TUYỂN TẬP CÁC BÀI TOÁN VỀ ELIP LUYỆN THI ĐẠI HỌC

Lê Minh An
Trường Đại học sư phạm Thái Nguyên
Thành viên VMF - http://www.diendantoanhoc.net/forum

14 – 07 – 2013

Diễn đàn Toán học – http://www.diendantoanhoc.net/forum

LỜI NÓI ĐẦU

Các bài tập về Elip thường hay xuất hiện trong các đề thi Đại học, cao đẳng. Vì vậy tài liệu này nhằm mục đích giúp việc tự ôn tập của học sinh và việc giảng dạy của các thầy cô giáo thêm hiệu quả.

Tài liệu bao gồm 3 phần chính:

Phần 1: Tóm tắt lý thuyết

Phần 2: Một số lưu ý khi giải toán

Phần 3: Tuyển tập các bài toán, lời giải hoặc hướng dẫn

Phần 1 và 2 là một phần chuyên đề mà tác giả đã viết trước đó có bổ sung thêm một mục nhỏ về bài toán cực trị trong Elip. Phần 3 cũng là nội dung chính của tài liệu, là tuyển tập các bài toán về Elip với các dạng bài thường xuất hiện trong kì thi Đại học, cao đẳng. Các bài tập được tác giả sưu tập từ các đề thi thử Đại học 2013 và trên các diễn đàn toán học như Diendantoanhoc.net/forum - VMF, Boxmath.vn, K2pi.net.

Do thời gian có hạn nên mặc dù đã cố gắng nhưng số lượng bài tập tác giả sưu tập được chưa nhiều (khoảng 40 bài) và chắc chắn vẫn còn những sai sót. Vì vậy, trong quá trình sử dụng tài liệu, rất mong các bạn và các thầy cô có những ý kiến đóng góp hoặc gửi thêm các bài tập hay để tài liệu này hoàn thiện hơn trong một phiên bản khác.

Email: alm.maths@gmail.com

Diễn đàn Toán học – http://www.diendantoanhoc.net/forum

Mục lục

1 Tóm tắt lý thuyết **5**

1.1 Định nghĩa: 5

1.2 Phương trình chính tắc của Elip 5

1.3 Hình dạng và tính chất của Elip 5

2 Một số lưu ý khi giải toán **6**

2.1 Viết phương trình chính tắc của elip 6

2.2 Tìm điểm thuộc elip 7

2.3 Bài toán cực trị liên quan đến Elip 8

3 Tuyển tập các đề toán **10**

3.1 Bài toán Elip qua các kì thi thử 2013 10

3.2 Các bài tập sưu tầm 13

4 Lời giải hoặc hướng dẫn **15**

4.1 Bài toán Elip qua các kì thi thử 2013 15

4.2 Các bài tập sưu tầm 25

5 Phụ Lục **30**

5.1 Các bài toán Elip đã thi 30

5.2 Một topic thảo luận trên VMF 31

Diễn đàn Toán học – http://www.diendantoanhoc.net/forum

Diễn đàn Toán học – http://www.diendantoanhoc.net/forum

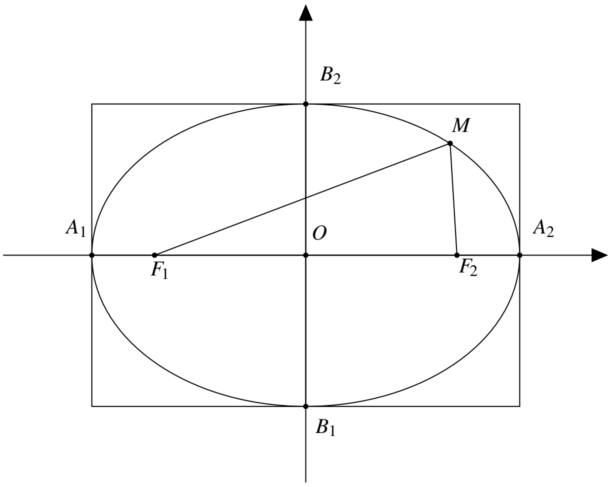
1 Tóm tắt lý thuyết

1.1 Định nghĩa:

Cho hai điểm cố định F_1, F_2 với $F_1F_2 = 2c$ và một độ dài không đổi $2a(a > c)$. Elip là tập hợp những điểm M sao cho:

$$F_1M + F_2M = 2a$$

Ta gọi: F_1, F_2: Tiêu điểm, $F_1F_2 = 2c$: Tiêu cự, F_1M, F_2M: Bán kính qua tiêu.



1.2 Phương trình chính tắc của Elip

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy với $F_1(-c;0), F_2(c;0)$:

$$M(x;y) \in (E) \Leftrightarrow \boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \quad (1).$$

Trong đó: $b^2 = a^2 - c^2$

(1) được gọi là phương trình chính tắc của (E)

1.3 Hình dạng và tính chất của Elip

Elip có phương trình (1) nhận các trục tọa độ là trục đối xứng và gốc tọa độ làm tâm đối xứng.

+ Tiêu điểm: Tiêu điểm trái $F_1(-c;0)$, tiêu điểm phải $F_2(c;0)$

+ Các đỉnh: $A_1(-a;0), A_2(a;0), B_1(0;-b), B_2(0;b)$

+ Trục lớn: $A_1A_2 = 2a$, nằm trên trục Ox; Trục nhỏ: $B_1B_2 = 2b$, nằm trên trục Oy

+ Hình chữ nhật cơ sở: Là hình chữ nhật tạo bởi các đường thẳng $x = \pm a$, $y = \pm b$

Từ đó ta thấy hình chữ nhật cơ sở có chiều dài là $2a$ và chiều rộng là $2b$

+ Tâm sai: $\boxed{e = \frac{c}{a} < 1}$

+ Bán kính qua tiêu của điểm $M(x_M, y_M) \in (E)$ là:

$$MF_1 = a + ex_M = a + \frac{cx_M}{a}, \quad MF_2 = a - ex_M = a - \frac{ax_M}{c}$$

+ Đường chuẩn của Elip:

Đường thẳng $\Delta_1 : x + \frac{a}{e} = 0$ được gọi là đường chuẩn của elip, ứng với tiêu điểm $F_1(-c;0)$

Đường thẳng $\Delta_2 : x - \frac{a}{e} = 0$ được gọi là đường chuẩn của elip, ứng với tiêu điểm $F_2(c;0)$

Diễn đàn Toán học – http://www.diendantoanhoc.net/forum

2 Một số lưu ý khi giải toán

2.1 Viết phương trình chính tắc của elip

Các bước thực hiện:

Bước 1: Giả sử phương trình chính tắc của elip là: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)\quad (E)$

Bước 2: Sử dụng các dữ kiện bài toán thiết lập các phương trình tìm a,b (hoặc tìm trực tiếp a^2,b^2)

Chú ý các kiến thức liên quan đến a,b, chẳng hạn: tọa độ tiêu điểm, tọa độ đỉnh, tâm sai, $b^2=a^2-c^2$...

Ví dụ: (B-2012) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thoi $ABCD$ có $AC=2BD$ và đường tròn tiếp xúc với các cạnh của hình thoi có phương trình $x^2+y^2=4$. Viết phương trình chính tắc của elip (E) đi qua các đỉnh A,B,C,D của hình thoi. Biết điểm A nằm trên trục Ox

Nhận định:

- Các đặc điểm của hình thoi:

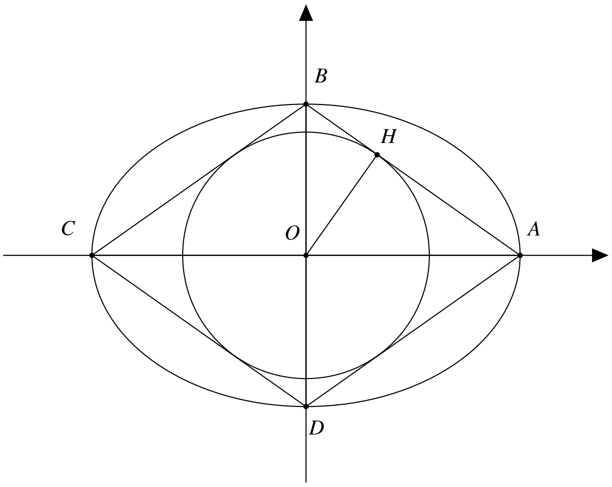
Đường tròn nội tiếp có phương trình: $x^2+y^2=4$. (Tâm $O(0;0)$, bán kính $R=2$)

Tâm đường tròn nội tiếp là tâm của hình thoi $\longrightarrow$ Gốc tọa độ O là tâm của hình thoi. $O=AC\cap BD$

$A\in Ox\longrightarrow C\in Ox$, $BD\perp AC\longrightarrow B,D\in Oy$

- $A,B,C,D\in(E)\longrightarrow A,C=(E)\cap Ox;\quad B,D=(E)\cap Oy\longrightarrow A,B,C,D$ là các đỉnh của (E)!

- Như vậy ta xác định được mối liên hệ giữa đỉnh của (E) và hình thoi. Với hai điều kiện $AC=2BD$ và đường tròn nội tiếp hình thoi có bán kính $R=2$ ta lập được hai phương trình giải quyết bài toán.



Lời giải:

Giả sử phương trình của elip (E) là: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$

Ta có: Đường tròn (C): $x^2+y^2=4$ là đường tròn nội tiếp hình thoi ABCD, có tâm $O(0;0)$, bán kính $R=2$

Vì tâm của (C) là tâm của hình thoi nên AC và BD vuông góc với nhau tại trung điểm O của mỗi đường

Mà $A\in Ox\Rightarrow C\in Ox$ và $B,D\in Oy$

Lại có: $A,B,C,D\in(E)\Rightarrow A,B,C,D$ là bốn đỉnh của (E)

Nếu đổi chỗ A và C cho nhau hoặc B và D cho nhau thì Elip không thay đổi nên ta có thể giả sử A,B lần lượt nằm ở nửa trục dương của Ox và Oy, khi đó tọa độ của chúng là $A(a;0),B(0;b)$

Diễn đàn Toán học – http://www.diendantoanhoc.net/forum

$\Rightarrow OA = a, OB = b$. Vì $AC = 2BD$ nên $OA = 2OB \Rightarrow a = 2b$
Kẻ OH vuông góc với AB tại H $\Rightarrow OH = R = 2$
Vì tam giác ABO vuông tại O

$$\Rightarrow \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} \Leftrightarrow \frac{1}{4} = \frac{1}{a^2} + \frac{4}{a^2} \Leftrightarrow a^2 = 20 \Rightarrow b^2 = 5$$

Vậy phương trình (E) là: $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$

Diễn đàn Toán học – http://www.diendantoanhoc.net/forum

2.2 Tìm điểm thuộc elip

Các bước thực hiện:
Bước 1: Xác định "**từ khóa**" liên quan đến điểm cần tìm, cố gắng chuyển chúng thành công thức tương ứng.
Bước 2: Từ giả thiết, thiết lập phương trình tìm tọa độ của điểm. Chú ý rằng ta luôn có một phương trình do điểm cần tìm thuộc (E).

