
TOÁN HỌC VÀ NGHỆ THUẬT

Khi nói tới nghệ thuật tôi thường nói với mọi người rằng "Tôi chưa bao giờ giỏi về vẽ hay là một điều tương tự như thế". Nhưng tôi hy vọng mọi người không nghĩ rằng vì không giỏi nên tôi ruồng bỏ nghệ thuật. Thực tế tôi rất hiểu giá trị của hội họa, điêu khắc và tất cả các loại hình nghệ thuật. Tôi nhận ra rằng: một ai đó không có năng khiếu về nghệ thuật vẫn có thể cảm nhận được nó.

Và khi tôi nói với ai đó rằng tôi học toán, họ thường đáp lại là "Tôi chưa bao giờ có thể hiểu rõ ý nghĩa của toán học". Nhiều người cho rằng cuộc sống của mình vẫn tốt đẹp nếu không thật sự giỏi toán, nhưng tôi vẫn hy vọng rằng điều đó không có nghĩa là họ gạt bỏ toán học ra khỏi cuộc sống của họ. Trong bài này tôi muốn trình bày hai vấn đề: thứ nhất là về vẻ đẹp của toán học, thứ hai là ai đó không có năng khiếu đặc biệt như các nhà toán học¹ thì vẫn có thể cảm nhận được nó. Nếu tôi có thể làm cho các bạn tin hai vấn đề trên, thì chắc các bạn cũng thấy có một chút ham muốn được tiếp thu toán học một cách sâu sắc cũng như tôi đã tiếp thu nghệ thuật một cách sâu sắc (mặc dù tôi không thực sự giỏi về nghệ thuật). Chừng nào còn cho rằng không phải là nhà toán học thì không thể cảm nhận được vẻ đẹp của toán học như là một nhà toán học có thể, thì tôi còn nghi ngờ tại sao tôi có thể cảm nhận được bức tranh tốt như là một họa sĩ có thể. Điều quan trọng ở đây là tôi có thể cảm nhận được bức tranh ở một mức độ nào đó.

Không thể bàn cãi rằng các nhà toán học nhận thấy toán học rất đẹp. Trong thực tế, đối với một vài người, vẻ đẹp chính là lí do để họ làm toán. Paul Erdos đã nói "Tôi biết các con số rất đẹp, nếu chúng không đẹp, không có gì là đẹp cả". P.R.Halmos viết "Toán học là nghệ thuật bởi vì các nhà toán học tạo ra các vẻ đẹp... bởi vì các nhà toán học sống, làm việc và suy nghĩ như các nghệ sỹ".

Tuy biết rằng hiểu biết của mình còn nông cạn nhưng tôi vẫn muốn gửi gắm một vài điều về vẻ đẹp. Hãy để tôi miêu tả cách mà tôi nhận thấy toán học đẹp, cũng tương tự như đối với âm nhạc. Một tác phẩm âm nhạc hay do nhiều lí do, có khi là vì giai điệu của nó hay nhưng có khi nó hay vì một khía cạnh đặc biệt khác. Cũng tương tự đối với toán học. Ví dụ như một lời giải thích tài tình làm cho tôi thấy được mặt khác của vấn đề, thậm chí còn tìm thấy một phương pháp mới, một cách mới để tiếp cận và nhìn nhận vấn đề. Lời giải thích

¹ Trong bài này ta hiểu "nhà toán học" là tất cả những người có năng khiếu về toán và đang trên con đường nghiên cứu toán chứ không chỉ nói đến những nhà toán học thực thụ.

này làm cho vấn đề mang một ý nghĩa mới, biểu thị cách giải quyết đơn giản đến ngạc nhiên và sự khai sáng mà toán học gây ra làm cho nó đẹp.

Đây là một ví dụ cho vẻ đẹp đó. Năm trước, giải bóng đá có 64 đội, thể thức thi đấu của giải là đấu loại trực tiếp. Các đội được chia thành các cặp để thi đấu vòng một, và 32 đội thắng sẽ vào vòng hai. 32 đội đó lại chia cặp để thi đấu, và các đội thắng lại vào vòng ba, và cứ như thế, đến khi nào chỉ còn lại một đội, đội vô địch. Có bao nhiêu trận đấu đã diễn ra trong giải đấu? Thật là đơn giản để tính: 32 trận trong vòng một, 32 đội chơi 16 trận trong vòng hai,... Vậy tổng cộng có $32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 63$ trận. Có 63 trận đấu tất cả. Chúng ta thử nghĩ xem số trận đấu là 63 có quan hệ gì với số đội tham gia là 64?

