

PHƯƠNG PHÁP XÂY DỰNG CẤU HÌNH TRONG GIẢI TOÁN TỔ HỢP

I. Giới thiệu

Trong các kì thi VMO; VNTST, hay IMO thì các bài toán về tổ hợp thường đóng vai trò quan trọng. Ta có thể thấy việc xây dựng cấu hình cho bài toán chính là mấu chốt trong các cuộc thi lớn ở khu vực và quốc tế, phương pháp này đã được sử dụng một cách rộng rãi (như trong kỳ thi IMO 2013, bài toán 2). Vì vậy, nhóm học sinh lớp 10A1 Tin chúng em viết chuyên đề này để nêu ra các ý kiến, kinh nghiệm và một số trao đổi về phương pháp này.

Phương pháp xây dựng cấu hình và một số ứng dụng

-Có thể nêu ý tưởng chính của phương pháp này chính là thay đổi cách tiếp cận trong đề bài bằng một con đường khác, một cách nhìn khác có đặc điểm tương đồng với giả thiết ban đầu, mà với nó, ta có thể xử lý bài toán một cách dễ dàng hơn.

Các mô hình ta thường dùng có thể là bảng ô vuông, đồ thị, đường tròn, bao lồi,...

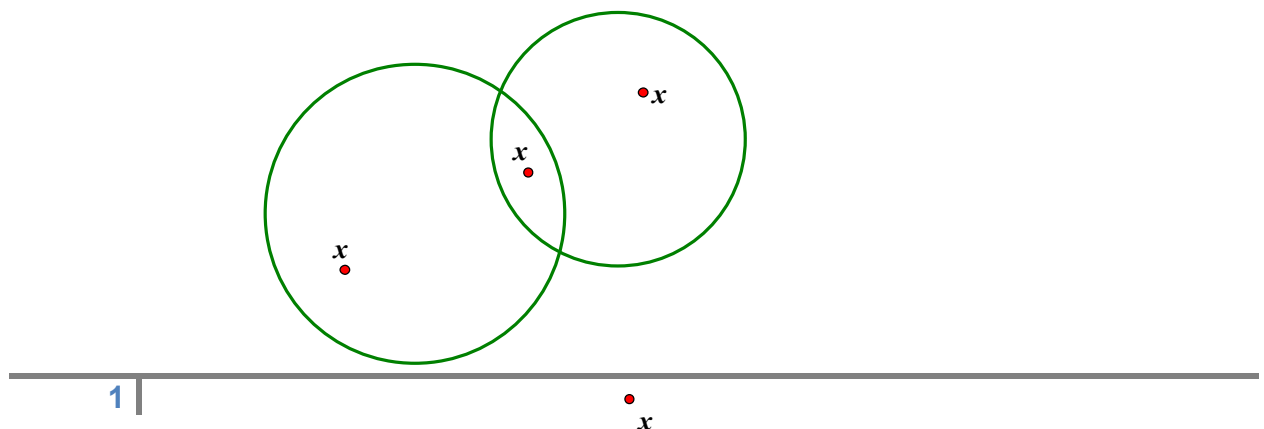
II. Một số bài toán ứng dụng

Chúng ta sẽ bắt đầu với một ví dụ đơn giản:

VD1: Có bao nhiêu cách chia tập hợp S có n phần tử thành hai tập con (bao gồm cả tập rỗng) sao cho hợp của chúng bằng S

Giải:

+) Ta thấy rằng vấn đề ở đây đặt ra khá tổng quát và các ý tưởng đếm bằng truy hồi, chứng



Chuyên đề tổ hợp-
THPT chuyên KHTN

minh bằng quy nạp xuất hiện đầu tiên trong trường hợp này. Tuy nhiên, nếu chúng ta vẽ ra một mô hình để hình dung thì vấn đề có vẻ sáng tỏ hơn.

+ Ta có thể biểu diễn hai tập A;B như trên bởi các hình tròn và công việc cần làm là ứng với mỗi phần tử $x \in S$, xếp nó vào các vòng tròn đó. Rõ ràng ta có bốn cách để sắp xếp:

- $x \in A; x \notin B$ (1)
- $x \in B; x \notin A$ (2)
- $x \in A; x \in B$ (3)
- $x \notin A; x \notin B$ (4)

Nhưng vì yêu cầu của bài toán là “hợp của hai tập con là S” nên không thể tính trường hợp (4) được. Do đó, ứng với mỗi phần tử, ta có đúng 3 cách sắp xếp vào 2 tập hợp.. Từ đây, ta có thể có đáp số bài toán là $\frac{3^n-1}{2} + 1 = \frac{3^n+1}{2}$

Bây giờ chúng ta sẽ đến với một ví dụ khó hơn.

VD2 (Chọn đội tuyển PTNK-09) :

Cho $A = \{1; 2; \dots 2n\}$. Một tập con của A được gọi là “tốt” nếu có đúng hai phần tử x, y và $|x - y| \in \{1; \dots n\}$. Tìm số tập $\{A_1; A_2; \dots A_n\}$ thỏa mãn A_i là tập con “tốt” và $|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = A$

Giải:

Bài toán này hoàn toàn có thể sử dụng hệ thức truy hồi để giải nhưng lập luận sẽ dài và rắc rối, ta chuyển về mô hình sau để dễ hình dung:

1	2		$n - 1$	n
$n + 1$	$n + 2$		$2n - 1$	$2n$

Dễ thấy bài toán được chuyển về trên bảng $2 \times n$, đánh số các số như trên bảng, số tập con “tốt” chính là số cách lát bảng bằng các domino 1×2 . Ngoài ra với n lẻ, ta được bổ sung một quân domino đặc biệt để có thể phủ kín hai ô n và n+1.

