

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ THUẬN

VỀ HIỆU CHỈNH TIKHONOV CHO BÀI TOÁN
CÂN BẰNG ĐƠN ĐIỀU

Chuyên ngành: TOÁN ỨNG DỤNG

Mã số: 60.46.01.12

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:

GS.TSKH. LÊ DŨNG MƯU

THÁI NGUYÊN - NĂM 2013

Mục lục

Mục lục	i
Lời cảm ơn	ii
Mở đầu	1
1 Giới thiệu các kiến thức cơ bản về bài toán cân bằng	2
1.1 Kiến thức chuẩn bị	2
1.2 Bài toán cân bằng	11
1.2.1 Giới thiệu bài toán	11
1.2.2 Các dạng tương đương	12
1.2.3 Các trường hợp riêng	13
2 Về hiệu chỉnh Tikhonov cho bài toán cân bằng đơn điệu	19
2.1 Sự tồn tại nghiệm và nguyên lý bài toán phụ	19
2.1.1 Sự tồn tại nghiệm và các tính chất cơ bản	19
2.1.2 Phương pháp bài toán phụ	26
2.2 Hiệu chỉnh Tikhonov cho bài toán cân bằng	31
2.2.1 Trường hợp song hàm đơn điệu	32
2.2.2 Trường hợp song hàm giả đơn điệu	35
2.3 Ứng dụng cho bất đẳng thức biến phân giả đơn điệu đa trị .	40
Kết luận chung	44
Tài liệu tham khảo	45

Lời cảm ơn

Trong suốt quá trình làm luận văn, tôi luôn nhận được sự hướng dẫn và giúp đỡ của GS. TSKH Lê Dũng Mưu (Viện Toán học Việt Nam). Tôi xin chân thành bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến thầy.

Tôi xin cảm ơn quý thầy, cô giảng dạy lớp cao học khóa 5 (2011 - 2013) đã mang đến cho tôi nhiều kiến thức bổ ích trong khoa học và cuộc sống.

Tôi xin chân thành cảm ơn Ban giám hiệu, các bạn đồng nghiệp trường THPT Nguyễn Du đã tạo điều kiện tốt nhất để tôi hoàn thành luận văn này.

Mặc dù đã có nhiều cố gắng nhưng luận văn khó tránh khỏi những thiếu sót. Tác giả mong nhận được những ý kiến đóng góp của quý thầy, cô và bạn đọc để luận văn được hoàn thiện hơn.

Xin trân trọng cảm ơn!

Hải Phòng, tháng 5 năm 2013.

Người viết luận văn

Nguyễn Thị Thuận

Mở đầu

Trong toán học ứng dụng, bài toán cân bằng đóng vai trò quan trọng. Nó bao hàm nhiều bài toán quan trọng khác như bài toán tối ưu, bất đẳng thức biến phân, bài toán điểm bất động Kakutani, cân bằng Nash trong trò chơi không hợp tác, bài toán điểm yên ngựa. Nói chung, bài toán cân bằng có nhiều ứng dụng trong thực tế và là đề tài đang được quan tâm nghiên cứu. Phần trọng tâm của luận văn trình bày về phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov, mục đích của phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov là để xử lý các bài toán đặt không chỉnh, tức là các bài toán không có nghiệm duy nhất hoặc nghiệm không ổn định theo dữ liệu đầu vào.

Luận văn này trình bày những kiến thức cơ bản về bài toán cân bằng, cụ thể là sự tồn tại nghiệm, tính chất duy nhất nghiệm, nguyên lý bài toán phụ. Trong đó trọng tâm là giới thiệu phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov cho bài toán cân bằng trong trường hợp đơn điệu và giả đơn điệu.

Bố cục của luận văn gồm 2 chương:

Chương 1: Giới thiệu các kiến thức cơ bản về bài toán cân bằng, và các trường hợp riêng quan trọng của bài toán cân bằng như bài toán tối ưu, bất đẳng thức biến phân, bài toán điểm bất động Kakutani, cân bằng Nash trong trò chơi không hợp tác, bài toán điểm yên ngựa.

Chương 2: Là chương chính của luận văn nhằm trình bày phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov cho bài toán cân bằng trong trường hợp song hàm đơn điệu và giả đơn điệu. Cuối chương là trình bày ứng dụng của phương pháp này cho bài toán bất đẳng thức biến phân đa trị với toán tử giả đơn điệu.

Chương 1

Giới thiệu các kiến thức cơ bản về bài toán cân bằng

Trong luận văn này, chúng ta làm việc trên không gian Hilbert thực X , với tích vô hướng được kí hiệu là $\langle \cdot, \cdot \rangle$ và chuẩn tương ứng được kí hiệu là $\|\cdot\|$. Dưới đây, ta nhắc lại một số khái niệm và tính chất cơ bản của giải tích lồi như: Tập lồi, hàm lồi, hội tụ mạnh (yếu), ... Các kiến thức trong chương này được lấy chủ yếu từ các tài liệu [1], [2], [3].

1.1 Kiến thức chuẩn bị

- 1) X là không gian vectơ trên trường số thực.
- 2) Trên X có tích vô hướng $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn các tiên đề sau:
 - i) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle, \quad \forall x, y \in X.$
 - ii) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle, \quad \forall x, y, z \in X.$
 - iii) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle, \quad \forall x, y \in X, \alpha \in \mathbb{R}.$
 - iv) $\langle x, x \rangle > 0, \quad \forall x \neq 0$ và $\langle x, x \rangle = 0$ khi và chỉ khi $x = 0$.
- 3) X trở thành không gian Banach với chuẩn định nghĩa bởi:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Trên X có hai kiểu hội tụ chính sau:

Định nghĩa 1.1. Xét dãy $\{x_n\}_{n \geq 0}$ và x thuộc không gian Hilbert thực X .

Dãy $\{x_n\}$ được gọi là hội tụ mạnh tới x , kí hiệu $x_n \rightarrow x$, nếu như:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n - x\| = 0.$$

Dãy $\{x_n\}$ được gọi là hội tụ yếu tới x , kí hiệu $x_n \rightharpoonup x$ nếu như:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle w, x_n \rangle = \langle w, x \rangle, \quad \forall w \in X.$$

Điểm x được gọi là điểm tụ mạnh (yếu) của dãy $\{x_n\}$ nếu từ dãy này có thể trích ra một dãy con hội tụ mạnh (yếu) tới x .

Ta nhắc lại các kết quả quen thuộc trong giải tích hàm liên quan đến hai loại hội tụ này:

Mệnh đề 1.1. (i) Nếu $\{x_n\}$ hội tụ mạnh đến x thì cũng hội tụ yếu đến x .

(ii) Nếu $\{x_n\}$ hội tụ mạnh đến x và $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n\| = \|x\|$ thì $\{x_n\}$ hội tụ mạnh đến x .

(iii) Mọi dãy hội tụ mạnh (yếu) đều bị chặn và giới hạn theo sự hội tụ mạnh (yếu) nếu tồn tại thì là duy nhất.

(iv) Nếu không gian Hilbert X là không gian hữu hạn chiều thì sự hội tụ mạnh và sự hội tụ yếu là tương đương.

(v) Nếu dãy $\{x_n\}_{n \geq 0}$ là một dãy bị chặn trong không gian Hilbert X thì ta trích ra được một dãy con hội tụ yếu.

(vi) Nếu $\{x_n\}_{n \geq 0}$ là một dãy bị chặn trong không gian Hilbert hữu hạn chiều X thì ta trích ra được một dãy con hội tụ mạnh.

Tiếp theo, ta sẽ nêu một số định nghĩa và kết quả cơ bản của giải tích lồi:

Định nghĩa 1.2. Tập K trong không gian Hilbert X được gọi là lồi nếu như với mọi $x, y \in K$ và $\lambda \in (0, 1)$ ta có:

$$\lambda x + (1 - \lambda) y \in K.$$

Định nghĩa 1.3. Xét hàm $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Khi đó:

Hàm f được gọi là lồi nếu:

$$f(\lambda x + (1 - \lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y), \quad \forall x, y \in X, \quad \forall \lambda \in [0, 1].$$

Hàm f được gọi là lồi chặt nếu:

$$f(\lambda x + (1 - \lambda) y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y), \quad \forall x \neq y \in X, \quad \forall \lambda \in [0, 1].$$

Hàm f được gọi là lồi mạnh với hệ số $\eta > 0$ nếu:

$$f(\lambda x + (1 - \lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y) - \eta \frac{\lambda(1 - \lambda)}{2} \|x - y\|^2, \quad \forall x, y \in X, \quad \forall \lambda \in [0, 1].$$

Ví dụ 1.1. 1) Mọi hàm affine $f(x) = a^T x + b$ là hàm lồi. Nó thỏa mãn đẳng thức:

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) = \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y), \quad \forall x, y.$$

Do đó nó không lồi chặt.

2) Xét K là tập con bất kỳ của X . Hàm chỉ δ_K được định nghĩa như sau:

$$\delta_K := \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \in K, \\ +\infty & \text{nếu } x \notin K. \end{cases}$$

Khi đó, K là tập lồi nếu và chỉ nếu δ_K là hàm lồi.

3) Trong không gian Hilbert thực ta có khai triển:

$$\begin{aligned} & \lambda \frac{\|x\|^2}{2} + (1 - \lambda) \frac{\|y\|^2}{2} - \frac{\|\lambda x + (1 - \lambda)y\|^2}{2} \\ &= \lambda \frac{\|x\|^2}{2} + (1 - \lambda) \frac{\|y\|^2}{2} - \lambda^2 \frac{\|x\|^2}{2} - (1 - \lambda)^2 \frac{\|y\|^2}{2} - \lambda(1 - \lambda)\langle x, y \rangle \\ &= \frac{\lambda(1 - \lambda)}{2} (\|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y \rangle) \\ &= \frac{\lambda(1 - \lambda)}{2} \|x - y\|^2. \end{aligned}$$

Do đó hàm $f(x) = \frac{\|x\|^2}{2}$ là hàm lồi mạnh với hệ số 1.

4) Giả sử K là một tập khác rỗng. Hàm khoảng cách $d_K(x)$ được định nghĩa như sau:

$$d_K(x) = \inf_{y \in K} \|x - y\|.$$

Khi đó, nếu K là tập lồi thì d_K là hàm lồi.

Thực vậy, xét $x, y \in X$ và $\lambda \in (0, 1)$ bất kỳ. Đặt $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$.

Theo định nghĩa, tồn tại các dãy $\{x_k\}$, $\{y_k\}$ trong K sao cho:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x - x_k\| = d_K(x) \text{ và } \lim_{k \rightarrow \infty} \|y - y_k\| = d_K(y).$$

Do K lồi nên $z_k := \lambda x_k + (1 - \lambda)y_k \in K$. Ta có:

$$d_K(z) \leq \|z - z_k\| = \|\lambda(x - x_k) + (1 - \lambda)(y - y_k)\| \leq \lambda\|x - x_k\| + (1 - \lambda)\|y - y_k\|.$$

Cho $k \rightarrow \infty$ ta có: $d_K(z) \leq \lambda d_K(x) + (1 - \lambda) d_K(y)$.

Nếu tồn tại $\pi \in K$ sao cho $\|x - \pi\| = d_K(x)$ thì π được gọi là hình chiếu khoảng cách của x lên K . Khi đó π là nghiệm của bài toán tối ưu:

$$\min_{y \in K} \frac{\|x - y\|^2}{2}.$$

Mệnh đề sau đây cho ta điều kiện cần và đủ để π là hình chiếu của x lên K trong trường hợp K lồi:

Mệnh đề 1.2. *Giả sử K là tập lồi đóng khác rỗng trong X . Đặt:*

$$N_K(x) = \{w \in X \mid \langle w, y - x \rangle \leq 0, \quad \forall y \in K\}.$$

Khi đó π là hình chiếu của x lên K khi và chỉ khi $x - \pi \in N_K(\pi)$.

Chứng minh.

Giả sử π là hình chiếu của x lên K . Lấy y bất kỳ thuộc K . Đặt:

$$y_\lambda = \lambda y + (1 - \lambda) \pi.$$

Do K lồi nên $y_\lambda \in K$ với mọi $\lambda \in (0, 1)$. Theo định nghĩa hình chiếu ta có:

$$\|x - \pi\|^2 \leq \|y_\lambda - x\|^2 = \|(\pi - x) + \lambda(y - \pi)\|^2.$$

Khai triển vế phải và giản ước ta thu được:

$$\lambda\|y - \pi\|^2 + 2\langle \pi - x, y - \pi \rangle \geq 0.$$

Cho λ tiến tới 0 ta thu được bất đẳng thức $\langle x - \pi, y - \pi \rangle \leq 0$. Điều này đúng với $y \in K$ bất kỳ nên suy ra $x - \pi \in N_K(\pi)$.

Ngược lại, giả sử $x - \pi \in N_K(\pi)$. Khi đó với mọi $y \in K$ ta có:

$$\begin{aligned} \|x - y\|^2 &= \|(x - \pi) + (\pi - y)\|^2 = \|x - \pi\|^2 + \|\pi - y\|^2 + 2\langle x - \pi, \pi - y \rangle \\ &\geq \|x - \pi\|^2 + \|\pi - y\|^2 \geq \|x - \pi\|^2. \end{aligned}$$

Suy ra π là hình chiếu của x trên K . □

Từ mệnh đề trên ta có nhận xét, khi K lồi đóng thì hình chiếu của x lên K là duy nhất. Thực vậy, giả sử π và π' đều là hình chiếu của x lên K .

