

ĐẠI HỌC HUẾ
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM
★

HUỲNH QUANG NHẬT MINH

**PHƯƠNG PHÁP PHÂN TÍCH
TỔNG CÁC BÌNH PHƯƠNG (S.O.S)
TRONG CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC**

Bộ môn : **Phương pháp dạy học Toán**

KHOÁ LUẬN TỐT NGHIỆP

Giáo viên hướng dẫn

TH.S GVC HOÀNG TRẦN

Huế, tháng 5 năm 2011

LỜI CẢM ƠN

Để hoàn thành khóa luận này, tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến Th.S Hoàng Tròn đã tận tình hướng dẫn tôi trong suốt thời gian nghiên cứu, hoàn thành khóa luận tốt nghiệp.

Tôi xin chân thành cảm ơn quý Thầy cô khoa Toán trường ĐHSP Huế, những người đã cho tôi kiến thức, quan tâm động viên, nhiệt tình giúp đỡ tôi trong suốt bốn năm học tập cũng như trong thời gian thực hiện đề tài.

Cuối cùng, tôi xin chân thành cảm ơn sự nhiệt tình của quý thầy cô, bạn bè và người thân đã động viên giúp đỡ tôi trong suốt thời gian hoàn thành khóa luận.

Xin chân thành cảm ơn!

Huế, tháng 5 năm 2011
Huỳnh Quang Nhật Minh

MỤC LỤC

Trang phụ bìa	i
Lời cảm ơn	ii
MỤC LỤC	1
MỞ ĐẦU	2
MỘT SỐ KÍ HIỆU DÙNG TRONG KHÓA LUẬN	4
1 PHƯƠNG PHÁP PHÂN TÍCH TỔNG CÁC BÌNH PHƯƠNG (S.O.S)	5
1.1 Bài toán mở đầu	5
1.2 Nội dung của phương pháp	8
1.3 Một số bài toán minh họa	10
2 BIỂU DIỄN CƠ SỞ CỦA PHƯƠNG PHÁP S.O.S VÀ CÁC KỸ THUẬT PHÂN TÍCH	15
2.1 Một số kiến thức chuẩn bị	15
2.2 Định lý về biểu diễn cơ sở của phương pháp	16
2.3 Thuật toán tìm biểu diễn cơ sở	17
2.4 Một số bài toán minh họa	20
2.5 Một kĩ thuật để tìm biểu diễn cơ sở	25
3 MỘT SỐ ỨNG DỤNG QUAN TRỌNG CỦA PHƯƠNG PHÁP PHÂN TÍCH TỔNG CÁC BÌNH PHƯƠNG (S.O.S)	30
3.1 Ứng dụng trong bài toán chứng minh bất đẳng thức	30
3.2 Ứng dụng trong sáng tạo bất đẳng thức	36
KẾT LUẬN	40
TÀI LIỆU THAM KHẢO	42

MỞ ĐẦU

Bất đẳng thức là một trong những chủ đề gây nhiều khó khăn cho người làm toán. Tuy nhiên bất đẳng thức cũng có sức hấp dẫn rất lớn bởi những điều thú vị và bổ ích mà nó mang lại. Bên cạnh những phương pháp chứng minh bất đẳng thức truyền thống, ngày càng có nhiều phương pháp chứng minh bất đẳng thức mới rất đặc sắc. Tính ứng dụng của những phương pháp mới này cũng không kém so với các phương pháp truyền thống, thậm chí có nhiều phương pháp rất mạnh và có thể áp dụng đối với hầu hết các bất đẳng thức thuộc một lớp nào đó. Việc tìm hiểu và khám phá những phương pháp mới như thế mang một ý nghĩa sâu sắc. Một trong những phương pháp chứng minh bất đẳng thức khá mới mẻ chính là phương pháp phân tích tổng các bình phương S.O.S.

Tháng 8 năm 2004, Trần Phương cùng các cộng sự Trần Tuấn Anh và Trần Anh Cường đã phát minh ra phương pháp phân tích tổng các bình phương S.O.S để chứng minh bất đẳng thức. Đến năm 2006, phương pháp này được Phạm Kim Hùng nghiên cứu đầy đủ và chi tiết hơn. Tuy nhiên vẫn còn rất nhiều vấn đề mở liên quan đến phương pháp này.

Được sự hướng dẫn của thầy giáo Hoàng Tròn, chúng tôi chọn đề tài "Phương pháp phân tích tổng các bình phương (S.O.S) trong chứng minh bất đẳng thức" để nghiên cứu. Đến với phương pháp phân tích tổng các bình phương S.O.S, người đọc sẽ cảm nhận được một vẻ đẹp hết sức tự nhiên của toán học. Bằng những phép biến đổi cực kì sơ cấp, ta có thể tìm lời giải cho những bài toán thi quốc tế, những bài toán mà thông thường nếu dùng các phương pháp truyền thống thì rất dài dòng và phức tạp.

Khóa luận nhằm mục tiêu tìm hiểu, hệ thống hóa nội dung của phương pháp, tổng quan các kết quả liên quan đến phương pháp và giới thiệu một số kết quả mới mà bản thân tác giả đã đạt được. Khóa luận sẽ cố gắng trình bày phương pháp S.O.S một cách chi tiết với mục đích cung cấp cho người đọc thêm một phương pháp chứng minh bất đẳng thức mới. Qua đó, tác giả cũng mong muốn chuyển tải đến người đọc vẻ đẹp của phương pháp này.

Nội dung của khóa luận chia làm ba chương.

Chương một tập trung tìm hiểu và tổng quan nội dung của phương pháp phân tích tổng các bình phương S.O.S.

Chương hai tìm hiểu biểu diễn cơ sở của phương pháp và các kĩ thuật phân tích.

Chương ba khảo sát một số ứng dụng quan trọng của phương pháp.

MỘT SỐ KÍ HIỆU DÙNG TRONG KHÓA LUẬN

S.O.S: Sum of Square (tổng các bình phương).

IMO: International Mathematical Olympiad (kì thi Olympic toán quốc tế).

MO: Mathematical Olympiad (Olympic toán).

$\sum_{sym}$: tổng đối xứng. Ví dụ: $\sum_{sym} a^2b = a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + ca^2 + c^2a$;

Trong các bài toán ba biến ta có thể viết $\sum_{a,b,c}$ thay cho $\sum_{sym}$.

$\sum_{cyc}$: tổng hoán vị. Ví dụ: $\sum_{cyc} a^2b = a^2b + b^2c + c^2a$.

Chương 1

PHƯƠNG PHÁP PHÂN TÍCH TỔNG CÁC BÌNH PHƯƠNG (S.O.S)

1.1 Bài toán mở đầu

Thông thường khi đứng trước một bài toán bất đẳng thức quen biết, cách mà chúng ta bắt đầu để giải chúng không phải là thử mò mẫm từ các bất đẳng thức đã biết hay cố gắng áp dụng các bất đẳng thức phụ nào đó mà thường gặp nhất là đưa về các dạng tổng bình phương. Điều này dựa trên tính chất cơ bản của số thực là $x^2 \geq 0$ với mọi số thực x . Có rất nhiều bài toán, dù chủ động hay vô tình, đều đã sử dụng phương pháp này trong chứng minh. Tuy nhiên những ứng dụng rất mạnh của phương pháp này sẽ khiến chúng ta phải ngạc nhiên. Thật khó mà tưởng tượng được nó có ứng dụng với hầu hết các bất đẳng thức 3 biến!!! Những điều sắp được trình bày dưới đây ít nhiều sẽ khiến người đọc cảm thấy thú vị và ngạc nhiên về vẻ đẹp của phương pháp S.O.S, một phương pháp chứng minh bất đẳng thức rất mới và cũng rất tự nhiên.

Trước tiên, ta bắt đầu với bất đẳng thức Cauchy (hay còn gọi là bất đẳng thức $AM - GM$), đây được coi là bất đẳng thức cơ bản nhất trong những bất đẳng thức cơ bản. Ở đây ta xét bất đẳng thức Cauchy với các số n rất nhỏ, cụ thể là $n = 2, n = 3$.

Với $n = 2$ ta có bất đẳng thức $a^2 + b^2 \geq 2ab \quad \forall a, b \geq 0$.

Chứng minh bất đẳng thức trên là quá dễ! Bất đẳng thức tương đương với $(a - b)^2 \geq 0$, một điều quá hiển nhiên. Bây giờ ta xét tiếp bất đẳng thức Cauchy với 3 số không âm

Với mọi $a, b, c \geq 0$ ta có bất đẳng thức $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$.

Có nhiều cách để chứng minh bất đẳng thức trên, ở đây tác giả đề cập đến cách có minh họa phương pháp S.O.S.

Ta có

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2].$$

Những kỹ thuật để biến đổi $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ về dạng $\frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]$ sẽ được trình bày cụ thể trong mục "Biểu diễn cơ sở của phương pháp S.O.S". Ở đây ta quan tâm tới vẻ đẹp của lời giải. Thuận lợi rất lớn trong lời giải bài toán bằng cách này là việc sử dụng rất ít kiến thức cao cấp, thậm chí ta không cần đến bất kỳ một định lý về bất đẳng thức nào cả. Thật vậy, chỉ bằng một số phép biến đổi sơ cấp, ta có thể đưa biểu thức $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ về dạng tổng các bình phương. Nếu nắm vững các kỹ thuật để biểu diễn một biểu thức đối xứng 3 biến dưới dạng tổng các bình phương (biểu diễn cơ sở của phương pháp S.O.S) thì phương pháp S.O.S để chứng minh bất đẳng thức là một phương pháp rất tự nhiên theo suy nghĩ của bản thân tác giả.

Bây giờ ta sẽ khái quát cách sử dụng và đi tìm bản chất của một phương pháp chứng minh cực kỳ hiệu quả, phương pháp phân tích bình phương S.O.S.

Ta xét bài toán bất đẳng thức trong kỳ thi IMO 2005 và tìm 1 chứng minh thật tự nhiên cho nó.

Ví dụ 1.1.1. Giả sử x, y, z là các số thực dương và $xyz \geq 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{y^5 + z^2 + x^2} + \frac{z^5 - z^2}{z^5 + y^2 + x^2} \geq 0.$$

Chứng minh. Bằng phương pháp biến đổi tương đương ta có

$$\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \gamma} \geq \frac{\alpha - \beta \cdot \delta}{\alpha + \gamma \cdot \delta} \quad \text{với } \delta \geq 1;$$

Suy ra

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} \geq \frac{x^5 - x^2 \cdot xyz}{x^5 + (y^2 + z^2)xyz} = \frac{x^4 - x^2 yz}{x^4 + yz(y^2 + z^2)}.$$

Tương tự, cũng với phương pháp biến đổi tương đương ta chứng minh được

$$\frac{a - b \cdot c}{a + c \cdot d} \geq \frac{2a - b \cdot d}{2a + d^2} \quad \text{với } d \geq 2c;$$

Suy ra

$$\frac{x^4 - x^2 yz}{x^4 + yz(y^2 + z^2)} \geq \frac{2x^4 - x^2(y^2 + z^2)}{2x^4 + (y^2 + z^2)^2}.$$

Đặt $a = x^2, b = y^2, c = z^2$ ta cần chứng minh

$$\begin{aligned} \sum_{a,b,c} \frac{2a^2 - a(b+c)}{2a^2 + (b+c)^2} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{a,b,c} (a-b) \left(\frac{a}{2a^2 + (b+c)^2} - \frac{b}{2b^2 + (a+c)^2} \right) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{a,b,c} (a-b)^2 \frac{c^2 + c(a+b) + a^2 - ab + b^2}{(2a^2 + (b+c)^2)(2b^2 + (a+c)^2)} &\geq 0. \end{aligned}$$

(Mục "Biểu diễn cơ sở của phương pháp S.O.S" sẽ giúp ta có được các kỹ thuật biến đổi như trên.)

Bất đẳng thức cuối là đúng nên bất đẳng thức cần chứng minh là đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c \Leftrightarrow x = y = z = 1$. $\square$

Có thể có nhiều cách chứng minh bất đẳng thức trên và cũng có thể có nhiều cách chứng minh độc đáo hơn. Tuy nhiên, nếu ta xem xét một cách khách quan thì chứng minh trên là hoàn toàn rất tự nhiên và cơ bản. Nói một cách khái quát, khi đứng trước một bài toán bất đẳng thức bất kỳ của 3 biến a, b, c ta sẽ tìm cách đưa chúng về dạng tổng bình phương $(a-b)^2; (b-c)^2; (c-a)^2$, kí hiệu

$$S_c(a-b)^2 + S_b(c-a)^2 + S_a(b-c)^2 \geq 0.$$

Phần đưa về dạng chính tắc trên là bước đầu tiên trong cách sử dụng phương pháp S.O.S. Nếu ta đã khá quen với bất đẳng thức thì việc lập công thức trên là tương đối đơn giản, chỉ cần biết qua một số phép biến đổi và hằng đẳng thức, còn nếu chưa quen, thì các thắc mắc sẽ được giải quyết một cách trọn vẹn trong mục "Biểu diễn cơ sở của phương pháp S.O.S và một số kỹ thuật phân tích".