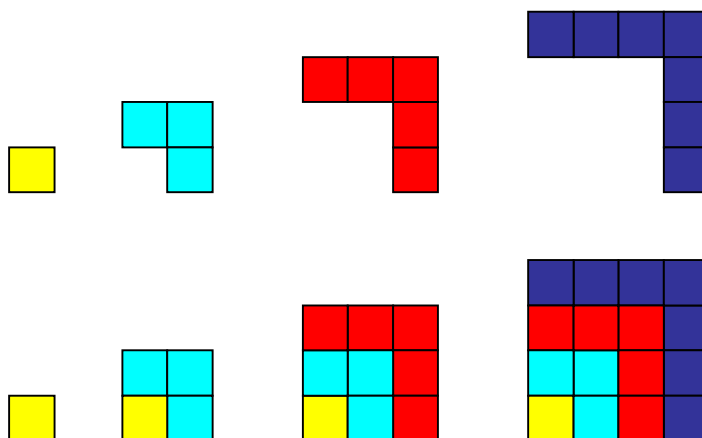
Sang năm sau, giải đấu có thêm một đội bóng, tức là có 65 đội. Trong vòng một, 64 đội trong các đội đấu 32 trận, và 1 đội may mắn được vào thẳng vòng hai. Sau vòng một, có 32 đội thắng cộng với 1 đội vào thẳng, tổng cộng có 33 đội. Một lần nữa, đội nào đó lại may mắn được vào thẳng vòng ba, còn 32 đội còn lại thì thi đấu 16 trận. Cứ tiếp tục như thế, đến khi còn lại một đội. Nếu chúng ta cộng tổng số các trận đấu (32 trận vòng một, 16 trận vòng hai,...), ta có $32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1 + 1 = 64$ trận (nếu không tin bạn có thể tự kiểm tra lại quá trình trên). Trong cả hai giải đấu, số trận đấu luôn nhỏ hơn 1 so với số đội tham gia. Tại sao? Cách mà chúng ta tìm ra số trận là hơi dài (cộng tổng số tất cả các trận trong mỗi vòng) là cách không đẹp, nó không giải thích được tại sao kết quả lại luôn như vậy.

Đây mới là một lời giải thích đẹp. Các đội thi đấu cho đến khi thua một trận, và sau đó dừng lại, không thi đấu một trận nào nữa. Trừ đội vô địch, các đội còn lại thua đúng một trận. Do mỗi trận có đúng một đội thua, tổng số các trận bằng tổng số các đội thua, tức là số các đội bị loại khỏi giải đấu. Vỡ ta dễ thấy số trận luôn ít hơn 1 so với số đội. Cách lý giải thật là đẹp. Nó thật sự giải thích cho chúng ta biết tại sao số trận luôn ít hơn 1 so với số đội tham gia giải đấu. Nếu các bạn không tin tôi, các bạn hãy thử với 653 đội. Hãy thật cẩn thận, và kiểm tra xem có phải kết quả là $326 + 163 + 82 + 41 + 20 + 10 + 5 + 3 + 1 + 1 = 652$. Và với cách giải thích như trên, ta có thể tính nhanh ngay là $653 - 1 = 652$ trận. Lời lý giải cho chúng ta thấy một cách khác để nhìn nhận vấn đề, một lời giải thích thật cô đọng, không thể ngờ tới và thật là đẹp.

Toán học, cũng như âm nhạc, có thể đẹp theo một cách khác sâu sắc hơn. Một bản giao hưởng gồm vài chương, mỗi chương lại được chia thành các phần. Nhưng các phần này lại được liên kết với nhau bởi một điều gì đó (do hiểu biết của mình về âm nhạc còn có hạn nên tôi cũng không dám nói sâu về sự liên kết này). Đôi khi cái hay lại chính là ở sự liên kết các phần đó với nhau. Toán học

cũng được chia thành từng mảng. Từng mảng này cũng được liên kết với nhau , nhiều khi chúng ta chẳng quan tâm tới sự liên kết đó, nhưng tôi chắc chắn là các bạn sẽ rất bất ngờ khi nhận ra điều đó. Phụ đề của bài luận này cho ta một ví dụ về vẻ đẹp ấy.