Ví dụ: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho elip $(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} = 1$. Tìm trên (E) những điểm t/m:
1. Có bán kính qua tiêu điểm này bằng 3 lần bán kính qua tiêu điểm kia?
2. Nhìn hai tiêu điểm dưới góc vuông.

Lời giải:

$$(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} = 1 \Rightarrow a = 3, b = 1 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} = 2\sqrt{2}$$

1. Từ khóa cần quan tâm "**bán kính qua tiêu**"
Gọi $M(x_o, y_o)$ là điểm phải tìm. Khi đó bán kính qua tiêu của M là:

$$MF_1 = a + ex_o = a + \frac{cx_o}{a}, \quad MF_2 = a - ex_o = a - \frac{cx_o}{a}$$

Từ giả thiết suy ra:

$$\left[\begin{array}{l} MF_1 = 3MF_2 \\ MF_2 = 3MF_1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} MF_1 - 3MF_2 = 0 \\ MF_2 - 3MF_1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow (MF_1 - 3MF_2)(MF_2 - 3MF_1) = 0 \quad (1)$$

Khai triển rút gọn ta được:

$$(1) \Leftrightarrow 16MF_1.MF_2 - 3(MF_1 + MF_2)^2 = 0 \Leftrightarrow 16(a + ex_o)(a - ex_o) - 3(2a)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_o^2 = \frac{a^2}{4e^2} = \frac{a^4}{4c^2} = \frac{81}{32} \Leftrightarrow x_o = \pm\frac{9\sqrt{2}}{8}$$

Lại có: $M \in (E) \Rightarrow y_o^2 = 1 - \frac{x_o^2}{9} = \frac{23}{32} \Leftrightarrow y_o = \pm\frac{\sqrt{46}}{8}$.

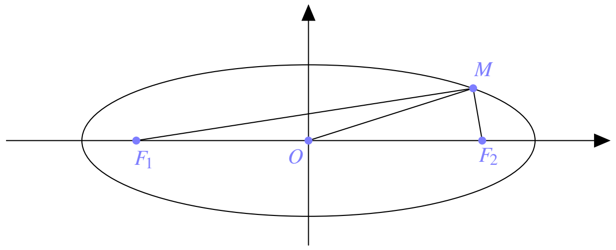
Đáp số: $M_1\left(\frac{9\sqrt{2}}{8}; \frac{\sqrt{46}}{8}\right); M_2\left(\frac{9\sqrt{2}}{8}; -\frac{\sqrt{46}}{8}\right); M_3\left(-\frac{9\sqrt{2}}{8}; \frac{\sqrt{46}}{8}\right); M_4\left(-\frac{9\sqrt{2}}{8}; -\frac{\sqrt{46}}{8}\right)$

Nhận xét:

− Trong giải toán, ta thường chỉ quen với chiều biến đổi $AB = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} A = 0 \\ B = 0 \end{array}\right.$ nhưng trong nhiều

trường hợp biến đổi theo chiều ngược lại sẽ giúp việc giải bài toán ngắn gọn hơn rất nhiều, mà bài toán trên là một ví dụ.
– Ở bài toán này, việc biến đổi rút gọn cũng là một công việc khá vất vả nếu không có những nhận xét tinh tế, cần chú ý rằng $MF_1 + MF_2 = 2a$
– Khi kết luận cần chú ý lấy đủ nghiệm, nhiều bạn thường nhầm lẫn chỉ lấy hai nghiệm M_1, M_4.

2. Từ khóa "**góc vuông**"



Với góc $\widehat{F_1MF_2} = 90^o$ thì ta có các "công thức" tương đương:
1. $MF_1^2 + MF_2^2 = F_1F_2^2$; 2. $MO = \dfrac{F_1F_2}{2} = OF_2$; 3. $\overrightarrow{MF_1}.\overrightarrow{MF_2} = 0$
Với từng "công thức" ta sẽ được các hướng làm khác nhau tương ứng, dưới đây tôi trình bày hai cách có thể nói là khá ngắn gọn.
Gọi $M(x_o; y_o)$ là điểm cần tìm. $M \in (E)$ nên $\dfrac{x_o^2}{9} + y_o^2 = 1 \quad (1)$
Cách 1:
Chú ý rằng MF_1, MF_2 là bán kính qua tiêu, nên ta có:
$\widehat{F_1MF_2} = 90^o \Leftrightarrow MF_1^2 + MF_2^2 = F_1F_2^2 \Leftrightarrow (a + ex_o)^2 + (a - ex_o)^2 = 32 \Leftrightarrow x_o^2 = \dfrac{(16 - a^2)a^2}{c^2} = \dfrac{63}{8}$
Từ (1) suy ra: $y_o^2 = \dfrac{1}{8}$.
Cách 2:
Điểm M nhìn F_1, F_2 dưới một góc vuông nên ΔMF_1F_2 vuông tại M.
Mà dễ thấy O là trung điểm của F_1F_2 nên $OM = \dfrac{F_1F_2}{2} \Leftrightarrow x_o^2 + y_o^2 = 8 \quad (2)$
Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:

$$(I) \quad \begin{cases} \dfrac{x_o^2}{9} + y_o^2 = 1 \\ x_o^2 + y_o^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_o^2 = \dfrac{63}{8} \\ y_o^2 = \dfrac{1}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_o = \pm\dfrac{3\sqrt{14}}{4} \\ y_o = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

Nhận xét: Ở cách 2 có thể giải thích theo cách khác như sau:
Do M nhìn F_1, F_2 dưới một góc vuông nên M nằm trên đường tròn (C) nhận F_1F_2 làm đường kính.
Tức là (C) có tâm O bán kính $\dfrac{F_1F_2}{2} = 2\sqrt{2}$
$\Rightarrow M$ là giao điểm của (E) và $(C) : x^2 + y^2 = 8$. Do đó tọa độ M là nghiệm hệ (I).
Đáp số: $M_1\left(\dfrac{3\sqrt{14}}{4}; \dfrac{\sqrt{2}}{4}\right); M_2\left(\dfrac{3\sqrt{14}}{4}; -\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right); M_3\left(-\dfrac{3\sqrt{14}}{4}; \dfrac{\sqrt{2}}{4}\right); M_4\left(-\dfrac{3\sqrt{14}}{4}; -\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$

2.3 Bài toán cực trị liên quan đến Elip

$$\forall M(x_M, y_M) \in (E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Diễn đàn Toán học – http://www.diendantoanhoc.net/forum

Ta có:

1. $x_M \in [-a;a]$ và $y_M \in [-b;b]$

2. Do $\dfrac{x_M^2}{a^2}+\dfrac{y_M^2}{b^2}=1$, nên nếu đặt $\dfrac{x_M}{a}=\sin\alpha \Leftrightarrow x_M=a\sin\alpha$, thì $\dfrac{y_M}{b}=\cos\alpha \Leftrightarrow y_M=b\cos\alpha$
$\Rightarrow \forall M\in(E)$ tọa độ M có thể viết thành $M(a\sin\alpha;b\cos\alpha)$ $\left(\alpha\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]\right)$

3. Thường sử dụng các BĐT quen thuộc:
$$(mn+pq)^2\le(m^2+p^2)(n^2+q^2)$$
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $mq=np$.
$$mn\le\frac{1}{2}(m^2+n^2)$$
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $m=n$.

Ví dụ: (Thi Thử tạp chí THTT 05 - 2013)
Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(3;4)$, $B(5;3)$. Xác định điểm M trên đường elip $(E):\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1$ sao cho diện tích tam giác MAB có diện tích nhỏ nhất.

Lời giải:
Cách 1: Ta có $AB=\sqrt{5}$ và $AB: x+2y-11=0$.
Vì $M\in(E)$ nên ta có thể gọi $M(2\sqrt{2}\sin\alpha;\ \sqrt{2}\cos\alpha)$ với $\alpha\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$. Khi đó
$$d(M,AB)=\frac{\left|2\sqrt{2}(\sin\alpha+\cos\alpha)-11\right|}{\sqrt{5}}=\frac{11-4\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{5}}\ge\frac{7}{\sqrt{5}}$$
Suy ra
$$(d(M,AB))_{min}=\frac{7}{\sqrt{5}} \iff \sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=1 \iff \alpha=\frac{\pi}{4}.$$
Do đó,
$$\min S_{\Delta AMB}=\frac{1}{2}\left(d(M,AB)\right)_{min}\cdot AB=7 \iff M(2;1).$$
Cách 2: Ta có $AB=\sqrt{5}$ và $AB: x+2y-11=0$. Gọi $M(a;b)\in(E)$. Khi đó
$$\frac{a^2}{8}+\frac{b^2}{2}=1(*)$$
Từ $(*)$ suy ra $|a|\le2\sqrt{2},\ |b|\le\sqrt{2}\Rightarrow a+2b<11$
$$d(M,AB)=\frac{|a+2b-11|}{\sqrt{5}}=\frac{11-(a+2b)}{\sqrt{5}}$$
Sử dụng $Cauchy-Schwarz$ ta có
$$(a+2b)^2\le(8+8)\left(\frac{a^2}{8}+\frac{b^2}{2}\right)=16\Rightarrow -4\le a+2b\le4$$
Suy ra $d(M,AB)\ge\dfrac{7}{\sqrt{5}}$
Do đó,
$$\min S_{\Delta AMB}=\frac{1}{2}\left(d(M,AB)\right)_{min}\cdot AB=7 \iff M(2;1).$$
[$k2pi.net$]

Diễn đàn Toán học – http://www.diendantoanhoc.net/forum

3 Tuyển tập các đề toán

Phần đề toán được tách riêng giúp các bạn học sinh thuận tiện trong quá trình tự luyện tập. Trước khi đọc lời giải các bạn nên tự mình tìm cách giải quyết bài toán đó, như thế tư duy sẽ không bị bó buộc. Biết đâu các bạn sẽ có lời giải độc đáo hơn đáp án, lúc ấy hãy chia sẻ với mình để hoàn thiện hơn tuyển tập này nhé!

3.1 Bài toán Elip qua các kì thi thử 2013

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC đều có $A(0;2)$ và có trục đối xứng Oy, $S_{ABC} = \dfrac{49\sqrt{3}}{12}$. Viết phương trình chính tắc của elip (E) qua 3 điểm A, B, C

   (Sở GDĐT Bắc Ninh)

2. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $M(2\sqrt{3};2)$. Viết phương trình chính tắc của elip (E) đi qua M, biết M nhìn hai tiêu điểm của (E) dưới một góc vuông.

   (Chuyên ĐH Vinh 03)

3. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 16$. Viết phương trình chính tắc của elip (E) biết tâm sai của (E) là $e = \dfrac{1}{2}$, (E) cắt (C) tại bốn điểm phân biệt A, B, C, D sao cho AB song song với trục hoành và $AB = 2BC$

   (Chuyên Lê Quý Đôn - Quảng Trị 02)

4. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, viết phương trình chính tắc của elip (E) biết khi M thay đổi trên (E) thì độ dài nhỏ nhất của OM bằng 4 và độ dài lớn nhất của MF_1 bằng 8 với F_1 là tiêu điểm có hoành độ âm của (E).

   (Chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An 01)

5. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, lập phương trình chính tắc của elip (E), biết có một đỉnh và hai tiêu điểm của (E) tạo thành một tam giác đều và chu vi hình chữ nhật cơ sở của (E) là $12(2+\sqrt{3})$.

