

# PHƯƠNG PHÁP NHÂN TỬ LAGRANGE<sup>1</sup> -METHOD OF LAGRANGE MULTIPLIERS

Trần Trung Kiên

TP. Hồ Chí Minh- Ngày 30 tháng 9 năm 2012

Phương pháp nhân tử Lagrange (sẽ được học trong chương trình toán cao cấp của bậc đại học) khá hiệu quả trong những bài toán cực trị có điều kiện ràng buộc ngoài ra còn có thể dùng để tìm điều kiện xảy ra dấu bằng của bất đẳng thức.

## ■ Định nghĩa

Cực trị (cực đại hoặc cực tiểu) có điều kiện của hàm hai biến  $z = f(x; y)$  là cực trị của hàm này với điều kiện là các biến  $x, y$  phải thỏa ràng buộc bởi phương trình  $\varphi(x; y) = 0$ .

Để tìm cực trị có điều kiện của hàm  $z = f(x; y)$  khi hiện hữu phương trình ràng buộc  $\varphi(x; y) = 0$ , người ta thiết lập một hàm bổ trợ là hàm Lagrange:

$L(x; y; \lambda) = f(x; y) + \lambda\varphi(x; y)$ , trong đó  $\lambda$  là một nhân tử hằng chưa xác định, gọi là nhân tử Lagrange.

Điều kiện cần của cực trị là hệ ba phương trình.  $L'_x(x; y; \lambda) = f'_x(x; y) + \lambda\varphi'_x(x; y) = 0$

$L'_y(x; y; \lambda) = f'_y(x; y) + \lambda\varphi'_y(x; y) = 0$

$\varphi(x; y) = 0$

Giải hệ trên ta tìm được nghiệm là  $x_0; y_0; \lambda_0$ . Vấn đề tồn tại và đặc tính của cực trị có điều kiện được giải bằng cách xét dấu vi phân cấp 2 của hàm Lagrange tại điểm  $P_0(x_0; y_0)$  và  $\lambda_0$  - nghiệm của hệ phương trình trên.  $P_0(x_0; y_0)$  là điểm dừng của hàm L.

$$d^2L = L''_{xx}dx^2 + 2L''_{xy}dxdy + L''_{yy}dy^2$$

Trong đó  $dx; dy$  thỏa mãn ràng buộc biểu thị bằng phương trình

$$\varphi'_x dx + \varphi'_y dy = 0 (dx^2 + dy^2 \neq 0)$$

Cụ thể xét hàm  $f(x; y)$  đạt cực đại có điều kiện nếu  $d^2L < 0$  và đạt cực tiểu có điều kiện nếu  $d^2L > 0$  tại điểm dừng  $P_0(x_0; y_0)$  và nhân tử  $\lambda_0$ .

## ■ Các bước cơ bản của phương pháp nhân tử Lagrange

1. Phát biểu bài toán dưới dạng mô hình toán học. Cực đại hoặc cực tiểu của hàm  $z = f(x; y)$  với điều kiện ràng buộc  $\varphi(x; y) = 0$
2. Thiết lập hàm Lagrange  $L(x; y; \lambda) = f(x; y) + \lambda\varphi(x; y)$
3. Tìm điểm dừng của L, tức là giải hệ phương trình

$$\begin{cases} L'_x(x; y; \lambda) = 0 \\ L'_y(x; y; \lambda) = 0 \\ L'_\lambda(x; y; \lambda) = 0 \end{cases}$$

4. Xét dấu  $d^2L$  tại điểm  $(x_0; y_0)$  mà  $(x_0; y_0; \lambda_0)$  là nghiệm của hệ phương trình ở bước 3.

- Nếu  $d^2L(x_0; y_0; \lambda_0) < 0 \Rightarrow z_{max} = f(x_0; y_0)$
- Nếu  $d^2L(x_0; y_0; \lambda_0) > 0 \Rightarrow z_{min} = f(x_0; y_0)$

Để nắm vững phương pháp trên ta quan sát bài toán đơn giản sau:

<sup>1</sup>Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) là nhà toán học và thiên văn học người Pháp.

