

4. Công thức nội suy Lagrange

4.1. Các ví dụ mở đầu

Ví dụ 1. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ thoả mãn điều kiện: $P(1) = 1, P(2) = 2, P(3) = 4$.

Lời giải. Rõ ràng nếu P và Q là hai đa thức thoả mãn điều kiện đề bài thì $P(x) - Q(x)$ sẽ bằng 0 tại các điểm 1, 2, 3 và từ đó, ta có $P(x) - Q(x) = (x-1)(x-2)(x-3)H(x)$. Ngược lại, nếu $P(x)$ là đa thức thoả mãn điều kiện đề bài thì các đa thức $Q(x) = P(x) + (x-1)(x-2)(x-3)H(x)$ cũng thoả mãn điều kiện đề bài với mọi $H(x)$. Từ đó có thể thấy rằng có vô số các đa thức thoả mãn điều kiện đề bài.

Ta đặt ra câu hỏi: Trong các đa thức thoả mãn điều kiện đề bài, hãy tìm đa thức có bậc nhỏ nhất. Rõ ràng đa thức này không thể là hằng số, cũng không thể là bậc nhất. Ta thử tìm bậc tiếp theo là bậc 2.

Giả sử $P(x) = ax^2 + bx + c$ là đa thức thoả mãn điều kiện đề bài. Khi đó

$$P(1) = 1 \text{ suy ra } a + b + c = 1$$

$$P(2) = 2 \text{ suy ra } 4a + 2b + c = 2$$

$$P(3) = 3 \text{ suy ra } 9a + 3b + c = 4$$

Giải hệ này ra, ta được nghiệm duy nhất $(a, b, c) = (1/2, -1/2, 1)$, ta được $P(x) = (1/2)x^2 - (1/2)x + 1$ là đa thức bậc nhỏ nhất thoả mãn điều kiện. Và theo như lý luận ở trên, mọi nghiệm của bài toán sẽ có dạng

$$Q(x) = P(x) + (x-1)(x-2)(x-3)H(x) \text{ với } H(x) \text{ là một đa thức tùy ý.}$$

Ví dụ 2. Tìm đa thức bậc nhỏ nhất thoả mãn điều kiện $P(-2) = 0, P(-1) = 1, P(0) = 1, P(1) = 2, P(2) = 3$.

Lời giải. Từ ý tưởng phương pháp hệ số bất định và hệ phương trình bậc nhất ở trên. Ta thấy rằng chắc chắn sẽ tồn tại đa thức bậc không quá 4 thoả mãn điều kiện đề bài. Xét $P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$. Từ điều kiện đề bài suy ra hệ

$$16a - 8b + 4c - 2d + e = 0$$

$$a - b + c - d + e = 1$$

$$e = 1$$

$$a + b + c + d + e = 2$$

$$16a + 8b + 4c + 2d + e = 3$$

Giải hệ này ta được $a = -1/8, b = 1/12, c = 5/8, d = 5/12, e = 1$.

4.2. Công thức nội suy Lagrange

Từ các ví dụ cụ thể nêu trên, ta có thể dự đoán rằng với mọi các bộ $n+1$ số phân biệt $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ và bộ $n+1$ số bất kỳ $b_0, b_1, \dots, b_n$ sẽ tồn tại một đa thức $P(x)$ bậc không vượt quá n thoả mãn điều kiện

$$P(a_i) = b_i \text{ với mọi } i=0, 1, 2, \dots, n. (*)$$

Ngoài ra, do tất cả các đa thức $Q(x)$ thoả mãn $(*)$ sẽ phải có dạng $Q(x) = P(x) + (x-a_0)(x-a_1)\dots(x-a_n)H(x)$ với $H(x)$ là một đa thức nào đó nên các nghiệm khác của $(*)$ đều có bậc $\geq n+1$.

Vì thế ta có thể đề xuất định lý sau:

Định lý. Cho bộ $n+1$ số thực phân biệt $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ và bộ $n+1$ số bất kỳ $(b_0, b_1, \dots, b_n)$. Khi đó tồn tại duy nhất một đa thức $P(x)$ có bậc không vượt quá n thoả mãn điều kiện $P(a_i) = b_i$ với mọi $i=0, 1, 2, \dots, n$.

