DẤU HIỆU CHIA HẾT, PHÉP ĐỒNG DƯ VÀ PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN

Nguyễn Mạnh Trí, Nguyễn Dương Tuấn, Nguyễn Văn Phú

Nội dung chuyên đề bao gồm 3 chương:

Chương 1: Dấu hiệu chia hết.
Chương 2: Đồng dư thức.
Chương 3: Phương trình nghiệm nguyên.

Chương I –

DẤU HIỆU CHIA HẾT CHIA HẾT

Phép chia hết được xem là một trong những phương pháp giải các bài toán về Số học, đặc biệt là các bài toán về nghiệm nguyên.

A. KIẾN THỨC CƠ SỞ:

1.1 *Định nghĩa*:

Cho hai số tự nhiên a và b, $b \neq 0$.

Ta nói rằng: a chia hết cho b, kí hiệu $a \vdots b$ khi và chỉ khi tồn tại một số tự nhiên k sao cho ta có:

a = kb

(Nghĩa là phép chia a cho số b có số dư r = 0)

$a \vdots b \Leftrightarrow a = kb$

Ta còn nói: a là bội số của b.

1.2 *Tính chất của quan hệ chia hết:*

1. Tính phản xạ:

$\forall a \in N$ và $a \neq 0$

Ta có: $a \vdots a$

2. Tính phản xứng:

Nếu $a \vdots b$ và $b \vdots a$ thì a = b

3. Tính bắc cầu:

Nếu $a \vdots b$ và $b \vdots a$ thì $a \vdots c$

1.3 Một số định lí:

1. $\forall a \in N$ và $a \neq 0$: $a \vdots a$
2. $\forall a \in N$: $a \vdots 1$
3. $\forall a \in N$ và $a \neq 0$: $0 \vdots a$

4. $a \vdots m \Rightarrow ka \vdots m$
5. $a \vdots m$, $b \vdots m \Rightarrow a \pm b \vdots m$
6. $a \pm b \vdots m$ và $a \vdots m \Rightarrow b \vdots m$
7. $a \vdots m$ và $b \vdots n \Rightarrow ab \vdots mn$
8. $a \vdots m \Rightarrow a^n \vdots m^n$, $n \in N$, $n \neq 0$
9. $a^n \vdots m^n \Rightarrow a \vdots m$
10. $a \vdots m \Rightarrow a^n \vdots m$, $n \in N$, $n \neq 0$
11. $a^n \vdots m$ và m là số nguyên tố $\Rightarrow a \vdots m$ ($n \in N$, $n \neq 0$)
12. $ab \vdots m$ và $(a, m) = 1 \Rightarrow b \vdots m$
13. $ab \vdots m$ và m là số nguyên tố $\Rightarrow a \vdots m$ hoặc $b \vdots m$
14. $a \vdots m$ và $a \vdots n$, $(m, n) = 1 \Rightarrow a \vdots mn$
15. $a \vdots m$, $a \vdots n$ và $a \vdots p$ với m, n, p nguyên tố sánh đôi (nguyên tố đôi một cùng nhau)
$\Rightarrow a \vdots mnp$
·Áp dụng phép chia hết vào tập Z các số nguyên:
.Các định lí và tính chất trên đều áp dụng được vào tập Z.
16. Tích của n số tự nhiên liên tiếp thì chia hết cho giai thừa n.

$$(m+1)(m+2)\ldots(m+n) \vdots n!$$

17. Các số chính phương đều có chữ số tận cùng là 0; 1; 4; 5; 6; 9.
18. Khi chia một số tự nhiên cho số tự nhiên a thì nó đều nhận được số dư r sao cho $0 \le r \le a - 1$.

1.4 *<u>Điều kiện chia hết:</u>*

1) <u>Điều kiện chia hết cho 2:</u>

$$\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0} \vdots 2 \Leftrightarrow a_0 \vdots 2$$
$$\Leftrightarrow a_0 = 0, 2, 4, 6, 8$$

2) <u>Điều kiện chia hết cho 5:</u>

$$\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0} \vdots 5 \Leftrightarrow a_0 \vdots 5$$
$$\Leftrightarrow a_0 = 0, 5$$

3) <u>Điều kiện chia hết cho 3 (hoặc 9):</u>

$$\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0} \vdots 3 \Leftrightarrow a_n + a_{n-1} + \ldots + a_0 \vdots 3$$
$$\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0} \vdots 9 \Leftrightarrow a_n + a_{n-1} + \ldots + a_0 \vdots 9$$

4) <u>Điều kiện chia hết cho $4 = 2^2$ hoặc $25 = 5^2$.</u>

$$\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0} \vdots 4 \Leftrightarrow \overline{a_1 a_0} \vdots 4$$
$$\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0} \vdots 25 \Leftrightarrow \overline{a_1 a_0} \vdots 25$$

Điều kiện để một số tự nhiên chia hết cho 4 (hoặc 25) là số gồm 2 chữ số cuối cùng chia hết cho 4 (hoặc chia hết cho 25).

5) Điều kiện chia hết cho $8 = 2^3$ hoặc $125 = 5^3$.

$$\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0} \vdots 8 \Leftrightarrow \overline{a_2 a_1 a_0} \vdots 8$$
$$\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0} \vdots 125 \Leftrightarrow \overline{a_2 a_1 a_0} \vdots 125$$

Điều kiện để một số tự nhiên chia hết cho 8 (hoặc 125) là số gồm 3 chữ số cuối cùng chia hết cho 8 (hoặc chia hết cho 125).

6) Điều kiện chia hết cho 11:

Điều kiện để một số tự nhiên chia hết cho 11 là tổng các chữ số ở hàng lẻ trừ tổng các chữ số ở hàng chẵn chia hết cho 11.

− Nếu n là số chẵn thì a_n là số hạng thứ (n+1) lẻ

$$\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_2 a_1 a_0} \vdots 11$$
$$\Leftrightarrow (a_1 + a_3 + \ldots + a_n) - (a_0 + a_2 + \ldots + a_{n-1}) \vdots 11$$

− Nếu n là số lẻ thì a_n là số hạng thứ (n+1) chẵn

$$\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_2 a_1 a_0} \vdots 11$$
$$\Leftrightarrow (a_1 + a_3 + \ldots + a_{n-1}) - (a_0 + a_2 + \ldots + a_n) \vdots 11$$

1.5 *Một số định lí thông dụng:*

- **Định lý Fermat:** Nếu p là số nguyên tố và số nguyên a không chia hết cho p thì $a^{p-1} - 1$ chia hết cho p.

Chứng minh:

Cách 1: Nếu a không chia hết cho số nguyên tố p thì p không chia hết cho các số 2a, 3a, 4a, …, (p−1)a. Giả sử rằng chia các số a, 2a, 3a, …, (p − 1)a cho p ta được thương và các số dư tương ứng là $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_p$ và $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_{p-1}$ thì:

$$\left.\begin{array}{c} a = q_1 p + r_1 \\ 2a = q_2 p + r_2 \\ 3a = q_3 p + r_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ (p-1)a = q_{p-1} p + r_{p-1} \end{array}\right\} \qquad (*)$$

trong đó $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_{p-1}$ là các số dương bé hơn p. Ta chứng minh các số đó đôi một khác nhau. Giả sử ngược lại, có hai số $r_i = r_k$ với k, I = 1, 2, …, (p−1) và k > i. Từ các đẳng thức.

$$\begin{cases} ka = q_k p + r_k \\ ia = q_i p + r_k \end{cases}$$

$\Rightarrow$ (k − i)a = (qk − qi)p như vậy (k − i)a chia hết cho p, điều này không xảy ra vì (k − i)a là một trong các số a, 2a, 3a, …, (p − 1)a, do đó $r_k \neq r_i$ (với $k \neq i$).