**1** Cho hai số thực  $x, y$  thỏa mãn điều kiện  $x + y = 10$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$f(x; y) = x^2 + y^2$$

**Giải**

**Bước 1:** Tìm cực tiểu đối với  $f(x; y) = x^2 + y^2$  thỏa mãn điều kiện  $\varphi(x; y) = x + y - 10 = 0$

**Bước 2:**  $L(x; y; \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x + y - 10)$

**Bước 3:**  $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + \lambda = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-\lambda}{2}$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y + \lambda = 0 \Leftrightarrow y = \frac{-\lambda}{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda} = x + y - 10 = 0 \Rightarrow \frac{-\lambda}{2} \cdot 2 = 10 \Leftrightarrow \lambda = -10$$

Điểm dừng  $(5; 5; -10)$

**Bước 4:**  $L''_{xx} = 2; L''_{yy} = 2; L''_{xy} = 0; d^2L(5; 5; -10) = 2(dx^2 + dy^2) > 0$

$$f_{min} = f(5; 5) = 5^2 + 5^2 = 25$$

Qua bài toán 1 chúng ta đã phần nào đó nắm được "tư tưởng" phương pháp này. Để hiểu sâu hơn ta tìm hiểu qua các bài toán khó hơn sau đây.

**2** Nếu  $a$  và  $b$  là các số thực dương thỏa mãn  $a^{14} + b^{14} = 2$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{5a^2}{b} + \frac{3b^3}{a^2} \geq 8$$

**Giải**

Thiết lập hàm Lagrange  $L(a, b) = 5\frac{a^2}{b} + 3\frac{b^3}{a^2} - \lambda(a^{14} + b^{14} - 2)$ .

Điểm cực trị là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial a} = \frac{10a}{b} - 6\frac{b^3}{a^3} - 14a^{13}\lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial b} = \frac{-5a^2}{b^2} + 9\frac{b^2}{a^2} - 14b^{13}\lambda = 0 \\ a^{14} + b^{14} = 2 \end{cases}$$

Đặt  $x = \frac{a}{b}$ , ta quy ước mẫu số bằng 0 thì tử bằng 0 đặt  $P(x) = 5x^{18} - 9x^{14} + 10x^4 - 6 = 0$ .

$P(x) = (x^2 - 1)Q(x)$ , với  $Q(x)$  không có nghiệm thực.

Vậy  $a, b > 0$  khi  $x = 1$ , điểm cực trị tại  $a = b = 1$ , ta có giá trị nhỏ nhất bằng 8.

**3** (British Mathematical Olympiad 1986) Cho  $a, b, c$  thực thỏa  $a + b + c = 0$  và  $a^2 + b^2 + c^2 = 6$ .

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$A = a^2b + b^2c + c^2a$$

Bài toán này đầu bằng xảy ra khá đặc biệt khi  $x = 2\cos\frac{2\pi}{9}; y = 2\cos\frac{4\pi}{9}; z = 2\cos\frac{8\pi}{9}$ .

Chính vì thế nên bài toán gây khó dễ cho các phương pháp ta đã biết, thậm chí là phương pháp mạnh như S.O.S, U.M.V,.... Trong quyển sử dụng phương pháp *Cauchy - Schwarz* để chứng minh bất đẳng thức anh Cẩn có một lời giải khá độc đáo như sau:

**Giải**

Xét hàm nhân tử Lagrange như sau:

$$f(a; b; c) = a^2b + b^2c + c^2a + \lambda_1(a + b + c) + \lambda_2(a^2 + b^2 + c^2 - 6)$$

Các điểm cực trị là nghiệm hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial a} = \frac{\partial f}{\partial b} = \frac{\partial f}{\partial c} = 0 \\ a + b + c = 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2ab + c^2 + \lambda_1 + 2\lambda_2 a = 0 \\ 2bc + a^2 + \lambda_1 + 2\lambda_2 b = 0 \\ 2ca + b^2 + \lambda_1 + 2\lambda_2 c = 0 \\ a + b + c = 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 6 \end{cases}$$

Cộng vế với vế của phương trình thứ nhất, thứ hai, thứ ba ta được

$$(a + b + c)^2 + 3\lambda_1 + 2\lambda_2(a + b + c) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 0$$