Chọn $y = \pi'$ trong mệnh đề trên ta có:

$$\langle x - \pi, \pi' - \pi \rangle \leq 0.$$

Thay đổi vai trò của π và π' ta được:

$$\langle x - \pi', \pi - \pi' \rangle \leq 0.$$

Cộng hai bất đẳng thức trên suy ra $\|\pi - \pi'\| \leq 0$. Điều này chỉ xảy ra khi $\pi = \pi'$.

Trong trường hợp K là tập con đóng khác rỗng của không gian Hilbert, với mọi x luôn tồn tại hình chiếu của x lên K . Thực vậy, theo định nghĩa tồn tại dãy $\{x_k\}$ trong K thỏa mãn:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|x_k - x\| = d_K(x).$$

Suy ra dãy $\{x_k\}$ bị chặn, do đó trích ra được một dãy con $\{x_{n_k}\}$ hội tụ yếu. Mặt khác, do K lồi đóng nên giới hạn này phải là một điểm thuộc K , kí hiệu là π . Ta có:

$$\|x - \pi\| = \lim_{k \rightarrow +\infty} \|x_{n_k} - x\| = d_K(x).$$

Vậy π là hình chiếu của x trên K .

Phép tương ứng mỗi điểm x với hình chiếu của nó trên K kí hiệu là P_K và được gọi là phép chiếu Euclide. Theo chứng minh mệnh đề trên, ta có tính chất sau đây của hình chiếu khoảng cách:

$$\|x - y\|^2 \geq \|x - P_K(x)\|^2 + \|y - P_K(x)\|^2, \quad \forall y \in K.$$

Tiếp theo ta nêu các khái niệm liên quan đến tính liên tục của hàm số:

Định nghĩa 1.4. Xét hàm $G : X \rightarrow \mathbb{R}$. Khi đó:

i) Hàm G được gọi là nửa liên tục dưới tại điểm $x \in X$ nếu như:

$$G(x) \leq \liminf_{x_n \rightarrow x} G(x_n).$$

Hàm G được gọi là nửa liên tục dưới nếu nó nửa liên tục dưới tại mọi điểm.

ii) Hàm G được gọi là khả vi Frechét tại điểm $x \in X$ nếu như tồn tại phần tử, kí hiệu là $G'(x) \in X^*$ thỏa mãn:

$$\lim_{\|y-x\| \rightarrow 0} \frac{G(y) - G(x) - \langle G'(x), y-x \rangle}{\|y-x\|} = 0.$$

Phần tử $G'(x)$ được gọi là đạo hàm Frechét của G tại điểm x .

Hàm G được gọi là khả vi trên K nếu nó khả vi tại mọi điểm thuộc K .

Ta có mệnh đề sau:

Mệnh đề 1.3. Xét hàm $G : X \rightarrow \mathbb{R}$. Khi đó:

i) Nếu G liên tục thì G nửa liên tục dưới.

ii) Nếu G khả vi thì G liên tục và:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{G(x+ty) - G(x)}{t} = \langle G'(x), y \rangle, \quad \forall x, y \in X.$$

Chứng minh

i) Hiển nhiên.

ii) Giả sử G khả vi. Xét $x \neq y$ bất kỳ thuộc X . Ta có:

$$G(y) - G(x) = \|y - x\| \frac{G(y) - G(x) - \langle G'(x), y - x \rangle}{\|y - x\|} + \langle G'(x), y - x \rangle,$$

do:

$$\lim_{\|y-x\| \rightarrow 0} \frac{G(y) - G(x) - \langle G'(x), y - x \rangle}{\|y - x\|} = 0 \text{ và } \lim_{\|y-x\| \rightarrow 0} \langle G'(x), y - x \rangle = 0$$

nên suy ra:

$$\lim_{\|y-x\| \rightarrow 0} (G(y) - G(x)) = 0.$$

Vậy G liên tục. Đặt $x_t = x + ty$. Với mọi $t > 0$, ta có:

$$\begin{aligned} \frac{G(x+ty) - G(x)}{t} - \langle G'(x), y \rangle &= \frac{G(x+ty) - G(x) - \langle G'(x), ty \rangle}{t} \\ &= \frac{G(x_t) - G(x) - \langle G'(x), x_t - x \rangle}{t} \\ &= \frac{G(x_t) - G(x) - \langle G'(x), x_t - x \rangle}{\|x_t - x\|} \|y\|. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Do $\lim_{t \rightarrow 0} \|x_t - x\| = 0$ nên:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{G(x_t) - G(x) - \langle G'(x), x_t - x \rangle}{\|x_t - x\|} = 0. \quad (1.2)$$

Từ (1.1) và (1.2) suy ra điều phải chứng minh. $\square$

Mệnh đề sau cho ta mối quan hệ giữa hệ số lỗi của một hàm và đạo hàm của nó:

Mệnh đề 1.4. Xét hàm $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ khả vi và $\eta > 0$. Khi đó ba điều kiện sau tương đương:

- (i) f lồi mạnh với hệ số η .
- (ii) Với mọi $x, y \in X$ ta có:

$$f(y) - f(x) \geq \langle f'(x), y - x \rangle + \frac{\eta}{2} \|x - y\|^2.$$

- (iii) Với mọi $x, y \in X$ ta có:

$$\langle f'(y) - f'(x), y - x \rangle \geq \eta \|x - y\|^2.$$

Chứng minh.

(i) $\rightarrow$ (ii).

Giả sử f lồi mạnh với hệ số η . Với mọi x, y và $t \in (0, 1)$ ta có:

$$\begin{aligned} (1-t)f(x) + tf(y) &\geq f(ty + (1-t)x) + \frac{\eta}{2}t(1-t)\|x-y\|^2 \\ \Rightarrow t(f(y) - f(x)) &\geq f(ty + (1-t)x) - f(x) + \frac{\eta}{2}t(1-t)\|x-y\|^2 \\ \Rightarrow f(y) - f(x) &\geq \frac{f(x+t(y-x)) - f(x)}{t} + \frac{\eta}{2}(1-t)\|x-y\|^2. \end{aligned}$$

Cho $t \rightarrow 0^+$, do f khả vi, ta được:

$$f(y) - f(x) \geq \langle f'(x), y - x \rangle + \frac{\eta}{2}\|x - y\|^2.$$

(ii) $\rightarrow$ (i).

Giả sử f thỏa mãn điều kiện (ii). Lấy $t \in (0, 1)$ bất kỳ và đặt $z = (1-t)x + ty$.

Khi đó:

$$y = z + (1-t)(y-x) \quad \text{và} \quad x = z + (-t)(y-x).$$

Áp dụng (ii) ta thu được:

$$f(x) \geq f(z) + \langle f'(z), -t(y-x) \rangle + \frac{\eta}{2}t^2\|x-y\|^2. \quad (1.3)$$

$$f(y) \geq f(z) + \langle f'(z), (1-t)(y-x) \rangle + \frac{\eta}{2}(1-t)^2\|x-y\|^2. \quad (1.4)$$

Nhân hai vế của (1.3) với $(1-t) > 0$ và nhân hai vế của (1.4) với $t > 0$, sau đó cộng lại ta thu được:

$$(1-t)f(x) + tf(y) \geq f((1-t)x + ty) + \frac{\eta}{2}t(1-t)\|x-y\|^2.$$

Điều này đúng với mọi x, y nên ta suy ra f lồi mạnh với hệ số η .

(ii) $\rightarrow$ (iii).

Giả sử có (ii). Với mọi $x, y \in K$ ta có:

$$f(y) - f(x) \geq \langle f'(x), y - x \rangle + \frac{\eta}{2} \|x - y\|^2.$$

$$f(x) - f(y) \geq \langle f'(y), x - y \rangle + \frac{\eta}{2} \|x - y\|^2.$$

Cộng về hai bất đẳng thức trên ta thu được:

$$0 \geq \langle f'(x) - f'(y), y - x \rangle + \eta \|x - y\|^2.$$

Từ đó suy ra (iii).

(iii) $\rightarrow$ (ii).

Giả sử có tính chất (iii), ta đặt $\gamma(t) := f(x + th)$ với $h := x - y$.

Khi đó:

$$\gamma'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\gamma(t + \Delta t) - \gamma(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(x + th + \Delta t h)}{\Delta t} = \langle f'(x + th), h \rangle.$$

Mặt khác, theo tính chất (iii) ta có:

$$\langle f'(x + th) - f'(x), th \rangle \geq \eta \|th\|^2 = t^2 \|x - y\|^2$$

$$\Rightarrow \langle f'(x + th) - f'(x), h \rangle \geq \eta t \|x - y\|^2.$$

Vậy:

$$\begin{aligned} f(y) - f(x) &= \gamma(1) - \gamma(0) = \int_0^1 \gamma'(t) dt = \int_0^1 \langle f'(x + th), h \rangle dt \\ &= \langle f'(x), h \rangle + \int_0^1 \langle f'(x + th) - f'(x), h \rangle dt \\ &\geq \langle f'(x), h \rangle + \int_0^1 \eta t \|x - y\|^2 dt \\ &= \langle f'(x), y - x \rangle + \frac{\eta}{2} \|x - y\|^2. \end{aligned}$$

□

Hàm f lồi có thể coi là lồi mạnh với hệ số 0. Do đó ta có ngay hệ quả:

Hệ quả 1.1. Với hàm f khả vi các mệnh đề sau tương đương:

(i) f là hàm lồi.

(ii) Với mọi x, y ta có bất đẳng thức:

$$f(y) - f(x) \geq \langle f'(x), y - x \rangle.$$

(iii) Với mọi x, y ta có bất đẳng thức:

$$\langle f'(y) - f'(x), y - x \rangle \geq 0.$$

Kết quả tiếp theo cho ta điều kiện cho lời giải bài toán tối ưu hàm lồi:

Mệnh đề 1.5. Xét hàm $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm khả vi trên K với K là tập con lồi của X . Khi đó ta có:

Nếu x^* là nghiệm của bài toán cực tiểu F trên K thì:

$$\langle F'(x^*), y - x^* \rangle \geq 0, \quad \forall y \in K.$$

Hơn nữa, nếu F lồi thì điều kiện trên cũng là điều kiện đủ.

Chứng minh.

Giả sử $F(x^*)$ là cực tiểu của F trên K . Xét $y \in K$ bất kỳ, do K lồi nên $(1-t)x^* + ty \in K$ với mọi $t \in (0, 1)$. Do đó:

$$F((1-t)x^* + ty) = F(x^* + t(y - x^*)) \geq F(x^*).$$

Suy ra:

$$\frac{F(x^* + t(y - x^*)) - F(x^*)}{t} \geq 0, \quad \forall t \in (0, 1).$$

Cho $t \rightarrow 0^+$ ta có điều kiện cần.

Bây giờ giả sử F lồi và x^* thỏa mãn điều kiện đã nêu. Ta có:

$$F(x^* + t(y - x^*)) = F((1-t)x^* + ty) \leq (1-t)F(x^*) + tF(y), \quad \forall t \in (0, 1).$$

Suy ra:

$$\frac{F(x^* + t(y - x^*)) - F(x^*)}{t} \leq F(y) - F(x^*), \quad \forall t \in (0, 1).$$

Cho $t \rightarrow 0^+$ ta được: $\langle F'(x^*), y - x^* \rangle \leq F(y) - F(x^*)$.

Từ đó suy ra $F(x^*) \leq F(y)$ với mọi $y \in K$ hay x^* là nghiệm của bài toán cực trị. $\square$

Nhận xét 1.1. Trong trường hợp F lồi chặt, lời giải bài toán cực tiểu F nếu tồn tại sẽ là duy nhất.

Thực vậy, giả sử x, x' là hai lời giải của bài toán cực tiểu F , ta có:

$$F\left(\frac{x+x'}{2}\right) \geq F(x) \quad \text{và} \quad F\left(\frac{x+x'}{2}\right) \geq F(x').$$

Cộng vế thu được:

$$F\left(\frac{x+x'}{2}\right) \geq \frac{F(x) + F(x')}{2}.$$

Mặt khác, do tính lồi chặt ta có:

$$F\left(\frac{x+x'}{2}\right) = F\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x'\right) < \frac{1}{2}F(x) + \frac{1}{2}F(x') = \frac{F(x) + F(x')}{2}.$$

Điều này dẫn tới mâu thuẫn, suy ra điều giả sử là sai.

Các khái niệm sau là mở rộng của các khái niệm đạo hàm và khả vi.

Định nghĩa 1.5. Xét $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ và $x \in X$. Phần tử $w \in X^*$ được gọi là dưới đạo hàm của f tại điểm x nếu như:

$$\langle w, y - x \rangle \leq f(y) - f(x), \quad \forall y \in X.$$

Tập tất cả các dưới đạo hàm của f tại điểm x kí hiệu là $\partial f(x)$.

Nếu $\partial f(x) \neq \emptyset$ thì f được gọi là khả dưới vi phân tại điểm x .

f được gọi là khả dưới vi phân nếu f khả dưới vi phân tại mọi điểm.

Ta có mệnh đề nói lên tính khả dưới vi phân của hàm lồi:

Mệnh đề 1.6. Nếu $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm lồi thì $\partial f(x) \neq \emptyset$ với mọi $x \in X$ hay là f khả dưới vi phân.

1.2 Bài toán cân bằng

1.2.1 Giới thiệu bài toán

Xét X là không gian Hilbert thực và K là tập con lồi, đóng, khác rỗng của X . Khi đó bài toán cân bằng là bài toán tìm:

$$\bar{x} \in K \text{ sao cho: } f(\bar{x}, y) \geq 0, \quad \forall y \in K \quad (EP)$$

trong đó hàm $f : K \times K \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x, x) = 0$ với mọi $x \in K$.