Vì $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_{p-1}$ đôi một khác nhau và bé hơn p

nên $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_{p-1} = 1.\ 2.\ 3 \ldots (p-1)$

Từ (*) ta có $1.\ 2.\ 3 \ldots (p-1)a^{p-1} = Np + r_1 r_2 r_3 \ldots r_{p-1}$ với N nguyên và

$r_1r_2r_3\ldots r_{p-1} = 1.\ 2.\ 3\ldots\ (p-1)$ hay $1.\ 2.\ 3\ldots\ (p-1)(a^{p-1}-1) = Np$.

Vì $1.\ 2.\ 3\ldots\ (p-1)$ không chia hết cho số nguyên tố p nên $a^{p-1}-1$ chia hết cho p

Dạng khác của định lý Fermat phát biểu như sau:

− Với mọi số nguyên a và p nguyên tố thì $a^p - a$ chia hết cho p.

Thật vậy, vì $a^{p-1} \vdots p \Rightarrow a(a^{p-1}-1) \vdots p$ hay $a^p - a \vdots p$.

Cách 2: Trước hết ta chứng minh bổ đề sau:

$a^p - a \vdots p$ (p nguyên tố).

− Nếu a = 1, mệnh đề đúng vì $a^p - a = 1 - 1 = 0$ chia hết cho p.

− Giả sử mệnh đề đúng với $a \geq 1$ tùy ý $a^p - a \vdots p$ ta cần chứng minh mệnh đề đúng với a + 1 tức là $(a+1)^p - (a+1) \vdots p$.

Thật vậy $(a+1)^p - (a+1) = a^p + pa^{p-1} + C_p^2 a^{p-2} + \ldots + pa + 1 - a - 1 = (ap - a) + pa^{p-1} + C_p^2 a^{p-2} + \ldots + C_p^{p-2} a^2 + pa$

Mặt khác ta có $C_p^k = \dfrac{p(p-1)(p-2)\ldots(p-k+1)}{1.2.3\ldots.k}$

Chia hết cho số nguyên tố p và $a^p - a \vdots p$. Vậy $(a+1)^p - (a+1) \vdots p$, từ đó $a(a^{p-1} - 1) \vdots p$ hay $a^{p-1} - 1 \vdots p$.

• **<u>Nguyên lí Dirichle</u>**: Nếu nhốt m con thỏ vào k cái chuồng ($k < m$; $k, m \in N^*$) thì có ít nhất 1 chuồng chứa nhiều hơn 1 con thỏ.

<u>Chứng minh:</u> Giả sử không có chuồng nào chứa nhiều hơn 1 con thỏ

$\Rightarrow$ 1 chuồng có tối đa 1 con thỏ

$\Rightarrow$ số thỏ tối đa là k con: Vô lí! vì số thỏ là $n > k$

Vậy có 1 chuồng chứa nhiều hơn 1 con thỏ.

B. *BÀI TẬP ÁP DỤNG*

<u>Bài 1</u>*: C/m rằng nếu tổng 2 phân số tối giản là 1 số nguyên thì 2 phân số đó có mẫu bằng nhau.*

<u>Giải</u>:

Xét hai phân số $\frac{a}{b}$ và $\frac{a'}{b'}$ sao cho (a,b)=1, (a',b')=1

Ta có: $\frac{a}{b} + \frac{a'}{b'} = m$ $(m \in Z)$

$\Rightarrow \frac{a.b' + a'.b}{b.b'} = m$

$\Rightarrow$ $a.b' + a'.b \vdots b.b'$

Mà : $b.b' \vdots b$

Do đó: $ab' + a'b \vdots b$

Mà $a'.b \vdots b$

$\Rightarrow$ $a.b' \vdots b$

$\Rightarrow$ $b' \vdots b$ (vì (a,b)=1)

C/m tương tự $\Rightarrow$ b $\vdots$ b'
Do đó: b = b'
$\Rightarrow$ đpcm

<u>Bài 2:</u> [Olympic Bulgaria, Vòng 4, 1998]

Gọi m và n là các số tự nhiên sao cho A = $\frac{(m+3)^n+1}{3m}$ là số nguyên. Chứng minh rằng A là một số nguyên lẻ.

<u>Giải:</u>

Giả sử ngược lại rằng A là số nguyên chẵn, khi đó,
$(m + 3)^n + 1 = 6km$.
Suy ra m là số nguyên chẵn. Hơn nữa, m chia hết cho $3^n + 1$, điều đó chứng tỏ m = 3t + 2 và n là số nguyên lẻ. Đặt $m = 2^\alpha m_1$, với $\alpha \geq 1$ và m_1 là số lẻ. Lúc đó, 2^α chia hết $3^n + 1$ nên $\alpha \leq 2$. Vì m_1 chia hết $3^n + 1$, suy ra m_1 chia hết $a^2 + 3$, trong đó $a = 3^{\frac{n+1}{2}}$. Suy ra rằng m_1 có dạng $m_1 = 6t_1 + 1$. Vì $m = 2^\alpha(6t_1 + 1)$ có dạng 3t + 2 và $1 \leq \alpha \leq 2$ nên ta có $\alpha = 1$. Khi đó, $m = 12t_1 + 2$ và từ $(m + 3)^n + 1 = 6km$, suy ra 4 chi hết $5^n + 1$, điều này mâu thuẫn.

<u>Bài 3:</u> [Olympic Bulgaria, Vòng 3, 1995]

Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (x, y) sao cho $\frac{x^2+y^2}{x-y}$ là số nguyên và nó là ước số của 1995.

<u>Giải:</u>

Để giải bài toán, ta cần tìm tất cả các cặp số nguyên dương (x, y) sao cho $x^2 + y^2 = k(x - y)$ là số nguyên , với k chia hết
1995 = 3.5.7.19

Ta sử dụng tính chất sau: Nếu p là số nguyeent tố có dạng 4q + 3 và p chia hết cho $x^2 + y^2$ thì p chia hết cho x và y. (Với p = 3, 7, 19 có thể chứng minh trực tiếp điều này). Nếu k chia hết cho 3 thì x và y cũng chia hết cho 3. Đơn giản cho 9 ta được đẳng thức.

$$x_1^2 + y_2^2 = k(x_1 - y_1)$$

Với k_1 chia hết cho 3.7.19. Xét các trường hợp k chia hết cho 7, k chia hết cho 19, lập luận tương tự, sau cùng ta có đẳng thức $a^2 + b^2 = 5(a - b)$ (không thể có đẳng thức $a^2 + b^2 = a - b$), với a > b. Từ đây ta có
$(2a - 5)^2 + (2b - 5)^2 = 50$,
suy ra a = 3, b = 1 hoặc a = 2, b = 1.

Từ đó suy ra các cặp số cần tìm có dạng (3c, c), (2c, c), (c, 3c), (c, 2c), với c = 1; 3; 7; 19; 3.7; 3.19; 7.19; 3.7.19

<u>Bài 4:</u>

Cho p là số nguyên tố lớn hơn 5. CMR: Luôn tồn tại 1 số tự nhiên gồm toàn chữ số 1 chia hết p.

Giải:

Ta xét các số sau 11; 111; 1111;…; $\underbrace{11...11}_{p+1}$ thì có p + 1 số như vậy

Lấy p+1 số đó chia cho p thì theo nguyên lí Dirichle, tồn tại hai số có cùng dư khi chi cho p. Tính hiệu 2 số đó, ta có:

$\underbrace{11...11}_{m}\underbrace{00...00}_{n} \vdots p$

$\underbrace{11...11}_{m}.10^n \vdots p$

Do p là số nguyên tố nên:

$\left[\begin{array}{l}\underbrace{11...11}_{m} \vdots p \\ 10^n \vdots p\end{array}\right.$

Mà p là số nguyên tố lớn hơn 5 nên 10^n không chia hết cho p $\Rightarrow$ đpcm.

Bài 5.

Chứng minh rằng trong tập số nguyên dương luôn tồn tại số k sao cho số $1983^k - 1$ chia hết cho số 10^5.