   (Chuyên Vĩnh Phúc 05 - Tạp chí THTT 06)

6. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho elip (E) có phương trình $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{5} = 1$. Gọi F_1, F_2 là hai tiêu điểm của (E). Tìm điểm $M \in (E)$ sao cho $MF_1 = 2MF_2$

   (THPT Phan Đăng Lưu - Nghệ An)

7. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho elip $(E): \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ và đường thẳng $d: 3x + 4y - 12 = 0$. Gọi các giao điểm của đường thẳng d và elip (E) là A, B. Tìm trên (E) điểm C sao cho tam giác ABC có diện tích bằng 6.

   (THPT Mai Anh Tuấn - Thanh Hóa)

Diễn đàn Toán học – http://www.diendantoanhoc.net/forum

8. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho elip $(E): \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ và các điểm $A(-3;0), I(-1;0)$. Tìm tọa độ các điểm $B, C \in (E)$ sao cho I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

(Chuyên Vĩnh Phúc - Lần 2)

9. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho elip $(E): \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{1}=1$ và hai điểm $A(-\sqrt{3};0)$, $B(\sqrt{3};0)$. Tìm điểm $M \in (E)$ sao cho $\widehat{AMB}=60^o$

(THPT Phan Đăng Lưu - Nghệ An)

10. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho elip $(E): \dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{25}=1$. Tìm tọa độ điểm K nằm trên elip sao cho K nhìn các tiêu điểm dưới một góc 120^o.

(Diễn đàn Truonghocso.vn)

11. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho elip $(E): 9x^2+25y^2=225$. Gọi F_1, F_2 là hai tiêu điểm của (E) $(x_{F_1}<x_{F_2})$. Xét tứ giác F_1F_2BA có tổng độ dài hai đường chéo là 6 $(A, B \in (E))$. Hãy xác định tọa độ của A, B để chu vi tứ giác F_1F_2BA nhỏ nhất.

(Chuyên Lê Hồng Phong - TP. Hồ Chí Minh)

12. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho elip $(E): \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ có hai tiêu điểm F_1, F_2. Tìm tọa độ điểm $M \in (E)$ sao cho bán kính đường tròn nội tiếp tam giác MF_1F_2 bằng $\dfrac{4}{3}$

(Chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An 02)

13. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho elip $(E): \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$. Một hình chữ nhật $MNPQ$ có các đỉnh nằm trên (E) và hai đường chéo của hình chữ nhật hợp với nhau góc 60^o. Tìm tọa độ đỉnh M biết $x_M>0, y_M>0$.

(THPT Thanh Thủy - Phú Thọ 02)

14. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho elip (E) thỏa mãn khoảng cách giữa hai đường chuẩn của (E) bằng $\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$, điểm M có hoành độ dương thuộc (E) sao cho độ lớn 2 bán kính qua tiêu là $\dfrac{5}{2}$ và $\dfrac{3}{2}$. Tìm tọa độ điểm M và viết phương trình chính tắc của (E).

(Diễn đàn K2pi 14)

15. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho elip $(E): \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{5}=1$ và hai điểm $A(-5;-1), B(-1;1)$. Xác định tọa độ điểm $M \in (E)$ sao cho diện tích ΔMAB lớn nhất.

(THPT Minh Khai - Hà Tĩnh)

16. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho elip $(E): \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ và hai điểm $A(4;-3), B(-4;3)$. Tìm tọa độ điểm $C \in (E)$ sao cho diện tích tam giác ABC đạt giá trị lớn nhất.

(THPT Hà Trung - Thanh Hóa)

Diễn đàn Toán học – http://www.diendantoanhoc.net/forum

Diễn đàn Toán học – http://www.diendantoanhoc.net/forum

17. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông cân tại $A(-2;0)$, nội tiếp elip $(E): \frac{x^2}{4}+y^2=1$. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

(Chuyên Lê Quý Đôn - Quảng Trị 03)

18. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $A(3;0)$ và elip (E) có phương trình $\frac{x^2}{9}+y^2=1$. Tìm tọa độ điểm $B,C \in (E)$ sao cho tam giác ABC vuông cân tại A, biết B có hoành độ dương.

(Chuyên Nguyễn Quang Diệu - Đồng Tháp 02)

19. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: 2x+y+3=0$ và elip $(E): \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$. Viết phương trình đường thẳng Δ vuông góc với d cắt (E) tại hai điểm A,B sao cho $S_{OAB}=1$.

(THPT Cù Huy Cận - Hà Tĩnh)

20. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho elip $(E): \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ và điểm $M(2;1)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua M và cắt (E) tại hai điểm phân biệt A,B sao cho M là trung điểm của AB.

(Chuyên Lý Tự Trọng - Cần Thơ 02)

21. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho elip $(E): \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ và đường thẳng $\Delta: x+y+9=0$. Viết phương trình đường tròn (C) có bán kính nhỏ nhất sao cho tâm của (C) thuộc đường thẳng Δ và (C) có một điểm chung duy nhất với (E).

(THPT Thuận Thành - Bắc Ninh 03)

22. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho elip $(E): \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x_o}{a^2}x+\frac{y_o}{b^2}y-1=0$. Trong đó $M(x_o,y_o)\in(E)$. CMR: Tích khoảng cách từ các tiêu điểm của (E) tới Δ bằng b^2.

(Tạp chí THTT 07)

23. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho elip $(E): \frac{x^2}{2013}+\frac{y^2}{2012}=1$. Gọi F_1,F_2 là hai tiêu điểm của (E), M là điểm tùy ý trên (E). CMR: $MF_1.MF_2+OM^2=4025$

(THPT Dương Đình Nghệ - Thanh Hóa)

24. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $\Delta: x+y+4=0$ và hai elip $(E_1): \frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{6}=1$, $(E_2): \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b>0)$ có cùng tiêu điểm. Biết rằng (E_2) đi qua điểm $M\in\Delta$. Tìm tọa độ điểm M sao cho (E_2) có độ dài trục lớn nhỏ nhất.

(THPT Quỳnh Lưu - Nghệ An 02)

25. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng $d: 2x+y+3=0$ và elip $(E): \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$. Viết phương trình đường thẳng Δ vuông góc với đường thẳng d cắt (E) tại hai điểm A,B sao cho diện tích tam giác AOB bằng 1.

(Thi thử Hocmai - Thầy Lê Bá Trần Phương - Đề 02)

3.2 Các bài tập sưu tầm

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $M(1,2)$ và đường tròn $(C): x^2+y^2=21$. Viết phương trình chính tắc của elip (E) biết hình chữ nhật cơ sở của (E) nội tiếp (C) và điểm M nhìn hai tiêu điểm của (E) dưới một góc 60^o

2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $A(0;5)$. Lập phương trình chính tắc của elip (E) biết (E) đi qua A và có hình chữ nhật cơ sở nội tiếp đường tròn $(C): x^2+y^2=41$.

3. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: x-\sqrt{5}=0$. Lập phương trình chính tắc của elip (E), biết một cạnh hình chữ nhật cơ sở của (E) nằm trên d và hình chữ nhật đó có độ dài đường chéo bằng 6.

4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $M(-\sqrt{3};1)$ đường elip (E) đi qua điểm M và có khoảng cách giữa hai đường chuẩn là 6. Lập phương trình chính tắc của (E).

5. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) có phương trình $x^2+y^2=9$. Lập phương trình chính tắc của elip có tâm sai $e=\dfrac{1}{3}$. Biết (E) cắt (C) tại 4 điểm phân biệt A,B,C,D sao cho AB song song với Ox và $AB=3BC$.

6. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho elip (E) có độ dài trục lớn là 6 và qua điểm $M\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2};\sqrt{2}\right)$.Điểm N nằm trên (E) cách O một đoạn có độ dài bằng $\sqrt{5}$. Tìm tọa độ N?

7. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, viết phương trình đường thẳng đi qua $M\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{2}{3}\right)$ và cắt elip $(E): \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{1}=1$ tại hai điểm phân biệt A,B sao cho $MA=2MB$

8. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm M di động trên elip $(E): \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$. Gọi H,K là hình chiếu của M lên các trục tọa độ. Xác định tọa độ của M diện tích $OHMK$ đạt giá trị lớn nhất.

9. Trong mặt phẳng Oxy cho elip $(E): \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ và đường thẳng $d: y=x+m$. d cắt (E) tại hai điểm P,Q. Gọi P',Q' lần lượt là điểm đối xứng của P,Q qua O. Tìm m để $PQP'Q'$ là hình thoi.

10. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho elip $(E): \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$. Tìm điểm $M\in(E)$ sao cho đường phân giác trong góc $\widehat{F_1MF_2}$ đi qua điểm $N\left(-\dfrac{48}{25};0\right)$

[k2pi.net]

11. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho elip $(E): \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ thỏa mãn $\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Hình chữ nhật cơ sở cắt Ox tại A,A', cắt Oy tại B,B', đường tròn nội tiếp tứ giác $ABA'B'$ có diện tích bằng 4π. Tìm a,b

[k2pi.net]

Diễn đàn Toán học – http://www.diendantoanhoc.net/forum

12. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho Elip $(E)\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$. Từ điểm A có tọa dương thuộc (E) ta dựng hình chữ nhật $ABCD$ nội tiếp trong (E) có các các cạnh song song với các trục tọa độ và diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là lớn nhất. Hãy tìm tọa độ đỉnh A

[*k2pi.net*]

13. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho elip $(E):\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$. Tìm $M\in(E)$ sao cho $MF_1^2+7MF_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

[*Boxmath.vn*]

14. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho elip $(E):\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$ có các tiêu điểm F_1,F_2. Đường thẳng d đi qua F_2 và song song với đường phân giác của góc phần tư thứ nhất cắt (E) tại A,B. Tính diện tích tam giác ABF_1.

[*Boxmath.vn*]

15. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho elip $(E):\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1$. Viết phương trình đường thẳng d cắt (E) tại hai điểm phân biệt có tọa độ nguyên.

[*Boxmath.vn*]

Diễn đàn Toán học – http://www.diendantoanhoc.net/forum

4 Lời giải hoặc hướng dẫn

4.1 Bài toán Elip qua các kì thi thử 2013

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC đều có $A(0;2)$ và có trục đối xứng Oy, $S_{ABC} = \dfrac{49\sqrt{3}}{12}$. Viết phương trình chính tắc của elip (E) qua 3 điểm A,B,C

Lời giải:

Gọi phương trình elip

$$(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0)$$

Ta có: $A(0;2) = (E) \cap Oy$ nên A là một đỉnh của elip $\Rightarrow b = 2$

Lại có: $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}.d(A,BC).BC\dfrac{49\sqrt{3}}{12}$. Mà ΔABC đều nên:

$$d(A,BC) = AB.\sin\widehat{ABC} = BC.\sin 60^o \Rightarrow BC = \frac{2}{\sqrt{3}}d(A,BC)$$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2}d(A,BC).\dfrac{2}{\sqrt{3}}d(A,BC) = \dfrac{49\sqrt{3}}{12} \Leftrightarrow d(A,BC) = \dfrac{7}{2} \quad (1)$

Mặt khác: Oy là trục đối xứng của ΔABC đều nên $BC \perp Oy$

$\Rightarrow$ Phương trình $BC: y = m$ với $m \in (-2;2) \quad (2)$

Từ (1) và $(2) \Rightarrow |m-2| = \dfrac{7}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -\frac{3}{2} \\ m = \dfrac{11}{2} \end{array}\right. \Rightarrow m = -\dfrac{3}{2}$

Elip không thay đổi nếu ta thay đổi vị trí của B và C với nhau nên ta có thể giả sử $x_B < 0$

$\Rightarrow B\left(-\dfrac{7\sqrt{3}}{6}; -\dfrac{3}{2}\right)$. Thay vào phương trình (E) ta được:

$$\frac{49}{12a^2} + \frac{9}{16} = 1 \Leftrightarrow a^2 = \frac{28}{3} \quad \text{(Thỏa mãn)}$$

Vậy phương trình elip là $(E): \dfrac{x^2}{\frac{28}{3}} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

2. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $M(2\sqrt{3};2)$. Viết phương trình chính tắc của elip (E) đi qua M, biết M nhìn hai tiêu điểm của (E) dưới một góc vuông.

