

**LỜI GIẢI ĐỀ THI BỔ SUNG CHỌN ĐỘI TUYỂN QUỐC GIA
DỰ THI IMO 2005**

Bài 1.

Cho tam giác ABC có $AB \neq AC$ và các góc B, C đều nhọn (*). Kí hiệu (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Gọi D là chân đường cao ứng với đỉnh A ; từ C hạ CH vuông góc với đường thẳng AO . Kí hiệu (I) là đường tròn đi qua điểm H và tiếp xúc với đường tròn (P) đường kính AB tại điểm D .

1. Tìm giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn OI đối với tất cả các tam giác ABC thoả mãn điều kiện (*), có $BC = 1$ và có bán kính các đường tròn (I) và (P) bằng nhau.

2. Gọi Q là trung điểm cạnh AC , G là trọng tâm tam giác ABC . Đường phân giác trong góc A của tam giác ABC cắt đường thẳng IQ tại E và đường tròn (P) tại F . Đường phân giác ngoài góc A của tam giác ABC cắt đường tròn (O) tại K (K khác A).

Chứng minh rằng GK đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF .

Lời giải.

a) Gọi M là trung điểm BC . Ta sẽ chứng minh M nằm trên đường tròn (I) . Thật vậy, do tứ giác $OCHM$ nội tiếp đường tròn đường kính OC nên $MH = OC \cdot \sin MOH = OA \cdot \sin OAD$.

Ta cũng có $MD = OA \sin OAD$ nên $MD = MH$ hay M nằm trên (I) . Do (P) và (I) tiếp xúc với nhau tại D nên P, D, I thẳng hàng.

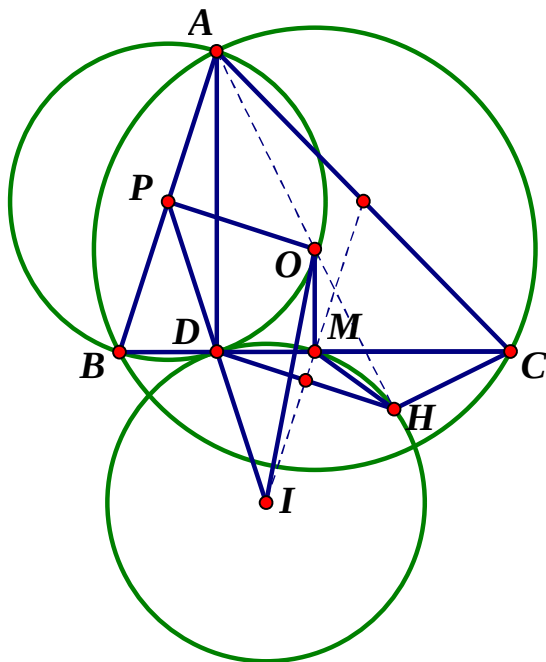
Giả sử bán kính của (I) và (P) bằng nhau thì hai tam giác cân BPD và MID bằng nhau. Suy ra D là trung điểm của BM và đây chính là một trong các điều kiện của tam giác ABC để có (I) và (P) bằng nhau.

Đặt $AB = 2x > \frac{1}{4}$. Ta sẽ tính OI theo x .

Khi đó, ta cũng có $IM = ID = PD = BP = x$.

Xét tam giác OMI có

$$OI^2 = OM^2 + MI^2 - 2OM \cdot MI \cdot \cos OMI = OM^2 + x^2 + 2xOM \sin B.$$



Theo định lí Pythagores thì: $AD^2 = 4x^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 \Rightarrow AC^2 = 4x^2 + \frac{1}{2}$. Do đó:

$$\cot A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S} = \frac{4x^2 + 4x^2 + \frac{1}{2} - 1}{4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot AD} = \frac{8x^2 - \frac{1}{2}}{2AD} \text{ nên } OM = BM \cot A = \frac{8x^2 - \frac{1}{2}}{4AD}.$$