Tất nhiên, nếu trong biểu diễn cơ sở đó các hệ số S_a, S_b, S_c đều không âm thì bài toán được chứng minh. Từ trước tới nay, đây vẫn là cách mà các bạn thường làm nhưng đây chỉ là trường hợp đơn giản nhất trong kỹ thuật chứng minh của phương pháp S.O.S. Điều quan trọng hơn, S.O.S giúp chúng ta giải quyết trong các trường hợp mà theo quan niệm cũ là không áp dụng được: có một số hệ số trong S_a, S_b, S_c là không dương.

Thông thường, trong các bài toán đối xứng ta có thể giả sử $a \geq b \geq c$. Với các bài toán hoán vị thì ta phải xét thêm trường hợp $c \geq b \geq a$. Trong trường hợp $a \geq b \geq c$ ta có nhận xét sau

Nếu $S_b \geq 0$: Do $(a-c)^2 \geq (a-b)^2 + (b-c)^2$ nên

$$S_a(b-c)^2 + S_b(a-c)^2 + S_c(a-b)^2 \geq (S_c + S_b)(a-b)^2 + (S_b + S_a)(b-c)^2.$$

Và phần còn lại của bài toán là chứng minh $S_a + S_b \geq 0, S_c + S_b \geq 0$. Thông thường hai bất đẳng thức này luôn có thể chứng minh khá đơn giản, vì chúng không còn phải nhân thêm các bình phương $(a - b)^2, (b - c)^2, (c - a)^2$ nữa.

Nếu $S_b \leq 0$: Do $(a - c)^2 \leq 2(a - b)^2 + 2(b - c)^2$ nên

$$S_a(b - c)^2 + S_b(a - c)^2 + S_c(a - b)^2 \geq (S_c + 2S_b)(a - b)^2 + (2S_b + S_a)(b - c)^2.$$

Việc chứng minh còn lại $S_c + 2S_b \geq 0, S_a + 2S_b \geq 0$ sẽ đơn giản hơn rất nhiều.

Ngoài ra, nếu $S_a + S_b + S_c \geq 0, S_aS_b + S_bS_c + S_cS_a \geq 0$ thì theo định lý về dấu của tam thức bậc 2 cũng dễ dàng suy ra được:

$$S_a(b - c)^2 + S_b(a - c)^2 + S_c(a - b)^2 \geq 0.$$

Trong nhiều trường hợp ta cần thêm một số ước lượng mạnh hơn, chẳng hạn ước lượng hay dùng đến là:

$$\frac{a - c}{b - c} \geq \frac{a}{b} (a \geq b \geq c).$$

Chẳng hạn khi ta có $S_b, S_c \geq 0$ thì

$$S_b(a - c)^2 + S_a(b - c)^2 = (b - c)^2 \left(S_b \left(\frac{a - c}{b - c} \right)^2 + S_a \right) \geq (b - c)^2 \left(\frac{a^2 S_b}{b^2} + S_a \right).$$

Và như vậy bài toán sẽ được chứng minh nếu $a^2 S_b + b^2 S_a \geq 0$.

1.2 Nội dung của phương pháp

Ta có định lý quan trọng sau

Định lý 1.2.1. (định lý S.O.S) Xét biểu thức:

$$S = f(a, b, c) = S_a(b - c)^2 + S_b(a - c)^2 + S_c(a - b)^2$$

trong đó S_a, S_b, S_c là các hàm số của a, b, c ($a, b, c \geq 0$).

1. Nếu $S_a, S_b, S_c \geq 0$ thì $S \geq 0$.
2. Nếu $a \geq b \geq c$ và $S_b, S_b + S_c, S_b + S_a \geq 0$ thì $S \geq 0$.
3. Nếu $a \geq b \geq c$ và $S_b \leq 0, S_a + 2S_b, S_c + 2S_b \geq 0$ thì $S \geq 0$.
4. Nếu $a \geq b \geq c$ và $S_b, S_c, a^2 S_b + b^2 S_a \geq 0$ thì $S \geq 0$.
5. Nếu $S_a + S_b + S_c \geq 0$ và $S_a S_b + S_b S_c + S_c S_a \geq 0$ thì $S \geq 0$.

Tác giả Phạm Kim Hùng trong "Sáng tạo bất đẳng thức" đã nêu ra định lý này nhưng không chứng minh. Ở đây tôi xin đề cập một chứng minh như sau

Chứng minh. 1. Hiển nhiên.

$$\begin{aligned}
& 2. \text{ Do } a \geq b \geq c \text{ nên } 2(a-b)(b-c) \geq 0 \\
& \Leftrightarrow 2ab - 2ac - 2b^2 + 2bc \geq 0 \\
& \Leftrightarrow -2ac \geq 2b^2 - 2ab - 2bc \\
& \Leftrightarrow a^2 - 2ac + c^2 \geq 2b^2 + a^2 + c^2 - 2ab - 2bc \\
& \Leftrightarrow (a-c)^2 \geq (a-b)^2 + (b-c)^2.
\end{aligned}$$

Suy ra $S_b(a-c)^2 \geq S_b(a-b)^2 + S_b(b-c)^2$ (do $S_b \geq 0$)

Do đó $S_a(b-c)^2 + S_b(a-c)^2 + S_c(a-b)^2 \geq (S_b + S_c)(a-b)^2 + (S_b + S_a)(b-c)^2$

Do $S_b + S_c, S_b + S_a \geq 0$ nên $S \geq 0$.

3. Ta có:

$$\begin{aligned}
(a+c-2b)^2 \geq 0 & \Leftrightarrow a^2 + c^2 + 4b^2 - 4ab - 4bc + 2ac \geq 0 \\
& \Leftrightarrow a^2 + c^2 + 4b^2 - 4ab - 4bc \geq -2ac \\
& \Leftrightarrow 2a^2 + 2c^2 + 4b^2 - 4ab - 4bc \geq a^2 + c^2 - 2ac \\
& \Leftrightarrow 2(a-b)^2 + 2(b-c)^2 \geq (a-c)^2.
\end{aligned}$$

Do $S_b \leq 0$ nên $2S_b(a-b)^2 + 2S_b(b-c)^2 \leq S_b(a-c)^2$

Suy ra $S_a(b-c)^2 + S_b(a-c)^2 + S_c(a-b)^2 \geq (S_c + 2S_b)(a-b)^2 + (S_a + 2S_b)(b-c)^2$.

Mặt khác theo giả thiết ta có $S_c + 2S_b, S_a + 2S_b \geq 0$. Từ đó $S \geq 0$.

4. Từ $a \geq b \geq c$ ta suy ra

$$\begin{aligned}
(a-b)[ac(b-c) + bc(a-c)] \geq 0 & \Leftrightarrow (a-b)[2abc - (a+b)c^2] \geq 0 \\
& \Leftrightarrow c^2(b^2 - a^2) + 2abc(a-b) \geq 0 \\
& \Leftrightarrow b^2c^2 - a^2c^2 + 2a^2bc - 2ab^2c \geq 0 \\
& \Leftrightarrow a^2b^2 + b^2c^2 - 2ab^2c \geq a^2c^2 + a^2b^2 - 2a^2bc \\
& \Leftrightarrow b^2(a-c)^2 \geq a^2(b-c)^2(*).
\end{aligned}$$

Nếu $b = 0$ thì $c = 0$. Từ đó dễ dàng suy ra $S \geq 0$.

Nếu $b \neq 0$,

$$\begin{aligned}
(*) & \Leftrightarrow (a-c)^2 \geq \frac{a^2}{b^2}(b-c)^2 \\
& \Leftrightarrow S_b(a-c)^2 \geq \frac{S_b a^2}{b^2}(b-c)^2 (S_b \geq 0)
\end{aligned}$$

Suy ra $S_b(a-c)^2 + S_a(b-c)^2 \geq (b-c)^2 \left(\frac{S_b a^2}{b^2} + S_a \right)$.

Theo giả thiết $a^2S_b + b^2S_a \geq 0$ nên $S_b(a-c)^2 + S_a(b-c)^2 \geq (b-c)^2 \left(\frac{S_b a^2}{b^2} + S_a \right) \geq 0$
 Ngoài ra do $S_c \geq 0$ nên $S_c(a-b)^2 \geq 0$.

Từ đó $S \geq 0$.

5. Ta có $S = S_a(b-c)^2 + S_b(a-c)^2 + S_c(a-b)^2$.

Xem S như là một tam thức bậc hai theo biến a :

$$S = f(a) = (S_b + S_c)a^2 - 2(bS_c + cS_b)a + c^2S_b + b^2S_c + S_a(b-c)^2$$

$$\begin{aligned} \Delta' &= (bS_c + cS_b)^2 - (S_b + S_c)(c^2S_b + b^2S_c + S_a(b-c)^2) \\ &= -(S_aS_b + S_bS_c + S_cS_a)(b-c)^2. \end{aligned}$$

Theo giả thiết $S_aS_b + S_bS_c + S_cS_a \geq 0$ nên $\Delta' \leq 0$.

Suy ra $(S_b + S_c)f(a) \geq 0 \quad \forall a$ hay $(S_b + S_c)S \geq 0$.

Tương tự xem S như là một tam thức bậc 2 theo b , theo c thì ta lần lượt có $(S_c + S_a)S \geq 0$; $(S_a + S_b)S \geq 0$.

Suy ra $(2S_a + 2S_b + 2S_c)S \geq 0$.

Do $S_a + S_b + S_c \geq 0$ nên $S \geq 0$. Định lý được chứng minh xong. $\square$

Dường như định lý này còn có vẻ quá đơn giản và nếu nói rằng nó có ứng dụng với hầu hết các bất đẳng thức 3 biến thì thật khó mà tưởng tượng được. Nhưng thực tế là S.O.S đã làm được điều này!!!

Một câu hỏi nữa đặt ra là với những biểu thức nào thì ta có thể chuyển về dạng chính tắc S.O.S như vậy. Câu trả lời là mọi hàm số đối xứng $f(a, b, c)$ thỏa mãn $f(a, a, a) = 0$ (f có thể chứa căn thức, phân thức) luôn luôn có biểu diễn dạng S.O.S. Điều này sẽ được làm rõ ở mục tiếp theo. Sau đây ta thử tìm hiểu một vài áp dụng rất đẹp của S.O.S qua các ví dụ sau

1.3 Một số bài toán minh họa

Ví dụ 1.3.1. (Moldova MO 2006) Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh bất đẳng thức

$$a^2\left(\frac{b}{c} - 1\right) + b^2\left(\frac{c}{a} - 1\right) + c^2\left(\frac{a}{b} - 1\right) \geq 0.$$

Chứng minh. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$a^3b^2 + b^3c^2 + c^3a^2 \geq abc(a^2 + b^2 + c^2).$$

Ta có

$$\begin{aligned} & 2(a^3b^2 + b^3c^2 + c^3a^2) - 2abc(a^2 + b^2 + c^2) \\ &= a^3(b^2 - 2bc + c^2) + b^3(c^2 - 2ca + a^2) + c^3(a^2 - 2ab + b^2) + \\ & \quad - a^2(b^3 - c^3) - b^2(c^3 - a^3) - c^2(a^3 - b^3) \end{aligned}$$

Mặt khác ta có đẳng thức sau

$$a^2(b^3 - c^3) + b^2(c^3 - a^3) + c^2(a^3 - b^3) = a^2(b - c)^3 + b^2(c - a)^3 + c^2(a - b)^3.$$

Từ đó

$$\begin{aligned} & 2(a^3b^2 + b^3c^2 + c^3a^2) - 2abc(a^2 + b^2 + c^2) \\ &= a^3(b - c)^2 + b^3(c - a)^2 + c^3(a - b)^2 - a^2(b - c)^3 - b^2(c - a)^3 - c^2(a - b)^3 \\ &= a^2(b - c)^2(a - b + c) + b^2(c - a)^2(b - c + a) + c^2(a - b)^2(c - a + b) \\ &= S_a(b - c)^2 + S_b(c - a)^2 + S_c(a - b)^2 \end{aligned}$$

với

$$\begin{aligned} S_a &= a^2(a - b + c) \\ S_b &= b^2(b - c + a) \\ S_c &= c^2(c - a + b) \end{aligned}$$

Do a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác nên $S_a, S_b, S_c \geq 0$. Theo **tiêu chuẩn 1 (định lý 1.2.1)**, ta suy ra $2(a^3b^2 + b^3c^2 + c^3a^2) - 2abc(a^2 + b^2 + c^2) \geq 0$. Bài toán được chứng minh xong. $\square$

Ví dụ 1.3.2. Chứng minh rằng với mọi số thực không âm a, b, c ta luôn có:

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} + \frac{8abc}{(a + b)(b + c)(c + a)} \geq 2.$$

Chứng minh. Ta có

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca &= \frac{1}{2}[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2]. \\ (a + b)(b + c)(c + a) - 8abc &= a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + a^2c + ac^2 - 6abc \\ &= a^2b + c^2b - 2abc + ab^2 + ac^2 - 2abc \\ & \quad + b^2c + a^2c - 2abc \\ &= b(a - c)^2 + a(b - c)^2 + c(a - b)^2. \end{aligned}$$

Do đó sau khi thêm bớt 1 ở mỗi số hạng về trái, ta có bất đẳng thức tương đương

$$\frac{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}{ab+bc+ca} \geq \frac{2c(a-b)^2 + 2b(a-c)^2 + 2a(b-c)^2}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$\iff S_c(a-b)^2 + S_b(c-a)^2 + S_a(b-c)^2 \geq 0$$

với

$$S_c = \frac{1}{ab+bc+ca} - \frac{2c}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \frac{(ab+bc+ca)(c-a) + b^2(c+a)}{(ab+bc+ca)(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$S_b = \frac{1}{ab+bc+ca} - \frac{2b}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \frac{(ab+bc+ca)(a-b) + c^2(a+b)}{(ab+bc+ca)(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$S_a = \frac{1}{ab+bc+ca} - \frac{2a}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \frac{(ab+bc+ca)(b-c) + a^2(b+c)}{(ab+bc+ca)(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$. Khi đó $S_b, S_c \geq 0$. Dựa vào **tiêu chuẩn 2 (định lý 1.2.1)**, ta chỉ cần chứng minh $S_a + S_b \geq 0$ là xong.