Lời giải:

Giả sử phương trình chính tắc của elip (E) là: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0)$

$M \in (E) \Leftrightarrow \dfrac{12}{a^2} + \dfrac{4}{b^2} = 1$

$\widehat{F_1MF_2} = 90^o \Rightarrow MO = \dfrac{1}{2}F_1F_2 = c \Rightarrow a^2 - b^2 = 16$

Suy ra $\begin{cases} a^2 = 24 \\ b^2 = 8 \end{cases} \Rightarrow (E): \dfrac{x^2}{24} + \dfrac{y^2}{8} = 1$

Diễn đàn Toán học – http://www.diendantoanhoc.net/forum

Diễn đàn Toán học – http://www.diendantoanhoc.net/forum

3. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2=16$. Viết phương trình chính tắc của elip (E) biết tâm sai của (E) là $e=\dfrac{1}{2}$, (E) cắt (C) tại bốn điểm phân biệt A,B,C,D sao cho AB song song với trục hoành và $AB=2BC$

Lời giải:

Giả sử phương trình chính tắc của (E) là: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b>0)$

Ta có: $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow b^2=\dfrac{3}{4}a^2 \quad (*)$

Vì (E) và (C) đều nhận Ox,Oy làm các trục đối xứng và $AB=2BC$ nên giả sử tọa độ $B(2t;t)$, $(t>0)$

Thay tọa độ B vào phương trình trình (C) ta được $t^2=\dfrac{1}{5}$, thay vào phương trình (E) cùng với $(*)$ ta được $a^2=\dfrac{256}{15}; b^2=\dfrac{64}{5}$

Vậy phương trình chính tắc của (E) là: $\dfrac{x^2}{\frac{256}{15}}+\dfrac{y^2}{\frac{64}{5}}=1$

4. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, viết phương trình chính tắc của elip (E) biết khi M thay đổi trên (E) thì độ dài nhỏ nhất của OM bằng 4 và độ dài lớn nhất của MF_1 bằng 8 với F_1 là tiêu điểm có hoành độ âm của (E).

Lời giải:

Cách 1:

Giả sử phương trình chính tắc của elip (E) là $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b>0)$

$M(x,y)\in(E)\Rightarrow MF_1=a+\dfrac{cx}{a}$, mà $-a\le x\le a$ nên MF_1 lớn nhất bằng $a+c$ khi $x=a, y=o$.

Vì $a>b$ nên $\dfrac{x^2}{a^2}\le\dfrac{x^2}{b^2}\Rightarrow 1=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le\dfrac{x^2+y^2}{b^2}=\dfrac{OM^2}{b^2}\Rightarrow OM\ge b$.

Do đó giá trị nhỏ nhất của OM bằng b khi $x=0, y=\pm b$.

Kết hợp giả thiết ta có: $\begin{cases} b=4 \\ a+c=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=4 \\ a=5 \end{cases}$

Vậy phương trình (E) : $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$

Cách 2:

Gọi $M(x_0;y_0)\in(E)$ khi dó ta có

$$MF_1=a+\frac{cx_0}{a}\le a+c\to MaxMF_1=a+c\to a+c=8$$

Mặt khác

$$OM=\sqrt{x_0^2+y_0^2}=\sqrt{a^2sin^2\alpha+b^2cos^2\alpha}=\sqrt{a^2-c^2cos^2\alpha}\ge\sqrt{a^2-c^2}\to\sqrt{a^2-c^2}=4$$

. Với $x_0=asin\alpha; y_0=bcos\alpha$. Khi đó ta có hệ

$$\begin{cases} a+c=8 \\ a^2-c^2=16 \end{cases} \to a=5, c=3, b=4$$

5. lập phương trình chính tắc của elip (E), biết có một đỉnh và hai tiêu điểm của (E) tạo thành một tam giác đều và chu vi hình chữ nhật cơ sở của (E) là $12(2+\sqrt{3})$.

Lời giải:

Gọi phương trình chính tắc của elip (E) là: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$

$\Rightarrow$ Chu vi của hình chữ nhật cơ sở là $2(2a+2b)$

$\Rightarrow 2(2a+2b)=12(2+\sqrt{3}) \Leftrightarrow a+b=3(2+\sqrt{3})$ (1)

Do các đỉnh $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$ và $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$ cùng nằm trên Ox nên theo giả thiết F_1, F_2 cùng với đỉnh $B_2(0;b)$ trên Oy tạo thành một tam giác đều $\Leftrightarrow B_2F_2=F_1F_2=B_2F_1$ $(*)$

Ta thấy: F_1,F_2 đối xứng nhau qua Oy nên $\Delta B_2F_1F_2$ luôn là tam giác cân tại B_2

Do đó: $(*) \Leftrightarrow B_2F_2=F_1F_2 \Leftrightarrow \sqrt{c^2+b^2}=2c \Leftrightarrow b^2=3c^2$

Lại có: $a^2-c^2=b^2 \Rightarrow 3a^2=4b^2$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $a=6$ và $b=3\sqrt{3}$

Vậy phương trình chính tắc của (E) là: $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{27}=1$

6. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho elip (E) có phương trình $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$. Gọi F_1,F_2 là hai tiêu điểm của (E). Tìm điểm $M\in(E)$ sao cho $MF_1=2MF_2$.

Lời giải:

Ta có: $(E): \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1 \Rightarrow a=3, b=\sqrt{5} \Rightarrow c=\sqrt{a^2-b^2}=2 \Rightarrow F_1(-2;0)$, $F_1(2;0)$

Khi đó: $MF_1=a+\dfrac{a}{c}x_M=3+\dfrac{2}{3}x_M$, $MF_2=a-\dfrac{a}{c}x_M=3-\dfrac{2}{3}x_M$

Mà $MF_1=2MF_2 \Leftrightarrow 3-\dfrac{2}{3}x_M=2\left(3+\dfrac{2}{3}x_M\right) \Rightarrow x_M=-\dfrac{3}{2}, y_M=\pm\dfrac{\sqrt{15}}{2}$

Vậy có hai điểm M thỏa mãn: $M\left(-\dfrac{3}{2};\dfrac{\sqrt{15}}{2}\right)$; $M\left(-\dfrac{3}{2};\dfrac{\sqrt{15}}{2}\right)$

7. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho elip $(E): \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ và đường thẳng $d: 3x+4y-12=0$. Gọi các giao điểm của đường thẳng d và elip (E) là A,B. Tìm trên (E) điểm C sao cho tam giác ABC có diện tích bằng 6.

Lời giải:

Ta có: $A,B=d\cap(E)$ nên tìm được tọa độ là $A(4;0), B(0;3)$ hoặc $B(4;0), A(0;3) \Rightarrow AB=5$

Gọi $C(a,b)\in(E) \Rightarrow \dfrac{a^2}{16}+\dfrac{b^2}{9}=1$ (1)

Mặt khác: $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}AB.d(C,AB)=\dfrac{1}{2}AB.d(C,d)=\dfrac{|3a+4b-12|}{2}$

Mà $S_{ABC}=6 \Rightarrow |4a+3b-12|=12 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3a+4b=24 \\ 3a+4b=0 \end{array}\right.$ (2)

Từ (1) và (2) ta tìm được $C\left(2\sqrt{2};-\dfrac{3}{\sqrt{2}}\right)$ hoặc $C\left(-2\sqrt{2};\dfrac{3}{\sqrt{2}}\right)$

Diễn đàn Toán học – http://www.diendantoanhoc.net/forum

8. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho elip $(E):\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ và các điểm $A(-3;0), I(-1;0)$. Tìm tọa độ các điểm $B,C\in(E)$ sao cho I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Lời giải:

Gọi (C) là phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, (C) có tâm $I(-1;0)$ bán kính $IA=2$.
Phương trình $(C): x^2+y^2+2x-3=0$.

Do $B,C\in(E)$ nên tọa độ của B,C là nghiệm hệ: $\begin{cases} x^2+y^2+2x-3=0\\ \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1\end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3\\ x=-\dfrac{3}{5}\end{array}\right.$

$-$ Với $x=-3\Rightarrow y=0\Rightarrow B$ tức là trùng với A hoặc C trùng với A (không thỏa mãn)

$-$ Với $x=-\dfrac{3}{5}\Rightarrow y=\pm\dfrac{4\sqrt{6}}{5}$.

Đáp số: $B_1\left(-\dfrac{3}{5};\dfrac{4\sqrt{6}}{5}\right), C_1\left(-\dfrac{3}{5};-\dfrac{4\sqrt{6}}{5}\right)$; $\quad B_2\left(-\dfrac{3}{5};-\dfrac{4\sqrt{6}}{5}\right), C_2\left(-\dfrac{3}{5};\dfrac{4\sqrt{6}}{5}\right)$

9. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho elip $(E):\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{1}=1$ và hai điểm $A(-\sqrt{3};0), B(\sqrt{3};0)$. Tìm điểm $M\in(E)$ sao cho $\widehat{AMB}=60^o$.

Lời giải:

Giả sử $M(x,y)\in(E)$

Ta thấy A,B chính là các tiêu điểm của elip $(E)\Rightarrow MA=a+ex=2+\dfrac{\sqrt{3}}{2}x, MB=a-ex=2-\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$

$AB^2=MA^2+MB^2-2MA.MB.\cos 60^o=(MA+MB)^2-3MA.MB \quad (1)$

Mà $AB^2=12, MA+MB=4, ,MA.MB=4-\dfrac{3}{4}x^2$. Thay vào (1) ta tìm được $x=\pm\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$

Mà $M\in(E)\Rightarrow y^2=1-\dfrac{x^2}{4}=\dfrac{1}{9}\Rightarrow y=\pm\dfrac{1}{3}$. Vậy có 4 điểm thỏa mãn $\left(\pm\dfrac{4\sqrt{2}}{3};\pm\dfrac{1}{3}\right)$

10. (Tương tự bài tập trên)

11. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho elip $(E): 9x^2+25y^2=225$. Gọi F_1,F_2 là hai tiêu điểm của (E) $(x_{F_1}<x_{F_2})$. Xét tứ giác F_1F_2BA có tổng độ dài hai đường chéo là 6 $(A,B\in(E))$. Hãy xác định tọa độ của A,B để chu vi tứ giác F_1F_2BA nhỏ nhất.