Một trong các lý do khiến bài toán cân bằng được nghiên cứu rộng rãi là vì khi ta cho f nhận các dạng biểu thức đặc biệt, bài toán (EP) sẽ trở thành các bài toán cơ bản khác như bài toán tối ưu, bất đẳng thức biến phân, bài toán điểm bất động Kakutani, cân bằng Nash trong trò chơi không hợp tác, bài toán điểm yên ngựa.

1.2.2 Các dạng tương đương

Các dạng tương đương này, là cơ sở để xây dựng các phương pháp giải. Thông thường để xây dựng các phương pháp giải, ta cần thêm các giả thiết sau đây.

Đối với song hàm cân bằng $f : K \times K \rightarrow \mathbb{R}$

(A₁) $f(., y)$ nửa liên tục trên tập K ;

(A₂) $f(x, y)$ lồi, nửa liên tục dưới và khả dưới vi phân trên K .

Mệnh đề dưới đây là cơ sở để xây dựng các phương pháp giải bài toán cân bằng.

Mệnh đề 1.7. *Giả sử $f : K \times K \rightarrow \mathbb{R}$ là song hàm cân bằng. Khi đó, với các giả thiết (A₁), (A₂) thì các điều kiện sau đây là tương đương:*

(a) x^* là nghiệm của bài toán cân bằng (EP);

(b) $\min\{g(x) : x \in K\} = 0$ (dạng minimax), trong đó hàm g (hàm đánh giá) được cho bởi:

$$g(x) := \sup\{f(x, y) : y \in K\};$$

(c) $x^* = \arg \min\{f(x^*, y) : y \in K\}$ (dạng điểm bất động).

Chứng minh.

(a) $\Rightarrow$ (b).

Giả sử x^* là một nghiệm của (EP). Do $f(x, x) = 0$ với mọi $x \in K$, nên:

$$\inf_{y \in K} f(x, y) \leq 0, \quad \forall x \in K.$$

Do đó:

$$\sup_{x \in K} \left\{ \inf_{y \in K} f(x, y) \right\} \leq 0.$$

Trong khi đó, do $x^* \in K$, nên:

$$\sup_{x \in K} \left\{ \inf_{y \in K} f(x, y) \right\} \geq \inf_{y \in K} f(x^*, y).$$

Nhưng do x^* là nghiệm của (EP), nên $f(x^*, y) \geq 0$, với mọi $y \in C$. Vậy:

$$\inf_{y \in K} f(x^*, y) \geq 0.$$

Suy ra:

$$0 \leq \inf_{y \in K} f(x^*, y) \leq \sup_{x \in K} \left\{ \inf_{y \in K} f(x, y) \right\} \leq 0.$$

Vậy:

$$\sup_{x \in K} \left\{ \inf_{y \in K} f(x, y) \right\} = \max_{x \in K} \left\{ \inf_{y \in K} f(x, y) \right\} = \inf_{y \in K} f(x^*, y) = 0.$$

Ngược lại, giả sử có (b). Khi đó theo lập luận ở trên ta có:

$$\sup_{y \in K} \{-f(x^*, y)\} = \min_{x \in K} \sup_{y \in K} \{-f(x, y)\} = 0.$$

Chúng tỏ $-f(x^*, y) \leq 0$, với mọi $y \in K$. Vậy x^* là nghiệm của (EP).

Bây giờ ta chứng tỏ (a) tương đương với (c). Thật vậy x^* là cực tiểu của $f(x^*, \cdot)$ trên K khi và chỉ khi:

$$f(x^*, y) \geq f(x^*, x^*) = 0, \forall y \in K. \quad \square$$

1.2.3 Các trường hợp riêng

- Bài toán tối ưu

Xét bài toán:

$$\min \{\varphi(x) \mid x \in K\}.$$

Đặt:

$$f(x, y) := \varphi(y) - \varphi(x).$$

Hiển nhiên:

$$\varphi(x) \leq \varphi(y), \forall y \in K \Leftrightarrow f(x, y) \geq 0, \forall y \in K.$$

Vậy bài toán tối ưu trên là một trường hợp riêng của bài toán (EP).

- Bất đẳng thức biến phân

Dưới đây, ta xét bài toán bất đẳng thức biến phân đa trị sau: Cho K là

một tập lồi, đóng, khác rỗng trong $\mathbb{R}^n$ và $F : K \rightarrow 2^H$ là một ánh xạ đa trị (tức là với mỗi $x \in K$, giá trị $F(x)$ là một tập khác rỗng trong $\mathbb{R}^n$). Xét bài toán:

$$(VI) \begin{cases} \text{Tìm } x^* \in K, & v^* \in F(x^*) \text{ sao cho} \\ \langle v^*, y - x^* \rangle \geq 0, & \forall y \in K. \end{cases}$$

Ta có thể minh họa bất đẳng thức biến phân (VI) dưới góc độ một mô hình kinh tế như sau. Giả sử K là tập hợp các chiến lược (tập ràng buộc) các phương án sản xuất có thể lựa chọn. Với mỗi phương án sản xuất $x \in K$, tập (ánh xạ giá) $F(x)$ là tập hợp các giá thành chi phí có thể, ứng với phương án x . Khi đó bài toán (VI), chính là bài toán tìm phương án sản xuất x^* trong tập chiến lược K và giá v^* ứng với x^* sao cho chi phí là thấp nhất. Trong trường hợp, ánh xạ giá không phụ thuộc vào phương án sản xuất, tức là $F(x) = c$ với mọi x , bất đẳng thức biến phân (VI) trở thành bài toán quy hoạch quen thuộc:

$$\min \{c^T x : x \in K\}. \quad (LP)$$

Trong bài toán quy hoạch này, vectơ giá c không phụ thuộc vào phương án sản xuất.

Về mặt hình học, bất đẳng thức biến phân (VI) là bài toán tìm một điểm $x^* \in K$ sao cho trong tập $F(x^*)$ có một phần tử là vectơ pháp tuyến (ngoài) của tập K tại điểm x^* .

Giả sử với mỗi $x \in K$, tập $F(x)$ lồi, compact, khác rỗng. Với mỗi $x, y \in K$, để mô tả bài toán (VI) về bài toán cân bằng, ta đặt:

$$f(x, y) := \max_{v \in F(x)} \langle v, y - x \rangle.$$

Từ đây suy ra ngay rằng, $f(x, y) \geq 0$, với mọi $y \in K$, khi và chỉ khi x là nghiệm của (VI). Một trường hợp riêng quan trọng của bài toán (VI) là khi $K = \mathbb{R}_+^n$ và F đơn trị. Khi đó bài toán (VI) tương đương với bài toán sau, được gọi là bài toán bù:

$$\text{Tìm } x \geq 0, \text{ sao cho : } F(x) \geq 0, \quad x^T F(x) = 0. \quad (CP)$$

Ta chỉ ra rằng bài toán (CP) này tương đương với bất đẳng thức biến phân.

$$\text{Tìm } x \geq 0, \text{ sao cho : } \langle F(x), y - x \rangle \geq 0, \quad \forall y \geq 0.$$

Sự tương đương ở đây được hiểu theo nghĩa là tập nghiệm của hai bài toán này trùng nhau. Thật vậy, nếu x là nghiệm của bất đẳng thức biến phân thì:

$$\langle F(x), y - x \rangle \geq 0, \quad \forall y \geq 0.$$

Lần lượt chọn $y = x + e^i$ (vectơ đơn vị thứ i) ta có:

$$F_i(x) = \langle F(x), x + e^i - x \rangle = \langle F(x), e^i \rangle \geq 0.$$

Vậy $F_i(x) \geq 0$ với mọi i . Ngoài ra nếu chọn $y = 0$ ta có $0 \leq -\langle F(x), x \rangle \leq 0$. Suy ra $x^T F(x) = 0$. Điều ngược lại mọi nghiệm của bài toán bù đều là nghiệm của bất đẳng thức biến phân là hiển nhiên. Bài toán quy hoạch lồi:

$$\min \{f(x) : x \in K\}, \quad (CO)$$

trong đó f là một hàm lồi khả dưới vi phân trên tập lồi K , có thể mô tả dưới dạng bất đẳng thức biến phân (VI), với $F = \partial f$.

Thật vậy, khi $F = \partial f$, bài toán (VI) được viết là:

$$\begin{cases} \text{Tìm } x^* \in K, & v^* \in \partial f(x^*) \text{ sao cho} \\ \langle v^*, y - x^* \rangle \geq 0, & \forall y \in K. \end{cases}$$

Nếu x^* là nghiệm của bất đẳng thức biến phân này, thì do $v^* \in \partial f(x^*)$ nên theo định nghĩa dưới vi phân, ta có:

$$\langle v^*, y - x^* \rangle + f(x^*) \leq f(y), \quad \forall y.$$

Thế nhưng do x^* là nghiệm của bất đẳng thức biến phân, nên:

$$\langle v^*, y - x^* \rangle \geq 0, \quad \forall y \in K.$$

Từ đây suy ra $f(x^*) \leq f(y)$, với mọi $y \in K$. Vậy x^* là một nghiệm của bài toán (CO).

Trái lại, nếu x^* là nghiệm của (CO), thì theo điều kiện cần và đủ tối ưu của quy hoạch lồi, ta có:

$$0 \in \partial f(x^*) + N_K(x^*).$$

Từ đây theo định nghĩa của nón pháp tuyến của K tại x^* , ta suy ra x^* là nghiệm của bất đẳng thức biến phân (VI) với $F = \partial f$.

• *Bài toán điểm bất động Kakutani*

Cho $F : K \rightarrow 2^K$. Điểm x được gọi là điểm bất động của F nếu $x \in F(x)$. Giả sử với mọi $x \in K$, $F(x)$ lồi, compact, khác rỗng. Khi đó bài toán tìm một điểm bất động của F có thể mô tả dưới dạng bài toán cân bằng (EP). Để chứng tỏ điều này, với mỗi $x, y \in K$, ta đặt:

$$f(x, y) := \max_{v \in F(x)} \langle x - v, y - x \rangle.$$

Thật vậy, hiển nhiên là nếu $x \in F(x)$, thì theo định nghĩa của $f(x, y)$ ta có:

$$f(x, y) \geq 0, \forall y \in K.$$

Ngược lại, giả sử x là nghiệm của bài toán (EP), tức là $x \in K$ và

$$f(x, y) \geq 0, \forall y \in K.$$

Khi đó lấy y là hình chiếu của x lên tập lồi đóng $F(x)$. Khi đó:

$$\langle x - y, y - x \rangle = \max_{v \in F(x)} \langle x - v, v - x \rangle.$$

Do x là nghiệm của (EP), nên:

$$0 \leq f(x, y) = \langle x - y, y - x \rangle = -\|x - y\|^2.$$

Suy ra $x = y \in F(x)$. Vậy x là điểm bất động của F .

• *Cân bằng Nash trong trò chơi không hợp tác*

Xét một trò chơi có p người chơi (đấu thủ). Giả sử $K_j \subset \mathbb{R}^{P_j}$ là tập phương án mà đấu thủ thứ j có thể lựa chọn trong đó (gọi là tập chiến lược). Đặt $K := K_1 \times K_2 \times K_3 \times \dots \times K_p$ và gọi $\varphi_j : K \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm lợi ích của đấu thủ j . Giả sử $\varphi_j(x_1, \dots, x_j, \dots, x_p)$ là lợi ích của đấu thủ j khi đấu thủ này chọn phương án chơi $x_j \in K_j$, còn các đấu thủ k khác chọn phương án chơi là $x_k \in K_k$ với mọi $k \neq j$.

Định nghĩa 1.6. (*Điểm cân bằng Nash*)

Ta gọi $x^* = (x_1^*, \dots, x_p^*)$ là điểm cân bằng của $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ trên tập $K = K_1 \times K_2 \times \dots \times K_p$ nếu với mọi j và mọi $y_j \in K_j$, ta có:

$$\varphi_j(x_1^*, \dots, x_{j-1}^*, \dots, y_j, x_{j+1}^*, \dots, x_p^*) \leq \varphi_j(x_1^*, \dots, x_{j-1}^*, x_j^*, x_{j+1}^*, \dots, x_p^*).$$

Định nghĩa này cho thấy rằng nếu một đối thủ j nào đó rời khỏi phương án cân bằng, trong khi các đối thủ khác vẫn giữ phương án cân bằng, thì đối thủ j sẽ bị thua thiệt. Đây chính là lý do mà khái niệm cân bằng này được chấp nhận trong thực tế. Điểm cân bằng này được gọi là điểm cân bằng Nash vì khái niệm này do nhà kinh tế học F.Nash đưa ra đầu tiên. Dưới đây là bài toán cân bằng Nash sẽ được hiểu là bài toán tìm một điểm cân bằng (Nash) của φ trên K . Ta sẽ kí hiệu bài toán này là $N(\varphi, K)$. Bài toán cân bằng Nash có thể mô tả dưới dạng bài toán cân bằng (EP). Thật vậy, hãy xây dựng hàm $f : K \times K \rightarrow \mathbb{R}$, bằng cách đặt:

$$f(x, y) := \sum_{j=1}^p [\varphi_j(x) - \varphi_j(x_1, \dots, x_{j-1}, y_j, x_{j+1}, \dots, x_p)].$$

Hiển nhiên nếu x^* là một điểm cân bằng Nash, thì $f(x^*, y) \geq 0$, với mọi $y \in K$. Ngược lại, giả sử $x^* \in K$ là nghiệm của bài toán (EP), tức là $f(x^*, y) \geq 0$, với mọi $y \in K$. Ta sẽ chứng tỏ $x^* = (x_1^*, \dots, x_p^*)$ với $x_j^* \in K_j$ là một điểm cân bằng Nash. Thật vậy, nếu trái lại, sẽ tồn tại j và một điểm $y_j \in K_j$ sao cho:

$$\varphi_j(x_1^*, \dots, x_{j-1}^*, x_j^*, x_{j+1}^*, \dots, x_p^*) < \varphi_j(x_1^*, \dots, x_{j-1}^*, y_j, x_{j+1}^*, \dots, x_p^*).$$

Mâu thuẫn với việc x^* là nghiệm của (EP).