Sự duy nhất được chứng minh khá dễ dàng theo như lý luận ở trên. Tuy nhiên, việc chứng minh tồn tại cho trường hợp tổng quát là không đơn giản, vì điều này tương đương với việc chứng minh một hệ phương trình $n+1$ phương trình, $n+1$ ẩn số có nghiệm (duy nhất). Rất thú vị là ta tìm được cách chứng minh định lý này một cách xây dựng, tức là tìm ra được biểu thức tường minh của đa thức $P(x)$ mà không cần phải giải hệ phương trình hệ số bất định nêu trên.

Ý tưởng chứng minh này như sau. Ta đi tìm các đa thức $P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x)$ bậc n thoả mãn điều kiện sau

$$P_i(a_j) = \delta_{ij},$$

Trong đó

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Khi đó đa thức $P(x) = \sum_{i=0}^n b_i P_i(x)$ sẽ thoả mãn điều kiện vì

$$P(a_j) = \sum_{i=0}^n b_i P_i(a_j) = \sum_{i=0}^n b_i \delta_{ij} = b_j.$$

Vấn đề còn lại là đi tìm các đa thức $P_i(x)$. Vì $P_i(a_j) = 0$ với mọi $j \neq i$ nên

$$P_i(x) = C_i(x-a_0)\dots(x-a_{i-1})(x-a_{i+1})\dots(x-a_n)$$

Vì $P_i(a_i) = 1$ nên

$$C_i = \frac{1}{(a_i - a_0)\dots(a_i - a_{i-1})(a_i - a_{i+1})\dots(a_i - a_n)}$$

Như thế ta tìm được

$$P_i(x) = \frac{(x-a_0)\dots(x-a_{i-1})(x-a_{i+1})\dots(x-a_n)}{(a_i - a_0)\dots(a_i - a_{i-1})(a_i - a_{i+1})\dots(a_i - a_n)} \quad (**)$$

là các đa thức thỏa mãn hệ điều kiện $P_i(a_j) = \delta_{ij}$.

Công thức nội suy Lagrange. Cho bộ $n+1$ số thực phân biệt $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ và bộ $n+1$ số bất kỳ $(b_0, b_1, \dots, b_n)$. Khi đó đa thức

$$P(x) = \sum_{i=0}^n b_i P_i(x)$$

là đa thức duy nhất có bậc không vượt quá n thỏa mãn điều kiện $P(a_i) = b_i$ với mọi $i=0, 1, 2, \dots, n$. Các đa thức $P_i(x)$ là các đa thức bậc n được định nghĩa bởi (**).

4.3. Ứng dụng của công thức nội suy Lagrange

Bài toán nội suy là một trong các bài toán cơ bản của toán lý thuyết và toán ứng dụng. Trong thực tế, chúng ta không thể đo được giá trị của một hàm số tại mọi điểm, mà chỉ đo được tại một số điểm. Các công thức nội suy cho phép chúng ta, bằng phép đo tại một số điểm, « dựng » lại một đa thức xấp xỉ cho hàm số thực tế. Công thức nội suy Lagrange, vì thế có nhiều ứng dụng trong vật lý, trắc địa, kinh tế học, khí tượng thủy văn, dự đoán dự báo ... Tuy nhiên, ta sẽ không đi sâu về các vấn đề này. Dưới đây ta xem xét một số ứng dụng của công thức nội suy Lagrange trong các bài toán phổ thông.

4.4. Các bài tập có lời giải

Bài 1. Rút gọn biểu thức

$$A = \frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)}$$

Lời giải. Áp dụng công thức nội suy Lagrange cho hàm số $P(x) = x^2$ với các điểm a, b, c và giá trị tương ứng là a^2, b^2, c^2 ta có

$$P(x) = \frac{a^2(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^2(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$$

So sánh hệ số của x^2 ở hai vế, ta được $A = 1$.

Bài 2. Cho đa thức $P(x)$ bậc n thỏa mãn điều kiện $P(k) = k/(k+1)$ với mọi $k=0, 1, 2, \dots, n$. Hãy tìm $P(n+1)$.