Lời giải:

$(E):\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1\Rightarrow a=5;b=3;c=4$

Ta có $F_1B+F_2A=6$ mà $F_1B+F_2A+F_2B+F_1A=4a=20\Rightarrow F_2B+F_2A=14$

Vì $F_1B+F_2A=6\Rightarrow a+ex_B+a-ex_A=6\Rightarrow 10-\dfrac{4}{5}(x_B-x_A)=6\Rightarrow x_B-x_A=5$

Do đó chu vi tứ giác là: $P=F_1F_2+F_2B+BA+F_1A=8+14+AB=22+AB$

$=22+\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}\geq 22+\sqrt{(x_B-x_A)^2}=22+5=27$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases} y_A=y_B\\ x_B-x_A=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x_A^2=x_B^2\\ x_B-x_A=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x_A+x_B=0\\ x_B-x_A=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x_A=-\dfrac{5}{2}\\ x_B=\dfrac{5}{2}\end{cases}$

Diễn đàn Toán học – http://www.diendantoanhoc.net/forum

Diễn đàn Toán học – http://www.diendantoanhoc.net/forum

Khi đó $\frac{9}{4}+y_B^2=9 \Leftrightarrow y_B^2=\frac{27}{4} \Leftrightarrow y_B=\pm\frac{3\sqrt{3}}{2}$

Vậy $A\left(-\frac{5}{2};\frac{3\sqrt{3}}{2}\right);B\left(\frac{5}{2};\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ hay $A\left(-\frac{5}{2};-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right);B\left(\frac{5}{2};-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

Thì P đạt giá trị nhỏ nhất và $\min P=27$

12. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho elip $(E):\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ có hai tiêu điểm F_1,F_2. Tìm tọa độ điểm $M\in(E)$ sao cho bán kính đường tròn nội tiếp tam giác MF_1F_2 bằng $\frac{4}{3}$.

Lời giải:

$a=5;b=9\Rightarrow c=4\Rightarrow p=\frac{MF_1+MF_2+F_2F_2}{2}=9$

$\Rightarrow S_{MF_1F_2}=pr=9.\frac{4}{3}=\frac{1}{2}.d(M,Ox).8\Rightarrow d(M;Ox)=3=|y_M|\Rightarrow y_M=\pm3$

Do đó $M(m,3)$ hoặc $M(m,-3)$.

Vì $M\in(E)$ nên $m=0$

Vậy $M(0;3)$ và $M(0;-3)$ là hai điểm thỏa mãn bài toán.

13. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho elip $(E):\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. Một hình chữ nhật $MNPQ$ có các đỉnh nằm trên (E) và hai đường chéo của hình chữ nhật hợp với nhau góc 60^o. Tìm tọa độ đỉnh M biết $x_M>0,y_M>0$.

Lời giải:

Vì hình chữ nhật có hai trục đối xứng cũng là trục dối xứng của (E) nên góc giữa hai đường chéo của hình chữ nhật bằng 60^o thì góc hợp bởi OM và chiều dương trục Ox sẽ là φ bằng 30^o hoặc 60^o

TH1: $\varphi=30^o$ thì hệ số góc của OM bằng $\tan 30^o=\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow$ phương trình $OM: y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$

Khi đó tọa độ M là nghiệm hệ: $\begin{cases}\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1\\ y=\frac{\sqrt{3}}{3}x\quad (x>y>0)\end{cases}\Rightarrow M\left(\sqrt{\frac{675}{52}};\sqrt{\frac{675}{156}}\right)$

TH2: $\varphi=60^o$ thì hệ số góc của OM là $\tan 60^o=\sqrt{3}\Rightarrow$ phương trình $OM: y=\sqrt{3}x$

Khi đó tọa độ M là nghiệm hệ: $\begin{cases}\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1\\ y=\sqrt{3}x\quad (y>x>0)\end{cases}\Rightarrow M\left(\sqrt{\frac{75}{28}};\sqrt{\frac{225}{28}}\right)$

Vậy có hai điểm M thỏa mãn điều kiện đề bài: $M\left(\sqrt{\frac{75}{28}};\sqrt{\frac{225}{28}}\right)$; $M\left(\sqrt{\frac{675}{52}};\sqrt{\frac{675}{156}}\right)$

14. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho elip (E) thỏa mãn khoảng cách giữa hai đường chuẩn của (E) bằng $\frac{8\sqrt{3}}{3}$, điểm M có hoành độ dương thuộc (E) sao cho độ lớn 2 bán kính qua tiêu là $\frac{5}{2}$ và $\frac{3}{2}$. Tìm tọa độ điểm M và viết phương trình chính tắc của (E).

Lời giải:

Giả sử phương trình của (E) là: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b>0)$

Khi đó phương trình của hai đường chuẩn là: $\Delta_1 : x=-\frac{a}{e}$; $\quad \Delta_2 : x=\frac{a}{e}$

$\Rightarrow d(\Delta_1;\Delta_2)=\frac{8\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow 2\frac{a}{e}=\frac{4\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \frac{a^2}{c}=\frac{4\sqrt{3}}{3} \quad (1)$

Bán kính qua tiêu của $M\in(E)$ là: $MF_1=a+\frac{c}{a}x_M; MF_2=a-\frac{c}{a}x_M$. Do $x_M>0$ nên

$$\begin{cases} a+\frac{c}{a}x_M=\frac{5}{2} \\ a-\frac{c}{a}x_M=\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ cx_M=1 \end{cases} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta được: $a=2, c=\sqrt{3}\Rightarrow b=1$ và $x_M=\frac{\sqrt{3}}{3}$

Do đó: $(E): \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1; M\left(\frac{\sqrt{3}}{3};\pm\frac{\sqrt{33}}{6}\right)$

15. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho elip $(E): \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{5}=1$ và hai điểm $A(-5;-1), B(-1;1)$. Xác định tọa độ điểm $M\in(E)$ sao cho diện tích ΔMAB lớn nhất.

Lời giải:

Phương trình đường thẳng $AB: x-2y+3=0$. $AB=2\sqrt{5}$

Giả sử $M(x_o,y_o)\in(E)\Rightarrow 5x_o^2+16y_o^2=80$

Mặt khác:

$$d(M,AB)=\frac{|x_o-2y_o+3|}{\sqrt{5}} \Rightarrow S_{MAB}=\frac{1}{2}AB.d(M,AB)=|x_o-2y_o-3|$$

Ta có:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{5}}.\sqrt{5}x_o-\frac{1}{2}.4y_o\right)^2 \le \left(\frac{1}{5}+\frac{1}{4}\right)(5x_o^2+16y_o^2)=36$$
$$\Rightarrow |x_o-2y_o|\le 6 \Rightarrow |x_o-2y_o+3|\le 9$$

Do đó:

$$\max S_{MAB}=9 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{5}x_o}{\frac{1}{\sqrt{5}}}=\frac{4y}{-\frac{1}{2}} \\ x_o-2y_o+3=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_o=\frac{8}{3} \\ y_o=-\frac{5}{3} \end{cases}$$

Đáp số: $M\left(\frac{8}{3};-\frac{5}{3}\right)$

16. (Tương tự bài tập trên)

Đáp số: Có hai điểm C thỏa mãn: $\left(2\sqrt{2};\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-2\sqrt{2};-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$

17. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông cân tại $A(-2;0)$, nội tiếp elip $(E): \frac{x^2}{4}+y^2=1$. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Diễn đàn Toán học – http://www.diendantoanhoc.net/forum

Lời giải:

Tam giác ABC vuông cân tại A nội tiếp (E): $\frac{x^2}{4}+y^2=1 \quad A(-2;0)$

Nên nếu $B(x_o,y_o)$ thì $C(x_o;-y_o) \Rightarrow I(x_o;0)$ là trung điểm của BC

Tam giác ABC vuông tại $A \Rightarrow AI=\frac{1}{2}BC \Leftrightarrow |x_o+2|=|y_o|$

$\Leftrightarrow x_o^2+4x_o+4=1-\frac{x_o}{4} \quad (|x_o|<2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_o=-2 \quad (\text{ loại}) \\ x_o=-\frac{6}{5} \end{array}\right.$

Đường tròn (C) cần tìm có tâm $I\left(-\frac{6}{5};0\right)$, bán kính $R=\frac{1}{2}BC=\frac{4}{5}$

Vậy $(C):\left(x+\frac{6}{5}\right)^2+y^2=\frac{16}{25}$.

18. (Tương tự bài tập trên)

Đáp số: $B\left(\frac{12}{5};\frac{3}{5}\right);C\left(\frac{12}{5};-\frac{3}{5}\right)$

19. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: 2x+y+3=0$ và elip $(E):\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$. Viết phương trình đường thẳng Δ vuông góc với d cắt (E) tại hai điểm A,B sao cho $S_{OAB}=1$.

Lời giải:

Vì $\Delta\perp d \Rightarrow$ phương trình $\Delta: x+2y-m=0$. Khi đó tọa độ A,B là nghiệm hệ:

$$\begin{cases} x+2y-m=0 \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y-m \\ 8y^2-4my+m^2-4=0 \quad (1) \end{cases}$$

d cắt (E) tại hai điểm phân biệt $A,B \Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta=32-4m^2>0 \Leftrightarrow m\in(-2\sqrt{2};2\sqrt{2})$

Khi đó gọi y_1,y_2 là nghiệm của $(1) \Rightarrow \begin{cases} y_1+y_2=\frac{m}{2} \\ y_1y_2=\frac{m^2-4}{8} \end{cases}$

Ta được tọa độ A,B là $A(2y_1-m;y_1),B(2y_2-m;y_2)$.

$\Rightarrow AB^2=5(y_2-y_1)^2=5[(y_1+y_2)^2-4y_1y_2]=\frac{5(8-m^2)}{4} \Rightarrow AB=\frac{\sqrt{5(8-m^2)}}{2}$

Mặt khác: $d(O;AB)=d(O;\Delta)=\frac{|m|}{\sqrt{5}}$

$\Rightarrow S_{OAB}=\frac{1}{2}d(O,AB).AB=\frac{\sqrt{m^2(8-m^2)}}{4}=1$

$\Rightarrow m=\pm 2$ (thỏa mãn)

Vậy có hai đường thẳng thỏa mãn: $\Delta_1: x-2y+2=0$; $\Delta_2: x-2y-2=0$

20. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho elip $(E):\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ và điểm $M(2;1)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua M và cắt (E) tại hai điểm phân biệt A,B sao cho M là trung điểm của AB.

Lời giải:

Thay tọa độ M vào vế trái phương trình (E) ta được: $\frac{4}{9}+\frac{1}{4}=\frac{25}{36}<1$

Diễn đàn Toán học – http://www.diendantoanhoc.net/forum

Diễn đàn Toán học – http://www.diendantoanhoc.net/forum

$\Rightarrow M$ nằm ở miền trong của (E).

$\Rightarrow$ Nếu Δ đi qua M thì Δ luôn cắt (E) tại hai điểm phân biệt A,B thỏa mãn M nằm giữa A và B.