• *Bài toán điểm yên ngựa*

Cho $A \subseteq \mathbb{R}^n, B \subseteq \mathbb{R}^m$ và $L : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$. Bài toán điểm yên ngựa là bài toán tìm:

$$(x^*, y^*) \in A \times B.$$

Sao cho:

$$L(x^*, y) \leq L(x^*, y^*) \leq L(x, y^*), \quad \forall (x, y) \in A \times B.$$

Một điểm $(x^*, y^*) \in A \times B$ thỏa mãn bất đẳng thức trên được gọi là *điểm yên ngựa* của L trên $A \times B$. Ta thấy mối liên quan của bài toán tối ưu với điểm yên ngựa của hàm Lagrange. Bây giờ ta chỉ ra rằng, bài toán điểm yên ngựa có thể mô tả dưới dạng bài toán cân bằng. Thật vậy, với mỗi $u = (x, y)^T, v = (x', y)^T$, ta đặt:

$$K := A \times B, \quad f(u, v) := L(x', y) - L(x, y).$$

Khi đó nếu u^* là nghiệm của bài toán cân bằng K và f , tức là :

$$u^* \in A \times B, \quad f(u^*, v) \geq 0, \quad \forall v \in K = A \times B,$$

thì:

$$L(x', y^*) \geq L(x^*, y'), \quad \forall x' \in A, \quad \forall y' \in B.$$

Với $x' = x^*$ và sau đó với $y' = y^*$, ta có:

$$L(x^*, y') \leq L(x^*, y^*) \leq L(x', y^*), \quad \forall x' \in A, \quad \forall y' \in B.$$

Vậy (x^*, y^*) là điểm yên ngựa. Điều ngược lại là nếu (x^*, y^*) là điểm yên ngựa của L trên $A \times B$, thì $u^* = (x^*, y^*)$ là lời giải của bài toán cân bằng được dễ dàng suy ra từ định nghĩa.

Nhận xét 1.2. Trong tất cả các bài toán vừa kể trên, song hàm f đều có tính chất $f(y, y) = 0$, với mọi $y \in K$. Như vậy f là một song hàm cân bằng trên K .

Chương 2

Về hiệu chỉnh Tikhonov cho bài toán cân bằng đơn điệu

Phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov được sử dụng rộng rãi trong nhiều bài toán khác nhau như hệ phương trình, bài toán tối ưu, bất đẳng thức biến phân. Gần đây phương pháp này được mở rộng cho bài toán cân bằng, mục đích của phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov là để xử lý các bài toán đặt không chỉnh, tức là các bài toán không có nghiệm duy nhất hoặc nghiệm không ổn định theo dữ liệu đầu vào. Ý tưởng cơ bản của phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov cho bài toán cân bằng với song hàm là thay song hàm này bằng một song hàm $f_\varepsilon := f + \varepsilon g$, trong đó $\varepsilon > 0$ (được gọi là tham số hiệu chỉnh) và g đơn điệu mạnh được gọi là song hàm hiệu chỉnh. Sau đó xét bài toán cân bằng với song hàm f_ε (f là đơn điệu) thì bài toán cân bằng $EP(K, f_\varepsilon)$ với song hàm f_ε có duy nhất nghiệm $x(\varepsilon)$ với mọi $\varepsilon > 0$. Khi cho $\varepsilon \downarrow 0$ thì nghiệm $x(\varepsilon)$ hội tụ tới một nghiệm của bài toán ban đầu. Các kết quả ở chương này được tham khảo từ các tài liệu [4], [5], [6], [7].

2.1 Sự tồn tại nghiệm và nguyên lý bài toán phụ

2.1.1 Sự tồn tại nghiệm và các tính chất cơ bản

Trong mục này, trước tiên ta sẽ xét tới sự tồn tại, tính duy nhất nghiệm của bài toán cân bằng. Sau đó ta xét đến một số tính chất cơ bản của bài toán này. Dưới đây ta sẽ chứng minh một kết quả về sự tồn tại nghiệm của bài toán cân bằng (EP) . Trước hết ta nhắc lại một số định lý quan trọng

được sử dụng để chứng minh sự tồn tại nghiệm.

Định lí 2.1. (Điểm bất động Kakutani). Cho K là một tập lồi compact trong không gian Hilbert X và $F : K \rightarrow 2^K$ là một ánh xạ đa trị nửa liên tục trên và $F(x)$ lồi, đóng, khác rỗng với mọi $x \in K$. Khi đó F có điểm bất động, tức là tồn tại $x^* \in K$, $x^* \in F(x^*)$.

Một trường hợp riêng quan trọng của định lý này là định lý điểm bất động Brouwer sau:

Định lí 2.2. (Điểm bất động Brouwer). Cho K là một tập như mệnh đề trên và F là một ánh xạ (đơn trị) liên tục từ K vào K . Khi đó tồn tại $x^* \in K$ thỏa mãn $x^* \in F(x^*)$.

Ta cũng sẽ cần tới định lý quen biết sau, là định lý cực đại của Berge (The Berge maximum theorem).

Định lí 2.3. Cho X, Y là các không gian tô-pô. $F : X \rightarrow 2^Y$ là ánh xạ nửa liên tục trên trên X sao cho $F(x)$ compact, hơn nữa $F(X)$ compact. Giả sử $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm số nửa liên tục trên trên X . Khi đó hàm giá trị tối ưu:

$$g(x) := \max \{f(x, y) : y \in F(x)\},$$

nửa liên tục trên và ánh xạ tập nghiệm tối ưu

$$S(x) := \{y \in F(x) : f(x, y) = g(x)\}$$

nửa liên tục trên.

Dựa vào định lý điểm bất động Kakutani và định lý cực đại của Berge, ta có định lý sau nói về sự tồn tại nghiệm của bài toán cân bằng.

Mệnh đề 2.1. Cho K là một tập lồi, compact, khác rỗng và song hàm cân bằng $f : K \times K \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ có các tính chất:

(i) $f(., y)$ nửa liên tục trên với mọi $y \in K$.

(ii) $f(x, .)$ lồi, nửa liên tục dưới và khả dưới vi phân trên K với mọi $x \in K$.

Khi đó bài toán (EP) có nghiệm.

Chứng minh.

Với mỗi $x \in K$, ta gọi $S(x)$ là tập nghiệm của bài toán

$$\min \{f(x, y) : y \in K\} \quad (CO)$$

Do K compact và $f(x, \cdot)$ nửa liên tục dưới, nên theo định lý Weistrass, bài toán này tồn tại nghiệm. Hơn nữa, do K lồi, compact, $f(x, \cdot)$ lồi, nên $S(x)$ lồi, compact. Theo định lý cực đại của Berge, ánh xạ S nửa liên tục trên. Hiển nhiên S là một ánh xạ từ K vào K . Vậy theo định lý điểm bất động Kakutani, tồn tại $x^* \in K$ thỏa mãn $x^* \in S(x^*)$. Bây giờ ta sẽ chỉ ra x^* là nghiệm của bài toán cân bằng (EP). Thật vậy, do $f(x, \cdot)$ lồi, khả dưới vi phân nên, theo điều kiện cần và đủ tối ưu của quy hoạch lồi, ta có:

$$0 \in \partial_2 f(x^*, x^*) + N_K(x^*).$$

Theo định nghĩa của dưới vi phân và nón pháp tuyến, từ đây ta có $v^* \in \partial_2 f(x^*, x^*)$ thỏa mãn:

$$\langle v^*, y - x^* \rangle \geq 0, \quad \forall y \in K.$$

Do $v^* \in \partial_2 f(x^*, x^*)$, nên:

$$\langle v^*, y - x^* \rangle \leq f(x^*, y) - f(x^*, x^*) = f(x^*, y), \quad \forall y \in K.$$

Vậy $f(x^*, y) \geq 0, \forall y \in K$. Điều này chứng tỏ x^* là nghiệm của (EP) $\square$

Hệ quả 2.1. Cho K là một tập lồi đóng (không cần compact) và song hàm cân bằng f như ở mệnh đề trên. Giả sử điều kiện bức (K_1) sau đây thỏa mãn.

Tồn tại tập compact B sao cho:

$$K \cap B \neq \emptyset, \quad \forall x \in K \setminus B, \quad \exists y \in K : f(x, y) < 0.$$

Khi đó bài toán (EP) có nghiệm.

Chứng minh.

Theo mệnh đề trên, bài toán cân bằng trên tập compact $K \cap B$ với hàm cân bằng f có nghiệm, tức là tồn tại $x^* \in K \cap B$. Từ điều kiện bức (K_1) và tính lồi của tập K , ta có thể suy ra rằng nghiệm x^* cũng là nghiệm của bài

toán (EP). □

Mệnh đề trên là một trường hợp riêng của định lý sau đây của KyFan.

Định lý 2.4. (*KyFan*). Cho $f : K \times K \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ là một song hàm cân bằng có các tính chất sau:

- (i) $f(., y)$ nửa liên tục trên K với mọi $y \in K$;
- (ii) $f(x, .)$ tựa lồi trên K với mọi $x \in K$.

Khi đó bài toán cân bằng (EP) có nghiệm, nếu như K compact, hoặc điều kiện bức (K_1) thỏa mãn.

Bây giờ ta xét đến tính duy nhất nghiệm của bài toán cân bằng. Trước hết ta giới thiệu các định nghĩa về tính đơn điệu của song hàm và ánh xạ.

Định nghĩa 2.1. Giả sử $f : K \times K \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ và $K \subseteq \mathbb{R}^n$. Ta nói:

- (i) f đơn điệu trên K , nếu:

$$f(x, y) + f(y, x) \leq 0, \quad \forall x, y \in K;$$

- (ii) f đơn điệu chặt trên K , nếu nó đơn điệu trên K và:

$$f(x, y) + f(y, x) < 0, \quad \forall x, y \in K, x \neq y;$$

- (iii) f đơn điệu mạnh trên K với hệ số $\beta > 0$, nếu:

$$f(x, y) + f(y, x) \leq -\beta \|x - y\|^2, \quad \forall x, y \in K;$$

- (iv) f giả đơn điệu trên K , nếu:

$$f(x, y) \geq 0 \Rightarrow f(y, x) \leq 0, \quad \forall x, y \in K;$$

- (v) f tựa đơn điệu trên K , nếu:

$$f(x, y) > 0 \Rightarrow f(y, x) \leq 0, \quad \forall x, y \in K.$$

- (vi) f được gọi là bán liên tục trên (nửa liên tục trên theo tia) trên K , nếu:

$$\limsup_{\lambda \rightarrow 0^+} f(\lambda z + (1 - \lambda)x, y) \leq f(x, y), \quad \forall x, y, z \in K.$$

Ví dụ 2.1. 1) Xét hàm $h : X \rightarrow \mathbb{R}$ bất kỳ. X là không gian Hilbert. Khi đó:

$F(x, y) := h(x) - h(y)$ là đơn điệu nhưng không đơn điệu chặt.

$F(x, y) := h(x) - h(y) - 1$ là đơn điệu chặt nhưng không đơn điệu mạnh.

Thực vậy, do $F(x, y) + F(y, x) = -2 < 0$ với mọi x, y nên F đơn điệu chặt.

Thật vậy, giả sử tồn tại hệ số $\tau > 0$ thỏa mãn điều kiện đơn điệu mạnh, suy ra:

$$\tau \|x - y\|^2 \leq 2, \quad \forall x, y \in X.$$

Chọn $x = 0$ và $y = tv$ với v là một vectơ khác 0 trong X , ta được:

$$\tau \leq \frac{2}{|t| \cdot \|v\|}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Cho $t \rightarrow \infty$ thì điều kiện trên chỉ xảy ra khi $\tau \leq 0$ (mâu thuẫn).

2) Xét hàm $F(x, y) := \langle f'(x), y - x \rangle$. Khi đó, theo Mệnh đề 1.4. và Hệ quả 1.1. của nó ta có:

F đơn điệu nếu f lồi.

F đơn điệu mạnh hệ số η nếu f lồi mạnh hệ số η .

Các khái niệm về đơn điệu đối với song hàm có liên quan chặt chẽ với các khái niệm về đơn điệu ánh xạ (toán tử), rất quen thuộc trong giải tích phi tuyến.

Định nghĩa 2.2. Giả sử A là một toán tử (đa trị) với $\text{dom} A$ chứa K . Ta nói:

(i) A đơn điệu mạnh trên K với hệ số $\beta > 0$, nếu với mọi $x, y \in K$, $u \in A(x)$, $v \in A(y)$ ta có:

$$\langle u - v, x - y \rangle \geq \beta \|x - y\|^2;$$

(ii) A đơn điệu chặt trên K , nếu với mọi $x, y \in K, x \neq y, u \in A(x)$, $v \in A(y)$, ta có:

$$\langle u - v, x - y \rangle > 0;$$

(iii) A đơn điệu trên K , nếu với mọi $x, y \in K, u \in A(x), v \in A(y)$, ta có:

$$\langle u - v, x - y \rangle \geq 0;$$

(iv) *A* giả đơn điệu trên K , nếu với mọi $x, y \in K, u \in A(x), v \in A(y)$, ta có:

$$\langle u, x - y \rangle \geq 0 \Rightarrow \langle v, x - y \rangle \geq 0;$$

(v) *A* tựa đơn điệu trên K , nếu với mọi $x, y \in K, u \in A(x), v \in A(y)$, ta có:

$$\langle u, x - y \rangle > 0 \Rightarrow \langle u, x - y \rangle \geq 0.$$

Từ định nghĩa ta có: (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (v).