Giải:

Xét dãy số:

$(1983 - 1); (1983^2 - 1); (1983^3 - 1); \ldots; (1983^{10^5+1} - 1)$

Có $10^5 + 1$ số. Lấy $10^5 + 1$ số trên chia cho 10^5, ta được $10^5 + 1$ số dư, số dư nhận các giá trị từ 0 đến $10^5 - 1$.

Theo nguyên tắc Dirichlet trong các số trên khia chia cho 10^5 phải có ít nhất 2 số có cùng số dư.

Giả sử: $1983^m - 1$ và $1983^n - 1$ ($m, n \in N$; $1 \le n \le m \le 10^5 + 1$)

Ta có: $(1983^m - 1) - (1983^n - 1) \vdots 10^5$

$\Leftrightarrow 1983^m - 1983^n \vdots 10^5$

$\Leftrightarrow 1983^n(1983^{m-n} - 1) \vdots 10^5$ mà $(1983, 10^5) = 1$

Do đó: $1983^{m-n} - 1 \vdots 10^5$. Chọn $k = m - n$

Bài toán đã được chứng minh.

Bài 6:

Tìm số tự nhiên k lớn nhất thỏa mãn điều kiện:

$(1994!)^{1995} \vdots 1995^k$

Giải:

1995 = 3 . 5 . 7 . 19

Các bội của 19 trong dãy 1; 2; …; 1994 là 19; 38; …; 1976 gồm 1976 : 19 = 104 (số).

Trong đó các bội của 19^2 là 361; 722; 1083; 1444; 1805; gồm 5 số.

Do đó thừa số 19 khi phân tích 1994! Ra thừa số nguyên tố là:

104 + 5 = 109 nên 1994! = 3^{109} . 5^{109} . 7^{109} . 19^{109} . T

Với T ⋮ 19 ⇒ T ⋮ 1995; $(1994!)^{1995}$ ⋮ 1995^k ⇒ k ≤ 109 . 1995

Vậy k lớn nhất là 109 . 1995

Bài 7:

Tìm 1000 chữ số tận cùng của tổng A = 1 + 50 + 50^2 + … + 50^{999}

Giải:

$$A = \frac{5^{1000}.10^{1000}-1}{49} = \frac{5^{1000}-16}{49}.10^{1000} + \frac{16.10^{1000}-1}{49}$$

$$B = \frac{16.10^{1000}-1}{49} = \frac{1599..99}{49} = 3265...55\underbrace{m...m}_{23}$$

Số B có 1000 chữ số gồm 34 chữ số tận cùng của m và 23 lần chu kỳ m.

Trong đó: m = 020481632653061224489795918367346939775 51

A là số tự nhiên, B là số tự nhiên có 1000 chữ số nên:

$C = \frac{(5^{1000}-16)10^{1000}}{49}$ cũng là số tự nhiên.

C có 1000 chữ số 0 ở tận cùng.

A = B + C nên 1000 chữ số tận cùng của của A chính là 1000 chữ số, tận cùng của B đó là số B: = 3265…551 $\underbrace{m...m}_{23}$

Bài 8:

Cho a, b, c là các số nguyên dương thỏa điều kiện $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$

và d là ước chung lớn nhất của chúng. Chứng minh rằng abcd và d(b − a) là những số chính phương.

Giải:

Gọi A = $\frac{a}{d}$, B = $\frac{b}{d}$, C = $\frac{c}{d}$, thế thì A, B, C có ước chung lớn nhất là 1

ta có $\frac{1}{A} - \frac{1}{B} = \frac{1}{C}$ nên AB = C(B − A)

Ta chứng minh rằng B − A phải là một số chính phương. Nếu trái lại thì phải có một số nguyên tố p sao cho lũy thừa cao nhất của p chia hết B − A là p^{2r+1} với r nào đó.

Bây giờ nếu p^{r+1} chia hết cho A thì nó cũng chia hết cho B = (B − A) + A

Suy ra p^{2r+2} chia hết cho AB. Mà p không thể chia hết cho C (vì A, B, C không có thừa số chung), suy ra p^{2r+2} chia hết cho (B − A). Vô lí! Do đó quá lắm là p^r chia hết cho A, và ta có kết quả tương tự đối với B. Từ đó quá lắm p^{2r} chia hết cho AB, rồi thì chia hết cho (B − A). Vô lí! Điều đó đã chứng minh rằng B − A là một số chính phương mà

ABC(B − A) = ABAB,

nên ABC(B − A) phải là số chính phương, rồi thì

$$\frac{ABC(B-A)}{B-A} = ABC$$

cũng là số chính phương. Như thế

$(b - a)d = d^2(B - A)$ và $abcd = d^4ABC$

đều là số chính phương.

Bài 9:

Tìm tất cả các số tự nhiên gồm 3 chữ số sao cho mỗi số là trung bình cộng của các số suy từ số đó bằng phép hoán vị tròn các chữ số của số đó.

Giải:

Số phải tìm có dạng $\overline{abc}$; với a, b, c $\in$ N; $1 \le a \le 9$; $0 \le b, c \le 9$

Theo giả thiết: $\overline{abc} = \dfrac{\overline{bca} + \overline{cab}}{2} \Leftrightarrow 189a = 81b + 108c$

$\Leftrightarrow 7a = 3b + 4c \Leftrightarrow 7(a - b) = 4(c - b)$ (1)

$\Rightarrow 4(c - b) \vdots 7$ (2)

$\Rightarrow c - b \vdots 7$ (3)

Do $0 \le b, c \le 9$ nên $-9 \le b - c \le 9$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow (c - b) \in \{-7; 0; 7\}$. Xét các trường hợp:

TH1: $c - b = -7 \Leftrightarrow b = c + 7 \le 9$

$\Rightarrow c \in \{0; 1; 2\}$

$\Rightarrow b \in \{7; 8; 9\}$

$\Rightarrow a \in \{3; 4; 5\}$

$\Rightarrow \overline{abc} = 370, 481, 592$

TH2: $c - b = 0 \Leftrightarrow b = c$

$\Rightarrow a = b = c$

$\Rightarrow \overline{abc} = 111, 222, \ldots, 999$

TH3: $c - b = 7 \Rightarrow c = b + 7 \le 9$

$\Rightarrow b \in \{0; 1; 2\}$, $c \in \{7; 8; 9\}$, $a \in \{4; 5; 6\}$

$\Rightarrow \overline{abc} = 470, 581, 692$

Vậy có tất cả 15 số cần tìm là

370, 481, 592

111, 222, …, 999

470, 581, 692.

Chương 2 - ĐỒNG DƯ THỨC

A. KIẾN THỨC CƠ SỞ

2.1 Định nghĩa

Nếu hai số nguyên a và b chia cho c ($c \neq 0$) có cùng số dư ta nói a đồng dư b theo mođun c, kí hiệu: $a \equiv b \pmod c$.

Vậy $a \equiv b \pmod c \Leftrightarrow a - b \vdots c$

2.2 Một số tính chất

Với mọi a; b; c; d; m $\in N^*$ (N^* là tập hợp các số nguyên dương)

a) $a \equiv a \pmod m$

$a \equiv b \pmod m \Leftrightarrow b \equiv a \pmod m$

$a \equiv b \pmod m$ và $b \equiv c \pmod m \Rightarrow a \equiv c \pmod m$

b) $a \equiv b \pmod m$ và $c \equiv d \pmod m$

$\Rightarrow a + c \equiv b + d \pmod m$

c) $a \equiv b \pmod m$ và $c \equiv d \pmod m$

$\Rightarrow ac \equiv bd \pmod m$

Nếu d là ước chung dương của a, b và m thì: $a \equiv b \pmod m$

$\Rightarrow \frac{a}{d} \equiv \frac{c}{d} \pmod{\frac{m}{d}}$

c) $a \equiv b \pmod m$

c là ước chung của a và b và (c, m) = 1 $\Rightarrow \frac{a}{c} \equiv \frac{b}{c} \pmod m$

d) $a \equiv b \pmod m$

$c > 0 \Rightarrow ac \equiv bc \pmod{mc}$

***) <u>Chú ý:</u>**

1. Với mọi $a.b \in Z$ $(a \neq b)$, $n \in N$, ta có: $a^n - b^n \vdots a - b$
2. Trong n số nguyên liên tiếp ($n \in N^*$) có một và chỉ một số chia hết cho n.
3. Trong n + 1 số nguyên bất kỳ ($n \in N^*$) chia cho n thì phải có hai số khi chia cho n có cùng số dư (vận dụng nguyên tắc Dirichle).
4. Tìm k chữ số tận cùng của số a là tìm số dư khi chia a cho 10^k.