Ta có

$$S_a + S_b = \frac{2c^2(a+b)}{(ab+bc+ca)(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 0.$$

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$ hoặc $a = b, c = 0$ hoặc các hoán vị tương ứng. $\square$

Ta tiếp tục với một bất đẳng thức có hình thức phát biểu rất đơn giản và đẹp mắt sau đây:

Ví dụ 1.3.3. (Iran MO 1996) Chứng minh rằng với các số thực không âm x, y, z ta có bất đẳng thức

$$\frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(y+z)^2} + \frac{1}{(z+x)^2} \geq \frac{9}{4(xy+yz+zx)}.$$

Chứng minh. Đặt $a = x + y, b = y + z, c = z + x$. Lúc đó $a, b, c \geq 0$ và bất đẳng thức đã cho trở thành

$$(2ab + 2bc + 2ca - a^2 - b^2 - c^2) \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) \geq \frac{9}{4}$$

$$\iff \left(\frac{2}{bc} - \frac{1}{a^2} \right) (b-c)^2 + \left(\frac{2}{ca} - \frac{1}{b^2} \right) (c-a)^2 + \left(\frac{2}{ab} - \frac{1}{c^2} \right) (a-b)^2 \geq 0.$$

Ta tìm được

$$S_a = \frac{2}{bc} - \frac{1}{a^2}; S_b = \frac{2}{ca} - \frac{1}{b^2}; S_c = \frac{2}{ab} - \frac{1}{c^2}.$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$. Lúc đó $S_a \geq 0$. Mặt khác xét

$$\begin{aligned} 2b^2 - ca &= 2(y+z)^2 - (x+y)(z+x) \\ &= 2y^2 + 2z^2 + 3yz - xz - x^2 - xy \\ &= y^2 - x^2 + y^2 - xy + 3yz - xz + 2z^2 \\ &= y^2 - x^2 + y(y-x) + z(3y-x) + 2z^2. \end{aligned}$$

Để ý rằng $a \geq b \geq c$ nên theo cách đặt ở trên ta có $y \geq x \geq z$. Từ đó dễ dàng suy ra $2b^2 - ca \geq 0$ hay $S_b \geq 0$. Sử dụng **tiêu chuẩn 4 (định lý 1.2.1)**, ta chỉ cần chứng minh $b^2S_b + c^2S_c \geq 0 \Leftrightarrow b^3 + c^3 \geq abc$, nhưng bất đẳng thức này hiển nhiên đúng vì theo cách đặt a, b, c ta có

$$a \leq b + c \Rightarrow b^3 + c^3 \geq bc(b + c) \geq abc.$$

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh. Bất đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$ hoặc $a = b, c = 0$ hoặc các hoán vị. $\square$

Có nhiều lời giải khác cho bài toán trên, cách thông thường mà chúng ta biết là sử dụng các bất đẳng thức phụ. Tuy nhiên tôi nghĩ rằng các phương pháp đó chỉ có ý nghĩa là chứng minh bất đẳng thức đúng về mặt toán học, chứ không để lại nhiều ấn tượng hay mở rộng.

Ví dụ 1.3.4. Cho $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$ là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$3\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) \geq (a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

Chứng minh. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$3(a^2c + b^2a + c^2b) \geq (a + b + c)(ab + bc + ca). \quad (1)$$

Ta có

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow 2(a^2c + b^2a + c^2b) \geq (a^2b + b^2c + c^2a) + 3abc \\ &\Leftrightarrow 2[(a^3 + b^3 + c^3) - (a^2c + b^2a + c^2b)] \leq (a^3 + b^3 + c^3) - (a^2b + b^2c + c^2a) \\ &\quad + (a^3 + b^3 + c^3) - 3abc. \quad (2) \end{aligned}$$

Mặt khác

$$\begin{aligned} 2b^3 + a^3 - 3b^2a &= (b - a)(2b^2 - ba - a^2) = (b - a)^2(2b + a) \\ 2c^3 + b^3 - 3c^2b &= (c - b)(2c^2 - cb - b^2) = (c - b)^2(2c + b) \\ 2a^3 + c^3 - 3a^2c &= (a - c)(2a^2 - ac - c^2) = (a - c)^2(2a + c). \end{aligned}$$

Cộng vế theo vế 3 đẳng thức trên ta được

$$3[(a^3 + b^3 + c^3) - (a^2c + b^2a + c^2b)] = (a - b)^2(2b + a) + (b - c)^2(2c + b) + (c - a)^2(2a + c).$$

Tương tự

$$3[(a^3 + b^3 + c^3) - (a^2b + b^2c + c^2a)] = (a - b)^2(2a + b) + (b - c)^2(2b + c) + (c - a)^2(2c + a).$$

Ngoài ra

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a + b + c)[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2].$$

Do đó

$$\begin{aligned} (2) &\Leftrightarrow \frac{2}{3} \sum_{cyc} (2b + a)(a - b)^2 \leq \frac{1}{3} \sum_{cyc} (2a + b)(a - b)^2 + \frac{1}{2} \sum_{cyc} (a + b + c)(a - b)^2 \\ &\Leftrightarrow \sum_{cyc} (a - b)^2 \left[\frac{1}{3}(2a + b) + \frac{1}{2}(a + b + c) - \frac{2}{3}(2b + a) \right] \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2} \sum_{cyc} (c + a - b)(a - b)^2 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (c + a - b)(a - b)^2 + (a + b - c)(b - c)^2 + (b + c - a)(c - a)^2 \geq 0. \quad (3) \end{aligned}$$

Đặt $S_a = a + b - c$; $S_b = b + c - a$; $S_c = c + a - b$.

Ta có $S_a + S_b + S_c = a + b + c > 0$. Mặt khác ta có

$$\begin{aligned} &S_a S_b + S_b S_c + S_c S_a \\ &= (a + b - c)(b + c - a) + (b + c - a)(c + a - b) + (c + a - b)(a + b - c) \\ &= b^2 - (c - a)^2 + c^2 - (a - b)^2 + a^2 - (b - c)^2 \\ &= 2(ab + bc + ca) - (a^2 + b^2 + c^2) \\ &= 4ab - (a + b - c)^2 = (2\sqrt{ab} + a + b - c)(2\sqrt{ab} - a - b + c) \\ &= (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})(\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c})(\sqrt{b} + \sqrt{c} - \sqrt{a})(\sqrt{c} + \sqrt{a} - \sqrt{b}). \end{aligned}$$

Do $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$ là độ dài 3 cạnh của một tam giác nên $S_a S_b + S_b S_c + S_c S_a > 0$.

Theo **tiêu chuẩn 5 (định lý 1.2.1)** ta suy ra (3) đúng. Do (1) $\Leftrightarrow$ (3) nên (1) đúng. Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh. $\square$

Bây giờ chúng ta hãy khảo sát định lý về biểu diễn cơ sở của phương pháp S.O.S để có thêm một số kỹ thuật đưa về dạng S.O.S.

Chương 2

BIỂU DIỄN CƠ SỞ CỦA PHƯƠNG PHÁP S.O.S VÀ CÁC KỸ THUẬT PHÂN TÍCH

Để khẳng định niềm tin của chúng ta về sự tồn tại một biểu diễn cơ sở cho phương pháp S.O.S ta cần một chứng minh cụ thể cho lớp các hàm đa thức, phân thức chứa các lũy thừa hữu tỉ (nói cách khác, có thể chứa căn thức). Ngoài ra, nếu không có gì thay đổi, chúng ta chỉ xét bài toán trong trường hợp các biến số không âm. Trong các bài toán được dẫn ra ở các mục trước đã xuất hiện nhiều lần biểu diễn dạng $F(a, b, c) = S_a(b - c)^2 + S_b(c - a)^2 + S_c(a - b)^2$. Các định lý dưới đây sẽ cho thấy sự tồn tại của biểu diễn đó.

2.1 Một số kiến thức chuẩn bị

Trước hết ta có các định nghĩa

Định nghĩa 2.1.1. Một hàm phân thức ba biến $F(a, b, c)$ được gọi là đối xứng nếu và chỉ nếu đồng nhất thức sau $F(a, b, c) = F(x, y, z)$ đúng với mọi hoán vị (x, y, z) của (a, b, c) . Hơn nữa nếu mọi số thực dương x mà $F(x, x, x) = 0$ thì $F(a, b, c)$ được gọi là hàm đối xứng ba biến chuẩn.

Định nghĩa 2.1.2. Một hàm phân thức ba biến $G(a, b, c)$ được gọi là nửa đối xứng nếu và chỉ nếu đồng nhất thức sau $G(a, b, c) = G(a, c, b)$ đúng với mọi bộ ba số thực dương (a, b, c) . Hơn nữa nếu mọi cặp hai số thực dương x, y mà $G(x, y, y) = 0$ thì $G(a, b, c)$ được gọi là hàm nửa đối xứng ba biến chuẩn.

2.2 Định lý về biểu diễn cơ sở của phương pháp

Ta có định lý quan trọng sau:

Định lý 2.2.1. (Biểu diễn cơ sở đối với lớp hàm đa thức)

Giả sử $F(a, b, c)$ là một đa thức đối xứng ba biến chuẩn thì tồn tại một đa thức nửa đối xứng ba biến $G(a, b, c)$ sao cho đồng nhất thức sau là đúng:

$$F(a, b, c) = G(a, b, c)(b - c)^2 + G(b, c, a)(c - a)^2 + G(c, a, b)(a - b)^2.$$

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh định lý trên dựa vào một số kiến thức cơ bản về không gian vector.

Vì định lý chỉ hạn chế trong lớp các đa thức ba biến nên có thể nói tới bậc của đa thức. Trong đa thức ba biến a, b, c sẽ chứa (và chỉ chứa duy nhất) các hạng tử dạng $t_{m,n,p}a^mb^nc^p$ trong đó m, n, p là các số nguyên không âm. Nếu $t_{m,n,p} \neq 0$ thì $m + n + p$ được gọi là bậc của hạng tử này. Trong trường hợp ngược lại ta quy ước bậc của hạng tử này bằng 0. Số $m + n + p$ lớn nhất được gọi là bậc của đa thức đó. Rõ ràng ta chỉ cần chứng minh định lý cho lớp các đa thức bậc n .

Ký hiệu $S(F)$ là tập hợp các đa thức ba biến $F(a, b, c)$ đối xứng chuẩn bậc n , $S(Q)$ là tập hợp các đa thức $Q(a, b, c)$ đối xứng ba biến chuẩn bậc n có dạng $Q(a, b, c) = G(a, b, c)(b - c)^2 + G(b, c, a)(c - a)^2 + G(c, a, b)(a - b)^2$, ở đây $G(a, b, c)$ là đa thức nửa đối xứng ba biến bậc $n - 2$ (ta xét $n \geq 2$ vì với $n = 1$ thì định lý hiển nhiên đúng). Rõ ràng $S(Q) \cup \{0\}$ là không gian vector con của không gian vector $S(F) \cup \{0\}$. Và do đó số chiều của không gian $S(Q) \cup \{0\}$ không vượt quá số chiều của không gian $S(F) \cup \{0\}$. (*)

Với các $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}$, ký hiệu $\lambda = (\alpha, \beta, \gamma)$ và xét các đa thức đặc biệt sau

(i). $F_\lambda(a, b, c) = \sum_{sym} a^{\alpha'} b^{\beta'} c^{\gamma'}$, trong đó tổng được lấy trên tất cả các bộ hoán vị $(\alpha', \beta', \gamma')$ của (α, β, γ) .

(ii). $G_\lambda(a, b, c) = a^\alpha b^\beta c^\gamma + a^\alpha b^\gamma c^\beta$.

(iii). $Q_\lambda(a, b, c) = G_\lambda(a, b, c)(b - c)^2 + G_\lambda(b, c, a)(c - a)^2 + G_\lambda(c, a, b)(a - b)^2$.