Chuyên đề tổ hợp-
THPT chuyên KHTN

Giờ thì bản chất của bài toán đã được lộ rõ, việc xử lý bài toán bằng hệ thức truy hồi giờ đây khá đơn giản:

+ Gọi S_n là số cách lát thỏa mãn đề bài

+ Giả sử ta đã lát được hình chữ nhật $2 \times (n + 1)$ bằng các quân domino phủ lên ô vuông n . Có ba trường hợp:

- (1) Ô $(n, 2n)$ được phủ, rõ ràng phần còn lại là một hình chữ nhật $2 \times n$, số cách lát: S_n
- (2) Ô $(n + 1, 2n)$ được phủ lên, như vậy ô $(2n-1, 2n)$ cũng bị phủ, phần còn lại sẽ là một hình chữ nhật kích thước $2 \times (n - 1)$, số cách lát thỏa mãn S_{n-1}
- (3) Ô $(n, n+1)$ được phủ (n lẻ). Khi đó, phần còn lại chỉ có thể được lát bằng các quân domino nằm ngang (nếu có một quân domino nằm dọc thì hình chữ nhật sẽ bị chia thành hai phần, mỗi phần một số lẻ ô chưa lát), tức là trường hợp này chỉ có một cách lát.

Vậy ta có công thức truy hồi:

$$\begin{cases} S_{2k} = S_{2k-1} + S_{2k-2} - 1 \text{ (bớt một cách lát của } S_{2k-1}) \\ S_{2k+1} = S_{2k} + S_{2k-1} \end{cases}$$

Quy nạp, ta có $S_{2k} = F_{2k}$ và $S_{2k+1} = F_{2k+1}$, với F_n là số Fibonacci thứ n .

($F_0 = F_1 = 1$; $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$), vậy ta có:

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n + \frac{1 + (-1)^n}{2} \right]$$

Tiếp theo, chúng ta xét một ví dụ khó có cách phát biểu khá giống VD2, nhưng việc xây dựng công thức truy hồi lại không hề đơn giản.

VD3 (VMO 2009, P5) :

Cho n nguyên dương. Kí hiệu T là tập gồm $2n$ số nguyên dương đầu tiên. Hỏi có bao nhiêu tập con S của T có tính chất: Trong S , không $\exists a, b$ mà $|a - b| \in \{1, n\}$.

Có thể thấy việc xây dựng mô hình là bảng vuông $2 \times n$ như trên chính là giải pháp duy nhất để “tấn công” bài toán này. Nhưng những điều kiện ở đây đã khiến chúng ta phải lập nhiều công thức truy hồi mới thu được kết quả.

Giải:

+) Xét bảng $2 \times n$:

1	2		$n - 1$	n
$n + 1$	$n + 2$		$2n - 1$	$2n$

Gọi $|A_n|$ là số tập con thỏa mãn đề bài, nó tương đương với số cách chọn một số ô của bảng mà không có hai ô kề nhau hay có hai ô $(n, n + 1)$ gọi là 2 ô “xấu”.

+ Dễ thấy $|A_n| = |B_n| - |C_n|$ trong đó:

$\begin{cases} |B_n| \text{ là số cách chọn ra một số ô của bảng mà không có hai ô kề nhau, có hoặc không có hai ô } (n, n + 1) \\ |C_n| \text{ là số cách chọn ra một số ô vuông của bảng mà hai ô kề nhau, đồng thời có hai ô xấu} \end{cases}$

+ Đếm $|B_n|$:

- Xét hai ô $(n; 2n)$ dễ thấy hai ô đó không cùng được chọn.
- Xét $(n, 2n)$ không được chọn, số cách chọn $|B_n - 1|$.
- Xét $(n, 2n)$ có một trong hai số được chọn.
- Gọi $|D_n|$ là số cách chọn trong bảng $2 \times n$ khuyết đơn.

X						

→ Số cách chọn là $2|D_{n-1}|$

Ta được công thức truy hồi của $|B_n| = |B_{n-1}| + 2|D_{n-1}|$ (1)

Chuyên đề tổ hợp-
THPT chuyên KHTN

+ Đếm $|D_n|$:

- Nếu ô X không được chọn $\rightarrow$ số cách chọn: $|B_{n-1}|$.
 - Nếu ô X được chọn $\rightarrow$ số cách chọn: $|D_{n-1}|$.
- $\rightarrow |D_n| = |B_{n-1}| + |D_{n-1}|$ (2)

Từ (1) và (2) kết hợp với $|B_1| = 1; |B_2| = 7 \rightarrow |B_n| = 2|B_{n-1}| + |B_{n-2}|$.

$$\rightarrow |B_n| = \frac{(1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n}{2}$$

+ Đếm $|C_n|$:

A						
						B

Gọi $|E_n|$ là số cách chọn trên bảng khuyết kép $2 \times n$, vậy $|C_n| = |E_{n-2}|$.

