm *M* của (*P*) và (*S*) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}x=1+2t\\ y=-2+3t\\ z=1+t\\ 2x+3y+z-11=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=1\\ x=3\\ y=1\\ z=2\end{cases}$$

Vậy tọa độ $M(3;1;2)$ là tiếp điểm cần tìm.

Câu 9.b (1,0 *điểm*):

Ta có dạng lượng giác của $z=1+i\sqrt{3}$ là $z=2\sin\frac{\pi}{6}+i.2\cos\frac{\pi}{6}=2\left(\sin\frac{\pi}{6}+i.\cos\frac{\pi}{6}\right)$.

Suy ra, $z^5=2^5\left(\sin\left(5.\frac{\pi}{6}\right)+i.\cos\left(5.\frac{\pi}{6}\right)\right)=32\left(\frac{1}{2}-i.\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=16-i.16\sqrt{3}$.

Vậy $w=(1+i)z^5=(1+i)\left(16-i.16\sqrt{3}\right)=16\left(\sqrt{3}+1\right)-i.16\left(\sqrt{3}-1\right)$.

Suy ra, phần thực của w là $16\left(\sqrt{3}+1\right)$ và phần ảo là $-16\left(\sqrt{3}-1\right)$.

HOCMAI.VN Đống Đa *57/163 Xã Đàn, Đống Đa, Hà Nội.* **ĐT: 04 3629 0880**

MEGATEST.VN