Ký hiệu f_n là tập hợp tất cả các bộ số $\lambda(\alpha, \beta, \gamma)$ thỏa mãn các điều kiện $\alpha + \beta + \gamma = n, \alpha \geq \beta \geq \gamma$. Ta có tập hợp các đa thức $F_\lambda(a, b, c)$ với $\lambda(\alpha, \beta, \gamma) \in f_n$ là hệ sinh độc lập tuyến tính của $S(F) \cup \{0\}$, do đó số chiều của $S(F) \cup \{0\}$ bằng số phần tử của f_n . (1)

Ký hiệu q_n là tập hợp tất cả các bộ số $\lambda(\alpha, \beta, \gamma)$ thỏa mãn các điều kiện $\alpha + \beta + \gamma = n - 2, \alpha + 2 \geq \beta \geq \gamma$. Rõ ràng tập hợp các đa thức $Q_\lambda(a, b, c)$ với $\lambda(\alpha, \beta, \gamma) \in q_n$ là hệ vector độc lập tuyến tính của $S(Q) \cup \{0\}$, do đó số chiều của $S(Q) \cup \{0\}$ không nhỏ hơn số phần tử của q_n . (2)

Từ các kết quả (1), (2) với chú ý là f_n và q_n có cùng số phần tử ta suy ra số chiều của $S(Q) \cup \{0\}$ không nhỏ hơn số chiều của $S(F) \cup \{0\}$. (**)

Từ (*), (**) suy ra số chiều của hai không gian $S(Q) \cup \{0\}$ và $S(F) \cup \{0\}$ là bằng nhau. Từ đó suy ra mọi phần tử của không gian $S(F)$ đều có thể biểu diễn qua các phần tử của không gian $S(Q)$. Định lý được chứng minh xong. $\square$

2.3 Thuật toán tìm biểu diễn cơ sở

Định lý 2.3.1. (Về thuật toán tìm biểu diễn cơ sở)

Giả sử $M(a, b, c), N(a, b, c)$ là hai đa thức nửa đối xứng ba biến, hơn nữa với mọi số thực dương x thì phân số $\frac{M(x, x, x)}{N(x, x, x)}$ là một hằng số t . Khi đó tồn tại hàm số nửa đối xứng ba biến $G(a, b, c)$ sao cho đồng nhất thức sau là đúng

$$\begin{aligned} F(a, b, c) &= \frac{M(a, b, c)}{N(a, b, c)} + \frac{M(b, c, a)}{N(b, c, a)} + \frac{M(c, a, b)}{N(c, a, b)} - 3t \\ &= G(a, b, c)(b - c)^2 + G(b, c, a)(c - a)^2 + G(c, a, b)(a - b)^2. \end{aligned}$$

Chứng minh. Đối với hàm nửa đối xứng $G(a, b, c)$ chúng ta tiến hành ghép cặp các hạng tử nửa đối xứng $a^m b^n c^p + a^m b^p c^n$. Sau đó nhóm tất cả các hạng tử có cùng bậc vào một nhóm. Bộ số $(n_1, n_2, \dots, n_k)$ với $n_1 > n_2 > \dots > n_k$ gồm tất cả các giá trị bậc của đa thức đó sắp theo thứ tự giảm dần gọi là bộ chỉ thị cho đa thức đó. Lúc này ta có thể viết

$$G(a, b, c) = \sum_{i=1}^k \sum_{\substack{m+n+p=n_i \\ n \geq p}} g_{m,n,p} \cdot a^m (b^n c^p + b^p c^n).$$

Điều kiện $\frac{M(x, x, x)}{N(x, x, x)}$ là hằng số với mọi số thực dương x tương đương với sự kiện bộ chỉ thị của các đa thức $M(a, b, c), N(a, b, c)$ là giống hệt nhau. Và do đó ta xét hiệu

$$\frac{M(a, b, c)}{N(a, b, c)} - t = \frac{\sum_{i=1}^k \sum_{\substack{m+n+p=n_i \\ n \geq p}} \alpha_{m,n,p} \cdot a^m (b^n c^p + b^p c^n)}{N(a, b, c)}$$

trong đó $\alpha_{m,n,p} = m_{m,n,p} - t n_{m,n,p}$ và do đó

$$\sum_{\substack{m+n+p=n_i \\ n \geq p}} \alpha_{m,n,p} = 0, \quad \forall i = \overline{1, n}.$$

Bây giờ đối với mỗi tổng bên trong ứng với mỗi giá trị n_i của tử số ta tiến hành sắp xếp lại thứ tự các hạng tử trong tử số của phân số trên, sau đó sẽ dùng một biến đổi nhỏ để làm xuất hiện các nhân tử $a - b, b - c, c - a$.

Trước hết ta chia các nghiệm nguyên không âm (m, n, p) thỏa mãn $n \geq p$ của phương trình $m + n + p = n_i$ thành n_i nhóm theo các giá trị của m . Sắp xếp lại thứ tự các nhóm đó theo độ giảm dần của m . Trong mỗi nhóm thì giá trị của m là cố định, ta sắp xếp lại các nghiệm nguyên không âm của phương trình $n + p = n_i - m$ theo độ giảm dần của n nếu $n_i - m$ lẻ và theo độ tăng dần của n nếu $n_i - m$ chẵn. Sau khi đã sắp thứ tự xong, chúng ta có một thứ tự mới của tập các nghiệm ban đầu, mà ta sẽ kí hiệu là $\{(m_j, n_j, p_j) \mid j = \overline{1, l}\}$ ở đây l là một hàm số phụ thuộc n_i . Để đơn giản ta kí hiệu

$$a_j = a^{m_j}(b^{n_j}c^{p_j} + b^{p_j}c^{n_j}); b_j = \alpha_{m_j, n_j, p_j}$$

Khi đó mẫu số có thể viết lại một cách đơn giản là $a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_lb_l = (a_1 - a_2)b_1 + (a_2 - a_3)(b_1 + b_2) + \dots + (a_{l-1} - a_l)(b_1 + b_2 + \dots + b_l)$. Sử dụng điều kiện $b_1 + b_2 + \dots + b_l = 0$ và chia các hiệu $a_1 - a_2, a_2 - a_3, \dots, a_{l-1} - a_l$ vào ba loại sau

$$\text{i) } a^m(b^{n+1}c^p + b^pc^{n+1}) - a^m(b^nc^{p+1} + b^{p+1}c^n) = a^m \frac{b^nc^p - b^pc^n}{b - c} (b - c)^2.$$

$$\text{ii) } a^{m+1}(b^nc^n + b^nc^n) - a^m(b^{n+1}c^n + b^nc^{n+1}) = a^mb^nc^n[(a - b) - (c - a)]$$

Xét biểu thức

$$\frac{a^mb^nc^n[(a - b) - (c - a)]}{N(a, b, c)} + \frac{b^mc^na^n[(b - c) - (a - b)]}{N(b, c, a)} + \frac{c^ma^nb^n[(c - a) - (b - c)]}{N(c, a, b)}$$

Tiến hành ghép từng phần trong ba hạng tử trong biểu thức này thành ba cặp theo các nhân tử $a - b, b - c, c - a$. Một trong ba hạng tử mới sẽ là

$$(a - b)a^nb^nc^n \left[\frac{a^{m-n}}{N(a, b, c)} - \frac{b^{m-n}}{N(b, c, a)} \right] = (a - b)^2 \cdot G(c, a, b)$$

trong đó

$$G(c, a, b) = \frac{c^na^nb^n}{N(a, b, c) \cdot N(b, c, a)} \cdot \frac{a^{m-n}N(a, b, c) - b^{m-n}N(b, c, a)}{a - b}$$

ở đây ta đã sử dụng tính chất $N(b, c, a) = N(b, a, c)$. Do cả tử số và mẫu số của phân số trên đều là những đa thức nửa đối xứng ba biến a, b, c và đối xứng hai biến a, b nên $G(c, a, b)$ là hàm nửa đối xứng ba biến.

$$\text{iii)} \quad a^{m+1}(b^{n+1}c^n + b^nc^{n+1}) - a^m(b^{n+1}c^{n+1} + b^{n+1}c^n) = a^mb^nc^n[c(a-b) - b(c-a)]$$

Xét biểu thức

$$\frac{a^mb^nc^n[c(a-b) - b(c-a)]}{N(a, b, c)} + \frac{b^mc^na^n[a(b-c) - c(a-b)]}{N(b, c, a)} + \frac{c^ma^nb^n[b(c-a) - a(b-c)]}{N(c, a, b)}$$

Tiến hành ghép từng phần trong ba hạng tử trong biểu thức này thành ba cặp theo các nhân tử $a-b, b-c, c-a$. Một trong ba hạng tử mới sẽ là

$$(a-b)a^nb^nc^{n+1}\left[\frac{a^{m-n}}{N(a, b, c)} - \frac{b^{m-n}}{N(b, c, a)}\right] = (a-b)^2.G(c, a, b)$$

trong đó

$$G(c, a, b) = \frac{c^{n+1}a^nb^n}{N(a, b, c).N(b, c, a)} \cdot \frac{a^{m-n}N(a, b, c) - b^{m-n}N(b, c, a)}{a-b}$$

ở đây ta đã sử dụng tính chất $N(b, c, a) = N(b, a, c)$. Do cả tử số và mẫu số của phân số trên đều là những đa thức nửa đối xứng ba biến a, b, c và đối xứng hai biến a, b nên $G(c, a, b)$ là hàm nửa đối xứng ba biến.

Vậy trong cả ba trường hợp ta đều đã chỉ ra cách biến đổi thích hợp để đưa biểu thức về dạng biểu diễn cần thiết. Điều này hoàn thành việc chứng minh định lý 2.3.1. Niềm tin về sự tồn tại biểu diễn cơ sở đã được khẳng định. $\square$

Bây giờ là một số đẳng thức thường được sử dụng trong phân tích

- $a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2$
- $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2 = \frac{(a-b)^2}{ab}$
- $a^3 + b^3 - ab(a+b) = (a+b)(a-b)^2$
- $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]$
- $a^2 + b^2 + c^2 - \frac{1}{3}(a+b+c)^2 = \frac{1}{3}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]$
- $(a+b)(b+c)(c+a) - 8abc = a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2$
- $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]$
- $a^2b + b^2c + c^2a - ab^2 - bc^2 - ca^2 = \frac{(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3}{3}$

- $a^3 + b^3 + c^3 - a^2b - b^2c - c^2a$

$$= \frac{(2a+b)(a-b)^2 + (2b+c)(b-c)^2 + (2c+a)(c-a)^2}{3}$$
- $a^4 + b^4 + c^4 - a^3b - b^3c - c^3a$

$$= \frac{(3a^2 + 2ab + b^2)(a-b)^2 + (3b^2 + 2bc + c^2)(b-c)^2 + (3c^2 + 2ca + a^2)(c-a)^2}{4}$$
- $a^3b + b^3c + c^3a - ab^3 - bc^3 - ca^3 = \frac{a+b+c}{3}[(b-a)^3 + (c-b)^3 + (a-c)^3]$
- $a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - b^2c^2 - c^2a^2$

$$= \frac{(a+b)^2(a-b)^2 + (b+c)^2(b-c)^2 + (c+a)^2(c-a)^2}{2}$$
- $\sqrt{2(a^2 + b^2)} - (a+b) = \frac{(a-b)^2}{a+b+\sqrt{2(a^2 + b^2)}}$
- $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} - \frac{3}{2} = \sum_{sym} \frac{(a-b)^2}{2(a+c)(b+c)}.$

Trong các biểu thức ba biến ta nên chú ý tới các đại lượng $a-b, b-c, c-a$. Việc nhóm các đại lượng này một cách hợp lí sẽ rút ra được các hạng tử $(a-b)^2, (b-c)^2, (c-a)^2$.