Xét hai ô A,B:

- Nếu A,B cùng không được chọn $\rightarrow$ số cách chọn $|B_{n-2}|$.
 - Nếu A,B cùng được chọn $\rightarrow$ số cách chọn $|E_{n-2}|$.
 - Nếu A,B chỉ có 1 số được chọn $\rightarrow$ số cách chọn $2|D_{n-2}|$.
- $\rightarrow |E_n| = |B_{n-2}| + |E_{n-2}| + 2|D_{n-2}|$
 $= |B_{n-1}| + |E_{n-2}|$

$$\text{Mà } |B_n| = 2|B_{n-1}| + |B_{n-2}| \Leftrightarrow 2|E_n| - |B_n| = 2|E_{n-2}| - |B_{n-2}|$$

$$\Leftrightarrow 2|E_n| - |B_n| = (-1)^n$$

$$\Leftrightarrow |E_n| = \frac{(-1)^n + |B_n|}{2}$$

$$\Leftrightarrow |C_n| = |E_{n-2}| = (-1)^{n-2} + |B_{n-2}|$$

$$\text{VT: } |A_n| = |B_n| - |C_n|$$

Chuyên đề tổ hợp-
THPT chuyên KHTN

$$\leftrightarrow |A_n| = \frac{2|B_n| - |B_{n-2}| + (-1)^{n-3}}{2}$$

$$\leftrightarrow |A_n| = \frac{2[(1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n] - [(1+\sqrt{2})^{n-2} + (1-\sqrt{2})^{n-2}] + (-1)^n}{2}$$

Qua lời giải bài toán trên, chúng ta có thể dễ dàng giải bài toán sau

VD5 (Chọn đội tuyển KHTN năm 2014) :

Cho m, n là các số nguyên dương và $S = \{1; 2; \dots; 2014\}$. Đếm số tập con A của S thỏa mãn nó có m số chẵn, n số lẻ và không có hai số liên tiếp.

Lời giải bài toán trên xin dành cho bạn đọc.

Chúng ta sẽ tiếp tục với một bài toán trong kỳ thi chọn đội tuyển Việt Nam năm 2001 mà nếu không xây dựng mô hình thì rất khó mà tìm ra một cách tiếp cận bài toán.

VD6 (VNTST 2001) : Cho dãy $\{a_n\}$ thỏa mãn $0 < a_{n+1} - a_n < 2001$. Chứng minh rằng $\exists$ vô số cặp số nguyên dương (p, q) thỏa mãn nếu $p < q$ thì $ap \mid aq$.

Giải:

Từ cách xác định dãy, ta thấy rằng số hạng tiếp theo sẽ không lớn hơn số đứng liền trước nó cộng thêm 2001 đơn vị. Như thế, chỉ cần xét 2002 số nguyên dương liên tiếp thì sẽ có ít nhất một số hạng thuộc dãy, đặt tên số đó là a . Ta xây dựng bảng:

$a(1, 1) = a$	$a(1, 2) = a + 1$		$a(1, 2) = a + 1$
$a(2, 1) = a(1, 1)$ $+ \prod_{i=1}^{2002} a(1, i)$	$a(2, 2) = a(1, 2)$ $+ \prod_{i=1}^{2002} a(1, i)$		$a(2, 2002) = a(1, 2000)$ $+ \prod_{i=1}^{2002} a(1, i)$
			
$a(2002, 1) = a(2001, 1)$ $+ \prod_{i=1}^{2002} a(2001, i)$	$a(2002, 2) = a(2001, 1)$ $+ \prod_{i=1}^{2002} a(2001, i)$		$a(2002, 2002) = a(2001, 2002)$ $+ \prod_{i=1}^{2002} a(2001, i)$

Bảng này cho tất cả 2002 cột và 2003 hàng. Trong đó mỗi số hạng ở hàng thứ hai trở đi bằng tích của tất cả các số hạng ở hàng liền trước nó cộng với số hạng cùng cột với nó. Rõ ràng, trong mỗi hàng, có ít nhất một số hạng thuộc dãy đã cho. Từ đó, theo nguyên lý Dirichlê, ta có điều phải chứng minh.

Đôi khi việc xây dựng mô hình kết hợp với nguyên lý đếm bằng hai cách sẽ tạo những lời giải vô cùng độc đáo.

VD7 (Vô địch Toán sinh viên quốc tế 2002)

Hai trăm sinh viên tham dự cuộc thi toán và tham gia giải 6 bài toán. Biết rằng mỗi bài toán được giải bởi ít nhất 120 sinh viên. Chứng minh rằng có hai sinh viên sao cho mỗi bài toán được giải ít nhất bởi một trong hai sinh viên này.

Giải: Giả sử ngược lại, với mỗi hai sinh viên, có một số bài toán mà không ai giải được. Từ đó dẫn đến ý tưởng đếm các cặp sinh viên với bài toán không giải được.

+ Xét bảng gồm 6 hàng, mỗi hàng biểu diễn một bài toán và 200 cột, mỗi cột biểu diễn cho một sinh viên. Ta điền số 1 vào bảng nếu sinh viên tương ứng với cột không giải được bài toán tương ứng với hàng, ghi số 0 cho trường hợp khác. Gọi T là tập các cặp số 1 cùng hàng. Chúng ta đếm T theo hai cách:

- Cách 1: Đếm theo cột: chúng ta giả sử rằng mỗi cặp 2 sinh viên có bài toán không ai trong đó giải được. Do đó, mỗi hai cột, có ít nhất một cặp số 1, trong hai cột này thuộc cùng một hàng. Nên chúng ta có thể tìm phân tử của T trong mỗi cặp cột. Có C_{200}^2 cặp của cột $\rightarrow |T| \geq C_{200}^2 = 19900$ (1).
- Cách 2: Đếm theo hàng: vì mỗi bài toán được giải bởi ít nhất 120 sinh viên; điều đó có nghĩa là nhiều nhất 80 số một trong một hàng. Vậy mỗi một hàng chứa nhiều nhất là C_{80}^2 cặp số 1. Có 6 hàng $\rightarrow |T| \leq 6C_{80}^2 = 18960$ (2).