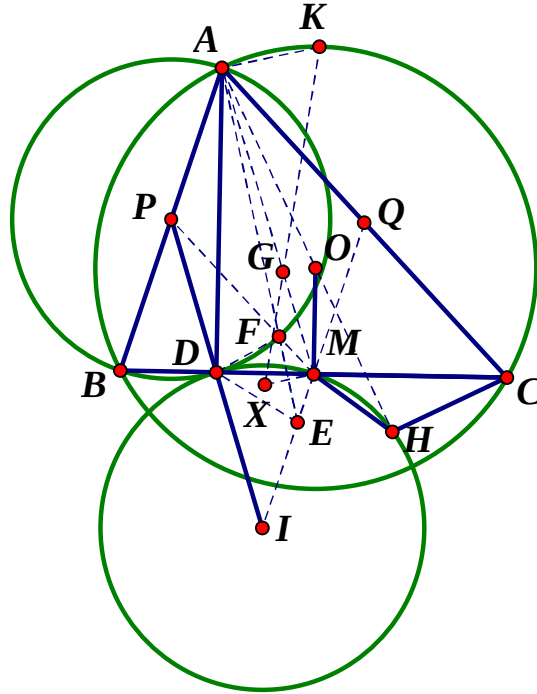
$$\text{Ta tính được } OI^2 = \frac{\left(8x^2 - \frac{1}{2}\right)^2}{16AD^2} + x^2 + 2x \cdot \frac{8x^2 - \frac{1}{2}}{4AD} \cdot \frac{AD}{2x} = \frac{\left(8x^2 - \frac{1}{2}\right)^2}{64x^2 - 1} + 3x^2 - \frac{1}{8} = f(x).$$

Ta sẽ tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số này. Ta có

$$f'(x) = \frac{16x(64x^2 - 1) - 128x\left(8x^2 - \frac{1}{2}\right)}{(64x^2 - 1)^2} + 6x = \frac{2x(128x^2 - 5)(128x^2 + 1)}{(64x^2 - 1)^2}$$

Do $x > \frac{1}{8}$ nên $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{5}{128}}$ và dễ dàng tìm được $f(x) \geq f\left(\sqrt{\frac{5}{128}}\right) = \frac{1}{64}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của OI là $\frac{1}{8}$ đạt được khi $x = \sqrt{\frac{5}{128}}$ (dễ dàng kiểm tra được khi đó tam giác ABC vẫn thỏa mãn điều kiện (*)).



b) Theo chứng minh ở trên thì $IM \parallel AB$ và $MQ \parallel AB$ nên suy ra I, M, Q thẳng hàng.

Tương tự $MP \parallel AC, PF \parallel AC$ nên P, F, M cũng thẳng hàng.

Tứ giác ABDF nội tiếp đường tròn (P) nên ta có:

$\angle DFE = \angle B = \angle DME$ hay tứ giác MEDF cũng nội tiếp.

Suy ra $\angle MDE = \angle MFE = \angle PAF = \angle MDF$ hay DM là phân giác của $\angle EDF$. Do đó, M là trung điểm cung nhỏ EF của đường tròn (MEDF).

Gọi X là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF thì $XM \perp EF$ mà $EF \perp AK$ nên $XM \parallel AK$.

Ta tính được:

$$DM = 2XM \sin\left(B + \frac{A}{2}\right), DM = AK \sin\left(B + \frac{A}{2}\right) \text{ nên } AK = 2XM.$$

Do G là trọng tâm của tam giác ABC nên $GA = 2GE$, theo định lý Thales đảo thì K, G, X thẳng hàng. Ta có đpcm.

Bài 2.

Xét số $A = 2004^{2005} - 2005^{2004} - 2052^{1991}$.

Hãy chứng minh rằng A là một hợp số dương và tổng các ước số dương của A chia hết cho 24.

Lời giải.

Trước hết, ta sẽ chứng minh bổ đề sau:

Cho n là một số tự nhiên thỏa mãn $n+1$ chia hết cho 24. Chứng minh rằng tổng các ước dương của n (kể cả n) cũng chia hết cho 24.

Chứng minh.

Gọi $d(n)$ là tổng các ước dương của n . Trước hết, ta sẽ chứng minh rằng $d(n)$ chia hết cho 3.

Thật vậy, gọi a là một ước nào đó của n thì $\frac{n}{a}$ cũng là ước của n và nếu xét $0 < a < \sqrt{n}$ thì các bộ $\left(a; \frac{n}{a}\right)$ đôi một khác nhau (do $n+1$ chia hết cho 24 nên n chia 3 dư 2 và nó không thể là số chính phương).

Vì n chia 3 dư 2 nên trong hai số $a, \frac{n}{a}$ có một số chia 3 dư 1 và một số chia 3 dư 2; suy ra tổng của chúng phải chia hết cho 3. Do đó $d(n) = \sum_{0 < a < \sqrt{n}} \left(a + \frac{n}{a}\right)$ chia hết cho 3.