2.4 Một số bài toán minh họa

Ta hãy xem một số ví dụ sau đây

Ví dụ 2.4.1. Phân tích cơ sở S.O.S cho biểu thức

$$\frac{ab}{a^2 + b^2 + kc^2} + \frac{bc}{b^2 + c^2 + ka^2} + \frac{ca}{c^2 + a^2 + kb^2} - \frac{3}{k+2}.$$

Giải

Đặt $s = k - 1$ và $M = a^2 + b^2 + c^2$. Chú ý rằng

$$2(a^2 + b^2 + kc^2) - 2(k+2)ab = (k+2)(a-b)^2 + k(c^2 - a^2 + c^2 - b^2).$$

Ta có được 2 đại lượng là $c^2 - a^2, c^2 - b^2$ trong số hạng thứ nhất. Các đại lượng

này xuất hiện lại trong các số hạng khác nên

$$\begin{aligned}
& \frac{ab}{a^2 + b^2 + kc^2} + \frac{bc}{b^2 + c^2 + ka^2} + \frac{ca}{c^2 + a^2 + kb^2} - \frac{3}{k+2} \\
&= -\frac{1}{2(s+3)} \sum_{sym} \frac{(k+2)(a-b)^2 + k(c^2 - a^2 + c^2 - b^2)}{M + sc^2} \\
&= -\frac{1}{2(s+3)} \sum_{sym} \frac{(k+2)(a-b)^2}{M + sc^2} - \sum_{sym} \frac{k(c^2 - b^2)}{2(s+3)} \left(\frac{1}{M + sc^2} - \frac{1}{M + sb^2} \right) \\
&= -\frac{1}{2(s+3)} \sum_{sym} \frac{(k+2)(a-b)^2}{M + sc^2} + \sum_{sym} \frac{ks(b^2 - c^2)^2}{2(k+3)(M + sb^2)(M + sc^2)}.
\end{aligned}$$

Vậy biểu thức được viết gọn lại thành

$$\sum_{sym} \left(-\frac{k+2}{M + sc^2} + \frac{ks(a+b)^2}{(M + sa^2)(M + sb^2)} \right) (a-b)^2.$$

Từ đó ta tìm được các hệ số tương ứng của $(a-b)^2$, $(b-c)^2$, $(c-a)^2$ trong phân tích cơ sở S.O.S là

$$\begin{aligned}
S_c &= -(s+3)(M + sa^2)(M + sb^2) + s(s+1)(a+b)^2(M + sc^2) \\
S_a &= -(s+3)(M + sb^2)(M + sc^2) + s(s+1)(b+c)^2(M + sa^2) \\
S_b &= -(s+3)(M + sc^2)(M + sa^2) + s(s+1)(c+a)^2(M + sb^2).
\end{aligned}$$

Ví dụ 2.4.2. Phân tích cơ sở S.O.S cho các biểu thức sau

- (i). $(a+b+c)^3 - 27abc$.
- (ii). $a^3 + b^3 + c^3 + 3abc - ab(a+b) - bc(b+c) - ca(c+a)$.
- (iii). $a^3 + b^3 + c^3 + 6(ab^2 + bc^2 + ca^2) - 3(a^2b + b^2c + c^2a) - 12abc$.
- (iv). $a^3 + b^3 + c^3 + 4(ab^2 + bc^2 + ca^2) - a^2b - b^2c - c^2a - 12abc$.
- (v). $3\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) - 2\left(\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}\right) - 3$.
- (vi). $a^3 + b^3 + c^3 + 3abc - ab\sqrt{2(a^2 + b^2)} - bc\sqrt{2(b^2 + c^2)} - ca\sqrt{2(c^2 + a^2)}$.
- (vii). $a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a)$.

Giải

(i). Ta có

$$\begin{aligned}
& (a+b+c)^3 - 27abc \\
&= (a+b)^3 + c^3 + 3(a+b)^2c + 3(a+b)c^2 - 27abc \\
&= a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 3b^2c + 3bc^2 + 3c^2a + 3ca^2 - 21abc \\
&= (a^3 + b^3 + c^3 - 3abc) + 3a^2b + 3ab^2 + 3b^2c + 3bc^2 + 3c^2a + 3ca^2 - 18abc \\
&= (a^3 + b^3 + c^3 - 3abc) + (3a^2b + 3bc^2 - 6abc) + (3b^2c + 3ca^2 - 6abc) + \\
&\quad + (3c^2a + 3ab^2 - 6abc) \\
&= \frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] + 3b(a^2 + c^2 - 2ac) + \\
&\quad + 3c(b^2 + a^2 - 2ab) + 3a(c^2 + b^2 - 2bc) \\
&= \frac{a+b+7c}{2}(a-b)^2 + \frac{a+7b+c}{2}(c-a)^2 + \frac{7a+b+c}{2}(b-c)^2.
\end{aligned}$$

Vậy

$$(a+b+c)^3 - 27abc = \frac{a+b+7c}{2}(a-b)^2 + \frac{a+7b+c}{2}(c-a)^2 + \frac{7a+b+c}{2}(b-c)^2.$$

(ii). Ta có

$$\begin{aligned}
& a^3 + b^3 + c^3 + 3abc - ab(a+b) - bc(b+c) - ca(c+a) \\
&= (a^3 + b^3 + c^3 - 3abc) - a^2b - ab^2 - b^2c - bc^2 - c^2a - ca^2 + 6abc \\
&= (a^3 + b^3 + c^3 - 3abc) - (a^2b + bc^2 - 2abc) - (ab^2 + ac^2 - 2abc) + \\
&\quad - (b^2c + ca^2 - 2abc) \\
&= \frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] - b(c-a)^2 - a(b-c)^2 + \\
&\quad - c(a-b)^2 \\
&= \frac{a+b-c}{2}(a-b)^2 + \frac{a-b+c}{2}(c-a)^2 + \frac{b+c-a}{2}(b-c)^2.
\end{aligned}$$

Vậy

$$\begin{aligned}
& a^3 + b^3 + c^3 + 3abc - ab(a+b) - bc(b+c) - ca(c+a) \\
&= \frac{a+b-c}{2}(a-b)^2 + \frac{a-b+c}{2}(c-a)^2 + \frac{b+c-a}{2}(b-c)^2.
\end{aligned}$$

(iii). Ta có

$$\begin{aligned}
& a^3 + b^3 + c^3 + 6(ab^2 + bc^2 + ca^2) - 3(a^2b + b^2c + c^2a) - 12abc \\
&= 4(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc) + 6(ab^2 + bc^2 + ca^2 - a^3 - b^3 - c^3) \\
&+ 3(a^3 + b^3 + c^3 - a^2b - b^2c - c^2a) \\
&= 2(a + b + c)[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2] - (4b + 2a)(a - b)^2 - (4c + 2b)(b - c)^2 \\
&- (4a + 2c)(c - a)^2 + (2a + b)(a - b)^2 + (2b + c)(b - c)^2 + (2c + a)(c - a)^2 \\
&= (2c + 2a - b)(a - b)^2 + (2a + 2b - c)(b - c)^2 + (2b + 2c - a)(c - a)^2.
\end{aligned}$$

Vậy

$$\begin{aligned}
& a^3 + b^3 + c^3 + 6(ab^2 + bc^2 + ca^2) - 3(a^2b + b^2c + c^2a) - 12abc \\
&= (2c + 2a - b)(a - b)^2 + (2a + 2b - c)(b - c)^2 + (2b + 2c - a)(c - a)^2.
\end{aligned}$$

(iv). Để ý rằng

$$\begin{aligned}
& a^3 + b^3 + c^3 + 4(ab^2 + bc^2 + ca^2) - a^2b - b^2c - c^2a - 12abc \\
&= a^3 + b^3 + c^3 + 6(ab^2 + bc^2 + ca^2) - 3(a^2b + b^2c + c^2a) - 12abc \\
&- 2(ab^2 + bc^2 + ca^2 - a^2b - b^2c - c^2a).
\end{aligned}$$

Mà

$$ab^2 + bc^2 + ca^2 - a^2b - b^2c - c^2a = -\frac{(a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3}{3}$$

nên

$$\begin{aligned}
& a^3 + b^3 + c^3 + 4(ab^2 + bc^2 + ca^2) - a^2b - b^2c - c^2a - 12abc \\
&= (2c + \frac{8}{3}a - \frac{5}{3}b)(a - b)^2 + (2a + \frac{8}{3}b - \frac{5}{3}c)(b - c)^2 + (2b + \frac{8}{3}c - \frac{5}{3}a)(c - a)^2.
\end{aligned}$$

$$(v). 3\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) - 2\left(\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}\right) - 3.$$

Quy đồng mẫu số ta được

$$3\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) - 2\left(\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}\right) - 3 = \frac{3(a^2c + b^2a + c^2b) - 2(b^2c + c^2a + a^2b) - 3abc}{abc}.$$

Biến đổi tử thức về dạng S.O.S như sau (tách thành các nhóm quen thuộc)

$$\begin{aligned}
& 3(a^2c + b^2a + c^2b) - 2(b^2c + c^2a + a^2b) - 3abc \\
&= -3(a^3 + b^3 + c^3 - a^2c - b^2a - c^2b) + 2(a^3 + b^3 + c^3 - b^2c - c^2a - a^2b) \\
&+ (a^3 + b^3 + c^3 - 3abc) \\
&= -(a + 2b)(a - b)^2 - (b + 2c)(b - c)^2 - (c + 2a)(c - a)^2 \\
&+ \frac{(4a + 2b)(a - b)^2 + (4b + 2c)(b - c)^2 + (4c + 2a)(c - a)^2}{3} \\
&+ \frac{1}{2}(a + b + c)[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2] \\
&= \frac{(5a - 5b + 3c)(a - b)^2 + (5b - 5c + 3a)(b - c)^2 + (5c - 5a + 3b)(c - a)^2}{6}.
\end{aligned}$$

Vậy

$$\begin{aligned}
& 3\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) - 2\left(\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}\right) - 3 \\
&= \frac{(5a - 5b + 3c)(a - b)^2 + (5b - 5c + 3a)(b - c)^2 + (5c - 5a + 3b)(c - a)^2}{6abc}.
\end{aligned}$$

$$(vi). a^3 + b^3 + c^3 + 3abc - ab\sqrt{2(a^2 + b^2)} - bc\sqrt{2(b^2 + c^2)} - ca\sqrt{2(c^2 + a^2)}.$$

$$\text{Ta đã biết } \sqrt{2(a^2 + b^2)} - (a + b) = \frac{(a - b)^2}{a + b + \sqrt{2(a^2 + b^2)}}.$$

Đưa biểu thức đã cho về dạng có chứa các hạng tử $\sqrt{2(a^2 + b^2)} - (a + b)$, $\sqrt{2(b^2 + c^2)} - (b + c)$, $\sqrt{2(c^2 + a^2)} - (c + a)$, ta được

$$\begin{aligned}
& a^3 + b^3 + c^3 + 3abc - ab\sqrt{2(a^2 + b^2)} - bc\sqrt{2(b^2 + c^2)} - ca\sqrt{2(c^2 + a^2)} \\
&= a^3 + b^3 + c^3 + 3abc - ab(a + b) - bc(b + c) - ca(c + a) \\
&- ab\left(\sqrt{2(a^2 + b^2)} - a - b\right) - bc\left(\sqrt{2(b^2 + c^2)} - b - c\right) - ca\left(\sqrt{2(c^2 + a^2)} - c - a\right) \\
&= \frac{(a + b - c)(a - b)^2 + (b + c - a)(b - c)^2 + (c + a - b)(c - a)^2}{2} \\
&- \frac{ab(a - b)^2}{a + b + \sqrt{2(a^2 + b^2)}} - \frac{bc(b - c)^2}{b + c + \sqrt{2(b^2 + c^2)}} - \frac{ca(c - a)^2}{c + a + \sqrt{2(c^2 + a^2)}} \\
&= \frac{1}{2}[S_c(a - b)^2 + S_a(b - c)^2 + S_b(c - a)^2]
\end{aligned}$$

trong đó

$$\begin{aligned}
S_c &= a + b - c - \frac{2ab}{a + b + \sqrt{2(a^2 + b^2)}} \\
S_a &= b + c - a - \frac{2bc}{b + c + \sqrt{2(b^2 + c^2)}} \\
S_b &= c + a - b - \frac{2ca}{c + a + \sqrt{2(c^2 + a^2)}}.
\end{aligned}$$

(vii). $a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a)$.

Biến đổi

$$\begin{aligned} & a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \\ &= (a^3b + b^3c + c^3a - a^4 - b^4 - c^4) + (a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - b^2c^2 - c^2a^2). \end{aligned}$$

Mà $a^3b + b^3c + c^3a - a^4 - b^4 - c^4$ và $a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - b^2c^2 - c^2a^2$ đã có dạng S.O.S ở trên nên ta dễ dàng đưa được biểu thức đã cho về dạng S.O.S.

Ta có thêm một cách khác như sau

$$\begin{aligned} & a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \\ &= abc\left(\frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{b} - \frac{ab}{c} - \frac{bc}{a} - \frac{ca}{b}\right) \end{aligned}$$

Sau đó ta chuyển biểu thức trong dấu ngoặc về dạng S.O.S như sau

$$\begin{aligned} & 2\left(\frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{b} - \frac{ab}{c} - \frac{bc}{a} - \frac{ca}{b}\right) \\ &= 2\left(\frac{a^2}{c} + c - 2a\right) + 2\left(\frac{b^2}{a} + a - 2b\right) + 2\left(\frac{c^2}{b} + b - 2c\right) \\ &\quad - \left(\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} - 2b\right) - \left(\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} - 2c\right) - \left(\frac{ab}{c} + \frac{ab}{c} - 2a\right) \\ &= \frac{2(a-c)^2}{c} + \frac{2(b-a)^2}{a} + \frac{2(c-b)^2}{b} - \frac{b(a-c)^2}{ac} - \frac{c(a-b)^2}{ab} - \frac{a(b-c)^2}{bc}. \end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned} & 2[a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a)] \\ &= (2bc - c^2)(a-b)^2 + (2ca - a^2)(b-c)^2 + (2ab - b^2)(c-a)^2. \end{aligned}$$

Vậy

$$\begin{aligned} & a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \\ &= \frac{1}{2}[(2bc - c^2)(a-b)^2 + (2ca - a^2)(b-c)^2 + (2ab - b^2)(c-a)^2]. \end{aligned}$$

2.5 Một kĩ thuật để tìm biểu diễn cơ sở

Trong quá trình nghiên cứu đề tài, chúng tôi đã nghĩ ra một phương pháp để đưa về dạng biểu diễn cơ sở. Chúng ta sẽ tìm thấy ý tưởng của phương pháp đó qua các ví dụ sắp được trình bày dưới đây.