Từ (1) và (2) ta có $19900 \leq |T| \leq 18960$ (vô lý) $\rightarrow$ ta có điều phải chứng minh.

Lưu ý: Trong những bài toán, cần đánh giá một cách xấp xỉ các đại lượng, ta thường dùng một nhận xét:

Chuyên đề tổ hợp-
THPT chuyên KHTN

- 1) Hàm $f(n) = C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ là một hàm lồi (đây là một số hàm xuất hiện rất thường xuyên trong các bài toán tổ hợp)

Theo bất đẳng thức Jensen, ta có:

$$\sum_{i=1}^n \binom{a_i}{2} \geq \frac{S(S-n)}{2n}$$

($a_1, a_2, \dots, a_n$ nguyên dương và $S = a_1 + a_2 + \dots + a_n$)

Vì đánh giá trên chỉ mang tính chính xác là xấp xỉ nên để đánh giá đúng một đại lượng nào đó, ta sử dụng nhận xét:

2)

$$\sum_{i=1}^n \binom{a_i}{2} \geq r \cdot C_{k+1}^2 + (n-r) \cdot C_k^2$$

($a_1, a_2, \dots, a_n$ nguyên dương và $S = a_1 + a_2 + \dots + a_n = nk + r$; $k, r \in \mathbb{Z}^+$ thỏa mãn $0 \leq r \leq n$)

Chúng ta xét bài toán:

VD8 (Chọn đội tuyển ĐHSP 2014) :

Cơ sở dữ liệu của thư viện Quốc gia có đúng 2016 loại khác nhau. Thư viện này cho phép 2013 thư viện địa phương được phép khai thác ít nhất 1008 loại tạp chí khác nhau và hai thư viện địa phương bất kỳ có tối đa 504 loại tạp chí mà cả hai thư viện địa phương đó cùng được khai thác. Chứng minh rằng có không quá 2 loại tạp chí trong cơ sở dữ liệu của thư viện quốc gia mà cả 2013 thư viện địa phương đều không thể khai thác đó.

Ta thấy việc xây dựng mô hình ở bài này không còn giống các bài trước nữa mà ta sẽ đi xây dựng bài toán dưới dạng tập hợp.

Giải: Giả sử phản chứng có hai loại tạp chí mà không có bất kỳ một thư viện địa phương nào khai thác nó. Ta chuyển bài toán về dưới mô hình tập hợp:

Chứng minh $\exists$ 2013 tập con $A_1, A_2, \dots, A_n \subset X = \{a_1, a_2, \dots, a_{2014}\}$ thỏa mãn

i. $|A_i| \geq 1008$

ii. $|A_i \cap A_j| \leq 504$

Chuyên đề tổ hợp-
THPT chuyên KHTN

Gọi d_i là số tập con mà phần tử a_i thuộc vào ($i = \overline{1, 2014}$).

$$\Leftrightarrow \sum |A_i \cap A_j| = \sum_{i=1}^{2014} \binom{d_i}{2} \leq 504 \cdot \binom{2013}{2} \text{ (theo điều kiện i) (2).}$$

$$\text{Mà } \sum_{i=1}^{2014} \binom{d_i}{2} \geq 2014 \cdot \left(\frac{\sum_{i=1}^{2014} d_i}{2} \right) \geq 2014 \cdot \left(\frac{2013 \cdot 1008}{2014} \right) \text{ (3).}$$

$$\text{Từ (2) và (3) } \rightarrow 504 \cdot \binom{2013}{2} \geq 2014 \cdot \left(\frac{2013 \cdot 1008}{2014} \right).$$

Để kiểm tra điều này vô lý nên bài toán được chứng minh.

Chúng ta lại xét một bài toán với việc xây dựng mô hình kết hợp với phương pháp đếm bằng hai cách, nhưng ở đây đánh giá “chặt” là rất cần thiết nên nhận xét 2 lúc này được sử dụng thay vì nhận xét 1.

VD9 (Trường đông Toán học 2013):

Cô giáo có 2013 viên kẹo gồm 11 loại khác nhau. Cô chia cho mỗi học sinh của mình mỗi người một số viên kẹo và không có học sinh nào nhận nhiều hơn một viên kẹo ở cùng loại kẹo. Cô yêu cầu hai học sinh khác nhau bất kỳ so sánh các viên kẹo mình nhận được và viết số loại kẹo mà cả hai cùng có lên bảng. Biết mỗi cặp bất kỳ đều được lên bảng đúng một lần. Gọi tổng các số được viết lên bảng là M .

a) Tìm min M

b) Tìm min M khi cô giáo có 9 loại kẹo

Nhận xét: Một lần nữa, mô hình tập hợp lại xuất hiện và xây dựng cho bài toán.