Lời giải. Theo công thức nội suy Lagrange thì

$$P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{k}{k+1} \cdot \frac{x(x-1)\dots(x-k+1)(x-k-1)\dots(x-n)}{k(k-1)\dots 1 \cdot (-1)\dots(k-n)}$$

Từ đó

$$\begin{aligned}
P(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{k}{k+1} \cdot \frac{(n+1)\dots(n-k+2)(n-k)\dots(1)}{k(k-1)\dots 1 \cdot (-1)\dots(k-n)} \\
&= \sum_{k=0}^n \frac{k}{k+1} \cdot \frac{(n+1)\dots(n-k+2)(n-k+1)(n-k)\dots(1)}{k(k-1)\dots 1 \cdot (-1)\dots(k-n)(n-k+1)} = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} k \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k+1)!} \\
&= \frac{1}{n+2} \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} k C_{n+2}^{k+1}
\end{aligned}$$

Cách 2. Xét đa thức $(x+1)P(x) - x$ có bậc n và có $n+1$ nghiệm $x = 0, 1, 2, \dots, n$. Do đó, ta có

$(x+1)P(x) - x = ax(x-1)(x-2)\dots(x-n)$
 với a là 1 hằng số.

Thay $x = -1$, ta được $1 = a \cdot (-1)(-2)\dots(-n-1) = a(-1)^{n+1}(n+1)!$

Suy ra $a = (-1)^{n+1}/(n+1)!$.

Từ đó $(n+2)P(n+1) - (n+1) = n!(-1)^{n+1}/(n+1)! = (-1)^{n+1}/(n+1)$

Suy ra $P(n+1) = ((n+1)^2 + (-1)^{n+1})/(n+2)$.

Bài 3. Cho tam thức bậc 2 $P(x) = ax^2 + bx + c$ thỏa mãn điều kiện $|P(x)| \leq 1$ với mọi $|x| \leq 1$. Chứng minh rằng $|a| + |b| + |c| \leq 3$.

Lời giải. Thực hiện phép nội suy tại 3 điểm $-1, 0, 1$, ta có

$$P(x) = P(-1) \frac{x(x-1)}{(-1-0)(-1-1)} + P(0) \frac{(x+1)(x-1)}{(0+1)(0-1)} + P(1) \frac{x(x+1)}{(1+0)(1+1)}$$

Suy ra

$$P(x) = \frac{P(1) + P(-1) - 2P(0)}{2} x^2 + \frac{P(1) - P(-1)}{2} x + P(0)$$

Từ đó

$$a = \frac{P(1) + P(-1) - 2P(0)}{2}, \quad b = \frac{P(1) - P(-1)}{2}, \quad c = P(0)$$

Suy ra

$$\begin{aligned}
|a| + |b| + |c| &= \left| \frac{P(1) + P(-1) - 2P(0)}{2} \right| + \left| \frac{P(1) - P(-1)}{2} \right| + |P(0)| \\
&\leq \left| \frac{P(1) + P(-1)}{2} \right| + \left| \frac{P(1) - P(-1)}{2} \right| + 2|P(0)| \leq \max\{|P(1)|, |P(-1)|\} + 2|P(0)| \leq 3.
\end{aligned}$$

4.5. Bài tập tự giải

Bài 1. Rút gọn biểu thức

$$A = \frac{a^4}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^4}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^4}{(c-a)(c-b)}$$

Bài 2. Cho $M(y)$ là một đa thức bậc n sao cho $M(y) = 2^y$ với $y = 1, 2, \dots, n+1$. Hãy tìm $M(n+2)$.

Bài 3. Cho đa thức $P(x) = x^{10} + a_9x^9 + \dots + a_1x + a_0$. Biết rằng $P(-1) = P(1)$, $P(-2) = P(2)$, ..., $P(-5) = P(5)$. Chứng minh rằng $P(-x) = P(x)$ với mọi x thuộc $\mathbb{R}$.

Bài 4. Cho $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$ là các số nguyên và $P(x)$ là đa thức bậc n có hệ số cao nhất bằng 1. Chứng minh rằng tồn tại $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ sao cho $|P(x_i)| \geq n!/2^n$.

Bài 5. Một chiếc tàu với vận tốc không đổi đi ngang qua một hòn đảo. Thuyền trưởng cứ mỗi giờ lại đo khoảng cách từ tàu đến đảo. Vào lúc 12, 14 và 15 giờ tàu cách đảo các khoảng cách tương ứng là 7, 5 và 11 km. Hỏi vào lúc 13 giờ tàu cách đảo bao nhiêu km. Và lúc 16 giờ, tàu sẽ cách đảo bao nhiêu km?

Bài 6. Trên mặt phẳng cho 100 điểm. Biết rằng với bốn điểm bất kỳ trong chúng đều có một parabol bậc 2 đi qua. Chứng minh rằng tất cả các điểm đã cho đều nằm trên một parabol bậc 2.