Một ví dụ quan trọng của toán tử đơn điệu là dưới vi phân của hàm lồi. Thậm chí dưới vi phân của hàm lồi còn có tính đơn điệu mạnh hơn, đó là đơn điệu tuần hoàn. Nhận xét sau cho thấy rằng khái niệm đơn điệu của một song hàm là một sự tổng quát của khái niệm này đối với toán tử.

Nhận xét 2.1. *Giả sử F là một toán tử có một trong các tính chất là đơn điệu mạnh, đơn điệu chặt, đơn điệu, giả đơn điệu hay tựa đơn điệu trên K và $F(x)$ compact với mọi $x \in K$. Khi đó song hàm:*

$$f(x, y) := \max_{u \in F(x)} \langle u, y - x \rangle.$$

sẽ tương ứng là đơn điệu mạnh, đơn điệu chặt, đơn điệu, giả đơn điệu hay tựa đơn điệu trên K .

Thật vậy, giả sử F là đơn điệu. Do $F(x)$ compact, nên tồn tại $u \in F(x)$ sao cho $f(x, y) = \langle u, y - x \rangle$. Tương tự, do $F(y)$ compact, nên tồn tại $v \in F(y)$ sao cho $f(y, x) = \langle v, x - y \rangle$. Khi đó do F đơn điệu, nên:

$$f(x, y) + f(y, x) = \langle u - v, y - x \rangle \leq 0.$$

Vậy f đơn điệu trên K . Các trường hợp đơn điệu khác cũng có thể chứng minh tương tự.

Mệnh đề 2.2. *Cho K là tập lồi, đóng, khác rỗng và $f : K \times K \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ là song hàm cân bằng. Khi đó:*

(i) *Nếu f là đơn điệu chặt trên K , thì bài toán cân bằng (EP) có nhiều nhất một nghiệm;*

(ii) Nếu $f(., y)$ nửa liên tục trên với mỗi $y \in K$ và $f(x, .)$ lồi, nửa liên tục dưới với mỗi $x \in K$ và f đơn điệu mạnh trên K , thì bài toán (EP) luôn có và có duy nhất nghiệm.

Chứng minh.

(i). Giả sử (EP) có hai nghiệm là x^* và y^* . Khi đó $f(x^*, y^*) \geq 0$ và $f(y^*, x^*) \geq 0$. Thế nhưng nếu $f(x^*, y^*) \geq 0$, thì theo tính đơn điệu chặt, ta phải có $f(y^*, x^*) < 0$. Điều này mâu thuẫn với việc $f(y^*, x^*) \geq 0$.

(ii). Lấy $x^0 \in K$ bất kỳ. Do $f(x^0, .)$ nửa liên tục dưới và $f(x^0, x^0) = 0$, nên tồn tại μ sao cho:

$$f(x^0, v) \geq \mu, \quad \forall v \in B(x^0, 1) \cap K,$$

trong đó $B(x^0, 1)$ ký hiệu quả cầu đóng tâm x^0 bán kính bằng 1. Ta sẽ chỉ ra f thỏa mãn điều kiện bức (K_1). Thật vậy, với bất kỳ $x \in K \setminus B(x^0, 1)$, thì $\lambda = 1/\|x^0 - x\| < 1$. Vậy $v = \lambda x + (1 - \lambda)x^0 \in K \cap B(x^0, 1)$. Theo tính lồi của $f(x^0, .)$ ta có:

$$f(x^0, v) \leq \lambda f(x^0, x) + (1 - \lambda)f(x^0, x^0) = \lambda f(x^0, x).$$

Vì $\lambda = 1/\|x^0 - x\|$, nên từ đây suy ra $f(x^0, x) \geq \mu\|x^0 - x\|$. Từ đây và áp dụng tính chất đơn điệu mạnh (với hệ số β) của f , ta có:

$$f(x, x^0) \leq f(x^0, x) - \beta\|x^0 - x\|^2 = -\|x^0 - x\|(\mu + \beta\|x^0 - x\|).$$

Do đó, nếu $\|x^0 - x\| > -\mu/\beta$ thì:

$$f(x, x^0) \leq -\mu\|x^0 - x\| - \beta\|x^0 - x\|^2 < 0.$$

Bây giờ lấy tập compact $U := K \cap B(x^0, \xi)$ với $\xi > \max\{1, -\mu/\beta\}$, ta sẽ có $f(x, x^0) < 0$ khi $x \in K \setminus U$. Vậy tính bức của f được thỏa mãn. Theo Mệnh đề 2.2, bài toán (EP) có nghiệm. Tính duy nhất nghiệm được suy ra từ (i), do tính đơn điệu mạnh kéo theo tính đơn điệu chặt. $\square$

Bài toán cân bằng (EP) có mối liên quan chặt chẽ với bài toán sau, được gọi là *bài toán đối ngẫu* của (EP).

$$\text{Tìm } y^* \in K : f(x, y^*) \leq 0, \quad \forall x \in K. \quad (DEP)$$

Ta sẽ ký hiệu tập nghiệm của bài toán (EP) là S và tập nghiệm của bài

toán đối ngẫu là DS . Mỗi quan hệ giữa hai bài toán này được thể hiện theo mệnh đề dưới đây.

Mệnh đề 2.3. *Giả sử $f : K \times K \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ là song hàm cân bằng. Khi đó:*

- (i) *Nếu $f(x, \cdot)$ là lồi trên K với mọi $x \in K$, thì tập nghiệm DS lồi;*
- (ii) *Nếu f giả đơn điệu trên K , $f(\cdot, y)$ nửa liên tục trên theo mỗi tia (bán liên tục) với mỗi $y \in K$ và $f(x, \cdot)$ lồi với mỗi $x \in K$ thì $DS = S$.*

Chứng minh.

- (i) Theo định nghĩa của bài toán (DEP) , ta thấy rằng:

$$DS = \{y \in K : f(x, y) \leq 0, \forall x \in K\}.$$

Vậy, do K lồi và $f(x, \cdot)$ lồi với mọi $x \in K$, nên DS là giao của một họ vô hạn các tập lồi, do đó nó cũng là một tập lồi.

- (ii) Do tính giả đơn điệu của f , ta có ngay $S \subseteq DS$. Ta chỉ cần chứng minh chiều ngược lại. Giả sử x^* là nghiệm của bài toán đối ngẫu, tức là $f(x, x^*) \leq 0$ với mọi $x \in K$. Nếu x^* không phải là nghiệm của bài toán gốc (EP) , thì sẽ tồn tại $y^* \in K$ sao cho $f(x^*, y^*) < 0$. Lấy $y_t := ty^* + (1-t)x^*$, do K lồi, nên $y_t \in K$ với mọi $0 \leq t \leq 1$. Do tính nửa liên tục trên theo tia của $f(\cdot, y^*)$, ta có:

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow 0} f(ty^* + (1-t)x^*, y^*) \leq f(x^*, y^*) < 0.$$

Vậy tồn tại t_* thuộc đoạn $(0, 1)$, thỏa mãn $f(y_{t_*}, y^*) < 0$. Khi đó theo tính lồi của hàm $f(y_{t_*}, \cdot)$ ta viết được:

$$0 = f(y_{t_*}, y_{t_*}) \leq t_* f(y_{t_*}, y^*) + (1-t_*) f(y_{t_*}, x^*).$$

Vì $f(y_{t_*}, y^*) < 0$, nên từ đây suy ra $f(y_{t_*}, x^*) > 0$. Điều này mâu thuẫn với việc x^* là nghiệm của bài toán đối ngẫu (DEP) . $\square$

2.1.2 Phương pháp bài toán phụ

Ý tưởng chính của phương pháp bài toán phụ (auxiliary equilibrium problem) là xây dựng một bài toán cân bằng tương đương với bài toán ban

đầu bằng cách thay song hàm ban đầu bằng một song hàm lồi mạnh theo biến thứ 2, trong đó x^k là nghiệm của bài toán quy hoạch toán học đơn giản hơn.

Đầu tiên ta xét phương pháp do Mastroeni đưa ra. Phương pháp này xuất phát từ mệnh đề cơ bản sau:

Mệnh đề 2.4. *Giả sử $f(x^*, \cdot)$ là hàm lồi, khả vi và $\rho > 0$.*

Xét hàm $H : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ không âm thỏa mãn:

$$i) H(y, y) = 0, \quad \forall y \in K,$$

$$ii) H'_2(y, y) = 0, \quad \forall y \in K;$$

trong đó $H'_2(x, y)$ là đạo hàm tại điểm y của hàm $H(x, \cdot)$. Khi đó ta có x^ là nghiệm của (EP) nếu và chỉ nếu nó là nghiệm của bài toán (AEP) sau:*

$$x^* \in K \text{ sao cho } \rho f(x^*, y) + H(x^*, y) \geq 0, \quad \forall y \in K. \quad (\text{AEP})$$

Chứng minh.

Hiển nhiên nếu x^* là nghiệm của (EP) thì x^* cũng là nghiệm của bài toán phụ (AEP). Ta chỉ cần chứng minh điều ngược lại, giả sử x^* là nghiệm của bài toán (AEP). Khi đó với mọi $y \in K$ ta có:

$$\rho f(x^*, y) + H(x^*, y) \geq 0 = \rho f(x^*, x^*) + H(x^*, x^*).$$

Vậy x^* là nghiệm của bài toán:

$$\min_{y \in K} [\rho f(x^*, y) + H(x^*, y)].$$

Theo Mệnh đề 1.5 ta có:

$$\langle \rho f'_2(x^*, x^*) + H'_2(x^*, x^*), y - x^* \rangle \geq 0, \quad \forall y \in K.$$

Hay:

$$\langle \rho f'_2(x^*, x^*), y - x^* \rangle \geq 0, \quad \forall y \in K.$$

Do hàm $f(x^*, \cdot)$ lồi nên cũng theo Mệnh đề 1.5 ta có:

$$f(x^*, y) \geq f(x^*, x^*) = 0, \quad \forall y \in K.$$

Ta có hệ quả trực tiếp sau:

Hệ quả 2.2. x^* là nghiệm của bài toán (EP) nếu và chỉ nếu nó là nghiệm của bài toán cực trị:

$$\min_{x \in K} [\rho f(x^*, y) + H(x^*, y)].$$

Dễ thấy khi chọn $H(x, y) := G(y) - G(x) - \langle G'(x), y - x \rangle$, trong đó $G : X \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm lồi mạnh, khả vi trên K , thì H thỏa mãn các điều kiện nêu trong mệnh đề trên. Vì vậy ta xét thuật toán sau với:

$$H(x, y) := G(y) - G(x) - \langle G'(x), y - x \rangle.$$

Thuật toán 2.1.

- (i) Khởi tạo $k = 0$, xuất phát từ $x^0 \in K$.
- (ii) x^{k+1} là nghiệm của bài toán $P(k)$:

$$\min_{y \in K} [\rho f(x^k, y) - \langle G'(x^k), y \rangle + G(y)].$$

(iii) Nếu $\|x^{k+1} - x^k\| \leq \mu$, với $\mu \geq 0$ cho trước thì dừng, nếu không thì gán $k = k + 1$ và quay lại bước (ii).

Trong bài toán $P(k)$, hàm cần cực tiểu hóa là tổng của một hàm lồi, một hàm affine và một hàm lồi mạnh, do đó nó là một hàm lồi mạnh, nên nghiệm của $P(k)$ xác định duy nhất. Định lý sau đây cho ta khẳng định về sự hội tụ của dãy xấp xỉ xây dựng bởi Thuật toán 2.1.

Định lý 2.5. Giả sử các điều kiện sau đây được thỏa mãn:

- i) $f(x, \cdot)$ là hàm lồi chặt, khả vi với mọi $x \in K$.
- ii) f có tính chất nửa liên tục trên theo tia (bán liên tục trên).
- iii) f đơn điệu mạnh trên K với hệ số τ .
- iv) G lồi mạnh trên K với hệ số η .
- v) f thỏa mãn điều kiện tựa Lipschitz, tức là tồn tại các hằng số

$L_1, L_2 > 0$ thỏa mãn:

$$f(x, y) + f(y, z) \geq f(x, z) - L_1 \|x - y\|^2 - L_2 \|y - z\|^2, \quad \forall x, y, z \in K.$$

Khi đó, nếu $0 < \rho \leq \frac{\eta}{2L_2}$ và $L_1 < \tau$ thì dãy $\{x^k\}$ xây dựng bởi thuật toán trên hội tụ mạnh tới nghiệm duy nhất của bài toán.

Chứng minh.

Từ các điều kiện (i), (ii), (iii), áp dụng Định lý 1.1 ta suy ra bài toán (EP) có nghiệm duy nhất, kí hiệu là x^* . Ta xét hàm:

$$\Lambda(x) := G(x^*) - G(x) - \langle G'(x), x^* - x \rangle.$$

Do G lồi mạnh với hệ số η nên $\Lambda(x) \geq \frac{\eta}{2} \|x^* - x\|^2 \geq 0$ với mọi $x \in K$.