Giải:

a) Giả sử có m học sinh được đánh số thứ tự $1, 2, \dots, m$ và 11 loại kẹo là

$a_1, a_2, \dots, a_{11}$. Đặt $X = \{a_1, a_2, \dots, a_{11}\}$ và $A_1, A_2, \dots, A_m$ là tập hợp các loại kẹo mà các học sinh $1, 2, \dots, m$ nhận được lần lượt. Theo giả thiết thì $A_1, A_2, \dots, A_m \subset X$

Với mỗi $i = 1, 2, \dots, 11$, gọi $d_{(a_i)}$ là số lượng kẹo loại $a_i \rightarrow \sum_{i=1}^{11} d_{(a_i)} = 2013$.

Ta cũng có $M = \sum_{1 \leq i < j \leq m} |A_i \cap A_j|$ ($\overline{1, 11}$).

$$\text{Để có } M = \sum_{1 \leq i < j \leq m} |A_i \cap A_j| = \sum_{i=1}^{11} \binom{d_{(a_i)}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{11} (d_{(a_i)}^2 - d_{(a_i)}).$$

Theo bất đẳng thức BCS, ta có:

$$M \geq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{(\sum_{i=1}^{11} d_{(a_i)})^2}{11} - 2013 \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2013^2}{11} - 2013 \right)$$

$$\text{Dấu “=” } \Leftrightarrow d_{(a_1)} = d_{(a_2)} = \dots = d_{(a_{11})} = \frac{2013}{11} = 183$$

Chuyên đề tổ hợp-
THPT chuyên KHTN

$$\rightarrow M_{\min} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2013^2}{11} - 2013 \right)$$

- b) Lại lập luận tương tự, gọi $b_1, b_2, \dots, b_9$ là các loại kẹo $\alpha d_{(b_i)}$; $i = \overline{1, 9}$ là số viên kẹo mỗi loại. Ta cũng có:

$$M = \sum_{i=1}^9 d_{(b_i)} = 2013$$

Ta cần tìm min $\sum_{i=1}^9 (d_{(b_i)})^2$

Ta thấy rằng nếu có hai giá trị: $d_{(b_i)} - d_{(b_j)} \geq 2$ ($1 \leq i, j \leq 9$) thì ta thay $d_{(b_i)}$ giảm 1 đơn vị, tăng $d_{(b_j)}$ lên 1 đơn vị, ta có:

$$(d_{(b_i)} - 1)^2 + (d_{(b_j)} + 1)^2 - (d_{(b_i)})^2 - (d_{(b_j)})^2 = 2[d_{(b_j)} - d_{(b_i)}] > 0$$

Do đó để $\sum_{i=1}^9 (d_{(b_i)})^2$ min thì ta cần $d_{(b_i)} - d_{(b_j)} \leq 1 \forall i, j \in \{1, \dots, 9\}$

$d_{(b_1)} \leq d_{(b_2)} \leq \dots \leq d_{(b_9)}$ từ điều kiện trên, ta thấy các số $d_{(b_i)}$ chỉ nhận một trong hai giá trị là $k, k+1$ ($k \in \mathbb{Z}^+$). Giả sử có t số k thì có $9-t$ số $k+1$.

Cần tìm min $M = \frac{1}{2} [tk^2 + (9-t)(k+1)^2 - 2013]$ với $tk + (9-t)(k+1) = 2013$

$\rightarrow t = 9k - 2004$. Thay vào M, ta có:

$$M = \frac{1}{2} [(9k - 2004)k^2 + (2013 - 9k)(k+1)^2 - 2013]$$

$$\text{Do } 0 \leq t \leq 9 \rightarrow 0 \leq 9k - 2004 \leq 9 \rightarrow \frac{2004}{9} \leq k \leq \frac{2013}{9} \rightarrow k = 223$$

$$\rightarrow M_{\min} = \frac{1}{2} (3 \cdot 223^2 + 6 \cdot 224^2 - 2013)$$

Dấu “=” $\leftrightarrow$ có 3 giá trị 223 và 6 giá trị 224.

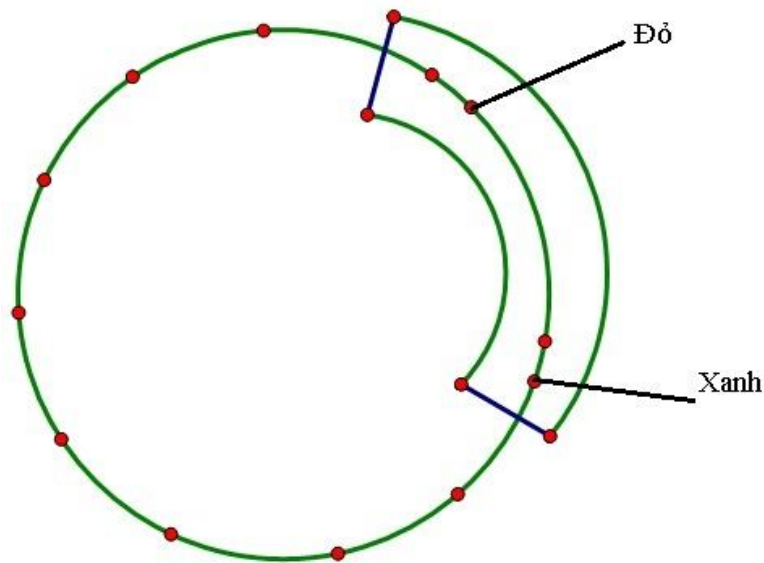
Tiếp theo chúng ta sẽ xét một định lý rất kinh điển với cách chứng minh rất đẹp bằng việc xây dựng mô hình.