Trong mục này chúng tôi chỉ xét các đa thức đối xứng ba biến. Giả sử đa thức M có biểu diễn dưới dạng cơ sở S.O.S như sau

$$M = S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2.$$

Chúng tôi giả thiết thêm rằng S_a là biểu thức đối xứng đối với hai biến b, c ; S_b là biểu thức đối xứng đối với hai biến c, a và S_c là biểu thức đối xứng đối với hai biến a, b . Trước hết ta có nhận xét sau

Nhận xét

Cho A, B, C là các biểu thức của ba biến a, b, c . Giả sử $A + B + C$ là biểu thức đối xứng đối với ba biến a, b, c và A là biểu thức đối xứng đối với hai biến b, c . Lúc đó ta có $B + C$ là biểu thức đối xứng đối với hai biến b, c .

Ví dụ 2.5.1. Phân tích cơ sở S.O.S cho biểu thức

$$M = 4(a^3 + b^3 + c^3) - (a + b)(b + c)(c + a) - 4abc.$$

Giải

Giả sử M được biểu diễn dưới dạng S.O.S như sau

$$M = S_a(b - c)^2 + S_b(c - a)^2 + S_c(a - b)^2.$$

Cho $a = b$, ta có $M^{ab} = (6a + 4c)(a - c)^2$ (kí hiệu M^{ab} để chỉ biểu thức M trong trường hợp $a = b$).

Lúc đó $S_a^{ab} + S_b^{ab} = 6a + 4c$ (kí hiệu S_a^{ab} để chỉ S_a và S_b^{ab} để chỉ S_b trong trường hợp $a = b$).

Mặt khác ta có $S_a + S_b + S_c$ là biểu thức đối xứng theo ba biến a, b, c và S_c là biểu thức đối xứng theo hai biến a, b nên theo nhận xét trên ta có $S_a + S_b$ là biểu thức đối xứng theo hai biến a, b . Do đó $S_a + S_b = 3a + 3b + 4c$.

Tương tự lần lượt cho $b = c, c = a$ ta được $S_b + S_c = 3b + 3c + 4a$ và $S_c + S_a = 3c + 3a + 4b$.

Ta có hệ gồm 3 phương trình sau

$$S_a + S_b = 3a + 3b + 4c$$

$$S_b + S_c = 3b + 3c + 4a$$

$$S_c + S_a = 3c + 3a + 4b.$$

Từ đây ta tính được $S_a = 2b + 2c + a$; $S_b = 2a + 2c + b$; $S_c = 2a + 2b + c$.

Do đó

$$M = (2b + 2c + a)(b - c)^2 + (2a + 2c + b)(c - a)^2 + (2a + 2b + c)(a - b)^2.$$

Kiểm tra lại kết quả bằng cách khai triển biểu thức trên rồi so sánh với biểu thức của M ở đầu bài.

Vậy

$$M = (2b + 2c + a)(b - c)^2 + (2a + 2c + b)(c - a)^2 + (2a + 2b + c)(a - b)^2.$$

Ví dụ 2.5.2. Phân tích cơ sở S.O.S cho biểu thức

$$N = a^3 + b^3 + c^3 + 3abc - a^2(b + c) - b^2(c + a) - c^2(a + b).$$

Giải

Giả sử N được biểu diễn dưới dạng S.O.S như sau

$$N = S_a(b - c)^2 + S_b(c - a)^2 + S_c(a - b)^2$$

Tương tự cách giải đã trình bày ở ví dụ trước, lần lượt cho $a = b, b = c, c = a$ ta được hệ gồm 3 phương trình sau

$$S_a + S_b = c$$

$$S_b + S_c = a$$

$$S_c + S_a = b.$$

Từ đây ta tính được $S_a = \frac{b + c - a}{2}; S_b = \frac{a + c - b}{2}; S_c = \frac{a + b - c}{2}$.

Vậy

$$N = \frac{b + c - a}{2}(b - c)^2 + \frac{a + c - b}{2}(c - a)^2 + \frac{a + b - c}{2}(a - b)^2.$$

Ví dụ 2.5.3. Phân tích cơ sở S.O.S cho biểu thức

$$A = a^4 + b^4 + c^4 - abc(a + b + c).$$

Giải

Giả sử A được biểu diễn dưới dạng S.O.S như sau

$$A = S_a(b - c)^2 + S_b(c - a)^2 + S_c(a - b)^2$$

Cho $a = b$, ta có $A^{ab} = (2a^2 + 2ac + c^2)(a - c)^2$ (kí hiệu A^{ab} để chỉ biểu thức A trong trường hợp $a = b$).

Lúc đó $S_a^{ab} + S_b^{ab} = 2a^2 + 2ac + c^2$ (kí hiệu S_a^{ab} để chỉ S_a và S_b^{ab} để chỉ S_b trong trường hợp $a = b$).

Mặt khác ta có $S_a + S_b + S_c$ là biểu thức đối xứng theo ba biến a, b, c và S_c là biểu thức đối xứng theo hai biến a, b nên theo nhận xét trên ta có $S_a + S_b$ là biểu thức đối xứng theo hai biến a, b . Do đó $S_a + S_b = a^2 + b^2 + ac + bc + c^2$.

Tương tự lần lượt cho $b = c, c = a$ ta được $S_b + S_c = b^2 + c^2 + ab + ac + a^2$ và $S_c + S_a = c^2 + a^2 + bc + ab + b^2$.

Từ đó ta có hệ gồm 3 phương trình sau

$$S_a + S_b = a^2 + b^2 + ac + bc + c^2$$

$$S_b + S_c = b^2 + c^2 + ab + ac + a^2$$

$$S_c + S_a = c^2 + a^2 + bc + ab + b^2.$$

Từ đây ta tính được $S_a = \frac{a^2 + (b+c)^2}{2}$; $S_b = \frac{b^2 + (a+c)^2}{2}$; $S_c = \frac{c^2 + (a+b)^2}{2}$.

Do đó

$$A = \frac{a^2 + (b+c)^2}{2}(b-c)^2 + \frac{b^2 + (a+c)^2}{2}(c-a)^2 + \frac{c^2 + (a+b)^2}{2}(a-b)^2.$$

Kiểm tra lại kết quả bằng cách khai triển biểu thức trên rồi so sánh với biểu thức của A ở đầu bài.

Vậy

$$A = \frac{a^2 + (b+c)^2}{2}(b-c)^2 + \frac{b^2 + (a+c)^2}{2}(c-a)^2 + \frac{c^2 + (a+b)^2}{2}(a-b)^2.$$

Kĩ thuật trên khá đơn giản so với các kĩ thuật đã được trình bày ở các mục trước. Tuy nhiên nhược điểm của nó là cách này chỉ đúng nếu S_a là biểu thức đối xứng đối với hai biến b, c ; S_b là biểu thức đối xứng đối với hai biến c, a và S_c là biểu thức đối xứng đối với hai biến a, b . Ngoài ra nó cũng chỉ hiệu quả đối với những biểu thức ba biến đối xứng dạng đa thức; trong các trường hợp khác thì cách này không thực hiện được.

Bây giờ chúng ta sẽ quay trở lại **ví dụ 2.4.2** và chọn các đa thức đối xứng để áp dụng phương pháp trên đây cho việc tìm biểu diễn cơ sở.

Ví dụ 2.5.4. Phân tích cơ sở S.O.S cho các biểu thức sau

$$(i). (a+b+c)^3 - 27abc.$$

$$(ii). a^3 + b^3 + c^3 + 3abc - ab(a+b) - bc(b+c) - ca(c+a).$$

Giải

(i). Đặt $A = (a+b+c)^3 - 27abc$.

Giả sử A được biểu diễn dưới dạng S.O.S như sau

$$A = S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2$$

Cho $a = b$, ta có $A^{ab} = (8a+c)(a-c)^2$ (kí hiệu A^{ab} để chỉ biểu thức A trong trường hợp $a = b$).

Lúc đó $S_a^{ab} + S_b^{ab} = 8a + c$ (kí hiệu S_a^{ab} để chỉ S_a và S_b^{ab} để chỉ S_b trong trường hợp $a = b$).

Mặt khác ta có $S_a + S_b + S_c$ là biểu thức đối xứng theo ba biến a, b, c và S_c là biểu thức đối xứng theo hai biến a, b nên theo nhận xét trên ta có $S_a + S_b$ là biểu thức đối xứng theo hai biến a, b . Do đó $S_a + S_b = 4a + 4b + c$.

Tương tự lần lượt cho $b = c, c = a$ ta được $S_b + S_c = 4b + 4c + a$ và $S_c + S_a = 4a + 4c + b$.

Từ đó ta có hệ gồm 3 phương trình sau

$$S_a + S_b = 4a + 4b + c$$

$$S_b + S_c = 4b + 4c + a$$

$$S_c + S_a = 4a + 4c + b.$$

Từ đây ta tính được $S_a = \frac{7a + b + c}{2}; S_b = \frac{a + 7b + c}{2}; S_c = \frac{a + b + 7c}{2}$.

Do đó

$$A = \frac{a + b + 7c}{2}(a - b)^2 + \frac{a + 7b + c}{2}(c - a)^2 + \frac{7a + b + c}{2}(b - c)^2.$$

Thật tuyệt vời là kết quả này hoàn toàn giống với kết quả mà chúng ta đã tìm được bằng phương pháp thông thường ở **ví dụ 2.4.2**.

Bài tập còn lại, chúng tôi xin dành cho độc giả. Bây giờ ta đến với một số ứng dụng quan trọng của phương pháp phân tích tổng bình phương S.O.S

Chương 3

MỘT SỐ ỨNG DỤNG QUAN TRỌNG CỦA PHƯƠNG PHÁP PHÂN TÍCH TỔNG CÁC BÌNH PHƯƠNG (S.O.S)

3.1 Ứng dụng trong bài toán chứng minh bất đẳng thức

Ví dụ 3.1.1. Chứng minh rằng với mọi số thực dương a, b, c ta luôn có

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq \frac{3(a^3 + b^3 + c^3)}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Chứng minh. Ta có

$$\frac{a^2}{b} - a + \frac{b^2}{c} - b + \frac{c^2}{a} - c = \frac{(a-b)^2}{b} + \frac{(b-c)^2}{c} + \frac{(c-a)^2}{a}.$$

Mặt khác

$$\begin{aligned} & 3(a^3 + b^3 + c^3) - (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2) \\ &= 2a^3 + 2b^3 + 2c^3 - a^2b - ab^2 - b^2c - bc^2 - c^2a - ca^2 \\ &= (a^3 - a^2b - ab^2 + b^3) + (b^3 - b^2c - bc^2 + c^3) + (c^3 - c^2a - ca^2 + a^3) \\ &= (a^2 - b^2)(a-b) + (b^2 - c^2)(b-c) + (c^2 - a^2)(c-a) \\ &= (a+b)(a-b)^2 + (b+c)(b-c)^2 + (c+a)(c-a)^2 \end{aligned}$$

Suy ra

$$\frac{3(a^3 + b^3 + c^3)}{a^2 + b^2 + c^2} - (a+b+c) = \frac{(a+b)(a-b)^2 + (b+c)(b-c)^2 + (c+a)(c-a)^2}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\frac{a^2}{b} - a + \frac{b^2}{c} - b + \frac{c^2}{a} - c \geq \frac{3(a^3 + b^3 + c^3)}{a^2 + b^2 + c^2} - (a + b + c)$$

hay

$$\frac{(a-b)^2}{b} + \frac{(b-c)^2}{c} + \frac{(c-a)^2}{a} \geq \frac{(a+b)(a-b)^2 + (b+c)(b-c)^2 + (c+a)(c-a)^2}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Ta tìm được các hệ số trong phân tích cơ sở S.O.S là

$$S_c = \frac{1}{b} - \frac{a+b}{a^2 + b^2 + c^2}; S_a = \frac{1}{c} - \frac{b+c}{a^2 + b^2 + c^2}; S_b = \frac{1}{a} - \frac{c+a}{a^2 + b^2 + c^2}$$

hay

$$S_c = \frac{a^2 + c^2 - ab}{(a^2 + b^2 + c^2)b}; S_a = \frac{a^2 + b^2 - bc}{(a^2 + b^2 + c^2)c}; S_b = \frac{b^2 + c^2 - ac}{(a^2 + b^2 + c^2)a}.$$

Do tính hoán vị của các biến nên ta phải xét cả 2 trường hợp

- i) $a \geq b \geq c$. Khi đó dễ thấy $S_a \geq 0, S_c \geq 0$. Phần còn lại ra sẽ chứng minh $S_a + 2S_b \geq 0$ và $S_c + 2S_b \geq 0$. Hai bất đẳng thức này chứng minh khá dễ.
- ii) $a \leq b \leq c$. Khi đó $S_b \geq 0, S_c \geq 0$ và cũng không mấy khó khăn ta chứng minh thêm $S_a + S_b \geq 0$.