B. *BÀI TẬP ÁP DỤNG*

<u>Bài 1</u>:

Cho x.y.z $\in$ Z thõa mãn $x^2 + y^2 = z^2$. chứng minh xyz $\vdots$ 60.

<u>Giải</u>

- Ta có: $x \equiv 0; 1; 2; 3; 4 \pmod 5 \Rightarrow x^2 \equiv 0; 1; 4 \pmod 5$

Tương tự $y^2; z^2 \equiv 0; 1; 4 \pmod 5$ (1)

$\Rightarrow z^2 = x^2 + y^2 \equiv 0; 2; 3 \pmod 5$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow z^2 \equiv 0 \pmod 5$ hay z^2 chia hết cho 5

$\Rightarrow$ z chia hết cho 5.

- Ta có: $x \equiv 0; 1; 2 \pmod 3 \Rightarrow x^2 \equiv 0; 1 \pmod 3$

tương tự: $y^2 \equiv 0; 1 \pmod 3$ và $z^2 \equiv 0; 1 \pmod 3$

$\Rightarrow x^2 + y^2 \equiv 0; 2 \pmod 3$ hay $z^2 \equiv 0; 2 \pmod 3$

$\Rightarrow z \equiv 0 \pmod 3$ hay z chia hết cho 3 $\Rightarrow$ xyz chia hết cho 3.

- Giả sử: x, y chẵn $\Rightarrow$ xy chia hết cho 4 $\Rightarrow$ xyz chia hết cho 4.
- Giả sử x chẵn (x không chia hết cho 4) và y lẻ.

x có dạng 4k + 2

$\Rightarrow x^2 = 16k^2 + 16k + 4$ chia 8 dư 4 hay $x^2 \equiv 4 \pmod 8$

y có dạng 4k + 1 $\Rightarrow y^2 = 16k^2 + 8k + 1$ chia 8 dư 1 hay $y^2 \equiv 1 \pmod 8$

$\Rightarrow z^2 = x^2 + y^2 \equiv 5 \pmod 8$ (Vô lí).

$\Rightarrow$ x phải chia hết cho 4 $\Rightarrow$ xyz chia hết cho 4.

Tương tự với x lẻ, y chẵn $\Rightarrow$ xyz chia hết cho 4

mà (3; 4; 5) = 1 $\Rightarrow$ xyz chia hết cho (3.4.5) = 60 (đpcm).

Bài 2:

Cho n là số nguyên dương, $n \geq 2$ và a là số nguyên dương thỏa $a^2 \equiv 1 \pmod{2^n}$. Tìm số dư khi chia a cho 2^{n-1}.

Giải:

Ta thấy: 2^n là số chẵn, mà $a^2 \equiv 1 \pmod{2^n}$

$\Rightarrow$ a là số lẻ.

+) Nếu n = 2. Ta có: $a^2 \equiv 1 \pmod{2^{2-1}}$

+) Nếu $n \geq 3$, $n \in N$

Đặt $a - 1 = 2x$ ($x \in N$)

$\Rightarrow a + 1 = 2(x + 1)$

Ta có: $a^2 - 1 \vdots 2^n \Leftrightarrow 4x(4x + 1) \vdots 2^n \Leftrightarrow x(x + 1) \vdots 2^{n-2}$. (*)

Xảy ra các trường hợp:

1) x chẵn $\Rightarrow$ x + 1 lẻ $\Rightarrow x \vdots 2^{n-2} \Leftrightarrow a - 1 \vdots 2^{n-1}$ hay $a \equiv 1 \pmod{2^{n-1}}$.

2) x lẻ $\Rightarrow x + 1 \vdots 2^{n-2} \Rightarrow a + 1 \equiv 0 \pmod{2^{n-1}}$ hay $a \equiv -1 \pmod{2^{n-1}}$.

Vậy khi chia a cho 2^{n-1} có số dư là 1 hoặc -1.

Bài 3:

Cho p là số nguyên tố bất kì khác 2 và khác 5. Chứng minh rằng trong dãy số 9; 99; 999; 9999; ... có vô số số hạng chia hết cho p.

IGiải:

Do p là số nguyên tố khác 2; 5 nên (p; 10) = 1 (1)

Do p là số nguyên tố, theo định lí Ferma nhỏ ta có:

$(10^p - 10) \vdots p \Rightarrow 10(10^{p-1} - 1) \vdots p$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $10^{p-1} - 1 \vdots p \Rightarrow 10^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Do đó với mọi số nguyên dương n thì: $10^{n(p-1)} \equiv 1 \pmod{p}$

$\Rightarrow 10^{n(p-1)} - 1 \vdots p$ ($n \in Z^+$)

Mặt khác: $10^{n(p-1)} - 1 = \underbrace{99...9}_{n(p-1)}$

Từ đó suy ra tồn tại vô số số hạng của dãy 9; 99; 999; 9999; ... chia hết cho p

Bài 4: [USAMTS, 2000 – 2001]

Hãy tìm số dư khi chia $1776^{1492!}$ cho 2000.

Giải:

Ta có:

$1776^1 \equiv 1776 \pmod{2000}$

$1776^2 \equiv 176 \pmod{2000}$

$1776^3 \equiv 576 \pmod{2000}$

$1776^4 \equiv 976 \pmod{2000}$

$1776^5 \equiv 1376 \pmod{2000}$

$1776^6 \equiv 1776 \pmod{2000}$

$1776^7 \equiv 176 \pmod{2000}$

Và tiếp tục như vậy, từ $1776^6 \equiv 1776^1 \pmod{2000}$ ta được:
$1776^n \equiv 1776^{n-5} \pmod{2000}$
Với mọi n > 5, do đó ta sẽ xét phần dư của số mũ khi chia cho 5.
Thấy 1492! chia hết cho 5 nên $1776^{1492!} \equiv 1776^5 \equiv 1376 \pmod{2000}$
Vậy khi chia $1776^{1492!}$ cho 2000 ta được số dư là 1376.

<u>Bài 5:</u>

Chứng minh rằng với mọi giá trị nguyên của m, tồn tại số nguyên n để cho $n^3 - 11n^2 - 87n + m$ chia hết cho 191.

<u>Giải:</u>

Đặt $P(n) = n^3 - 11n^2 - 87n + m$
Ta có: $P(x) \equiv (a + x)^3 + b \pmod{191}$
$\Leftrightarrow x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3 + b \equiv n^3 - 11n^2 - 87n + m \pmod{191}$.