VD10 (Định lý Erdos-Ko-Rado) :

Cho F là một họ các tập con có k phần tử của $\{1, 2, \dots, n\}$ thỏa mã 2 tập bất kỳ của F giao nhau nếu $K \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Chứng minh rằng $|F| \leq \binom{n-1}{k-1}$

Giải:

Ta xét mô hình:



Ta xếp n điểm trên vòng tròn thỏa mã mỗi đoạn gồm k điểm thì có hoặc không có điểm chung. Ta chia các tập k phần tử (mỗi đoạn k điểm) làm hai tập:

- + A: gồm các đoạn k điểm mà với mỗi cách xếp n điểm trên vòng tròn mà thuộc F.
- + B: gồm các đoạn k điểm bất kỳ.

Ta có: $|A| = |F|$; $|B| = \binom{n}{k}$

Ta chú ý: $\frac{k}{n} \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} \rightarrow$ Bài toán cần chứng minh tương đương $|A| \leq \frac{k}{n} |B|$.

Ta chỉ cần chứng minh nếu $k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ thì A có nhiều nhất k phần tử (**k đoạn**). Với mỗi đoạn thuộc A, ta tô xanh phần tử cuối cùng của nó và tô đỏ phần tử đứng sau phần tử đầu tiên của nó.

Nhận xét: Tập các điểm xanh nhận được từ các điểm đỏ qua một phép quay.

Vậy sau 1 điểm xanh, $n - 2k$ điểm còn lại không thể là đỏ vì giả sử một điểm đỏ, thì những đoạn chứa nó sẽ đôi một rời nhau với các đoạn chứa điểm xanh mà ta đang xét. Từ đó, ta có thể tìm được một đoạn độ dài $n - 2k$ mà không có điểm xanh, di chuyển đoạn này theo chiều kim đồng hồ đến khi nào điểm đầu tiên của đoạn này là xanh, không chứa điểm đỏ nào $\rightarrow$ các điểm xanh và đỏ chỉ nằm trong $2k$ điểm còn lại.

Không có điểm nào được tô bởi hai màu, vì các đoạn nó thuộc sẽ không giao nhau.

$\rightarrow$ Số điểm xanh và đỏ là như nhau $\rightarrow$ Mỗi loại có $\leq k$ điểm.

Chuyên đề tổ hợp-
THPT chuyên KHTN

Mỗi đoạn giao nhau chứa nhiều nhất 2 điểm xanh, đỏ $\rightarrow$ có $\leq k$ điểm $\in A$.

Để kết thúc bài viết này, chúng ta sẽ đến với bài toán 2, IMO2013, một bài toán điển hình cho phương pháp xây dựng cấu hình.

VD11 (IMO2013,P2) :

Một tập hợp gồm 4027 điểm trên mặt phẳng được gọi là tập “Colombia” nếu không có ba điểm nào trong số đó thẳng hàng, đồng thời có 2013 điểm được tô đỏ và 2014 điểm tô xanh. Mặt phẳng được phân chia thành các miền khi ta kẻ một số đường thẳng. Một cách kẻ một số đường thẳng được gọi là “cách kẻ tốt” nếu thỏa mãn hai điều kiện sau:

- 1) Không có đường thẳng nào đi qua dù chỉ một điểm thuộc tập hợp đó.
- 2) Không miền nào chứa cả điểm màu đỏ và điểm màu xanh.

Tìm k nhỏ nhất sao cho với tập “Colombia” tùy ý gồm 4027 điểm, $\exists$ 1 cách kẻ k đường thẳng là “cách kẻ tốt”.

Giải:

+ Lời giải 1 (của Tạ Hà Nguyên – 10A1 Toán)

- Trước tiên ta chứng minh bổ đề 1: Cho a điểm xanh và a điểm đỏ cách đều nhau trên đường tròn và sắp xếp xen kẽ (tức là một xanh lại một đỏ) thì số đường thẳng ít nhất để chia các vùng thỏa mãn điều kiện đề bài là a .
- Chứng minh:
Nếu ta coi một điểm xanh và một điểm đỏ kề nhau là một “cụm” thì tồn tại một đường thẳng đi qua giữa hai điểm xanh đỏ của cụm đó mà ta tạm gọi là đi qua cụm, khi đó do các cụm nằm trên đường tròn nên có một đường thẳng đi qua tối đa là 2 cụm. Mặt khác tổng số cụm là $a+a=2a$ nên số đường thẳng ít nhất thỏa mãn là $2a/2=a$.
- Bổ đề 2: Hai điểm bất kỳ cùng màu trong các điểm đã cho có thể cùng được nằm trong một miền tạo bởi hai đường thẳng song song sao cho miền chứa hai điểm cùng màu đó không chứa bất kỳ điểm khác màu nào còn lại.
- Chứng minh:
Xét hai điểm A, B cùng màu, giả sử là xanh. Nối A, B . Xét ở hai nửa mặt phẳng bờ AB có hai điểm X, Y màu đỏ sao cho X, Y gần AB nhất (X, Y ở hai nửa mặt phẳng khác nhau bờ AB). Khi đó vẽ hai đường thẳng song song AB mà ta gọi là S sao cho khoảng cách từ S đến AB nhỏ hơn khoảng cách từ X đến AB (X không nằm trên AB do không có ba điểm thẳng hàng). Lập luận tương tự về nửa mặt phẳng bên kia S' và Y .