Tương tự, ta thấy rằng $n+1$ chia hết cho 8 nên n chia 8 dư 7. Do n là số lẻ nên chia 8 có các số dư là 1, 3, 5, 7; khi đó, dễ dàng thấy rằng trong hai số $a, \frac{n}{a}$ có một số chia 8 dư 1, một số chia 8 dư 7 hoặc một số chia 8 dư 3, một số chia 8 dư 5. Dễ thấy khi đó tổng của hai ước này cũng chia hết cho 8.

Từ đó suy ra $d(n)$ chia hết cho 8.

Kết hợp hai điều trên lại, ta thấy rằng tổng các ước dương của n chia hết cho 24.

Trở lại bài toán.

Trước hết, ta sẽ chứng minh rằng n là hợp số dương. Thật vậy,

Ta sẽ chứng minh rằng nếu $x > y \geq 3$ thì $y^x > x^y$. (*)

Bất đẳng thức này tương đương với $x \ln y > y \ln x \Leftrightarrow \frac{\ln y}{y} > \frac{\ln x}{x}$. Hàm số $f(t) = \frac{\ln t}{t}, t > 3$ có

$f'(t) = \frac{1 - \ln t}{t^2} < 0$ nên đây là hàm nghịch biến, suy ra $f(x) < f(y)$ hay (*) đúng.

Cũng bằng cách dùng hàm số, ta có thể chứng minh rằng với n đủ lớn và $0 < a < n$ thì có đánh giá $\frac{n^{n+a}}{(n+a)^n} > 2$. Do đó $2004^{2005} > 2.2005^{2004} > 2005^{2004} + 2052^{1991}$ nên $A > 0$.

Xét trong modun 11 thì $A \equiv 2^{2005} - 3^{2004} - 6^{1991} \pmod{11}$.

Ta lại có $2^{2005} \equiv 2^5 \cdot (2^{10})^{100} \equiv 32 \cdot (1024)^{100} \equiv 32 \equiv 10 \pmod{11}$,

$3^{2004} \equiv 3^4 \cdot (3^5)^{400} \equiv 81 \cdot (243)^{400} \equiv 4 \pmod{11}$, $6^{1991} \equiv 2^{1991} \cdot 3^{1991} \equiv 2 \cdot (2^{10})^{199} \cdot 3 \cdot (3^5)^{398} \equiv 2 \cdot 3 \equiv 6 \pmod{11}$

Suy ra A chia hết cho 11 hay A là một hợp số.

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh rằng $A+1$ chia hết cho 24. Thật vậy, do 2004, 2052 chia hết cho 3 nên $A+1 \equiv -1^{2004} + 1 = 0 \pmod{3}$.

Hơn nữa, ta cũng có $A+1 \equiv -5^{2004} + 1 \equiv -1 + 1 \equiv 0 \pmod{8}$.

Suy ra $A+1$ chia hết cho 3 và chia hết cho 8 nên $A+1$ chia hết cho 24.

Theo bổ đề trên thì ta có tổng các ước dương của A chia hết cho 24. Ta có đpcm.

Bài 3.

Cho bảng vuông kích thước $n \times n$, $n \geq 2$. Hai ô vuông được gọi là kề nhau nếu chúng là hai ô liên tiếp trên cùng một hàng hoặc cùng một cột.

1. Tìm số nguyên dương p lớn nhất để tồn tại một cách đánh dấu p ô trên bảng thoả mãn: Trong số các ô kề với mỗi ô được đánh dấu có không quá một ô được đánh dấu.

2. Hai cách đánh dấu được gọi là q kề nhau nếu chúng đều có q ô được đánh dấu, trong đó có $q-1$ ô có vị trí trùng nhau trên bảng và hai ô còn lại của hai cách này là hai ô kề nhau. Tìm số nguyên dương q nhỏ nhất để tồn tại một cách đánh dấu q ô trên bảng thoả các điều kiện:

i) Tất cả các ô kề với mỗi ô được đánh dấu đều không được đánh dấu.

ii) Mọi cách đánh dấu q kề nhau với nó đều không thoả mãn điều kiện i).

Lời giải.

1. Ta xét hai trường hợp sau:

* Trường hợp 1: n là số chẵn.