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a \equiv -11 \pmod{191} & (1) \\ 3a^2 \equiv -87 \pmod{191} & (2) \\ b \equiv m - a^3 \pmod{191} & (3) \end{cases}$$

Từ (1) $\Rightarrow 3a \equiv 180 \pmod{191} \Rightarrow a \equiv 60 \pmod{191} \Rightarrow 3a^2 \equiv -87 \pmod{191}$
Vậy với mọi giá trị nguyên của m, tồn tại các số nguyên a, b sao cho
$P(x) \equiv (a + x)^3 + b \pmod{191}$
Nhận xét 191 là số nguyên tố có dạng 191 = 3k + 2.
$P(i) \equiv P(j) \pmod{191} \Rightarrow (a + i)^3 \equiv (a + j)^3 \pmod{191}$.
Đặt u = a + i, v = a + j thì
$u^3 \equiv v^3 \pmod{191} \Rightarrow u^{3k} \equiv v^{3k} \pmod{191}$
$\Rightarrow u^{3k}v^2 \equiv v^{3k+2} \equiv v^{191} \pmod{191} \equiv v \pmod{191}$ (Định lí Fermat) (4)
$\Rightarrow u^{3k}v^2 \equiv u^{3k}u^{3k+3} \equiv u^{3k+1}u^{3k+2} \equiv u^{3k+1}u^{191} \equiv u^{3k+1}u = u^{3k+2} \equiv u^{191} \equiv u \pmod{191}$ (5)
Từ (4) và (5) $\Rightarrow u \equiv v \pmod{191} \Rightarrow i \equiv j \pmod{191}$
Vậy nếu $\forall i, j \in \{1; 2; ...; 191\}$ sao cho $i \neq j \pmod{191}$ thì $P(i) \neq P(j) \pmod{191}$
Suy ra tồn tại $n \in \{1; 2; ...; 191\}$ sao cho $P(n) \equiv 191 \pmod{191}$ hay P(n) chia hết cho 191.

<u>Bài 6:</u> [Olympic, Bulgaria, Vòng 4, 1995]

Tìm tất cả các số nguyên n > 1 sao cho số $a^{25} - a$ chia hết cho n với mọi số nguyên a.

<u>Giải:</u>

Gọi n là số thỏa mãn đề bài, khi đó p^2 (p là số nguyên tố) không chia hết cho n, vì p^2 không chia hết cho $p^{25} - p$. Suy ra n là một tích các cặp số nguyên tố khác nhau. Mặt khác ta có:
$2^{25} - 2 = 2.3^2.5.7.13.17.241$
Nhưng n không chia hết cho 17 và 241 vì:
$3^{25} \equiv -3 \pmod{17}$ và $3^{25} \equiv 32 \pmod{241}$.

Từ định lí Fermat suy ra $a^{25} \equiv a \pmod p$ khi p = 2; 3; 5; 7; 13. Như vậy n phải là một ước số khác 1 của 2.3.5.7.13. Suy ra số cần tìm là:
$2^5 - 1 = 31$

<u>Bài 7:</u> [Olympic, Bulgaria, Vòng 4, 1996]

Tìm tất cả các số nguyên tố p, q sao cho $\frac{(5^p - 2^p)(5^q - 2^q)}{pq}$ là một số nguyên.

<u>Giải:</u>

Giả sử p là số nguyên tố chia hết cho $5^p - 2^p$. Theo định lí Fermat ta có $5^p - 2^p \equiv 3 \pmod p \Rightarrow p = 3$.

Bây giờ, giả sử các số nguyên tố thỏa mãn:

$$\frac{(5^p - 2^p)(5^q - 2^q)}{pq}$$

là số nguyên. Nếu p chia hết cho $5^p - 2^p$ thì p = 3. Vì $5^3 - 2^3 = 3.3.13$ nên hoặc $q \mid (5^q - 2^q)$, tức là q = 3 hoặc p = 13. Từ đó ta được các cặp (3; 3), (3; 13), (13; 3) thỏa mãn điều kiện đề bài.

Xét trường hợp còn lại, $p \neq 3$ và $q \neq 3$. Ta có $p \mid (5^q - 2^q)$ và $q \mid (5^p - 2^p)$. Có thể giả sử p > q. Rõ ràng (p, q –1) = 1, do đó tồn tại 2 số nguyên a, b để cho ap – b(q – 1) = 1 (định lí Bezou). Vì (q; 5) = (p; 2) = 1 nên định lí Fermat cho ta $5^{q-1} \equiv 2^{q-1} \pmod q$. Từ $5^q \equiv 2^q \pmod q \Rightarrow 5^{ap} \equiv 2^{ap} \pmod q$, do đó $5^{b(q-1)+1} \equiv 2^{b(q-1)+1} \pmod q$. Mà $5^{b(q-1)+1} \equiv 5 \pmod q$ và $2^{b(q-1)+1} \equiv 2 \pmod 2$, vậy q = 3, điều này mâu thuẫn.

Tóm lại, các cặp số (p, q) là (3; 3), (3; 13), (13; 3).

<u>Bài 8:</u> [Số 320, 2–2004, Toán học tuổi trẻ]

Tìm tất cả các số nguyên tố p, q thỏa mãn $p^3 + q^5 = (p + q)^2$ (1)

<u>Giải:</u>

Kí hiệu P là tập hợp các số nguyên tố. Từ (1) và do $p, q \in P$ nên $p^3 - q^5 > 0$ hay $p^3 > q^5 \geq 2^5$. Vậy p > 3 và do đó p không chia hết cho 3.

- Nếu q chia hết cho 3 thì q = 3 ($q \in P$). Thay q = 3 vào (1)

  ta được: $p^3 - 3^5 = (p + 3)^2 \Leftrightarrow p^3 - p^2 - 6p - 252 = 0$

  $\Leftrightarrow (p - 7)(p^2 + 6p + 36) = 0$

  $\Rightarrow p = 7$

  Vậy p = 7, q = 3 thỏa mãn (1) là cặp số nguyên tố cần tìm.
- Nếu $q \neq 3 \pmod 3$, ta xét các trương hợp:

  +) Nếu $\begin{cases} p \equiv 1 \pmod 3 \\ q \equiv 1 \pmod 3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} p \equiv 2 \pmod 3 \\ q \equiv 2 \pmod 3 \end{cases}$

  thì $p^3 - q^5 \equiv 0 \pmod 3$, $(p + q)^2 \equiv 1 \pmod 3$ nên không thỏa mãn (1).

  +) Nếu $\begin{cases} p \equiv 1 \pmod 3 \\ q \equiv 2 \pmod 3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} p \equiv 2 \pmod 3 \\ q \equiv 1 \pmod 3 \end{cases}$

  thì $p^3 - q^5 \equiv \pm 1 \pmod 3$, $(p + q)^2 \equiv 0 \pmod 3$ cũng không thỏa mãn (1).

  Vậy p = 7, q = 3 là cặp số nguyên tố duy nhất thỏa mãn điều kiện đề bài.

***Chương 3*:**

PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN

Đây là mảng trọng tâm của chuyên đề trên, thường là những bài tập khó và đòi hỏi sự nhạy bén của người học. Phương trình nghiệm nguyên được nêu trong chuyên đề này chủ yếu vận dụng từ phương pháp chia hết và đồng dư thức để áp dụng.

Tính chất chia hết và phép đồng dư trong tập số nguyên còn được áp dụng để giải các đa thức nghiệm nguyên. Khi nhìn vào một phương trình nghiệm nguyên, ta liên tưởng ngay đến tính chất đặc trưng của số nguyên, đó là tính chia hết. Vì vậy chương này ta nghiên cứu về các phương trình nghiệm nguyên có các cách giải liên quan đến tính chia hết.

Bài 1: [Olympic Bulgaria, Vòng 4, 1999]

Chứng minh rằng phương trình $x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = 1999$ có vô số các nghiệm nguyên.

Giải:

Vì $10^3 + 10^3 + (-1)^3 + 0^3 = 1999$, ta tìm nghiệm của phương trình có dạng $x = 10 - k$, $y = 10 + k$, $z = -1 - h$, $t = h$, với k, h là các số nguyên. Thay vào phương trình, sau những biến đổi, ta chứng minh được phương trình tương đương với $h(h + 1) = 20k^2$, suy ra $(2h + 1)^2 - 80k^2 = 1$

Đây là phương trình Pell. Từ đó h = 4, k = 1 là nghiệm. Tất cả các nghiệm của phương trình Pell này là (h_n, k_n) với

$$2h_n + 1 + k_n\sqrt{80} = (9 + \sqrt{80})^n,\ n = 1, 2, \ldots$$

Vậy phương trình đã cho có vô hạn nghiệm nguyên.