Chuyên đề tổ hợp-
THPT chuyên KHTN

Từ đó A, B nằm trong miền giữa hai đường thẳng S, S' không chứa bất kỳ điểm đỏ nào khác, đpcm.

Quay lại bài toán, ở đây 2013 đỏ và 2014 xanh, rõ ràng việc thêm một điểm xanh vào thì bổ đề trên vẫn đúng, như vậy số đường ít nhất bằng $\lceil \frac{2013+2014}{2} \rceil = 2013$

Ta chứng minh 2013 đường thỏa mãn.

Thật vậy, xét bao lồi tất cả các điểm trên:

+ TH1: Trong bao lồi (hay tạm gọi là các đa giác lồi) tồn tại một đỉnh đỏ gọi là C.

Khi đó, xét hai đỉnh láng giềng với đỉnh đỏ đó (tức 2 đỉnh nối với C bằng cạnh của đa giác bao lồi) gọi chúng là E, F.

Từ C, kẻ đường thẳng $l \parallel EF$. Gọi d_1 là khoảng cách EF đến l , d_2 là khoảng cách từ điểm xanh gần C nhất. Khi đó, vẽ $l' \parallel l$ và $d(l' \rightarrow l) < \min\{d_1; d_2\}$. Dễ thấy l' chứa toàn điểm đỏ và nó chứa ít nhất một đỉnh đỏ. Do đó, còn lại 2012 đỉnh đỏ khác, áp dụng bổ đề 2 cho từng cặp đỉnh, ta thu được $\frac{2012}{2} \cdot 2 = 2012$ đường.

Cộng thêm l' , ta có tất cả $2012+1=2013$, chú ý do các đỉnh đỏ được cô lập và các miền chứa điểm đỏ không chứa bất kỳ điểm xanh nào nên đó là một cách chia thỏa mãn, đpcm.

+ TH2: Trong bao lồi, không có đỉnh đỏ tức là đỉnh của bao lồi toàn xanh.

Khi đó, gọi hai đỉnh xanh liên tiếp là M, N và hai đỉnh láng giềng (với M,N tương ứng) là U, V.

Gọi d_1 là khoảng cách từ U đến MN, d_2 là khoảng cách từ V đến MN, d_3 là khoảng cách của đỉnh đỏ gần nhất đến MN.

Khi đó, vẽ đường thẳng $k \parallel MN$ và có khoảng cách đến MN đủ nhỏ để nhỏ hơn $\min\{d_1, d_2, d_3\}$. Khi đó ở nửa mặt phẳng bờ k không chứa toàn điểm xanh và chứa ít nhất 2 điểm xanh.

Còn $2014-2=2012$ điểm xanh, thực hiện tương tự với bổ đề 2, ta được số đường là $\frac{2012}{2} \cdot 2 + 1 = 2013$ (đpcm). Vậy số đường ít nhất là 2013.

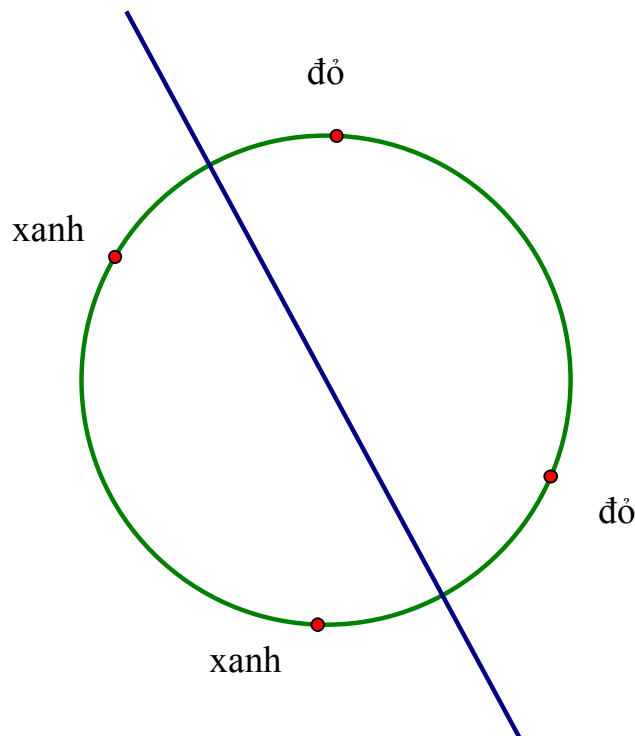
+Lời giải 2(của Nguyễn Tuấn Anh – 10A1 Tin) :

- Ta chứng minh với N điểm đỏ, N+1 điểm xanh thì $\min k=N$

+ Chứng minh $k \geq N$

Xét cấu hình là một đường tròn gồm N đỏ, N+1 xanh xếp xen kẽ nhau (như hình dưới), 1 đường thẳng đi qua khoảng trống giữa hai điểm xanh đỏ là một đường thẳng “đẹp”. Dễ thấy một đường thẳng “đẹp” chỉ đi qua nhiều nhất là 2 khoảng trống.

Vậy số lượng đường thẳng “đẹp” ít nhất: $\left\lceil \frac{N+N+1}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{2N+1}{2} \right\rceil = N$.



Bước 2: Ta xây dựng quy nạp 1 tập hợp N đỏ, $N+1$ xanh thì tồn tại $\left\lceil \frac{2N+1}{2} \right\rceil = N$ đường thẳng chia các mặt phẳng làm các đường thẳng thỏa đề:

$N=1$ (đúng)

Giả sử đúng với $\forall k < N$. Ta chứng minh đúng đến N .