Giả sử $A(x_A;y_A), B(x_b;y_B)$. Do $A,B \in (E)$ nên ta có hệ: $\begin{cases} 4x_A^2+9y_A^2=36 & (1) \\ 4x_B^2+9y_B^2=36 & (2) \end{cases}$

Trừ vế với vế của (1) và (2) ta được: $4(x_B+x_A)(x_B-x_A)+9(y_B+y_A)(y_B-y_A)=0 \quad (3)$

Vì M là trung điểm AB nên: $\begin{cases} x_A+x_B=2x_M=4 \\ y_A+y_B=2y_M=2 \end{cases} \quad (4)$

Thế (4) vào (3), ta được:

$$16(x_B-x_A)+18(y_B-y_A)=0 \Leftrightarrow 8(x_B-x_A)+9(y_B-y_A)=0 \quad (5)$$

Do $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;y_B-y_A)$ là một VTCP của Δ nên từ (5) ta có VTPT của Δ là $\overrightarrow{n}=(8;9)$

Vậy Δ đi qua $M(2;1)$ và có VTPT $\overrightarrow{n}=(8;9) \Rightarrow$ phương trình $\Delta:\ 8x+9y-25=0$

Bài tập tương tự: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho elip (E) có hình chữ nhật cơ sở có diện tích bằng 24, chu vi bằng 20 và điểm $M(1;1)$. Viết phương trình đường thẳng qua M cắt (E) tại hai điểm phân biệt sao cho M là trung điểm

Đáp số: $4x+9y-13=0$

21. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho elip $(E): \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ và đường thẳng $\Delta: x+y+9=0$. Viết phương trình đường tròn (C) có bán kính nhỏ nhất sao cho tâm của (C) thuộc đường thẳng Δ và (C) có một điểm chung duy nhất với (E).

Lời giải:

Giả sử $M(x_o;y_o) \in (E) \Rightarrow \dfrac{x_o^2}{16}+\dfrac{y_o^2}{9}=1 \quad (*)$, $d(M,\Delta)=\dfrac{|x_o+y_o+9|}{\sqrt{2}}$

Ta có: $(x_o+y_o)^2=\left(4.\dfrac{x_o}{4}+3.\dfrac{y_o}{3}\right)^2 \le (16+19)\left(\dfrac{x_o^2}{16}+\dfrac{y_o^2}{9}\right)=25$

$\Rightarrow -5 \le x_o+y_o \le 5 \Rightarrow 4 \le x_o+y_o+9 \le 14 \Rightarrow 2\sqrt{2} \le \dfrac{|x_o+y_o+9|}{\sqrt{2}} \le 7\sqrt{2}$

$$\min d(M,\Delta)=2\sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x_o^2}{16}+\dfrac{y_o^2}{9}=1 \\ \frac{x_o}{16}=\frac{y_o}{9} \\ x_o+y_o=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_o=-\dfrac{16}{5} \\ y_o=-\dfrac{9}{5} \end{cases} \Rightarrow M\left(-\dfrac{16}{5};-\dfrac{9}{5}\right)$$

$\Rightarrow \min d(M,\Delta)=2\sqrt{2}$ khi $M\left(-\dfrac{16}{5};-\dfrac{9}{5}\right)$

Gọi I là hình chiếu của M lên $\Delta \Rightarrow IM=d(M,\Delta)$, khi đó IM là đoạn thẳng nhỏ nhất nối một điểm trên (E) với một điểm trên Δ (Vì giả sử $N \in (E)$ bất kì, $N \ne M$, $J \in \Delta$, I' là hình chiếu của N trên Δ thì $JN \ge I'N > IM$)

Do đó, đường tròn (C) cần tìm chính là đường tròn tâm I bán kính IM. Vì $\forall M' \in (E)$, $M \ne M' \Rightarrow IM' > IM \Rightarrow M' \notin (C)$ nên (C) và (E) chỉ có một điêm chung là M, hơn nữa bán kính IM là nhỏ nhất (chứng minh trên).

Ta tìm được tọa độ I là: $I\left(-\dfrac{26}{5};-\dfrac{19}{5}\right) \Rightarrow$ Phương trình $(C):\ \left(x+\dfrac{26}{5}\right)^2+\left(y+\dfrac{19}{5}\right)^2=8$

Diễn đàn Toán học – http://www.diendantoanhoc.net/forum

22. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho elip $(E): \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x_o}{a^2}x+\frac{y_o}{b^2}y-1=0$. Trong đó $M(x_o,y_o)\in(E)$. CMR: Tích khoảng cách từ các tiêu điểm của (E) tới Δ bằng b^2.

Lời giải:

Ta có: $M\in(E)\Rightarrow \frac{x_o^2}{a^2}+\frac{y_o^2}{b^2}=1\Leftrightarrow x_o^2b^2=a^2b^2-y_o^2a^2$. Từ đó ta được:

$$d(F_1,\Delta).d(F_2,\Delta)=\frac{\left|\frac{x_oc}{a^2}-1\right|.\left|\frac{x_oc}{a^2}+1\right|}{\frac{x_o^2}{a^4}+\frac{y_o^2}{b^4}}=\frac{b^4|x_o^2c^2-a^4|}{x_o^2b^4+y_o^2a^4}=b^2.\frac{|x_o^2b^2(a^2-b^2)-a^4b^2|}{x_o^2b^4+y_o^2a^4}$$

$$=b^2.\frac{|-x_o^2b^4+(x_o^2b^2)a^2-a^4b^2|}{x_o^2b^4+y_o^2a^4}=b^2.\frac{|-x_o^2b^4+(a^2b^2-y_o^2a^2)a^2-a^4b^2|}{x_o^2b^4+y_o^2a^4}=b^2$$

23. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho elip $(E): \frac{x^2}{2013}+\frac{y^2}{2012}=1$. Gọi F_1,F_2 là hai tiêu điểm của (E), M là điểm tùy ý trên (E). CMR: $MF_1.MF_2+OM^2=4025$

Lời giải:

$(E): \frac{x^2}{2013}+\frac{y^2}{2012}=1\Rightarrow e=\frac{1}{\sqrt{2013}}$ Gọi $M(x,y)\in(E)\Rightarrow MF_1=\sqrt{2013}+ex, MF_2=\sqrt{2013}-ex$

$\Rightarrow MF_1.MF_2=\left(\sqrt{2013}+ex\right)\left(\sqrt{2013}-ex\right)=2013-e^2x^2=2013-\frac{x^2}{2013}$

$\Rightarrow MF_1.MF_2+OM^2=2013-\frac{x^2}{2013}+x^2+y^2=2013+2012\left(\frac{x^2}{2013}+\frac{y^2}{2012}\right)=2013+2012=4025$

24. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $\Delta: x+y+4=0$ và hai elip $(E_1): \frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{6}=1$, $(E_2): \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\quad(a>b>0)$ có cùng tiêu điểm. Biết rằng (E_2) đi qua điểm $M\in\Delta$. Tìm tọa độ điểm M sao cho (E_2) có độ dài trục lớn nhỏ nhất.

Lời giải:

Hai elip có các tiêu điểm là $F_1(-2;0), F_2(2;0)$

$M\in(E_2)\Rightarrow MF_1+MF_2=2a$. Mà độ dài trục lớn là $2a$ nên độ dài trục lớn nhỏ nhất khi và chỉ khi MF_1+MF_2 nhỏ nhất.

Dễ thử thấy F_1,F_2 cùng phía với Δ

Gọi $N(x,y)$ là điểm đối xứng với F_2 qua Δ, khi đó ta tìm được $N(-4;-6)$.

Mà $MF_1+MF_2=MF_1+MN\geq NF_1$ (không đổi). Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $M=NF_1\cap\Delta$

Tọa độ M là nghiệm hệ:

$$\begin{cases}3x-y+6=0\\x+y+4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\frac{5}{2}\\y=-\frac{3}{2}\end{cases}$$

Vậy tọa độ M là: $M\left(-\frac{5}{2};-\frac{3}{2}\right)$

Diễn đàn Toán học – http://www.diendantoanhoc.net/forum

25. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng $d: 2x+y+3=0$ và elip $(E): \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{1}=1$. Viết phương trình đường thẳng Δ vuông góc với đường thẳng d cắt (E) tại hai điểm A,B sao cho diện tích tam giác AOB bằng 1.

Lời giải:

Vì $\Delta \perp d$ nên phương trình d có dạng: $x-2y+m=0$. Khi đó, A,B là nghiệm hệ:

$$\begin{cases} x-2y+m=0 \\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y-m \\ 8y^2-4my+m^2-4=0 \quad (*) \end{cases}$$

Để d cắt (E) tại hai điểm phân biệt A,B thì hệ phải có hai nghiệm phân biệt
$\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' = 32-4m^2>0 \Leftrightarrow m \in \left(-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\right) \quad (1)$
Gọi $A(2y_1-m;y_1), B(2y_2-m;y_2)$, trong đó y_1,y_2 là nghiệm $(*)$

$$\Rightarrow AB^2 = 5(y_2-y_1)^2 = 5\left[(y_1+y_2)^2-4y_1y_2\right] = \frac{5}{4}(8-m^2)$$

Đường cao $OH = d(,\Delta) = \dfrac{|OH|}{\sqrt{5}} \Rightarrow S^2_{OAB} = \left(\dfrac{1}{2}OH.AB\right)^2 = \dfrac{1}{16}m^2(8-m^2) = 1 \Leftrightarrow m=4 \Leftrightarrow m=\pm 2$
Đáp số: $\Delta_1: x-2y+2=0, \quad \Delta_2: x-2y-2=0.$

4.2 Các bài tập sưu tầm

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $M(1,2)$ và đường tròn $(C): x^2+y^2=21$. Viết phương trình chính tắc của elip (E) biết hình chữ nhật cơ sở của (E) nội tiếp (C) và điểm M nhìn hai tiêu điểm của (E) dưới một góc 60^o

Lời giải:

Giả sử (E) có phương trình chính tắc là $(E): \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b>0)$

$\Rightarrow$ Độ dài các cạnh của hình chữ nhật cơ sở là $2a, 2b \Rightarrow$ độ dài đường chéo của nó là $2\sqrt{a^2+b^2} \quad (1)$

Đường tròn (C) có tâm $O(0;0)$ bán kính $R=\sqrt{21}$. Hình chữ nhật cơ sở nội tiếp (C) nên tâm của hình chữ nhật cơ sở trùng với tâm của $(C) \quad (2)$

Từ (1) và $(2) \Rightarrow 2\sqrt{a^2+b^2}=2R \Leftrightarrow a^2+b^2=21 \quad (3)$

Mặt khác: Tiêu điểm của (E) là $F_1(-c;0), F_2(c;0)$. $\widehat{F_1MF_2}=60^o$

$$\Rightarrow F_1F_2^2=MF_1^2+MF_2^2-2MF_1.MF_2.\cos 60^o$$

$$\Leftrightarrow 4c^2=(2+c)^2+1+(2-c)^2+1-\sqrt{1+(2+c)^2}.\sqrt{1+(2-c)^2}$$

$$\Leftrightarrow 3c^4-34c^2+75=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c^2=3 \\ c^2=\dfrac{25}{3} \end{array}\right.$$

Với $c^2=3 \Leftrightarrow a^2-b^2=3$ kết hợp với (3) tìm được $a^2=12, b^2=9$

Với $c^2=\dfrac{25}{3} \Leftrightarrow a^2-b^2=\dfrac{25}{3}$ kết hợp với (3) tìm được $a^2=\dfrac{44}{3}, b^2=\dfrac{19}{3}$

Đáp số: $(E_1): \dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{9}=1$, $(E_2): \dfrac{x^2}{\frac{44}{3}}+\dfrac{y^2}{\frac{19}{3}}=1$

2. (Tương tự bài tập trên)

Đáp số: $(E): \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1.$

3. (Tương tự bài tập trên)

Đáp số: $(E): \dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{4}=1.$

4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $M(-\sqrt{3};1)$ đường elip (E) đi qua điểm M và có khoảng cách giữa hai đường chuẩn là 6. Lập phương trình chính tắc của (E).