Bây giờ tôi sẽ chia sẻ thêm với các bạn một ví dụ nhỏ khác về vẻ đẹp của toán học. Cộng hai số lẻ đầu tiên là 1 và 3, và chúng ta có $1 + 3 = 4$. Bây giờ, cộng tổng của 3 số lẻ đầu tiên, $1 + 3 + 5 = 9$. Cứ như thế, chúng ta được $1 + 3 + 5 + 7 = 16$ và $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$. Bạn có nhận xét gì về các số 4, 9, 16 và 25? Chúng đều là các số chính phương, tức là $4 = 2^2, 9 = 3^2, 16 = 4^2, 25 = 5^2$. Thử với n số lẻ đầu tiên, n bất kỳ, và tổng của chúng luôn là số chính phương. Ví dụ $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 = 100$ hay 10^2 . Tại sao luôn như vậy? Những hình dưới đây sẽ là một lời giải thích tốt.



Hàng trên, mỗi khối L chứa số lẻ các ô vuông (1, 3, 5 và 7 theo thứ tự từ trái qua phải); ở hàng dưới từ trái qua phải, ta có hợp của một khối L (tức là một ô vuông), 2 khối L, 3 khối L và 4 khối L. Mỗi lần, chúng có dạng một hình vuông! Ví dụ, ở bên phải hàng dưới, hợp của các khối L với số ô vuông là 1, 3, 5 và 7 là hình vuông 4×4 , và số ô vuông của hình vuông là 4^2 nên $1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$! Chúng ta có thể làm như vậy với n số lẻ đầu tiên, với n bất kỳ, và các bạn có thể thấy là hợp của n khối L luôn là một hình vuông với n^2 ô vuông trong đó. Đây là một ví dụ ngắn gọn để thấy được vẻ đẹp của toán học. Có thể có

các ví dụ dài hơn, kiến thức sâu hơn, nhưng đôi khi đơn giản, ngắn gọn và dễ hiểu mới là vẻ đẹp!

Nếu bạn không phải là một nhà toán học, bạn có thể thắc mắc “Tôi có thể tìm thấy vẻ đẹp của toán học được không?”. Thật ra câu hỏi này là rất khó, tôi không thể khẳng định là có một câu trả lời hoàn chỉnh, nhưng tôi tin rằng một ai đó không có năng khiếu đặc biệt về toán vẫn có thể tìm thấy vẻ đẹp trong đó. Tương tự như tôi, một lần nữa tôi nhắc lại, đối với âm nhạc. Tôi không có một chút khả năng nào để sáng tác âm nhạc, nhưng tôi vẫn có khả năng để cảm nhận nó. Có thể tôi không thể cảm nhận nó thực sự nhiều như các nghệ sĩ, nhưng tôi vẫn tìm thấy đủ vẻ đẹp để tôi đến các buổi biểu diễn. Một điều tương tự cũng đúng với toán học và những người không phải là nhà toán học.

Một vấn đề là, bạn phải làm quen với toán học ở một mức độ nào đó mới có thể cảm nhận được nó. Bạn không thể chơi bản nhạc giao hưởng của Beethoven cho một ai đó chưa bao giờ nghe nhạc cổ điển và hy vọng người đó thấy nó hay. Trước hết người đó phải quen với việc thường xuyên nghe những bản nhạc hay thậm chí lắng nghe ai đó giảng giải tại sao chúng hay. Để cảm nhận âm nhạc, bạn phải biết một vài điều về giai điệu và thế nào là một giai điệu hay (có thể chỉ đến mức độ bằng trực giác), bạn phải cảm nhận được thế nào là sự hoà âm tốt. Bạn phải rèn luyện cả đôi tai và trí óc để cảm nhận được nó, thấy bằng cách nào mà âm nhạc lại hài hoà như vậy. Cách duy nhất để rèn luyện là nghe nhạc. Nếu thiếu những kỹ năng này, người nghe chẳng có gì để phát triển khả năng cảm thụ âm nhạc của mình.

Bạn cũng không thể hy vọng có điều gì hơn ở toán học. Bạn phải thấy rằng toán học được giải quyết là để mọi người phát triển khả năng cảm nhận nó. Trong thực tế, bạn cần quan sát kỹ vẻ đẹp của toán học để phát triển sự cảm nhận (đôi khi chỉ bằng trực giác) về cái gì trong toán học làm cho nó đẹp. Cách tốt nhất là phải có ai đó tách rời vẻ đẹp của toán học ra khỏi những điều tầm thường nhạt nhẽo cho bạn, chứ không chỉ nói “Toán học rất đẹp”. Không phải tất cả những gì thuộc về toán học cũng đẹp cả, vẻ đẹp cũng có thể bị quên lãng. Để giữ được vẻ đẹp điều cần thiết là phải tách riêng chúng ra. Từ nhỏ chúng ta đã được dạy rằng âm nhạc rất hay. Không may, với nhiều người, có thể đây là lần đầu tiên họ được nghe về vẻ đẹp của toán học.