**** Ghi chú về phương trình Pell.***

Phương trình Pell là một dạng phương trình nghiệm nguyên (Diophantine), có dạng $x^2 - dy^2 = N$, với d là số nguyên dương không chính phương. Định lí sau đây chứng tỏ khi N = 1, phương trình Pell luôn có một số vô hạn các nghiệm.

Định lí

Nếu (a, b) là nghiệm nguyên dương bé nhất của phương trình $x^2 - dy^2 = 1$ thì tất cả các nghiệm nguyên dương đều có dạng

$$(x_n, y_n) = \left(\frac{(a+b\sqrt{d})^n + (a-b\sqrt{d})^n}{2}; \frac{(a+b\sqrt{d})^n - (a-b\sqrt{d})^n}{2\sqrt{d}}\right)$$

Bài 2: [Số 374 (8–2008). Toán học tuổi trẻ].

Tìm tất cả bộ ba số nguyên dương x, y, z thỏa mãn điều kiện

$5xyz = x + 5y + 7z + 10$ (1)

Giải:

+) Với x = 1 thì (1) trở thành:

$$5xyz = 5y + 7z + 11 \Leftrightarrow (5y - 7)(z - 1) = 18 \ (2)$$

Vì x, y, z nguyên dương và 5y – 7 chia cho 5 dư 3 nên

$$(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5y-7=3; z-1=6 \\ 5y-7=18; z-1=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=2, z=7 \\ y=5, z=2 \end{array}\right.$$

+) với $x \geq 2$, ta thấy

$(1) \Leftrightarrow 5y + 7z + 10 = x(5yz - 1) \geq 2(5yz - 1)$

Dẫn đến $10yz - 5y - 7z - 12 \leq 0$

$$\Leftrightarrow (10y - 7)(2z - 1) \leq 31 \ (3)$$

Suy ra $y \leq 3$

*) Khi y = 1, từ (1) có $5xz = x + 7z + 15 \Leftrightarrow (5x-7)(5z-1) = 82$. Dễ thấy phương trình này không có nghiệm nguyên dương x, z.

*) Khi y = 2, từ (3) $\Rightarrow$ z = 1, thay vào (1) ta tìm được x = 3

*) Khi y = 3, từ (3) $\Rightarrow$ z = 1, thay vào (1) ta được $x = \frac{32}{4} \notin Z^+$ (loại)

Vậy các bộ ba số nguyên dương (x;y;z) cần tìm là (1;2;7) , (1;5;2), (3;2;1) .

<u>Bài 3:</u>

Giải phương trình nghiệm nguyên:

$$7^x + 24^x = y^2 \qquad (1)$$

<u>Giải:</u>

Nhận thấy nếu (x; y) là nghiệm của (1) thì (x; − y) cũng là nghiệm của (1). Dó đó ta chỉ xét với $y \in N$.

- Với $x \leq -1 \Rightarrow 0 < 7^x \leq \frac{1}{7} < \frac{1}{2}$; $0 < 24^x \leq \frac{1}{24} < \frac{1}{2}$.

  Do đó $0 < 7^x + 24^x = y^2 < 1$. Vậy $y \notin Z$, trường hợp này bị loại.
- Với $x = 0 \Rightarrow y^2 = 2 \Rightarrow y \notin Z$, trường hợp này bị loại.
- Với $x \notin N^*$, từ đó $\Rightarrow y^2$ là số chính phương lẻ, do đó $y^2 \equiv 1 \pmod 8$.

  Mặt khác $24^x \equiv 0 \pmod 8$, nên $7^x \equiv 1 \pmod 8$.

  $\Rightarrow$ x là số chẵn nên có dạng $x = 2k$, $k \notin N^*$. Ta có

  $$7^{2k} + 24^{2k} = y^2 \Leftrightarrow (y - 24^k)(y + 24^k) = 7^{2k} \qquad (2)$$

  Do 7 là số nguyên tố và $y \in N$ nên từ (2) suy ra $y - 24^k = 7^m$, $y + 24^k = 7^{2k-m}$ với $m \in N$, $m \leq k$.

  $\Rightarrow 7^{2k-m} - 7^m = 7^m(7^{2k-2m} - 1) = 2.24^k$ không chia hết cho 7.

  $\Rightarrow 7^m = 1 \Rightarrow m = 0$.

  Do đó $y - 24^k = 1 \Leftrightarrow y = 24^k + 1$. Thay vào (1) ta có

  $$7^{2k} + 24^{2k} = (24^k + 1)^2$$

  $$\Leftrightarrow 2.24^k + 1 = 7^{2k} = 49^k > 48^k \qquad (3)$$

  Với $k \geq 2$ thì $48^k - 2.24^k = 24^k(2^k - 2) > 1$.

Vậy (3) không xảy ra với $k \geq 2$. Do đó k = 1. Suy ra x = 2, $y = 24^1 + 1 = 25$. Vậy các cặp số nguyên (x; y) cần tìm là (2; 25) và (2; −25).

Bài 4:

Có hay không các số nguyên x, y, z thỏa mãn điều kiện

$$|x - 2005y| + |y - 2007z| + |z - 2009x| = 2011^x + 2013^y + 2015^z \text{ ?} \qquad (1)$$

Giải:

Đặt vế phải của (1) là A, vế trái của (1) là B.

Do a + | a | ∈ {0; 2} nên với mọi số nguyên a thì a + | a | là số nguyên chẵn. Suy ra x, y, z nguyên thì

| x − 2005y | + | y − 2007z | + | z − 2009x | + (x − 2005y) + (y − 2007z) + (z − 2009x) là số chẵn

⇔ A − (2008x + 2004y + 2006z) là số chẵn

⇔ A là số chẵn.

1) Nếu x, y, z đều là các số nguyên âm thì

$$0 < B = \frac{1}{2011^{-x}} + \frac{1}{2013^{-y}} + \frac{1}{2015^{-z}} < \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

Suy ra B không là số nguyên.

2) Nếu trong x, y, z có đúng 2 số nguyên âm, chẳng hạn là x, y thì

$$2015^z < B = \frac{1}{2011^{-x}} + \frac{1}{2013^{-y}} + 2015^z < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 2015^z = 1 + 2015^z$$

Suy ra B không là số nguyên.

3)Nếu trong x, y, z có đúng một số nguyên âm, chẳng hạn là x thì

$$B = \frac{1}{2011^{-x}} + 2013^y + 2015^z$$

Suy ra B không là số nguyên.

4) Nếu x, y, z đều là số tự nhiên thì 2011^x, 2013^y, 2015^z là số lẻ nên B là số lẻ.

Vậy với mọi x, y, z nguyên thì B là số không nguyên hoặc là số lẻ, trong khi A là số chẵn. Do đó không tồn tại các số x, y, z để đẳng thức (1) xảy ra.

Bài 5:

Tìm tất cả các cặp số tự nhiên (x; y) thỏa mãn điều kiện $y^x - 1 = (y - 1)!$ Trong đó y là một số nguyên tố.

Giải:

Ta có: $y^x - 1 = (y - 1)!$

$\Leftrightarrow y^{x-1} + y^{x-2} + \ldots + y + 1 = (y - 2)!$.

Trước hết ta chứng minh y < 7. Giả sử (x; y) là một cặp số nguyên thỏa mãn bài toán với

y ≥ 7, do y lẻ nên $\frac{y-1}{2} \in N^*$ và $2 < \frac{y-1}{2} < y - 2$.

$\Rightarrow (y - 2)! \vdots 2.\frac{y-1}{2}$ hay $(y - 2)! \vdots (y - 1)$.