Gọi d là số các miền mặt phẳng có chứa các điểm khác màu. Lập bao lồi của $2N+1$ điểm đã cho.

Xét 1 điểm A là đỉnh bao lồi và B là đỉnh kề nó. Xét 1 đường thẳng đi qua A và khoảng cách các điểm khác $\rightarrow AB$ (xét A, B cùng màu, giả sử là đỏ)

+ Xét 1 đường thẳng đi qua A , qua đường thẳng đó theo chiều kim đồng hồ và dừng lại khi nó “chạm” đến một điểm xanh có khoảng cách $\rightarrow AB$ là nhỏ nhất vì điểm xanh đỏ nằm trên l nên phần mà đường thẳng đó quét qua sẽ không chứa bất kỳ điểm xanh nào hay nó chỉ chứa toàn điểm đỏ $\rightarrow d$ giảm đi 1.

Chuyên đề tổ hợp-
THPT chuyên KHTN

Tiếp tục quá trình, vẫn chọn trục quay là A nhưng xét 1 đường thẳng m khác và xét khoảng cách của các điểm khác đến đường thẳng ở trên.

Ta thấy d luôn giảm vì d là dãy số nguyên dương giảm vô hạn $\rightarrow$ tồn tại một thời điểm mà $d=0$.

+Với trường hợp (A; B khác màu) ta lại xét một đỉnh C kề A hoặc B. Giả sử kề A vì C phải cùng màu với hoặc là A và B. Giả sử C cùng màu với A, lại chọn trục quay như trên với đường thẳng AC.

Vậy ta có kết luận: luôn tồn tại cách chia mà các điểm thuộc miền không chứa điểm nào khác màu

Ta có: N điểm đỏ, theo giả thiết quy nạp, nó sẽ được chia bởi $\lfloor \frac{N}{2} \rfloor$ đường thẳng.

N+1 điểm xanh, theo giả thiết quy nạp, nó sẽ được chia bởi $\lfloor \frac{N+1}{2} \rfloor$ đường thẳng.

Mà $\lfloor \frac{N}{2} \rfloor + \lfloor \frac{N+1}{2} \rfloor = N$ nên ta có điều phải chứng minh.

III. Một số bài toán áp dụng (bạn đọc tự làm);

1. (IMO 98)

Trong một cuộc thi, có a người dự thi và b câu trả lời, trong đó $b \geq 3$. Mỗi câu trả lời của một người dự thi hoặc là “đúng” hoặc là “sai”. Giả sử k là số sao cho bất kỳ hai câu trả lời trùng với nhiều nhất k người dự thi.

Chứng minh rằng: $\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}$

2. (Olympic 30/4/2008)

Cho n số thực $a_1, a_2, \dots, a_n$ bất kỳ. Chứng minh tồn tại số thực x thỏa mãn $a_1 + x, a_2 + x, \dots, a_n + x$ đều là các số vô tỷ.

3. (Nga 1996)

Cho biết có 16000 ủy ban được tạo bởi 1600 ủy viên. Mỗi ủy ban có đúng 80 ủy viên. Chứng minh rằng $\exists$ 2 ủy ban có ít nhất 4 ủy viên chung.

4. (Ba Lan 1995)

Chuyên đề tổ hợp-
THPT chuyên KHTN

Có bao nhiêu tập con của tập gồm $2n$ số nguyên dương đầu tiên sao cho trong đó $\nexists 2$ số a, b mà $a+b=2n+1$.

5. (Chọn đội tuyển VN 2013)

Cho khối lập phương $10 \times 10 \times 10$ gồm 1000 ô vuông đơn vị màu trắng. A và B chơi một trò chơi. A chọn số dải $1 \times 1 \times 10$ sao cho hai dải bất kỳ không có chung đỉnh hoặc cạnh rồi đổi tất cả các ô sang màu đen. B thì được chọn một số ô bất kỳ của hình lập phương rồi hỏi A các ô này màu gì. Hỏi B cần chọn ít nhất bao nhiêu ô để mọi câu trả lời của A thì B luôn xác định được những ô nào là màu đen.

6. (IMO 2001)

Có 21 nữ $\times$ 21 nam tham gia thi toán, biết:

- i) Mỗi một người dự thi giải nhiều nhất 6 bài toán.
- ii) Với mỗi cặp nữ và nam, có ít nhất một bài toán được giải bởi cả nữ và nam

Chứng minh có một bài toán được giải bởi ít nhất 3 nam và 3 nữ.

7.(Secbia 2011)

Cho tập T gồm 66 điểm trên mặt phẳng, và P gồm 16 đường thẳng trên mặt phẳng. Một cặp (A, l) là tốt nếu $A \in T, l \in P$ và $A \in l$. CM số cặp tốt nhiều nhất là 159, hãy xây dựng một trường hợp dấu bằng xảy ra.

IV.Tài liệu tham khảo:

1. *102 combinatorial problem from the training of the USA IMO team: Titu Andreescu, Zuming Feng.*
2. *Problems from the book: Titu Andreescu, Gabriel Dospinescu.*
3. *200 bài thi vô địch Toán tổ hợp: Nguyễn Quý Dy, Vũ Dương Thụy, Nguyễn Văn Nho.*
4. *Một số kiến thức cơ sở về graph hữu hạn: Vũ Đình Hòa.*
5. *Lý thuyết tổ hợp và các bài toán ứng dụng: Vũ Đình Hòa.*