Bạn đọc tự giải.

Chú ý: Phương trình hai đường chuẩn là $x=\pm\dfrac{a}{e}$ nên khoảng cách giữa chúng là $2\dfrac{a}{e}=\dfrac{a^2}{c}=6$

Đáp số: $(E): \dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{2}=1.$

5. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) có phương trình $x^2+y^2=9$. Lập phương trình chính tắc của elip có tâm sai $e=\dfrac{1}{3}$. Biết (E) cắt (C) tại 4 điểm phân biệt A,B,C,D sao cho AB song song với Ox và $AB=3BC$.

Lời giải:

Giả sử elip $(E): \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b>0)$

Diễn đàn Toán học – http://www.diendantoanhoc.net/forum

Tâm sai (E) là $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow 8a^2 - 9b^2 = 0 \quad (1)$
Tọa độ A, B, C, D là nghiệm hệ:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \quad (2) \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \quad (3) \end{cases}$$

Do (E) và (C) cùng nhận Ox, Oy làm các trục đối xứng nên $ABCD$ là hình chữ nhật.
Giả sử $A(x,y)$, vì AB song song với Ox nên $B(-x;y) \Rightarrow C(-x;-y), D(x,-y)$.
Ta có: $AB = 3BC \Leftrightarrow |x| = 3|y| \Leftrightarrow x^2 = 9y^2 \quad (4)$
Từ (2) và (4) ta được: $x^2 = \dfrac{81}{10}, y^2 = \dfrac{9}{10}$, thế vào (3) ta được: $\dfrac{81}{a^2} + \dfrac{9}{b^2} = 1 \quad (5)$
Từ (1) và (5) ta được hệ:

$$\begin{cases} 8a^2 - 9b^2 = 0 \\ \dfrac{81}{a^2} + \dfrac{9}{b^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = \dfrac{729}{80} \\ b^2 = \dfrac{81}{10} \end{cases}$$

Vậy phương trình chính tắc của (E) là: $\dfrac{x^2}{\frac{729}{80}} + \dfrac{y^2}{\frac{81}{10}} = 1$

6. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho elip (E) có độ dài trục lớn là 6 và qua điểm $M\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}; \sqrt{2}\right)$. Điểm N nằm trên (E) cách O một đoạn có độ dài bằng $\sqrt{5}$. Tìm tọa độ N?

Hướng dẫn:

Dễ lập được phương trình elip (E)
Điểm N cách O đoạn có độ dài $\sqrt{5} \Rightarrow M \in (C)$ là đường tròn tâm O bán kính $\sqrt{5}$
$\Rightarrow M = (E) \cap (C)$
Đáp số: $\left(\dfrac{3\sqrt{5}}{5}; \pm\dfrac{4\sqrt{5}}{5}\right)$; $\left(-\dfrac{3\sqrt{5}}{5}; \pm\dfrac{4\sqrt{5}}{5}\right)$

7. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, viết phương trình đường thẳng đi qua $M\left(\dfrac{2}{3}; \dfrac{2}{3}\right)$ và cắt elip $(E): \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{1} = 1$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $MA = 2MB$

Lời giải:

Giả sử $B(x_o, y_o) \in (E) \Rightarrow \dfrac{x_o^2}{4} + \dfrac{y_o^2}{1} = 1 \quad (1)$
Thay tọa độ của M vào vế trái của (E) được: $\dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{4} + \dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{1} = \dfrac{5}{9} < 1$

$$\Rightarrow M \text{ nằm trong } (E) \Rightarrow \overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A - \dfrac{2}{3} = -2\left(x_o - \dfrac{2}{3}\right) \\ y_A - \dfrac{2}{3} = -2\left(y_o - \dfrac{2}{3}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = -2x_o + 2 \\ y_A = -2y_o + 2 \end{cases}$$

Mà $A \in (E) \Rightarrow \dfrac{(-2x_o+2)^2}{4} + \dfrac{(-2y_o+2)^2}{1} = 1 \quad (2)$
Từ (1) và (2) ta tìm được: $B(0;1)$ hoặc $B\left(\dfrac{8}{5}; \dfrac{3}{5}\right)$
Từ đó tìm được 2 đường thẳng $\Delta_1 : x + 2y - 2 = 0, \Delta_2 : 5x + 70y - 50 = 0$

Diễn đàn Toán học – http://www.diendantoanhoc.net/forum

8. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm M di động trên elip $(E):\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$. Gọi H,K là hình chiếu của M lên các trục tọa độ. Xác định tọa độ của M diện tích $OHMK$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải:

Giả sử $M(x_o;y_o)\in(E)\Rightarrow\dfrac{x_o^2}{9}+\dfrac{y_o^2}{4}=1$

Gọi H là hình chiếu của M lên $Ox\Rightarrow H(x_o;0)\Rightarrow OH=|x_o|$

Gọi K là hình chiếu của M lên $Oy\Rightarrow K(0;y_o)\Rightarrow OK=|y_o|$

Tứ giác $OHMK$ là hình chữ nhật

$$\Rightarrow S_{OHMK}=|x_o|.|y_o|=6.\frac{|x_o|}{3}.\frac{|y_o|}{2}\le 6.\frac{1}{2}\left(\frac{x_o^2}{9}+\frac{y_o^2}{4}\right)=3$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $\dfrac{|x_o|}{3}=\dfrac{|y_o|}{2}$

Từ đó ta tìm được x_o,y_o

Đáp số: $\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2};\pm\sqrt{2}\right);\left(-\dfrac{3\sqrt{2}}{2};\pm\sqrt{2}\right)$

9. Trong mặt phẳng Oxy cho elip $(E):\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ và đường thẳng $d:y=x+m$. d cắt (E) tại hai điểm P,Q. Gọi P',Q' lần lượt là điểm đối xứng của P,Q qua O. Tìm m để $PQP'Q'$ là hình thoi.

Hướng dẫn:

Tọa độ $P,Q=(E)\cap d\Rightarrow$ tọa độ P,Q là nghiệm hệ:

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1\\ y=x+m\end{cases}\Rightarrow 13x^2+18mx+9m^2-36=0\quad(1)$$

Giả sử $P(x_1,x_1+m)$, $Q(x_2,x_2+m)$ với x_1,x_2 là nghiệm $(1)\Rightarrow\begin{cases}x_1+x_2=-\dfrac{18m}{13}\\ x_1x_2=\dfrac{9m^2-36}{13}\end{cases}\quad(2)$

Mặt khác: P',Q' là điểm đối xứng của P,Q qua $O\Rightarrow PQP'Q'$ là hình bình hành.

Để $PQP'Q'$ là hình thoi thì $PP'\perp QQ'\Leftrightarrow OP\perp OQ$. Khi đó ta được:

$$\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{OQ}=0\Leftrightarrow 2x_1x_2+m(x_1+x_2)+m^2=0\quad(3)$$

Thế (2) vào (3) ta tìm được m.

10. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho elip $(E):\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$. Tìm điểm $M\in(E)$ sao cho đường phân giác trong góc $\widehat{F_1MF_2}$ đi qua điểm $N\left(-\dfrac{48}{25};0\right)$

Hướng dẫn:

Gọi $M(m,n)$ thuộc (E) Ta có: $(E):\dfrac{m^2}{25}+\dfrac{n^2}{9}=1$

$\Rightarrow F_1(-4,0);F_2(4,0);\overrightarrow{F_1M}=(m+4;n);\overrightarrow{F_2M}=(m-4;n)$

Phương trình đường thẳng MF_1: $n(x+4)-(m+4)y=0$

Diễn đàn Toán học – http://www.diendantoanhoc.net/forum

Phương trình đường thẳng MF_2: $n(x-4)+(4-m)y=0$
N thuộc phân giác trong góc $\widehat{F_1MF_2}$ nên

$$d(N;MF_1)=d(N;MF_2)\Leftrightarrow \left|\frac{52}{25}n\right|=\left|\frac{-148}{25}n\right|$$

Giải phương trình trên tìm m, n.

[$k2pi.net$]

11. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho elip $(E):\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ thỏa mãn $\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Hình chữ nhật cơ sở cắt Ox tại A,A', cắt Oy tại B,B', đường tròn nội tiếp tứ giác $ABA'B'$ có diện tích bằng 4π. Tìm a,b

Lời giải:

Ta có $\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow a^2=2b^2(1)$

Đường tròn nội tiếp (C) có $S=\pi r^2=4\pi\Leftrightarrow r=2$

Mặt khác: $S_{ABO}=\dfrac{1}{2}OA.OB$, mà $S_{ABO}=\dfrac{1}{2}d(O,AB).AB=\dfrac{1}{2}r.AB$

$\Rightarrow r.AB=OA.OB\Leftrightarrow 2\sqrt{a^2+b^2}=ab\Leftrightarrow 4(a^2+b^2)=a^2b^2(2)$

Thế (1) vào (2) $\Rightarrow b^2=6\Rightarrow b=\sqrt{6}$

$\Rightarrow a^2=12\Rightarrow a=2\sqrt{3}$

[$k2pi.net$]

12. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho Elip $(E)\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$. Từ điểm A có tọa dương thuộc (E) ta dựng hình chữ nhật $ABCD$ nội tiếp trong (E) có các các cạnh song song với các trục tọa độ và diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là lớn nhất. Hãy tìm tọa độ đỉnh A

Lời giải:

Gọi $A(x_o;y_o)\in(E)$ với $x_o>0$; $y_o>0$.

Do $A\in(E)$ nên $\dfrac{x_o^2}{9}+\dfrac{y_o^2}{4}=1$.

Ta có : $S_{ABCD}=4S_{OMAN}=12\cdot 2\cdot\dfrac{x_o}{3}\cdot\dfrac{y_o}{2}\le 12\left(\dfrac{x_o^2}{9}+\dfrac{y_o^2}{4}\right)=12$

Với M,N lần lượt là giao điểm của AB với Oy và AD với Ox.