Lại có $y^i \equiv 1 \pmod{(y - 1)}$ với i = 0, 1, 2, …

nên $y^{x-1} + y^{x-2} + \ldots + y + 1 \equiv 1 \pmod{(y - 1)}$.

⇒ x ≥ y − 1. Điều này không thể xảy ra

vì $y^{x-1} < y^{x-1} + y^{x-2} + \ldots + y + 1 = (y-2)!$
$< (y-2)^{y-2} < y^{y-2}$
$\Rightarrow x - 1 < y - 2$ hay $x < y - 1$.
Vậy $y < 7$. Do y là số nguyên tố nên y có các giá trị 2; 3; 5.

- Với $y = 2$, có $2^x - 1 = 1$, dẫn đến $x = 1$;
- Với $y = 3$, có $3^x - 1 = 2$, dẫn đến $x = 1$;
- Với $y = 5$, có $5^x - 1 = 24$, dẫn đến $x = 2$.

Vậy có 3 cặp số tự nhiên (x; y) thỏa mãn điều kiện bài toán là (1; 2), (1; 3) và (2; 5).

Bài 6:

Giải PT nghiệm nguyên: $x_1^4 + x_2^4 + \ldots x_{14}^4 = 1599$ với $x_1, x_2, \ldots, x_{14} \in Z$

Giải:

Xét n là một số nguyên tùy ý.
- Nếu $n = 2k$, $k \in Z$ thì $n^4 = 16k^4 \equiv 0 \pmod{16}$
- Nếu $n = 2k+1$, $k \in Z$ thì $n^2 - 1 = 4k(k+1) \vdots 8 \Rightarrow n^4 - 1 \vdots 16 \Leftrightarrow n^4 \equiv 1 \pmod{16}$

Do đó: $x_1^4 + x_2^4 + \ldots x_{14}^4 \equiv r \pmod{16}$ (Với $r \in N$ và $r \le 14$)
Mặt khác ta có: $1599 \equiv 15 \pmod{16}$
Do đó, pt đã cho không thể có nghiệm
Vậy pt trên vô nghiệm.

Bài 7:

Chứng minh rằng: phương trình sau không có nghiệm nguyên
$$x^3 + y^3 + z^3 = 30419751951995$$

Giải:

Ta có: a^3 chia 9 dư 0 hoặc 1 hoặc -1 ($\forall a \in Z$)
Do đó: $x^3 + y^3 + z^3$ chia 9 dư 0 hoặc 1 hoặc 2 hoặc 3 hoặc 6 hoặc 7 hoặc 8.
Còn 30419751951995 chia 9 dư 5.
Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài 8: **[Số 425, 11–2012, Toán học tuổi trẻ]**

Tìm các số tự nhiên a, b, c với c < 20 thỏa mãn $a^2 + ab + b^2 = 70c$. (1)

Giải:

Từ (1) suy ra $a^2 + ab + b^2$ chia hết cho 10.
Từ đó $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$ chia hết cho 10, suy ra a^3 và b^3 có cùng chữ số tận cùng $\Rightarrow a - b$ chia hết 10.

Mặt khác $a^2 + ab + b^2 = (a - b)^2 + 3ab$ chia hết cho 10 nên ab chia hết cho 10, tức là ab có chữ số tận cùng là 0. Suy ra a và b có chữ số tận cùng là 0.
Đặt $a = 10x$, $b = 10y$ ($x, y \in N$).
Ta có: $(10x)^2 + 10x.10y + (10y)^2 = 70c$
$\Rightarrow 10(x^2 + xy + y^2) = 7c \Rightarrow 7c$ chia hết cho 10.
vì $c \in N$, $c < 20$ nên $c \in \{0, 10\}$
+) với $c = 0$ thì $a = b = 0$ thỏa mãn (1)

+) với c = 10, ta có $x^2 + xy + y^2 = 7$
suy ra $x^2 \le 7 \Rightarrow x \in \{0, 1, 2\}$ (2)
Ta tìm được 2 cặp thỏa mãn (2) là (1, 2) và (2, 1)
Từ đó a = 10, b = 20 và a = 20, b = 10
Các bộ số (a, b, c) = (0, 0, 0), (10, 20, 10), (20, 10, 10) đều thỏa mãn (1)

<u>Nhận xét :</u> Chìa khóa của bài toán là chứng tỏ c chia hết cho 10, từ đó tìm được các số tự nhiên a, b, c thỏa mãn.

<u>Bài 9</u>: [Olympic Bulgaria, Vòng 3, 1999]

Tìm tất cả bộ ba các số tự nhiên (x, y, z) sao cho y là số nguyên tố, y và 3 không chia hết cho z, và $x^3 - y^3 = z^2$.

<u>Giải:</u>

Do $(x - y)[(x - y)^2 + 3xy] = x^3 - y^3 = z^2$ nên các điều kiện của bài toán chứng tỏ hai số x – y và $(x - y)^2 + 3xy$ nguyên tố cùng nhau.
$\Rightarrow x - y = u^2$ và $x^2 + xy + y^2 = v^2$. Như thế:
$3y^2 = (2v - 2x - y)(2v + 2x + y)$
Do y là số nguyên tố, có 3 trường hợp xảy ra:
*) $2v - 2x - y = y$, $2v + 2x + y = 3y \Rightarrow x = 0$, điều này mâu thuẫn.
*) $2v - 2x - y = 1$, $2v + 2x + y = 3y^2$. Ta có:
$3y^2 - 1 = 2(2x + y) = 2(2u^2 + 3y)$,
suy ra 3 chia hết cho $u^2 + 1$, điều này mâu thuẫn.
*) $2v - 2x - y = 3$, $2v + 2x + y = y^2$. Ta có:
$y^2 - 3 = 2(2x + y) = 2(2u^2 + 3y)$,
suy ra $(y - 3)^2 - (2u)^2 = 12$. Từ đó, y = 7, u = 1, x = 8, z = 13

Kiểm tra trực tiếp, ta thấy (8, 7, 13) là nghiệm của bài toán.

<u>Bài 10:</u>

Tìm mọi nghiệm nguyên tố của phương trình $x^y + y^x + 300 = z$.

<u>Giải:</u>

Nhận xét: Nếu hai số x, y cùng tính chẵn lẻ thì $z = x^y + y^x + 300$ là số chẵn, lớn hơn 2.
Do đó nếu z là số nguyên tố thì trong hai sô x, y có một số chẵn, một số lẻ.

- Ta xét trường hợp x là số chẵn, y là số lẻ.

  Vì x là số nguyên tố $\Rightarrow x = 2$.
  Lại chú ý nếu y không chia hết cho 3 thì
  $z = 2^y + y^2 + 300 = (2^y + 1) + (y^2 - 1) + 300 = (2^y + 1) + (y - 1)(y + 1) + 300 \vdots 3$
  (do y lẻ nên suy ra $2^y + 1 \vdots 3$)

  Bởi vậy từ z là số nguyên tố ta suy ra y = 3.
  Khi đó $z = 2^3 + 3^2 + 300 = 8 + 9 + 300 = 317$
- Trường hợp y là số chẵn, x là số lẻ thì x = 3, y = 2, z = 317.

  Vậy có hai bộ ba số nguyên tố (x, y, z) thỏa mãn bài toán

là (x, y, z) = (2, 3, 317), (3, 2, 317)

Bài 11: [1997]

Tìm các cặp số nguyên dương (a, b) thỏa mãn: $a^{b^2} = b^a$.

Giải:

Trước hết để ý rằng nếu ta có $a^m = b^n$ thì sẽ tồn tại các số nguyên dương c, e, f, d để $a = c^e$, $b = c^f$, với m = ed, n = fd, và d là ước chung lớn nhất của m và n. Điều này có thể được chứng minh bằng cách biểu diễn a và b như là tích các thừa số nguyên tố.