Như vậy bất đẳng thức đã được chứng minh. □

Ví dụ 3.1.2. (Việt Nam MO 2006) Chứng minh với a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác, ta có bất đẳng thức

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 6\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right).$$

Chứng minh. Trước hết ta chú ý các đẳng thức sau

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) - 9 = \frac{(a-b)^2}{ab} + \frac{(b-c)^2}{bc} + \frac{(c-a)^2}{ca},$$

$$6\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right) - 3 = \frac{(a-b)^2}{(a+c)(b+c)} + \frac{(b-c)^2}{(b+a)(c+a)} + \frac{(c-a)^2}{(c+b)(a+b)}.$$

Bất đẳng thức cần chứng minh có thể viết lại dưới dạng

$$S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0$$

trong đó

$$S_a = \frac{1}{bc} - \frac{3}{(a+b)(a+c)},$$

$$S_b = \frac{1}{ca} - \frac{3}{(b+c)(b+a)},$$

$$S_c = \frac{1}{ab} - \frac{3}{(c+a)(c+b)}.$$

Không mất tính tổng quát giả sử $a \geq b \geq c$, khi đó $S_a \geq S_b \geq S_c$. Ta sẽ chứng minh $S_b + S_c \geq 0$, thật vậy

$$\begin{aligned} S_b + S_c &= \frac{1}{a} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) - \frac{3}{b+c} \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} \right) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{3}{b+c} \left(\frac{a}{a+b} + \frac{a}{a+c} \right). \end{aligned}$$

Do a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác nên $a \leq b + c$. Dễ thấy

$$\frac{3}{b+c} \left(\frac{a}{a+b} + \frac{a}{a+c} \right) \leq \frac{3}{b+c} \left(\frac{b+c}{2b+c} + \frac{b+c}{2c+b} \right)$$

hay

$$\frac{3}{b+c} \left(\frac{a}{a+b} + \frac{a}{a+c} \right) \leq \frac{3}{2b+c} + \frac{3}{2c+b}.$$

Phần còn lại ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{3}{2b+c} + \frac{3}{2c+b}.$$

Bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng vì

$$\begin{aligned} \frac{1}{b} + \frac{2}{c} &\geq \frac{9}{2c+b}, \\ \frac{1}{c} + \frac{2}{b} &\geq \frac{9}{2b+c} \end{aligned}$$

Do đó $S_b + S_c \geq 0$. Mặt khác $S_b \geq S_c$ nên $S_b \geq 0$. Suy ra

$$S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq (S_b + S_c)(a-b)^2 \geq 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$ hoặc $a = 2, b = c = 1$ hoặc các hoán vị. $\square$

Ví dụ 3.1.3. Cho a, b, c là các số thực không âm tùy ý. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{(a+b)^2}{c^2+ab} + \frac{(b+c)^2}{a^2+bc} + \frac{(c+a)^2}{b^2+ac} \geq 6.$$

Chứng minh. Vì $(a+b)^2 - 2(c^2+ab) = (a^2-c^2) + (b^2-c^2)$ nên

$$\begin{aligned} &\frac{(a+b)^2}{c^2+ab} + \frac{(b+c)^2}{a^2+bc} + \frac{(c+a)^2}{b^2+ac} - 6 \\ &= \sum_{sym} \frac{(a^2-b^2) + (a^2-c^2)}{a^2+bc} \\ &= \sum_{sym} (a^2-b^2) \left(\frac{1}{a^2+bc} - \frac{1}{b^2+ac} \right) \end{aligned}$$

$$= \sum_{sym} \frac{(a-b)^2(a+b)(a+b-c)}{(a^2+bc)(b^2+ac)}.$$

Xét biểu thức:

$$S_a = (b+c)(b+c-a)(a^2+bc),$$

$$S_b = (c+a)(c+a-b)(b^2+ac),$$

$$S_c = (a+b)(a+b-c)(c^2+ab).$$

Ta phải chứng minh $S_a(b-c)^2 + S_b(a-c)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0$.

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$. Dễ thấy $S_b, S_c \geq 0$ và

$$\frac{(a-c)^2}{(b-c)^2} \geq \frac{a^2}{b^2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (a-c)^2 S_b + (b-c)^2 S_a &= (c-b)^2 \left(\frac{(a-c)^2}{(c-b)^2} S_b + S_a \right) \\ &\geq \frac{(c-b)^2}{b^2} (a^2 S_b + b^2 S_a). \end{aligned}$$

Mặt khác

$$\begin{aligned} a^2 S_b + b^2 S_a &= a^2(a+c)(a+c-b)(b^2+ac) + b^2(b+c)(b+c-a)(a^2+bc) \\ &\geq a(a-b)(a^2(b^2+ac) - b^2(b^2+ac)) \geq 0. \end{aligned}$$

Ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$ hoặc $a = b, c = 0$ hoặc các hoán vị. $\square$

Ví dụ 3.1.4. Giả sử a, b, c là độ dài 3 cạnh của tam giác. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} + \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} \leq \frac{5}{2}.$$

Chứng minh. Xét hai hằng đẳng thức sau:

$$\begin{aligned} \frac{2a}{b+c} + \frac{2b}{a+c} + \frac{2c}{a+b} - 3 &= \frac{(a-b)^2}{(a+c)(b+c)} + \frac{(b-c)^2}{(b+a)(c+a)} + \frac{(c-a)^2}{(b+c)(b+a)}, \\ 2 - \frac{2(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2} &= \frac{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}{a^2+b^2+c^2}. \end{aligned}$$

Ta chứng minh $S_a(b-c)^2 + S_b(a-c)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0$, với

$$S_a = 1 - \frac{a^2+b^2+c^2}{(a+b)(a+c)}, S_b = 1 - \frac{a^2+b^2+c^2}{(b+a)(b+c)}, S_c = 1 - \frac{a^2+b^2+c^2}{(c+a)(c+b)}.$$

Không mất tính tổng quát giả sử $a \geq b \geq c \Rightarrow S_a \geq 0$.

Do a, b, c là 3 cạnh của một tam giác nên

$$S_b = \frac{a(b+c-a) + c(b-c)}{(a+b)(b+c)} \geq \frac{c(b-c)}{(a+b)(b+c)},$$

$$S_c = \frac{a(b+c-a) + b(c-b)}{(a+c)(c+b)} \geq \frac{b(c-b)}{(a+c)(c+b)},$$

$$\frac{a-c}{a-b} \geq \frac{b}{c} \geq \frac{a+b}{a+c}$$

Từ cá bất đẳng thức trên suy ra

$$\begin{aligned} S_a(b-c)^2 + S_b(a-c)^2 + S_c(a-b)^2 &\geq S_b(a-c)^2 + S_c(a-b)^2 \\ &\geq (a-b)^2 \left(\frac{b^2}{c^2} S_b + S_c \right) \\ &\geq \frac{(a-b)^2}{c^2} \left(\frac{b^2 c(b-c)}{(a+b)(b+c)} + \frac{c^2 b(c-b)}{(a+c)(c+b)} \right) \\ &= \frac{(a-b)^2(b-c)b}{(a+b)(b+c)} \left(\frac{b}{c} - \frac{a+b}{a+c} \right) \geq 0. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$ hoặc $a = b, c = 0$ hoặc các hoán vị. $\square$

Ví dụ 3.1.5. Chứng minh rằng với mọi a, b, c không âm ta có bất đẳng thức

$$\frac{a^4}{a^3+b^3} + \frac{b^4}{b^3+c^3} + \frac{c^4}{c^3+a^3} \geq \frac{a+b+c}{2}.$$

Chứng minh. Ta có

$$\frac{2a^4}{a^3+b^3} - a = \frac{a(a^3-b^3)}{a^3+b^3} = \frac{a(a-b)(a^2+ab+b^2)}{a^3+b^3}.$$

Do đó

$$\frac{2a^4}{a^3+b^3} - a - \frac{3(a-b)}{2} = (a-b) \left(\frac{a(a^2+ab+b^2)}{a^3+b^3} - \frac{3}{2} \right) = \frac{3b^2+ab-a^2}{2(a^3+b^3)}(a-b)^2.$$

Vậy bất đẳng thức được viết lại dưới dạng tương đương là

$$S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0,$$

trong đó các hệ số S_a, S_b, S_c được xác định bởi

$$S_a = \frac{3c^2+bc-b^2}{b^3+c^3}; S_b = \frac{3a^2+ca-c^2}{c^3+a^3}; S_c = \frac{3b^2+ab-a^2}{a^3+b^3}.$$

i) Trường hợp $a \geq b \geq c$. Khi đó dễ thấy

$$\begin{aligned} S_b + 2S_c &\geq 0 (\Leftrightarrow \frac{3a^2+ca-c^2}{c^3+a^3} + \frac{2(3b^2+ab-a^2)}{a^3+b^3} \geq 0), \\ a^2 S_b + 2b^2 S_a &\geq 0 (\Leftrightarrow \frac{a^2(3a^2+ca-c^2)}{c^3+a^3} + \frac{2b^2(3c^2+bc-b^2)}{b^3+c^3} \geq 0). \end{aligned}$$

Do đó

$$2S_a(b-c)^2 + 2S_b(c-a)^2 + 2S_c(a-b)^2 \geq (S_b + 2S_c)(a-b)^2 + (b-c)^2(2S_a + \frac{a^2}{b^2}S_b) \geq 0.$$

ii) Trường hợp $c \geq b \geq a$. Hoàn toàn tương tự, ta có

$$S_c + 2S_b \geq 0 (\Leftrightarrow \frac{3b^2 + ab - a^2}{a^3 + b^3} + \frac{2(3a^2 + ca - c^2)}{c^3 + a^3} \geq 0),$$

$$S_a + 2S_b \geq 0 (\Leftrightarrow \frac{3c^2 + bc - b^2}{b^3 + c^3} + \frac{2(3a^2 + ca - c^2)}{c^3 + a^3} \geq 0),$$

Do đó

$$2S_a(b-c)^2 + 2S_b(c-a)^2 + 2S_c(a-b)^2 \geq (S_a + 2S_b)(b-c)^2 + (2S_b + S_c)(a-b)^2 \geq 0.$$

Chú ý rằng do tính hoán vị của các biến nên ta chỉ cần xét hai trường hợp như trên là đủ. Bất đẳng thức được chứng minh xong.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. □

Độc giả có thể tự mình rèn luyện thêm kỹ năng sử dụng phương pháp S.O.S qua một số bài toán sau

Ví dụ 3.1.6. Chứng minh rằng với mọi a, b, c dương ta có bất đẳng thức

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \frac{abc}{2(a^3 + b^3 + c^3)} \geq \frac{5}{3}.$$

Ví dụ 3.1.7. Chứng minh rằng với mọi số thực không âm a, b, c ta luôn có

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq ab\sqrt{2a^2 + 2b^2} + bc\sqrt{2b^2 + 2c^2} + ca\sqrt{2c^2 + 2a^2}.$$

Ví dụ 3.1.8. Chứng minh rằng với mọi số thực không âm a, b, c ta có

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{abc} + \frac{54abc}{(a+b+c)^3} \geq 5.$$

Ví dụ 3.1.9. Chứng minh rằng với mọi a, b, c dương ta có

$$\frac{abc(a+b+c)}{a^4 + b^4 + c^4} + \frac{12(a^3 + b^3 + c^3)}{(a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2)} \geq 5.$$

Ví dụ 3.1.10. Chứng minh rằng với mọi số thực dương a, b, c ta có

$$\frac{a^4 + b^4 + c^4}{ab + bc + ca} + \frac{3abc}{a+b+c} \geq \frac{2}{3}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Ví dụ 3.1.11. Chứng minh rằng với mọi số thực không âm a, b, c ta có

$$\frac{7(a^3 + b^3 + c^3)}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{4(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)}{a^3 + b^3 + c^3} \geq \frac{11}{3}(a+b+c).$$

Ví dụ 3.1.12. Chứng minh rằng với mọi a, b, c không âm ta có

$$\frac{a^2}{b^2 + c^2} + \frac{b^2}{c^2 + a^2} + \frac{c^2}{a^2 + b^2} \geq \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(ab + bc + ca)}.$$

3.2 Ứng dụng trong sáng tạo bất đẳng thức

Thế giới toán học còn vô vàn những điều kỳ thú, những câu hỏi chưa có lời giải đáp, những giả thiết mà bề ngoài tưởng chừng đơn giản nhưng lại thách thức các nhà toán học hàng trăm năm. Chúng ta, với vốn kiến thức còn hạn chế của mình, không nên chỉ biết giải các bài toán do người khác đặt ra mà sẽ tốt hơn nếu ta có thể tự phát triển các vấn đề đã có hoặc đặt ra các bài toán mới trong tầm kiến thức của mình. Đây là một việc rất thú vị và bổ ích.

Từ trước đến nay, việc sáng tạo bất đẳng thức chủ yếu đi theo con đường tạo ra những bất đẳng thức mới dựa vào những kết quả biết trước.