Vậy S_{ABCD} có diện tích lớn nhất bằng 12. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi :

$$\begin{cases}\dfrac{x_o^2}{9}+\dfrac{y_o^2}{4}=1\\ \dfrac{x_o}{3}=\dfrac{y_o}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\\ y=\sqrt{2}\end{cases}$$

Vậy tọa độ điểm $A\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2};\ \sqrt{2}\right)$

[$k2pi.net$]

13. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho elip $(E):\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$. Tìm $M\in(E)$ sao cho $MF_1^2+7MF_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Diễn đàn Toán học – http://www.diendantoanhoc.net/forum

Diễn đàn Toán học – http://www.diendantoanhoc.net/forum

Hướng dẫn:

Cách 1: Gọi $M_o(x_o;y_o) \in (E) \Rightarrow \frac{x_o^2}{4}+\frac{y_o^2}{3}=1$

$$MF_1 = 2+\frac{x_o}{2}, MF_2 = 2-\frac{x_o}{2}$$

Khi đó $MF_1^2+7MF_2^2 = 2(x_o^2-6x_o+16)$

Mà $x_o \in [-2;2]$ nên $\left(MF_1^2+7MF_2^2\right)_{\min} = 14$ khi $x_o = 3$

Cách 2:

$$\frac{8}{7}\left(MF_1^2+7MF_2^2\right) = (MF_1+MF_2)^2+\frac{1}{7}(MF_1-7MF_2)^2 \geq 16$$

$$\Rightarrow MF_1^2+7MF_2^2 \geq 14$$

Đẳng thức xảy ra khi $MF_1 = 7MF_2 \Leftrightarrow x_M = 3$

[*Boxmath.vn*]

14. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho elip $(E): \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$ có các tiêu điểm F_1,F_2. Đường thẳng d đi qua F_2 và song song với đường phân giác của góc phần tư thứ nhất cắt (E) tại A,B. Tính diện tích tam giác ABF_1.

Lời giải:

Do giả thiết đã cho đủ để viết được ngay phương trình đường thẳng d chứa A,B (đi qua một điểm đã biết và song song với đường thẳng cho trước) nên ta định hướng tính diện tích theo công thức: $S_{ABF_1} = \frac{1}{2}AB.d(F_1;d)$.

$$(E): \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1 \Rightarrow a^2=8, b^2=4 \Rightarrow c=\sqrt{a^2-b^2}=2 \Rightarrow F_1(-2;0), F_2(2;0)$$

Đường phân giác Δ của góc phần tư thứ nhất có phương trình là: $y=x$

Ta có d // Δ và $F_2 \in d$ nên phương trình d là: $y=x-2$.

Khi đó tọa độ của B và C là nghiệm hệ: $\begin{cases} y=x-2 \\ \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1 \end{cases} \Rightarrow A(0;-2), B\left(\frac{8}{3};\frac{2}{3}\right)$ hoặc $B(0;-2), A\left(\frac{8}{3};\frac{2}{3}\right)$.

$\Rightarrow AB = \frac{8\sqrt{2}}{3}, \quad d(F_1,d) = 2\sqrt{2}$

Đáp số: $S_{ABF_1} = \frac{16}{3}$

[*Boxmath.vn*]

15. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho elip $(E): \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$. Viết phương trình đường thẳng d cắt (E) tại hai điểm phân biệt có tọa độ nguyên.

Hướng dẫn:

$M(x_o,y_o) \in (E) \Rightarrow y_o \in [-\sqrt{2};\sqrt{2}]$. Mà $y_o \in \mathbb{Z} \Rightarrow y_o \in \{-1;0;1\}$

Thay y_o vào phương trình (E) và lấy những giá trị x_o nguyên ta được các điểm thuộc (E) có tọa độ nguyên là: $A(2;1), B(2;-1), C(-2;1), D(-2;-1)$

$\Rightarrow$ đường thẳng d là đường thẳng đi qua 2 trong 4 điểm trên.

[*Boxmath.vn*]

Diễn đàn Toán học – http://www.diendantoanhoc.net/forum

5 Phụ Lục

5.1 Các bài toán Elip đã thi

1. (D - 2005) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $C(2;0)$ và elip $(E): \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{1}=1$. Tìm tọa độ các điểm $A, B \in (E)$, biết A, B đối xứng nhau qua trục hoành và tam giác ABC đều.
   Đáp số: $A\left(\frac{2}{7};\frac{4\sqrt{3}}{7}\right)$; $B\left(\frac{2}{7};-\frac{4\sqrt{3}}{7}\right)$

2. (A-2008) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, viết phương trình chính tắc của elip (E) biết (E) có tâm sai bằng $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ và hình chữ nhật cơ sở của (E) có chu vi bằng 20
   Đáp số: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

3. (B - 2010) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $A(2;\sqrt{3})$ và elip $(E): \dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$. Gọi F_1, F_2 là các tiêu điểm của (E) $(x_{F_1}<0))$, $M = AF_1 \cap (E)$ $(x_M>0)$, N là điểm đối xứng của F_2 qua M. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ANF_2.
   Đáp số: $(x-1)^2+\left(y-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{4}{3}$

4. (A-2011) cho elip $(E): \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{1}=1$. Tìm tọa độ các điểm $A, B \in (E)$, có hoành độ dương sao cho tam giác OAB cân tại O và có diện tích lớn nhất.
   Đáp số: $A\left(\sqrt{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $\left(\sqrt{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

5. (A-2012) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2=8$. Viết phương trình chính tắc elip (E), biết (E) có độ dài trục lớn bằng 8 và (E) cắt (C) tại bốn điểm tạo thành bốn đỉnh của hình vuông.
   Đáp số: $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{\frac{16}{3}}=1$

6. (B - 2012) Xem ví dụ 2 - 2.1

Diễn đàn Toán học – http://www.diendantoanhoc.net/forum

5.2 Một topic thảo luận trên VMF

Bài toán cực trị có liên quan đến Elip

Nhìn vào tiêu đề thì chắc ai cũng đã hiểu bài viết nói về một dạng toán cực trị mà có liên quan đến (E),có rất nhiều loại tìm cực trị của (E) chẳng hạn như tìm một điểm thuộc (E) sao cho diện tích tam giác Max,hay là cho một điểm cố định rồi tìm 1 điểm thuộc (E) sao cho khoảng cách là min,.....Và cụ thể ở đây thì mình cũng chỉ đi nói về dạng toán thứ 2 mà mình nói ở trên.Trước tiên ta cùng xem bài toán sau :

Bài toán: Cho $A(4;5)$ và $(E):\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1$.Tìm điểm M thuộc (E) sao cho AM ngắn nhất.
Lời giải: (hxthanh)
Chuyển về bài toán tìm cực trị tìm $\min P$

$$P=(x-4)^2+(y-5)^2$$

Trong đó x,y là các số thực thỏa mãn: $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1$
Điều kiện đó có thể viết lại là $x^2+4y^2-8=0$
Ta có:
$P=x^2-8x+y^2-10y+41=x^2-8x+y^2-10y+41+x^2+4y^2-8$
$=(2x^2-8x+8)+(5y^2-10y+5)+20$
$=2(x-2)^2+5(y-1)^2+20\geq 20$
Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=2$; $y=1$

Nhìn vào bài toán trên thì có vẻ như là ta không biết tại sao lại có thể là cộng thêm một cách hợp lí để ra được như vậy,có thể là cảm giác bất đẳng thức của người nào tốt sẽ có thể thấy nhưng vấn đề là nhóm thế nào để điểm cực trị của $x;y$ vẫn thõa mãn $x^2+4y^2-8=0$.Đó là vấn đề mình muốn nói đến.Vậy chúng ta hãy cùng đến với cách giải của tổng quát bài toán và cách tìm lượng thích hợp đó.

Bài toán: Cho điểm $A(m,n)$ không nằm trên $(E)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b2}$,tìm điểm M thuộc (E) sao cho AM đạt giá trị nhỏ nhất.
Cách giải - Thủ thuật:
Ta gọi $M(x;y)$ thì ta sẽ có:$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\Leftrightarrow b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2,(1)$
Và $AM^2=(x-m)^2+(y-n)^2=x^2+y^2-2mx-2ny+m^2+n^2$
Bây giờ ta sẽ nhân k vào (1) và cộng vào phương trình trên ta sẽ có:

$$AM^2=x^2+y^2-2mx-2ny+m^2+n^2-ka^2b^2+kb^2x^2+ka^2y^2$$

$$=(1+kb^2)x^2+(1+ka^2)y^2-2mx-2ny+(m^2+n^2-ka^2b^2)$$

$$=(1+kb^2)x^2+(1+ka^2)y^2-2mx-2ny+C$$

Đạo hàm theo biến x ta được :

$$2x(1+kb^2)=2m\Leftrightarrow x=\frac{m}{1+kb^2}\quad (2)$$

Đạo hàm theo biến y ta có :

$$2y(1+ka^2) = 2n \Leftrightarrow y = \frac{n}{1+ka^2} \quad (3)$$

Lúc này thay giác trị của x, y vào phương trình (1) ta sẽ có phương trình ẩn k sau:

$$b^2.\frac{m^2}{(kb^2+1)^2} + a^2.\frac{n^2}{(ka^2+1)^2} = a^2b^2$$

Giải phương trình này.(có thể thử trực tiếp nghiệm nhưng ta nên lấy những nghiệm nguyên hoặc hữu tỉ).Sau khi tìm được k thì bài toán trở nên đơn giản.Với ví dụ ban đầu ta tìm ra được $k = 1$.
Lưu ý là khi thay k vào (2) và (3) thì giá trị x, y chính là giá trị để AM đạt giá trị nhỏ nhất hay đó chính là tọa độ điểm M

Dưới đây là một bài tập mình muốn nêu ra để các bạn cùng áp dụng phương pháp trên nhưng không phải với $Elip$ mà là với $Hyperbol$:

Bài toán: Cho điểm $A(3;0)$ và (H) : $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} = 1$.Tìm điểm M thuộc (H) sao cho AM đạt giá trị nhỏ nhất.

Topic này của bạn có nick **BoFaKe** trên diễn đàn VMF. Có lẽ những thủ thuật như trên sẽ ít có thầy cô hay sách vở nào dạy chúng ta, nhưng hiện nay trên các diễn đàn nếu tham gia các bạn sẽ thấy có rất nhiều kiến thức, thủ thuật hay (về PT - HPT - BPT, BĐT,...) đó là những kinh nghiệm có được trong quá trình tự học, tự tìm tòi, sáng tạo được các bạn trẻ (và rất trẻ) yêu toán chia sẻ.

Muốn học giỏi thì bên cạnh việc chăm chỉ, thông minh thì cần phải có đồng đội tốt, những người bạn nhiệt tình, cùng niềm đam mê (về học tập nhé :D) và giỏi hơn mình! Khi tham gia diễn đàn các bạn sẽ có những người bạn như thế!

Hãy chia sẻ những điều bạn học hỏi được và hãy trao đổi những vấn đề bạn còn băn khăn

Diễn đàn Toán học – http://www.diendantoanhoc.net/forum

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[3] Trần Thành Minh - Giải toán hình học 12 - NXB Giáo Dục
[1] Lê Minh An (leminhansp - VMF) - Chuyên đề Elip
[2] Đặng Thành Nam (dangnamneu - K2pi) - Chuyên đề Elip
[4] Diễn đàn toán học VMF - http://www.diendantoanhoc.net/forum
[5] Diễn đàn toán phổ thông K2pi - http://www.k2pi.net
[6] Diễn đàn Boxmath - http://www.boxmath.vn

Diễn đàn Toán học – http://www.diendantoanhoc.net/forum