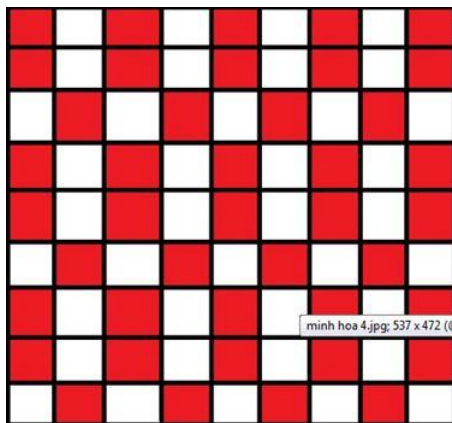
Dễ thấy rằng mỗi hình vuông 2×2 chứa không quá 2 ô được đánh dấu.

Thật vậy nếu có hình vuông 2×2 chứa 3 ô được đánh dấu thì 1 trong 3 ô đó kề với cả 2 ô còn lại.

Với n chẵn thì tổng số ô được đánh dấu trên bảng không quá $\frac{n^2}{2}$. Xét cách đánh dấu ô xen kẽ thì

có đúng $\frac{n^2}{2}$ ô được đánh dấu. do đó $p = \frac{n^2}{2}$ cho trường hợp này.

* Trường hợp 2: n là số lẻ. Dự đoán đáp số là $p = \left\lceil \frac{3n^2 + n + 4}{6} \right\rceil$ với một cách đánh số như hình



2) Trước hết điều kiện của bài toán tương đương với tìm q nhỏ nhất để tồn tại cách đánh dấu q ô của bảng sao cho không có hai ô được đánh dấu nào kề nhau và nếu chuyển 1 ô bất kì được đánh dấu sang ô bên cạnh của nó, thì sẽ có ô được đánh dấu kề nhau.

Với cách đánh dấu n ô trên đường chéo chính của hình $n \times n$ thì nếu ta chuyển một ô đánh dấu bất kì sang ô bên cạnh nó, sẽ có 2 ô đánh dấu kề nhau. Do đó $q \leq n$.

Ta chứng minh $q \leq n$ bằng cách chứng minh kết quả tổng quát hơn sau:

Với mọi cách đánh dấu $q = \min\{m, n\} - 1$ ô của một bảng $m \times n$ bất kì sao cho không có hai ô nào kề nhau, thì ta có thể tìm được một ô được đánh dấu mà khi chuyển nó sang một ô bên cạnh nào đó của nó thì sẽ thu được cách đánh dấu mới cũng thỏa mãn không có hai ô nào kề nhau.

Quy nạp theo $k = \min\{m, n\}$.

Với $k = 2$ thì dễ thấy kết luận trên là đúng.

Xét bảng $m \times n$, do chỉ có không quá $\min\{m, n\} - 1$ ô nên tồn tại một hàng i và một cột j sao cho hàng i và cột j không chứa ô được đánh dấu nào. Chú ý ta có thể giả sử là hàng i và cột j đó không nằm ở biên, nếu không thì ta có thể chuyển ngay ô được đánh dấu gần biên nhất sang hướng ra biên, cách đánh dấu mới này thỏa mãn.

Hàng và cột trên chia bảng thành 4 bảng con là A, B, C, D . Ta cũng có thể giả sử là trên mỗi bảng con đều chứa các ô được đánh dấu, nếu không thì lý luận như trên, ta có cách đánh dấu mới thỏa mãn.

Giả sử số ô được đánh dấu ở các bảng con A, B, C, D lần lượt là x, y, z, t và kích thước của các bảng là $a \times c, a \times d, b \times c, b \times d$ với $a + b = m - 1, c + d = n - 1$.

Nếu $x \geq \min\{a, c\}, y \geq \min\{a, d\}, z \geq \min\{b, c\}, t \geq \min\{b, d\}$, thì ta có thể dễ dàng chỉ ra rằng $x + y + z + t > \min\{m, n\} - 1$. Do đó ta có tồn tại chẳng hạn $1 \leq x \leq \min\{a, c\} - 1$, và theo giả thuyết quy nạp thì ta có thể chuyển 1 ô trong bảng con này sang một trong các ô cạnh nó để thu được cách đánh dấu mới thỏa mãn cho bảng con và hiển nhiên cho bảng lớn ban đầu.

Nhận xét trên được chứng minh. Với $m = n$ thì ta có $q > n - 1$, do đó đáp số là $q = n$.