Ta hãy xem xét một số ví dụ sau

Ví dụ 3.2.1. Chứng minh rằng với a, b, c, d là các số thực dương tùy ý thì ta có bất đẳng thức

$$\frac{2a^2}{2a+b} + \frac{3b^2}{6b+4c} + \frac{2c^2}{6c+3d} + \frac{d^2}{6d+36a} \geq \frac{6a+3b+2c+d}{12}.$$

Chứng minh. Cách phát biểu của bài toán khá lộn xộn và rắc rối, nhưng bản chất của nó thì rất đơn giản. Bất đẳng thức trên được suy ra trực tiếp từ kết quả sau

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+d} + \frac{d^2}{d+a} \geq \frac{a+b+c+d}{2}.$$

Sau đó thay a, b, c, d bởi $a, \frac{b}{2}, \frac{c}{3}, \frac{d}{6}$ ta có bất đẳng thức cần chứng minh. $\square$

Việc thay đổi các biến số bằng các hàm số đơn giản đã làm bài toán khó hơn vì đã che giấu đi bản chất thật của bài toán.

Từ một bất đẳng thức tùy ý, ta có khá nhiều biến đổi để tạo ra được một bất đẳng thức mới mà kỹ thuật đổi biến càng khó thì vấn đề càng khó được tìm ra.

Bằng phương pháp sử dụng đẳng thức, Đào Hải Long (HCV IMO 1994,1995) có một nhóm các bất đẳng thức khá thú vị sau

Ví dụ 3.2.2. Chứng minh rằng với mọi số thực x, y, z phân biệt thì ta có

$$\frac{x^2}{(y-z)^2} + \frac{y^2}{(z-x)^2} + \frac{z^2}{(x-y)^2} \geq 2.$$

Chứng minh. Đặt $a = \frac{x}{y-z}; b = \frac{y}{z-x}; c = \frac{z}{x-y}$; khi đó ta có

$$(1+a)(1+b)(1+c) = -(1-a)(1-b)(1-c)$$

Suy ra $ab+bc+ca = -1$.

Mặt khác ta có $a^2+b^2+c^2 \geq -2(ab+bc+ca) = 2$.

Bất đẳng thức được chứng minh. $\square$

Ví dụ 3.2.3. Chứng minh rằng với mọi số thực a, b, c ta luôn có bất đẳng thức

$$\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2} + \frac{(b+c)^2}{(b-c)^2} + \frac{(c+a)^2}{(c-a)^2} \geq 2.$$

Chứng minh. Đặt $x = \frac{a+b}{a-b}; y = \frac{b+c}{b-c}; z = \frac{c+a}{c-a}$; khi đó ta có

$$xy + yz + zx = -1$$

Tương tự ví dụ trên ta có bất đẳng thức được chứng minh. □

Bớt đi 1 ở mỗi hạng tử về trái ta được bất đẳng thức mới

$$\frac{ab}{(a-b)^2} + \frac{bc}{(b-c)^2} + \frac{ca}{(c-a)^2} \geq \frac{-1}{4}. \quad (1)$$

Bất đẳng thức ở ví dụ 3.2.3 sẽ trở thành bất đẳng thức sau nếu ta thêm vào 1 ở mỗi hạng tử về trái

$$\frac{a^2+b^2}{(a-b)^2} + \frac{b^2+c^2}{(b-c)^2} + \frac{c^2+a^2}{(c-a)^2} \geq \frac{5}{2}. \quad (2)$$

Kết hợp với bất đẳng thức ở ví dụ 3.2.2 ta được bất đẳng thức

$$\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2} \geq \frac{5}{2(a^2+b^2+c^2)}.$$

Cộng hai kết quả (1) và (2) ta được bất đẳng thức

$$\frac{a^2+ab+b^2}{(a-b)^2} + \frac{b^2+bc+c^2}{(b-c)^2} + \frac{c^2+ca+a^2}{(c-a)^2} \geq \frac{9}{4}.$$

Có thể thấy việc sử dụng liên tiếp các hằng đẳng thức và thêm bớt các biểu thức một cách hợp lý đã giúp chúng ta tạo ra những bất đẳng thức mới khá đẹp mắt.

Bây giờ chúng ta sẽ xem xét một cách xây dựng khác cho bất đẳng thức phù hợp với hiện nay. Nó khác với phương pháp cũ về cơ bản, đó là bất đẳng thức có trước còn lời giải cho bất đẳng thức sẽ được tìm ra sau.

Chính vì bất đẳng thức được tạo ra trước mà phương pháp chứng minh sẽ tự nhiên hơn, ban đầu chúng ta không biết phải làm thế nào cả (khác với phương pháp cũ là lời giải bài toán có trước so với bất đẳng thức). Nhưng cũng vì thế mà chúng ta gặp nhiều khó khăn hơn.

Ta xét ví dụ sau

Ví dụ 3.2.4. Chứng minh hoặc phản biện

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{2a}{b^3+c^3} + \frac{2b}{c^3+a^3} + \frac{2c}{a^3+b^3}.$$

Chứng minh. Ta coi như bất đẳng thức là đúng và thử đi tìm cách chứng minh cho nó. Dạng của bất đẳng thức gợi ý cho chúng ta nghĩ đến phương pháp phân tích bình phương S.O.S.

Ta có đẳng thức sau

$$\frac{2a}{b^3 + c^3} - \frac{1}{a^2} = \frac{2a^3 - b^3 - c^3}{a^2(b^3 + c^3)}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} & \frac{2a}{b^3 + c^3} + \frac{2b}{c^3 + a^3} + \frac{2c}{a^3 + b^3} - \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} \\ &= \sum_{a,b,c} (a^3 - b^3) \left(\frac{1}{a^2(b^3 + c^3)} - \frac{1}{b^2(a^3 + c^3)} \right) \\ &= \sum_{a,b,c} \frac{(a^3 - b^3)(a - b)[a^2b^2 - c^3(a + b)]}{a^2b^2(a^3 + c^3)(b^3 + c^3)} \\ &= - \sum_{a,b,c} (a - b)^2 \frac{[c^3(a + b) - a^2b^2](a^2 + ab + b^2)}{a^2b^2c^2(a^3 + b^3)(b^3 + c^3)(c^3 + a^3)}. \end{aligned}$$

Khi cho $b = c$, ta phải có

$$b^3(a + b) \geq a^2b^2 \Leftrightarrow b(a + b) \geq a^2.$$

Tuy nhiên bất đẳng thức này không thể đúng nếu ta lấy a khá lớn so với b , chẳng hạn $a = 5, b = 1$. Như vậy nếu cho $a = 5, b = 1, c = 1$ thì bất đẳng thức ban đầu không đúng. $\square$

Việc tạo ra bất đẳng thức ở ví dụ trên đã không thành công? Không hẳn như thế, vì bằng một thay đổi nhỏ ta có kết quả sau đây

Ví dụ 3.2.5. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác nhọn. Chứng minh bất đẳng thức sau

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{2a}{b^3 + c^3} + \frac{2b}{c^3 + a^3} + \frac{2c}{a^3 + b^3}.$$

Chứng minh. Ta dùng chứng minh hoàn toàn tương tự như trên

Ta có

$$VT - VP = \sum_{a,b,c} (a - b)^2 \frac{[c^3(a + b) - a^2b^2](a^2 + ab + b^2)}{a^2b^2c^2(a^3 + b^3)(b^3 + c^3)(c^3 + a^3)}.$$

Giả sử $a \geq b \geq c$, đặt S_a, S_b, S_c là hệ số tương ứng với $(b - c)^2, (c - a)^2, (a - b)^2$ trong khai triển ở trên. Do a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác nhọn nên $b^2 + c^2 \geq a^2$. Suy ra

$$b^3(a + c) \geq a^2c^2 \leq (b^2 + c^2)c^2.$$

Vì a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác nên

$$\frac{a-c}{a-b} \geq \frac{b}{c}.$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh $b^2S_b + c^2S_c \geq 0$.

Trước hết ta sẽ chứng minh

$$b[b^3(a+c) - a^2c^2] + c[c^3(a+b) - a^2b^2] \geq 0.$$

Thật vậy, bất đẳng thức tương đương với

$$b^4(a+c) + c^4(a+b) \geq a^2bc(b+c),$$

Nhưng vì a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác nhọn nên

$$b^4(a+c) + c^4(a+b) \geq 2bc(b^3+c^3) \geq bc(b+c)(b^2+c^2) \geq a^2bc(b+c).$$

Do đó để có $b^2S_b + c^2S_c \geq 0$ ta chỉ cần chứng minh

$$b^3(a^3+c^3)(a^2+ac+c^2) \geq c^3(a^3+b^3)(a^2+ab+b^2).$$

Bất đẳng thức trên tương đương với

$$\begin{aligned} (a^3b^3 + b^3c^3)(a^2 + ac + c^2) &\geq (a^3c^3 + b^3c^3)(a^2 + ab + b^2) \\ \Leftrightarrow a^5(b^3 - c^3) + a^4bc(b^2 - c^2) + a^3b^2c^2(b - c) &\geq ab^3c^3(b - c) + b^3c^3(b^2 - c^2) \end{aligned}$$

Điều này hiển nhiên đúng vì $a \geq b \geq c$. Bất đẳng thức được chứng minh xong. $\square$

Cả quá trình xây dựng bất đẳng thức như trên là một quá trình rất tự nhiên và hợp lí, đi từ cái không đúng đến cái đúng. Bất đẳng thức có trước và lời giải theo sau bất đẳng thức ấy. Bằng cách này ta có thể tạo ra rất nhiều những bất đẳng thức hay và thú vị, và tất nhiên quan trọng là ta sẽ giải nó như thế nào. Phương pháp phân tích tổng bình phương S.O.S là một công cụ rất hữu ích trong việc này.

KẾT LUẬN

Khóa luận bao gồm ba phần: mở đầu, nội dung và kết luận. Phần nội dung được trình bày trong 3 chương: chương 1, chương 2 và chương 3.

Trong chương 1, chúng tôi hệ thống hóa các kiến thức đã biết về phương pháp phân tích tổng bình phương S.O.S. Các kiến thức này được tổng hợp từ nhiều tài liệu khác nhau của các tác giả Trần Phương và Phạm Kim Hùng. Trong các tài liệu đó, định lý S.O.S chỉ được phát biểu mà không chứng minh. Ở đây, chúng tôi đã trình bày chứng minh một cách đầy đủ và trọn vẹn định lý S.O.S.

Trong chương 2, chúng tôi trình bày biểu diễn cơ sở của phương pháp phân tích tổng bình phương S.O.S và các kỹ thuật phân tích. Mục "Các đẳng thức thường được sử dụng trong phân tích" được chúng tôi tìm tòi và bổ sung khá nhiều kết quả so với các kết quả của tác giả Phạm Kim Hùng. Một số bài toán không có lời giải trong các tài liệu của Phạm Kim Hùng được chúng tôi giải quyết khá triệt để và đã được trình bày trong chương này. Đặc biệt trong chương 2, chúng tôi đã tìm ra một kỹ thuật mới để biểu diễn cơ sở S.O.S cho lớp các bài toán đa thức đối xứng. Với kỹ thuật này, các bất đẳng thức đối xứng ba biến có bậc bé hơn hay bằng 3 được giải quyết một cách dễ dàng.

Trong chương 3, chúng tôi trình bày hai ứng dụng quan trọng của phương pháp phân tích tổng bình phương S.O.S; đó là ứng dụng trong chứng minh bất đẳng thức và ứng dụng trong sáng tạo bất đẳng thức. Hệ thống các bài tập được chúng tôi chọn lọc khá kỹ càng sao cho thể hiện được ý tưởng của phương pháp một cách rõ ràng và mạch lạc.

Tuy nhiên do năng lực bản thân hạn chế, thời gian nghiên cứu không nhiều nên có một số vấn đề mà chúng tôi vẫn chưa giải quyết được. Chẳng hạn chúng tôi muốn tìm một thuật toán đơn giản để đưa về biểu diễn cơ sở cho lớp các bài toán đa thức hoán vị cũng như lớp các bài toán phân thức nhưng chúng tôi chưa thể thực hiện được. Vì thế việc áp dụng phương pháp S.O.S để giải các bài toán này còn gặp nhiều khó khăn, đòi hỏi nhiều thời gian và công sức. Hy vọng rằng công việc này sẽ được giải quyết trong tương lai không xa.

Một lần nữa chúng tôi xin gửi lời tri ân sâu sắc đến thầy giáo Hoàng Tròn đã hết lòng giúp đỡ chúng tôi trong suốt quá trình nghiên cứu. Chúng tôi đã cố gắng để hoàn thành khóa luận một cách tốt nhất có thể. Tuy nhiên không thể tránh

khỏi những thiếu sót. Chúng tôi rất mong nhận được sự nhận xét góp ý của quý thầy cô và bạn đọc để chúng tôi ngày càng tiến bộ hơn. Chúng tôi xin chân thành cảm ơn.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Phạm Kim Hùng (CB), *Sáng tạo bất đẳng thức*, Nhà xuất bản Tri thức, 2006.
- [2] *Olympic Toán học Châu Á Thái Bình Dương*.
- [3] Nguyễn Văn Mậu, *Bất đẳng thức, định lý và áp dụng*, Nhà xuất bản Giáo dục, 2006.
- [4] *Bất đẳng thức và một số vấn đề liên quan*, tài liệu bồi dưỡng giáo viên chuyên trung học phổ thông hè 2005.
- [5] *Tạp chí toán học và tuổi trẻ*.