Xét hiệu:

$$\begin{aligned} & \Lambda(x^k) - \Lambda(x^{k+1}) \\ &= [G(x^*) - G(x^k) - \langle G'(x^k), x^* - x^k \rangle] - [G(x^*) - G(x^{k+1}) - \langle G'(x^{k+1}), x^* - x^{k+1} \rangle] \\ &= G(x^{k+1}) - G(x^k) - \langle G'(x^k), x^* - x^k \rangle + \langle G'(x^{k+1}), x^* - x^{k+1} \rangle \\ &= G(x^{k+1}) - G(x^k) - \langle G'(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle + \langle G'(x^{k+1}) - G'(x^k), x^* - x^{k+1} \rangle. \end{aligned}$$

Do G lồi mạnh với hệ số η nên:

$$G(x^{k+1}) - G(x^k) - \langle G'(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle \geq \frac{\eta}{2} \|x^{k+1} - x^k\|^2.$$

Do x^{k+1} là nghiệm của bài toán $P(k)$ nên theo Mệnh đề 1.5 ta có:

$$\langle \rho f'_2(x^k, x^{k+1}) + G'(x^{k+1}) - G'(x^k), y - x^{k+1} \rangle \geq 0, \quad \forall y \in K.$$

Chọn $y = x^*$ ta suy ra:

$$\langle G'(x^{k+1}) - G'(x^k), x^* - x^{k+1} \rangle \geq \rho \langle f'_2(x^k, x^{k+1}), x^{k+1} - x^* \rangle.$$

Do $f(x^k, \cdot)$ lồi nên theo hệ quả Mệnh đề 1.4 ta có:

$$\langle f'_2(x^k, x^{k+1}), x^{k+1} - x^* \rangle \geq f(x^k, x^{k+1}) - f(x^k, x^*).$$

Mặt khác theo điều kiện định lý và tính chất nghiệm của bài toán (EP) ta

có:

$$\begin{aligned} & f(x^k, x^{k+1}) - f(x^k, x^*) \\ &= [f(x^*, x^k) + f(x^k, x^{k+1}) - f(x^*, x^{k+1})] - [f(x^k, x^*) + f(x^*, x^k)] + f(x^*, x^{k+1}) \\ &\geq -L_1 \|x^* - x^k\|^2 - L_2 \|x^k - x^{k+1}\|^2 + \tau \|x^* - x^k\|^2 \\ &= (\tau - L_1) \|x^* - x^k\|^2 - L_2 \|x^k - x^{k+1}\|^2. \end{aligned}$$

Vậy ta có:

$$\Lambda(x^k) - \Lambda(x^{k+1}) \geq \frac{\eta}{2} \|x^{k+1} - x^k\|^2 + \rho(\tau - L_1) \|x^* - x^k\|^2 - \rho L_2 \|x^k - x^{k+1}\|^2$$

$$= \left(\frac{\eta}{2} - \rho L_2\right) \|x^{k+1} - x^k\|^2 + \rho(\tau - L_1) \|x^* - x^k\|^2 \geq 0.$$

Như vậy dãy $\{\Lambda(x^k)\}$ là dãy giảm và bị chặn dưới (bởi 0), do đó hội tụ, suy ra $\lim_{k \rightarrow +\infty} (\Lambda(x^k) - \Lambda(x^{k+1})) = 0$. Điều này kéo theo:

$$\lim_{k \rightarrow 0} \|x^* - x^k\|^2 = 0.$$

Biểu thức trên chứng tỏ dãy $\{x^k\}$ hội tụ mạnh tới x^* .

Bây giờ ta xét trường hợp đặc biệt, $G(x) = \frac{\|x\|^2}{2}$, khi đó G lồi mạnh với hệ số 1 và sự hội tụ của dãy $\{x^k\}$ là tuyến tính. $\square$

Hệ quả 2.3. Với các điều kiện của định lý trên, khi $0 < \rho \leq \frac{1}{2L_2}$ và $L_1 < \tau$ thì dãy $\{x^k\}$ xác định bởi công thức truy hồi:

$$x^{k+1} := \arg \min_{y \in K} \left\{ \rho f(x^k, y) + \frac{\|y - x^k\|^2}{2} \right\},$$

thỏa mãn bất đẳng thức:

$$\|x^{k+1} - x^*\|^2 \leq \alpha \|x^k - x^*\|^2, \quad \forall k \geq 0,$$

trong đó, $\alpha = 1 - 2\rho(\tau - L_1)$.

Chứng minh.

Thay $G(x) = \frac{\|x\|^2}{2}$ vào biểu thức tính Λ ta được:

$$\Lambda(x) = \frac{\|x^*\|^2}{2} - \frac{\|x\|^2}{2} - \langle x, x^* - x \rangle = \frac{\|x^* - x\|^2}{2}.$$

Lập luận tương tự chứng minh ta có:

$$\begin{aligned} \frac{\|x^* - x^k\|^2}{2} - \frac{\|x^* - x^{k+1}\|^2}{2} &\geq \left(\frac{1}{2} - \rho L_2\right) \|x^{k+1} - x^k\|^2 + \rho(\tau - L_1) \|x^* - x^k\|^2 \\ &\geq \rho(\tau - L_1) \|x^* - x^k\|^2. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra:

$$[1 - 2\rho(\tau - L_1)] \|x^* - x^k\|^2 \geq \|x^* - x^{k+1}\|^2.$$

Đây chính là điều phải chứng minh. $\square$

2.2 Hiệu chỉnh Tikhonov cho bài toán cân bằng

Trước hết ta nhắc lại một số mệnh đề, sẽ được sử dụng trong chứng minh các phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov. Trong phần này, chúng ta kí hiệu $SEP(K, f)$ và $SDEP(K, f)$ tương ứng là tập nghiệm của $EP(K, f)$ và $DEP(K, f)$. Ta sẽ xét bài toán trên không gian Euclide hữu hạn chiều.

Các giả thiết sau đây sẽ được sử dụng cho một song hàm $h : K \times K \rightarrow \mathbb{R}$:

(A₁) : $h(., y)$ là nửa liên tục trên với mọi $y \in K$.

(A₂) : $h(x, .)$ là nửa liên tục dưới và lồi với mọi $y \in K$.

(A₃) : Tồn tại một tập con compact, khác rỗng B , $B \subset \mathbb{R}^n$ và vectơ $y_0 \in B \cap K$ sao cho:

$$h(x, y_0) < 0, \quad \forall x \in K \setminus B.$$

Giả thiết (A₃) được gọi là điều kiện bức.

Giả sử rằng:

$$L(y) := \{x \in K : f(x, y) \geq 0\}, \quad L^d(y) := \{x \in K : f(y, x) \leq 0\}.$$

Rõ ràng:

$$\cap_{y \in K} L(y) = SEP(K, f), \quad \cap_{y \in K} L^d(y) = SDEP(K, f).$$

Mệnh đề 2.5. *Chúng ta có các nhận định sau:*

(a) Nếu f thỏa mãn giả thiết (A₂), khi đó tập $L^d(y)$ là tập lồi, đóng và khác rỗng.

(b) Nếu f thỏa mãn cả giả thiết (A₁) & (A₂) thì $\cap_{y \in K} L^d(y) \subseteq \cap_{y \in K} L(y)$.

(c) Nếu f thỏa mãn cả 3 giả thiết (A₁) – (A₃) thì $\cap_{y \in K} L(y) \neq \emptyset$.

Mệnh đề 2.6. *Các khẳng định sau đây là đúng:*

(a) Nếu f thỏa mãn cả giả thiết (A₁), (A₂) và là đều mạnh trên K , khi $EP(K, f)$ có một nghiệm duy nhất.

(b) Nếu f thỏa mãn cả giả thiết (A₁), (A₂) và là giả đơn điệu trên K , khi $SEP(K, f) = SDEP(K, f)$ và chúng là đóng và lồi.

(c) Nếu f thỏa mãn cả 3 giả thiết (A₁) – (A₃) và là giả đơn điệu trên K , thì $SEP(K, f)$ là một tập compact, lồi, khác rỗng.

Để xây dựng bài toán hiệu chỉnh cho bài toán cân bằng $EP(K, f)$, đầu tiên chúng ta chọn một song hàm cân bằng đơn điệu mạnh $g : K \times K \rightarrow \mathbb{R}$ và được gọi là song hàm hiệu chỉnh. Sau đó, chúng ta kết hợp với bài toán $EP(K, f)$ để xây dựng bài toán hiệu chỉnh, được xác định như sau:

$$EP(K, f_\varepsilon) \begin{cases} \text{Tìm } x \in K, \text{ sao cho} \\ f_\varepsilon(x, y) := f(x, y) + \varepsilon g(x, y) \geq 0, \quad \forall y \in K. \end{cases}$$

với $\varepsilon > 0$ là tham số hiệu chỉnh. Một đường cong $\{x(\varepsilon) : \varepsilon > 0\}$, trong đó $x(\varepsilon)$ là tập nghiệm của bài toán hiệu chỉnh $EP(K, f_\varepsilon)$ được gọi là *quỹ đạo Tikhonov*.

2.2.1 Trường hợp song hàm đơn điệu

Trong mục này chúng ta xét trường hợp khi f là đơn điệu trên K . Khi đó phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov có thể mở rộng cho bài toán cân bằng $EP(K, f)$. Dưới đây, chúng ta luôn giả sử song hàm cân bằng g là đơn điệu mạnh trên K và thỏa mãn điều kiện:

$$\exists \delta > 0 : |g(x, y)| \leq \delta \|x - x^g\| \cdot \|y - x\|, \quad \forall x, y \in K. \quad (2.1)$$

trong đó $x^g \in K$ (đóng vai trò là một lời giải đoán trước) được cho trước. Một ví dụ của song hàm thỏa mãn điều kiện (2.1) là:

$$g(x, y) := \langle F(x) - F(x^g), y - x \rangle, \quad (2.2)$$

với F là Lipschitz trên K . Một trường hợp riêng là song hàm khoảng cách được cho bởi :

$$g(x, y) := \langle x - x^g, y - x \rangle.$$

Chúng ta có kết quả như sau:

Định lí 2.6. *Giả sử:*

- (i) f là đơn điệu trên K và thỏa mãn giả thiết $(A_1) \& (A_2)$
- (ii) g là song hàm cân bằng đơn điệu mạnh trên K với hệ số γ thỏa mãn giả thiết (A_1) , (A_2) và cả (2.1).

Khi đó với mọi $\varepsilon > 0$, bài toán $EP(K, f_\varepsilon)$ có một nghiệm duy nhất $x(\varepsilon)$ thỏa mãn 3 tính chất tương đương sau:

$$(a) \exists \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} x(\varepsilon),$$

$$(b) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sup \|x(\varepsilon)\| < \infty,$$

$$(c) SEP(K, f) \neq \emptyset.$$

Hơn nữa, nếu có một trong những tính chất trên thì $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} x(\varepsilon) = x^*$ là nghiệm duy nhất của bài toán cân bằng $EP(\tilde{K}, g)$ trong đó $\tilde{K} := SEP(K, f)$. Ngoài ra, nếu g là song hàm khoảng cách, thì x^* là hình chiếu Euclide của x^g lên tập nghiệm của $EP(K, f)$.

Chứng minh

Có thể nhận thấy rằng bài toán song hàm $f_\varepsilon := f + \varepsilon g$ thỏa mãn các giả thiết $(A_1) \& (A_2)$. Hơn nữa, khi f đơn điệu trên K và g là đơn điệu mạnh trên K thì song hàm f_ε là đơn điệu mạnh trên K . Thật vậy, theo Mệnh đề 2.6(a) bài toán cân bằng $EP(K, f_\varepsilon)$ luôn tồn tại duy nhất nghiệm.

(a) $\Rightarrow$ (b) Hiển nhiên.

(b) $\Rightarrow$ (c) Dãy bị chặn $\{x(\varepsilon)\}$ khi $\varepsilon \rightarrow 0^+$ được hiểu như sau, với mọi dãy con bất kỳ hội tụ về 0, để đơn giản chúng ta xét dãy nghiệm $\{x^k\} := \{x(\varepsilon_k)\}$ phải có ít nhất một dãy con hội tụ tới điểm x^* nào đó. Để đơn giản chúng ta kí hiệu luôn dãy con này bởi $\{x^k\}$. Khi đó x^k là nghiệm của bài toán $EP(K, f_{\varepsilon_k})$ với mọi k . Do đó chúng ta có:

$$f_{\varepsilon_k}(x^k, y) \geq 0, \quad \forall y \in K.$$

Do $f(\cdot, y)$ và $g(\cdot, y)$ là nửa liên tục trên, nên qua giới hạn ta được:

$$0 \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} f_{\varepsilon_k}(x^k, y) \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} f(x^k, y) \leq f(x^*, y), \quad \forall y \in K.$$

Có nghĩa là $x^* \in SEP(K, f)$. Do đó, $SEP(K, f) \neq \emptyset$.