Một vấn đề thật đơn giản là những cảm nhận về thẩm mỹ cần phải có sự tìm hiểu. Bạn không thể thực sự cảm nhận được dù chỉ một phần nhỏ của âm nhạc mà không suy nghĩ về nó. Sự tìm hiểu là rất cần để hiểu bản nhạc một cách toàn diện, bằng cách nào mà mọi thứ lại hoà lại làm một? Nếu thiếu những điều đó thì âm nhạc cũng chỉ hơn giai điệu lôi cuốn một chút thôi. Toán học cũng như

vậy, và có thể còn hơn nữa, bởi vì toán học rất cần sự vận dụng trí óc. Để cảm nhận toán học, dù ở mức độ nào, cũng cần phải tư duy. Nhưng một lần nữa tôi nhắc lại, tôi không có khả năng sáng tác nhạc mà vẫn cảm nhận được âm nhạc. Nên cũng không nhất thiết phải có năng khiếu đặc biệt về toán mới có thể cảm nhận được nó, miễn là bạn có hứng thú.

Một lần nữa, tôi khẳng định, không phải là nhà toán học vẫn có thể cảm nhận được vẻ đẹp của toán học. Vấn đề duy nhất là sự cảm nhận ấy đến mức độ nào thôi. Phần lớn toán học hiện đại rất rắc rối và khó hiểu, khó cảm nhận. Nếu không có năng khiếu, không học tập và nghiên cứu thì bạn không thể hiểu nổi nó chứ chưa nói đến việc cảm nhận về vẻ đẹp của nó. Cũng như vậy với âm nhạc, phần lớn âm nhạc hiện đại trở nên khó hiểu và ít hay hơn đối với những người không có chuyên môn. Dường như nghệ thuật chỉ dành cho các nghệ sỹ. Tuy vậy ngày nay đã có những tác phẩm nghệ thuật được làm ra để mọi người có thể hiểu được, cảm nhận được, toán học cũng như vậy. Nhưng có một sự khác nhau là, những tác phẩm âm nhạc dù đã có hàng trăm năm tuổi nhưng vẫn là những tác phẩm bất hủ, trong khi một vài vấn đề toán học lâu đời đã trở nên qua quen thuộc và bình thường.

Để kết thúc bài luận này, có hai vấn đề thật rõ ràng: thứ nhất, toán học mang tính thẩm mỹ cao. Và thứ hai là ngay cả những người không làm toán tốt vẫn có thể cảm nhận được vẻ đẹp của toán học. Bất kỳ ai thích âm nhạc, hội họa hay văn học đều thừa nhận là vẻ đẹp của chúng làm phong phú thêm cuộc sống của họ. Toán học cũng như vậy, nó cũng làm cho cuộc sống của tôi thêm phong phú rất nhiều. Và tôi nghĩ nó cũng có thể làm phong phú thêm cuộc sống của bạn miễn là bạn quan tâm tới nó cho dù bạn không có năng khiếu đặc biệt về toán. Nếu bạn bỏ thời gian để tìm hiểu về vẻ đẹp của toán học thì bạn mất đi chẳng bao nhiêu mà lại được rất nhiều.

Phụ đề:

Phương trình:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Phương trình trên đúng, nhưng tại sao nó đẹp? Ta hãy tìm hiểu từng con số trong phương trình trên.

0: Cộng 0 vào bất kỳ số nào và ta luôn nhận được số ban đầu. Đôi khi nó có nghĩa là “không là gì cả”.

1: Nhân một số với 1 và ta luôn nhận được số ban đầu. Nó là số bạn phải biết khi bạn bắt đầu học tính toán.

π : Là tỷ số giữa chu vi của đường tròn và đường kính của nó, gần bằng 3,14. Nó là số cơ bản của hình học.

e : Nó là số mà bạn phải biết khi học phương pháp tính (đạo hàm của e^x là e^x , điều đó làm cho nó trở nên đặc biệt), nó gần bằng 2,718. Nó rất quan trọng trong phương pháp tính.

i : Nó là căn bậc hai của -1. Mặc dù thường được gọi là “ảo” nhưng nó vẫn rất quan trọng trong toán học.

Những số trên được xem là năm con số quan trọng nhất trong toán học. 0 và 1 là các số cơ bản của số học, π sinh ra từ hình học, e dùng trong phương pháp tính và i thậm chí không là “số thực” nhưng cả năm số lại hợp lại trong một phương trình đơn giản. Phương trình này liên kết các phần của toán học mà khi mới nhìn qua dường như không có sự liên hệ nào cả. Sự đơn giản đến giật mình của phương trình này lại một lần nữa khẳng định vẻ đẹp của toán học.