Trở lại bài toán, gọi d là ước chung lớn nhất của a và b^2, đặt a = de, b^2 = df. Khi đó, tồn tại c để $a = c^e$, $b = c^f$. Suy ra $fc^e = ec^{2f}$. Ta không thể có e = 2f vì nếu e = 2f xảy ra, từ trên ta sẽ có e = f, mâu thuẫn! Giả sử 2f > e, khi đó $f = ec^{2f-e}$, suy ra e = 1 và $f = c^{2f-1}$.

Nếu c = 1, ta có f = 1 và được nghiệm a = b = 1.

Nếu c ≥ 2, ta có $c^{2f-1} \geq 2^f \geq f$, bài toán vô nghiệm.

Sau cùng, giả sử 2f < e. Khi đó, $e = fc^{e-2}$, suy ra

$$f = 1 \text{ và } e = c^{e-2}.$$

Do $c^{e-2} \geq 2^{e-2} \geq e$ với e ≥ 5, do đó ta có e = 3 hay e = 4 (e > 2f = 2).

- e = 3 cho ta nghiệm a = 27, b = 3
- e = 4 cho ta nghiệm a = 16, b = 2.

Vậy nghiệm của bài toán là các cặp (1, 1), (16, 2), (27,3).

Bài 12:

Giải phương trình nghiệm nguyên:

$$\frac{11}{5}x - \sqrt{2x+1} = 3y - \sqrt{4y-1} + 2$$

Giải:

$$\frac{11}{5}x - \sqrt{2x+1} = 3y - \sqrt{4y-1} + 2 \quad (1)$$

Điều kiện: $\begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ y \geq \frac{1}{4} \\ x, y \in Z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x, y \in Z \end{cases}$

(1) ⇔ $\frac{11}{5}x - 3y - 2 = \sqrt{2x+1} - \sqrt{4y-1}$ (2)

Đặt p = $\frac{11}{5}x - 3y - 2$, (2) trở thành p = $\sqrt{2x+1} - \sqrt{4y-1}$

⇔ p + $\sqrt{4y-1}$ = $\sqrt{2x+1}$ ⇒ $p^2 + 4y - 1 + 2p\sqrt{4y-1} = 2x + 1$

⇔ $p^2 - 2x + 4y - 2 = -2p\sqrt{4y-1}$ (3)

Ta có 4y − 1 không phải là một số chính phương, thật vậy giả sử:

$$4y - 1 = n^2, n \in Z$$

vế trái là số lẻ nên n = 2k + 1, khi đó:

$$4k^2 + 4k + 1 = 4y - 1 \Leftrightarrow 2(k^2 + k + y) + 1 = 0 \text{ (Vô lí!)}$$

Do đó (3) chỉ đúng khi p = 0, khi đó ta có hệ:

$$\begin{cases} \frac{11}{5}x - 3y - 2 = 0 \\ -2x + 4y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \end{cases} \text{ (thỏa phương trình (1))}$$

Bài 13:

Tìm hai số nguyên dương thỏa mãn PT: $x^{2011} + y^{2011} = 2013^{2011}$

Giải:

Giả sử x, y là hai số nguyên dương thỏa mãn PT đã cho

$\Rightarrow$ x, y < 2013.

Không mất tính tổng quát giả sử $x \geq y$

Do $2013 > x \Rightarrow 2013 \geq x + 1$ ($x \in Z^+$)

$\Rightarrow 2013^{2011} \geq (x + 1)^{2011} = x^{2011} + 2011x^{2010} + \ldots 2011x + 1$

$\Rightarrow x^{2011} + y^{2011} \geq x^{2011} + 2011x^{2010} \Leftrightarrow y^{2011} \geq 2011x^{2010}$

Do $x \geq y$ nên: $\begin{cases} x^{2011} > 2011x^{2010} \\ y^{2011} > 2011y^{2010} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2011 \\ y > 2011 \end{cases} \Leftrightarrow 2011 < x, y < 2013$

$\Rightarrow x = y = 2012$.

Bài 14:

Tìm tất cả các số nguyên tố a, b, c sao cho abc < ab + bc + ca

Giải:

Không mất tính tổng quát giả sử $a \leq b \leq c \Rightarrow ab + bc + ca \leq 3bc$

Nếu $a \geq 3$ thì $3bc \leq abc \Rightarrow ab + bc + ca \leq abc$ (mâu thuẫn với đề bài).

Vậy a = 2 (a là số nguyên tố)

Do đó $2bc < 2b + bc + 2c \Rightarrow \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > \frac{1}{2} \Rightarrow b < 5$

– với b = 2, c là số nguyên tố bất kỳ

– với $b = 3 \Rightarrow c = 3$ hoặc c = 5

Vậy nghiệm của bài toán là a = 2, b = 2, c = p nguyên tố và các hoán vị hoặc a = 2, b = 3, c = 3 và các hoán vị.

Bài 15:

Giải phương trình nghiệm nguyên dương sau:

$3(x^4 + y^4 + x^2 + y^2 + 2) = 2(x^2 - x + 1)(y^2 - y + 1)$

Giải:

Ta có: $(x + 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 4x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow 3(x^2 + x + 1) \geq x^2 - x + 1$

Do $x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) \geq \frac{1}{3}(x^2 - x + 1)^2$ (*)

Tương tự ta cũng có: $y^4 + y^2 + 1 \geq \frac{1}{3}(y^2 - y + 1)^2$ (**)

Cộng vế theo vế (*) và (**) ta được:

$$x^4 + y^4 + x^2 + y^2 + 2 \geq \frac{1}{3}\left[(x^2 - x + 1)^2 + (y^2 - y + 1)^2\right] \geq \frac{2}{3}(x^2 - x + 1)(y^2 - y + 1)$$

$\Leftrightarrow 3(x^4 + y^4 + x^2 + y^2 + 2) \geq 2(x^2 - x + 1)(y^2 - y + 1)$

Dấu "=" xảy ra khi x = y = –1.
Vậy nghiệm của phương trình là x = y = –1.

<u>Bài 16</u>: [Olympic Bulgaria, Vòng 4, 1998]

Giải phương trình sau tập các số tự nhiên:

$$x^2 + y^2 = 1997(x - y)$$

<u>Giải:</u>

Ta có:

$x^2 + y^2 = 1997(x - y)$

$\Leftrightarrow 2(x^2 + y^2) = 2.1997(x - y)$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + (x^2 + y^2) - 2.1997(x - y)) = 0$

$\Leftrightarrow (x + y)^2 + ((x - y)^2 - 2.1997(x - y)) = 0$

$\Leftrightarrow (x + y)^2 + (1997 - x + y)^2 = 1997^2$

Vì x, y là các số tự nhiên nên $0 < x + y < 1997$ và $0 < 1997 - x + y < 1997$.

Như vậy, bài toán quy về việc tìm hai số tự nhiên a, b sao cho $a^2 + b^2 = 1997^2$

Do 1997 là số nguyên tố nên UCLN(a, b) = 1. Dùng phép thế Pythagore, tồn tại các số nguyên dương m, n sao m > n, UCLN (m, n) = 1 và

$m^2 + n^2 = 1997^2$, $a = 2mn$, $b = m^2 - n^2$.

Ta có $m^2, n^2 \equiv 0, 1, -1 \pmod 5$ và $1997 \equiv 2 \pmod 5$ nên $m, n \equiv \pm 1 \pmod 5$.

Ta cũng có $m^2, n^2 \equiv 0, 1 \pmod 3$ và $1997 \equiv 2 \pmod 3$ nên $m, n \equiv \pm 1 \pmod 3$.

Từ đó, ta có

$m, n \equiv 1, 4, 11, 14 \pmod{15}$.

Vì m > n nên $\frac{1997}{2} \le m^2 \le 1997$. Do đó chỉ cần xét m = 34, 41, 44.

Ta được nghiệm duy nhất là (m, n) = (34, 29). Khi đó (a, b) = (1972, 315) và dẫn đến (x, y) = (170, 145), (187, 145).