(c) $\Rightarrow$ (a) Cho $\bar{x}$ là nghiệm của $EP(K, f)$ và $\{\varepsilon_k\}$ là dãy hội tụ tới 0. Để đơn giản, chúng ta viết $x^k := x(\varepsilon_k)$. Do $\bar{x} \in SEP(K, f)$ và x^k là nghiệm của bài toán hiệu chỉnh, nên với mỗi giá trị của k ta có:

$$f(\bar{x}, x^k) \geq 0, \quad f_{\varepsilon_k}(x^k, \bar{x}) = f(x^k, \bar{x}) + \varepsilon_k g(x^k, \bar{x}) \geq 0.$$

Thêm bất đẳng thức:

$$f(\bar{x}, x^k) + f(x^k, \bar{x}) + \varepsilon_k g(x^k, \bar{x}) \geq 0.$$

Từ đây do tính đơn điệu của f , nên $f(\bar{x}, x^k) + f(x^k, \bar{x}) \leq 0$. Vậy:

$$g(x^k, \bar{x}) \geq 0. \quad (2.3)$$

Mặt khác, do g là đơn điệu mạnh với $\gamma > 0$, chúng ta có:

$$g(x^k, \bar{x}) + g(\bar{x}, x^k) \leq -\gamma \|x^k - \bar{x}\|^2. \quad (2.4)$$

Từ (2.3) và (2.4):

$$g(\bar{x}, x^k) \leq -\gamma \|x^k - \bar{x}\|^2 \Leftrightarrow -g(\bar{x}, x^k) \geq \gamma \|x^k - \bar{x}\|^2.$$

Dựa vào bất đẳng thức trong điều kiện (2.1), từ đây ta suy ra:

$$\delta \|\bar{x} - x^g\| \cdot \|x^k - \bar{x}\| \geq |-g(\bar{x}, x^k)| \geq \gamma \|x^k - \bar{x}\|^2.$$

Vậy:

$$\|x^k - \bar{x}\| \leq \frac{\delta}{\gamma} \|\bar{x} - x^g\|, \quad \forall k. \quad (2.5)$$

Do đó dãy $\{x^k\}$ bị chặn, chúng ta có thể giả sử mà không làm mất tính tổng quát, $x^k \rightarrow x^* \in K$ khi $k \rightarrow \infty$. Do x^k là nghiệm của $EP(K, f_{\varepsilon_k})$ với mọi k , nên:

$$f_{\varepsilon_k}(x^k, y) \geq 0, \quad \forall y \in K.$$

Cho $k \rightarrow +\infty$, do $f(., y)$ và $g(., y)$ là nửa liên tục trên nên:

$$0 \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} f_{\varepsilon_k}(x^k, y) \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} f(x^k, y) \leq f(x^*, y), \quad \forall y \in K.$$

Do đó $x^* \in \tilde{K} := SEP(K, f)$. Hơn nữa, sử dụng (2.3) và tính đơn điệu mạnh của $g(., y)$ tại $\bar{x}$, chúng ta nhận thấy rằng:

$$g(x^*, \bar{x}) \geq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} g(x^k, \bar{x}) \geq 0.$$

Do $\bar{x}$ là một điểm tùy ý trong tập $\tilde{K}$, nên x^* là nghiệm của $EP(\tilde{K}, g)$. Do g là đơn điệu mạnh trên K (K là tập con, lồi, đóng, khác rỗng của tập $\tilde{K}$, bài toán $EP(\tilde{K}, g)$ có một nghiệm duy nhất bởi Mệnh đề 2.6(a). Do đó,

chúng ta đã chỉ ra rằng bất kỳ điểm giới hạn nào của dãy $\{x^k\}$ là nghiệm duy nhất của bài toán $EP(\tilde{K}, g)$. Do đó, toàn bộ dãy $\{x^k\}$ phải hội tụ tới điểm x^* . Nhìn vào phần cuối của định lý, chúng ta lưu ý rằng theo Mệnh đề 2.6(b), tập nghiệm của $SEP(K, f)$ là lồi, đóng, khác rỗng. Do đó, hình chiếu Euclide của x^g trên $SEP(K, f)$ được xác định và duy nhất. Khi g là song hàm khoảng cách thì ta có:

$$g(x, y) = \langle x - x^g, y - x \rangle.$$

Có thể chứng minh rằng nghiệm duy nhất của bài toán $EP(\tilde{K}, g)$ chính là hình chiếu của x^g lên tập nghiệm $\tilde{K}$ của bài toán $EP(K, f)$. $\square$

2.2.2 Trường hợp song hàm giả đơn điệu

Trong phần này chúng ta nghiên cứu hiệu chỉnh Tikhonov cho bài toán cân bằng $EP(K, f)$ với f là giả đơn điệu trên K . Những khó khăn phát sinh trong trường hợp này là có thể bài toán hiệu chỉnh không là đơn điệu mạnh, hoặc thậm chí không phải là giả đơn điệu (xem ví dụ 2.2 dưới đây). Tuy nhiên chúng ta sẽ chứng minh rằng mọi quỹ đạo Tikhonov hội tụ tới cùng một điểm của tập nghiệm của bài toán ban đầu. Chúng ta xét bổ đề sau đây liên quan đến nghiệm của bài toán $EP(K, f)$.

Bổ đề 2.1. *Giả sử f thỏa mãn giả thiết (A_1) & (A_2) . Ta xét các điều sau:*

(a) *Tồn tại một vectơ $y_0 \in K$ sao cho tập:*

$$L(y_0) := \{x \in K : f(x, y_0) \geq 0\} \text{ bị chặn};$$

(b) *Tồn tại một tập compact, khác rỗng $B \subset \mathbb{R}^n$ và vectơ $y_0 \in K \cap B$ sao cho:*

$$f(x, y_0) < 0, \quad \forall x \in K \setminus B;$$

(c) *Tập nghiệm của $SEP(K, f)$ là compact và khác rỗng.*

Khi đó $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c)$. Ngoài ra, nếu f là giả đơn điệu trên K , thì $SEP(K, f)$ là lồi và tập:

$$L_{>}(y_0) := \{x \in K : f(x, y_0) > 0\},$$

là rỗng với bất kỳ $y_0 \in SEP(K, f)$.

Chứng minh

(a) $\Rightarrow$ (b) : Lấy $B := L(y_0)$. Theo giả thiết (a) và tính nửa liên tục trên của $f(., y_0)$, B là compact. Do đó suy ra (b).

(b) $\Rightarrow$ (c) : Theo Mệnh đề 2.5(c) chúng ta có $SEP(K, f) \neq \emptyset$. Vì K là đóng và $f(., y)$ là nửa liên tục trên của K , tập $SEP(K, f)$ là đóng. Hơn nữa, từ (b) và dựa vào định nghĩa của $L(y_0)$ ta có:

$$SEP(K, f) \subseteq L(y_0) \subseteq K \cap B.$$

Do đó $SEP(K, f)$ là compact. $\square$

Giả sử $y_0 \in SEP(K, f)$ khi $f(y_0, x) \geq 0$ với mọi $x \in K$ do f giả đơn điệu, nên $f(x, y_0) \leq 0$ với mọi $x \in K$. Hơn nữa, $L_{>}(y_0) \neq \emptyset$. Theo Mệnh đề 2.6 thì $SEP(K, f)$ là tập lồi.

Ở phần trước, chúng ta có g là đơn điệu mạnh trên K và thỏa mãn các giả thiết $(A_1) \& (A_2)$ và điều kiện (2.1). Chúng ta có định lý sau đây:

Định lý 2.7. *Giả sử f là song hàm cân bằng giả đơn điệu trên K và thỏa mãn các giả thiết $(A_1) \& (A_2)$. Khi đó ba điều sau đây là tương đương :*

(a) $SEP(K, f_\varepsilon) \neq \emptyset$ với $\varepsilon > 0$ và $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} x(\varepsilon)$ tồn tại, với $x(\varepsilon)$ được chọn tùy ý trong $SEP(K, f_\varepsilon)$.

(b) $SEP(K, f_\varepsilon) \neq \emptyset$ với $\varepsilon > 0$ và $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sup \|x(\varepsilon)\| < \infty$, với $x(\varepsilon)$ được chọn tùy ý trong $SEP(K, f_\varepsilon)$.

(c) $SEP(K, f) \neq \emptyset$.

Hơn nữa, nếu một trong các điều trên thỏa mãn, thì $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} x(\varepsilon) = x^*$, trong đó x^* là nghiệm duy nhất của bài toán cân bằng $EP(\tilde{K}, g)$ với $\tilde{K} := SEP(K, f)$. Ngoài ra, nếu g là song hàm khoảng cách, thì x^* là hình chiếu Euclide của x^g trên tập nghiệm của bài toán $EP(K, f)$.

Chứng minh

Nhận thấy rằng f_ε thỏa mãn giả thiết $(A_1) \& (A_2)$.

(a) $\Rightarrow$ (b) : Hiển nhiên.

(b) $\Rightarrow$ (c) : Tập $SEP(K, f_\varepsilon) \neq \emptyset$, và dãy $\{x(\varepsilon)\}$ bị chặn, đã được chứng minh trong phần chứng minh (b) $\Rightarrow$ (c) của Định lý 2.6. Giả sử $\varepsilon_k > 0$, $\varepsilon_k \downarrow 0$.

Gọi $x^k := x(\varepsilon_k)$. Do $\{x^k\}$ bị chặn, nên ta có thể giả sử $x^k \rightarrow x^*$, $x^* \in K$ do $x^k \in SEP(K, f_{\varepsilon_k})$, nên:

$$f_{\varepsilon_k}(x^k, y) \geq 0, \quad \forall y \in K.$$

Vì $f(., y)$ và $g(., y)$ là nửa liên tục trên với mọi $y \in K$ và $\varepsilon_k \downarrow 0$, nên ta có:

$$0 \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} f_{\varepsilon_k}(x^k, y) \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} f(x^k, y) \leq f(x^*, y), \quad \forall y \in K.$$

Hơn nữa, $x^* \in SEP(K, f)$.

(c) $\Rightarrow$ (a) : Để chứng minh $SEP(K, f_\varepsilon) \neq \emptyset$ với mọi $\varepsilon > 0$, ta áp dụng Bổ đề 2.1, sẽ xác định được một vectơ $y_0 \in K$ sao cho:

$$L^\varepsilon(y_0) := \{x \in K : f_\varepsilon(x, y_0) = f(x, y_0) + \varepsilon g(x, y_0) \geq 0\}$$

bị chặn. Theo điều kiện (c) chúng ta có thể lấy $y_0 \in SEP(K, f)$. Dựa vào khẳng định cuối cùng của Bổ đề 2.1 có $L_>(y_0) \neq \emptyset$. Với bất kỳ $x \in L^\varepsilon(y_0)$ ta có:

$$f_\varepsilon(x, y_0) = f(x, y_0) + \varepsilon g(x, y_0) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow f(x, y_0) \geq -\varepsilon g(x, y_0).$$

Ta chỉ ra rằng: $g(x, y_0) \geq 0$ với bất kỳ $x \in L^\varepsilon(y_0)$. Thật vậy, nếu $g(x, y_0) < 0$, thì $f(x, y_0) > 0$. Hơn nữa $x \in L_>(y_0) = \emptyset$. Đây là mâu thuẫn.

Từ $g(x, y_0) \geq 0$, do tính đơn điệu mạnh với hệ số γ của g , ta có:

$$g(y_0, x) \leq -\gamma \|y_0 - x\|^2.$$

Sử dụng điều kiện (2.1) chúng ta thấy $\|x - y_0\| \leq \frac{\delta}{\gamma} \|x^g - y_0\|$ với mọi $x \in L^\varepsilon(y_0)$.

Do đó, $L^\varepsilon(y_0)$ bị chặn. Vậy bài toán $EP(K, f_\varepsilon)$ luôn tồn tại nghiệm với mọi $\varepsilon > 0$.

Bây giờ, lấy $\bar{x}$ là nghiệm bất kỳ của $EP(K, f)$ và $\{\varepsilon_k\}$ là một dãy bất kỳ hội tụ đến 0. Chọn một dãy tùy ý $\{x^k\}$ với $x^k \in SEP(K, f_{\varepsilon_k})$. Khi đó với mọi k ta có:

$$f(\bar{x}, x^k) \geq 0. \quad (2.6)$$

và

$$f_{\varepsilon_k}(x^k, \bar{x}) := f(x^k, \bar{x}) + \varepsilon_k g(x^k, \bar{x}) \geq 0. \quad (2.7)$$

Do tính giả đơn điệu của f và (2.6) ta có $f(x^k, \bar{x}) \leq 0$. Hơn nữa, sử dụng (2.7) ta có:

$$g(x^k, \bar{x}) \geq 0. \quad (2.8)$$

Bây giờ, chứng minh tương tự như trong Định lý 2.6, ta có:

$$\|x^k - \bar{x}\| \leq \frac{\delta}{\gamma} \|\bar{x} - x^g\|, \quad \forall k. \quad (2.9)$$

Vậy dãy $\{x^k\}$ bị chặn. Lấy x^* là điểm giới hạn bất kỳ của dãy. Để đơn giản, chúng ta cho $x^k \rightarrow x^* \in K$ khi $k \rightarrow \infty$. Sau đó, theo (2.9) qua giới hạn, ta có:

$$\|x^* - \bar{x}\| \leq \frac{\delta}{\gamma} \|\bar{x} - x^g\|. \quad (2.10)$$

Tương tự như trong phần chứng minh cuối cùng (c) $\Rightarrow$ (a) của Định lý 2.6. Chúng ta có:

$$g(x^*, \bar{x}) \geq 0,$$

trong đó $\bar{x}$ là một giá trị tùy ý trong $\tilde{K}$. Vậy x^* là nghiệm của bài toán $EP(\tilde{K}, g)$. Do g đơn điệu mạnh nên x^* là nghiệm duy nhất của $EP(\tilde{K}, g)$. Do đó toàn bộ dãy $\{x^k\}$ phải hội tụ tới x^* .

Phần còn lại của định lý có thể chứng minh tương tự như trong phần chứng minh của Định lý 2.6. $\square$

Nhận xét 2.2. *Như chúng ta đã thấy trong các phần chứng minh của Định lý 2.6 và 2.7 điều kiện:*

$$\exists \delta > 0 : |g(x, y)| \leq \delta \|x - x^g\| \cdot \|y - x\|, \quad \forall x, y \in K,$$

được sử dụng để chứng minh rằng bất kỳ quỹ đạo Tikhonov nào cũng hội tụ tới nghiệm của bài toán ban đầu, đó là nghiệm duy nhất của bài toán cân bằng đơn điệu mạnh được xác định với song hàm hiệu chỉnh g .

Nhận xét 2.3. *Theo Định lý 2.6 và 2.7, việc tìm nghiệm bằng phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov, có thể đưa về cách giải bài toán cân bằng đơn điệu mạnh $EP(\tilde{K}, g)$ với $\tilde{K}$ là tập nghiệm của bài toán ban đầu $EP(K, f)$. Khi g là song hàm khoảng cách, bài toán trở về việc tìm cực tiểu của hàm $\|x - x^g\|^2$ trên $\tilde{K}$.*

Nhận xét 2.4. Như chúng ta đã thấy, khi f đơn điệu trên K , song hàm f_ε của bài toán hiệu chỉnh $EP(K, f_\varepsilon)$ là đơn điệu mạnh, vậy $EP(K, f_\varepsilon)$ sẽ có nghiệm duy nhất. Khi f là giả đơn điệu, song hàm f_ε nói chung không là giả đơn điệu và do đó tập nghiệm của bài toán $EP(K, f_\varepsilon)$ có thể không lồi, như ở ví dụ sau đây:

Ví dụ 2.2. Giả sử $a > 0$, $K = [-3; +\infty)$ và

$$f(x, y) := \frac{1}{a} (x^2 + 2)(y - x); \quad g(x, y) := x(y - x).$$

Dễ dàng nhận thấy f là giả đơn điệu nhưng không đơn điệu trên K . Cho $\varepsilon = \frac{3}{a}$, song hàm:

$$f_\varepsilon(x, y) = \frac{1}{a} [(x^2 + 3x + 2)(y - x)],$$

không phải giả đơn điệu, thật vậy cho $x \in (-2, -1)$; $y \in [-3, -2)$ chúng ta có $f_\varepsilon(x, y) > 0$ và $f_\varepsilon(y, x) > 0$.

Hơn nữa, bài toán hiệu chỉnh $EP(K, f_\varepsilon)$ có 2 nghiệm phân biệt $x = -1$ và $x = -2$. Định lý tiếp theo cung cấp một số thông tin hữu ích về tập nghiệm của bài toán $EP(K, f_\varepsilon)$, nếu f thỏa mãn tính bức.

Định lý 2.8. Giả sử f là giả đơn điệu trên K và thỏa mãn giả thiết $(A_1) - (A_3)$. Khi đó:

(a) Với $\varepsilon > 0$ bất kỳ, tập nghiệm của $SEP(K, f_\varepsilon)$ là compact và khác rỗng.

(b) $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \text{diam} SEP(K, f_\varepsilon) = 0$, trong đó $\text{diam} SEP(K, f_\varepsilon) := \sup_{x, y \in SEP(K, f_\varepsilon)} \|x - y\|$.

Chứng minh

(a) Theo giả thiết của định lý, theo Mệnh đề 2.6(c), thì bài toán $EP(K, f)$ có nghiệm. Lấy bất kỳ $y_0 \in SEP(K, f)$. Theo Bổ đề 2.1, ta chỉ cần chứng minh tập:

$$L^\varepsilon(y_0) := \{x \in K : f_\varepsilon(x, y_0) = f(x, y_0) + \varepsilon g(x, y_0) \geq 0\},$$

bị chặn. Thật vậy, với bất kỳ $x \in L^\varepsilon(y_0)$, ta có:

$$f(x, y_0) \geq -\varepsilon g(x, y_0). \quad (2.11)$$

Do $y_0 \in SEP(K, f)$, nên $f(y_0, x) \geq 0$. Do f là giả đơn điệu, ta có $f(x, y_0) \leq 0$. Hơn nữa, từ (2.11) ta có $g(x, y_0) \geq 0$. Do tính đơn điệu mạnh của g ta có:

$$-g(y_0, x) \geq \gamma \|x - y_0\|^2.$$

Sử dụng điều kiện (2.1), tương tự như trong Định lý 2.7, ta có:

$$\|x - y_0\| \leq \frac{\delta}{\gamma} \|x^g - y_0\|, \quad \forall x \in L^\varepsilon(y_0).$$

Do đó $L^\varepsilon(y_0)$ bị chặn.

(b) dựa vào phần (a), đối với mọi $\varepsilon > 0$, tập nghiệm của $SEP(K, f_\varepsilon)$ là compact và khác rỗng. Do đó, tồn tại $x(\varepsilon), y(\varepsilon) \in SEP(K, f_\varepsilon)$ sao cho:

$$\|x(\varepsilon) - y(\varepsilon)\| = \text{diam}SEP(K, f_\varepsilon).$$

Theo kết luận cuối cùng của Định lý 2.7 có:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} x(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} y(\varepsilon) = x^*.$$

Do đó:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \text{diam}SEP(K, f_\varepsilon) = 0. \quad \square$$

2.3 Ứng dụng cho bất đẳng thức biến phân giả đơn điệu đa trị

Chúng ta nhớ lại rằng một ánh xạ đa trị $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ với $K \subseteq \text{dom}\phi$, được gọi là:

(a) Đơn điệu mạnh trên K với hệ số γ nếu:

$$\langle u - v, x - y \rangle \geq \gamma \|x - y\|^2, \quad \forall x, y \in K, \quad \forall u \in \phi(x), \quad \forall v \in \phi(y);$$

(b) Đơn điệu trên K nếu:

$$\langle u - v, x - y \rangle \geq 0, \quad \forall x, y \in K, \quad \forall u \in \phi(x), \quad \forall v \in \phi(y);$$

(c) Giả đơn điệu trên K nếu:

$$\langle u, x - y \rangle \leq 0 \Rightarrow \langle v, y - x \rangle \geq 0, \quad \forall x, y \in K, \quad \forall u \in \phi(x), \quad \forall v \in \phi(y);$$

Xét bài toán bất đẳng thức biến phân đa trị sau đây:

$$VI(K, F) \begin{cases} \text{Tìm } x^* \in K, & v^* \in F(x^*) \text{ sao cho} \\ \langle v^*, x - x^* \rangle \geq 0, & \forall x \in K. \end{cases}$$

trong đó $F : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ với $K \subseteq \text{dom} F$.

Như thường lệ chúng ta nói bài toán $VI(K, F)$ thỏa mãn tính bức nếu điều kiện sau đây thỏa mãn:

(CO): Tồn tại tập compact B và $y_0 \in K \cap B$ sao cho:

$$\sup_{u \in F(x)} \langle u, y_0 - x \rangle < 0, \quad \forall x \in K \setminus B.$$

Giả sử rằng:

$$f(x, y) := \sup_{u \in F(x)} \langle u, y - x \rangle. \quad (2.12)$$

Có thể nhận thấy rằng bất kỳ nghiệm của bài toán $VI(K, F)$ cũng là nghiệm của bài toán $EP(K, f)$ với f được xác định bởi (2.12). Điều ngược lại là đúng nếu F có các giá trị lồi và compact.

Bây giờ giả sử rằng, F là nửa liên tục trên trên K và đơn điệu, $F(x)$ là tập compact, và lồi với mọi $x \in K$. Theo định lý cực đại của Berge ta thấy rằng $f(., y)$ là nửa liên tục trên. Hơn nữa, khi x cố định $x \in K$, song hàm $f(x, .)$ là cực đại của một họ song hàm afin, do đó nó là một hàm lồi nửa liên tục dưới. Vậy f thỏa mãn giả thiết $(A_1) \& (A_2)$. Ta thấy rằng, f là đơn điệu trên K nếu và chỉ nếu F là đơn điệu trên K . Thật vậy, do:

$$f(x, y) = \max_{u \in F(x)} \langle u, y - x \rangle.$$

và:

$$f(y, x) = \max_{v \in F(y)} \langle v, x - y \rangle,$$

vì $F(x)$ và $F(y)$ compact, ta có:

$$f(x, y) = \langle u, y - x \rangle, \text{ với } u \in F(x),$$

và:

$$f(y, x) = \langle v, x - y \rangle, \text{ với } v \in F(y),$$

do đó:

$$f(x, y) + f(y, x) = \langle u - v, y - x \rangle, \quad \forall x, y \in K,$$

do đó:

$$f(x, y) + f(y, x) \leq 0 \Leftrightarrow \langle u - v, x - y \rangle \geq 0, \quad \forall x, y \in K.$$

Tương tự như vậy chúng ta có thể thấy rằng f là đơn điệu mạnh nếu và chỉ nếu F đơn điệu mạnh.

Bây giờ áp dụng hiệu chỉnh Tikhonov với song hàm hiệu chỉnh

$g(x, y) = \langle x - x^g, y - x \rangle$ với $\varepsilon > 0$, chúng ta có:

$$F_\varepsilon(x) := F(x) + \varepsilon(x - x^g),$$

và:

$$f_\varepsilon(x, y) := \max_{u \in F_\varepsilon(x)} \langle u, y - x \rangle.$$

Cũng như trên, x^g được coi là một nghiệm được dự đoán trước. Đặt

$$F_\varepsilon(x) := F(x) + \varepsilon(x - x^g).$$

Chúng ta có thể viết:

$$\begin{aligned} f_\varepsilon(x, y) &:= \max_{u \in F_\varepsilon(x)} \langle u, y - x \rangle \\ &= \max_{v \in F(x)} \langle v, y - x \rangle + \varepsilon \langle x - x^g, y - x \rangle \\ &= \langle w + \varepsilon(x - x^g), y - x \rangle, \end{aligned}$$

trong đó $w \in F(x)$, sao cho $\max_{v \in F(x)} \langle v, y - x \rangle = \langle w, y - x \rangle$. Do đó:

$$f_\varepsilon(x, y) = f(x, y) + \varepsilon \langle x - x^g, y - x \rangle,$$

với:

$$f(x, y) := \max_{v \in F(x)} \langle v, y - x \rangle.$$

Trong trường hợp này, bài toán bất đẳng thức biến phân hiệu chỉnh có dạng như sau:

$$VI(K, F_\varepsilon) \begin{cases} \text{Tìm } x^* \in K, & v^* \in F_\varepsilon(x^*) \quad \text{sao cho} \\ \langle v^*, x - x^* \rangle \geq 0, & \forall x \in K. \end{cases}$$

Từ những phân tích trên, chúng ta có thể áp dụng Định lý 2.6 và 2.7 cho bài toán $VI(K, F)$ để có được hiệu chỉnh Tikhonov cho bài toán bất đẳng thức biến phân và thu được kết quả sau:

Hệ quả 2.4. Giả sử F là một nửa liên tục trên, giả đơn điệu với các giá trị compact, đóng, lồi, khác rỗng trên K . Khi đó ta có các điều kiện sau là tương đương:

- (a) Với mọi $\varepsilon > 0$, bài toán $VI(K, F_\varepsilon)$ có nghiệm và tồn tại $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} x(\varepsilon)$, trong đó $x(\varepsilon)$ là một nghiệm tùy ý của $VI(K, F_\varepsilon)$.
- (b) Với mọi $\varepsilon > 0$, bài toán $VI(K, F_\varepsilon)$ có nghiệm và $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sup \|x(\varepsilon)\| < \infty$, trong đó $x(\varepsilon)$ là một nghiệm tùy ý của $VI(K, F_\varepsilon)$.
- (c) $VI(K, F)$ có nghiệm.

Kết luận chung

Trong luận văn chúng ta đã đề cập đến các vấn đề sau:

- *Giới thiệu bài toán cân bằng bao gồm các tính chất cơ bản về sự tồn tại nghiệm, tính duy nhất nghiệm của các bài toán liên quan như bài toán tối ưu, bất đẳng thức biến phân, bài toán điểm bất động Kakutani, cân bằng Nash trong trò chơi không hợp tác, bài toán điểm yên ngựa. Trình bày nguyên lý bài toán phụ để giải bài toán cân bằng.*
- *Trình bày chi tiết về phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov cho bài toán cân bằng đơn điệu và giả đơn điệu đồng thời nói về việc áp dụng dụng của phương pháp này cho bài toán bất đẳng thức biến phân đa trị với toán tử giả đơn điệu.*

Do còn nhiều hạn chế về kiến thức và kinh nghiệm nghiên cứu khoa học nên luận văn này chắc chắn không tránh khỏi những thiếu sót về nội dung cũng như trình bày. Rất mong nhận được sự phê bình, đánh giá và ý kiến đóng góp quý báu của các thầy, cô. Xin chân thành cảm ơn!

Tài liệu tham khảo

- [1] N. I. Akhiezer, I. M. Glazman, (1993) , Theory of Linear Operators in Hilbert Space, *Dover Publication, New York*.
- [2] E. Blum, W. Oettli, From optimization and variational inequalities to equilibrium problems, *Math. Student* 62 (1994) 127 – 169.
- [3] N. Hadjisavvas, S. Komlosi, S. Schaible, (2005), Handbook of Generalized Convexity and Generalized Monotonicity, *Springer*.
- [4] P. G. Hung, L. D. Muu, The Tikhonov regularization extended to equilibrium problems involving pseudomonotone bifunctions, *Nonlinear Analysis* 74 (2011) 6121 – 6129.
- [5] I. V. Konnov, Application of the proximal point method to nonmonotone equilibrium problems, *J. Optim. Theory Appl.* 119 (2003) 317 – 333.
- [6] I. V. Konov, (2001), Combined Relaxation Methods for Variational Inequalities, *Springer*.
- [7] I. V. Konnov, Regularization methods for nonmonotone equilibrium problems, *J. Nonlinear Convex Anal.* 10 (2009) 93 – 101.
- [8] L. D. Muu, T. D. Quoc, Regularization algorithms for solving monotone Ky Fan inequalities with application to a Nash-Cournot Equilibria Model, *J. Optimization Theory and Application (to appear)* 142 (2009) 185 – 204.

- [9] L. D. Muu, N. V. Quy, V.H. Nguyen, On Nash-Cournot oligopolistic market equilibrium models with concave cost functions, *J.Global Optim.* 41 (2007) 351 – 364.
- [10] L. D. Muu, W. Oettli, Convergence of an adaptive penalty scheme for finding constrained equilibria, *Nonlinear Anal. TMA* 18 (1992) 1159 – 1166.
- [11] R. T. Rockafellar, (1972), Convex Analysis, *Princeton university press*, New Jersey.