Đến đây ta được

$$\begin{cases} 2ab + c^2 + 2\lambda_2 a = 0 \\ 2bc + a^2 + 2\lambda_2 b = 0 \\ 2ca + b^2 + 2\lambda_2 c = 0 \\ a + b + c = 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 6 \end{cases}$$

Từ đây ta có

$$\frac{2ab + c^2}{a} = \frac{2bc + a^2}{b} = \frac{2ca + b^2}{c} = -2\lambda_2$$

Đây là điều kiện của dấu đẳng thức trong bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz* nên ta sẽ chứng minh bài toán như sau:

Theo bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz* ta có

$$[a(2ab + c^2) + b(2bc + a^2) + c(2ca + b^2)]^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)[(2ab + c^2)^2 + (2bc + a^2)^2 + (2ca + b^2)^2]$$

Mặt khác ta có:  $a(2ab + c^2) + b(2bc + a^2) + c(2ca + b^2) = 3(a^2b + b^2c + c^2a)$  và

$$\sum (2ab + c^2)^2 = 2(ab + bc + ca)^2 + (a^2 + b^2 + c^2)^2 = 54$$

Nên do đó  $A = a^2b + b^2c + c^2a \leq 6$ .

Dấu "=" xảy ra khi  $x = 2\cos\frac{2\pi}{9}; y = 2\cos\frac{4\pi}{9}; z = 2\cos\frac{8\pi}{9}$

**4** Cho  $x, y, z$  thực thỏa  $x + y + z = 0$  và  $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ . Tìm GTLN, GTNN của biểu thức:  

$$P = x^3 + y^3 + z^3$$

**Giải**

Đặt  $f(x; y; z) = x^3 + y^3 + z^3 + \lambda_1(x + y + z) + \lambda_2(x^2 + y^2 + z^2 - 2)$  Điểm cực trị là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2 \end{cases}$$

Hay

$$\begin{cases} 3x^2 + \lambda_1 + 2\lambda_2 x = 0 \\ 3y^2 + \lambda_1 + 2\lambda_2 y = 0 \\ 3z^2 + \lambda_1 + 2\lambda_2 z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2 \end{cases}$$

Cộng lại ta có  $3(x^2 + y^2 + z^2) + 3\lambda_1 + 2\lambda_2(x + y + z) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = -2$  Thay vào hệ trên ta có

$$\begin{cases} 3x^2 + 2\lambda_2 x - 2 = 0 \\ 3y^2 + 2\lambda_2 y - 2 = 0 \\ 3z^2 + 2\lambda_2 z - 2 = 0 \end{cases}$$

Ở đây ta quy ước nếu mẫu bằng 0 thì tử bằng 0

$$\frac{3x^2 - 2}{x} = \frac{3y^2 - 2}{y} = \frac{3z^2 - 2}{z} = -2\lambda_2$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có:

$$\begin{aligned} [x(3x^2 - 2) + y(3y^2 - 2) + z(3z^2 - 2)]^2 &\leq (x^2 + y^2 + z^2)[(3x^2 - 2)^2 + (3y^2 - 2)^2 + (3z^2 - 2)^2] \\ &= 2.[9(x^4 + y^4 + z^4) - 12] = 12 \end{aligned}$$

Do  $x^4 + y^4 + z^4 = (x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2[(xy)^2 + (yz)^2 + (xz)^2] = 4 - 2[(xy + xz + yz)^2 - 2xyz(x + y + z)]$  Mà  $xy + xz + yz = \frac{(x + y + z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2)}{2} = -1$  Do đó.  $x^4 + y^4 + z^4 = 2$  Vậy  $-\frac{2\sqrt{3}}{3} \leq P \leq \frac{2\sqrt{3}}{3}$

•  $\min P = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$  khi  $(x; y; z) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$  và các hoán vị.

•  $\max P = \frac{2\sqrt{3}}{3}$  khi  $(x; y; z) = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$  và các hoán vị.

**5** Cho  $a; b; c$  thực thỏa mãn  $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$D = a + b + c$$

**Giải**

Đặt  $f(a; b; c) = a + b + c; g(a; b; c) = a^2 + b^2 + c^2 + abc - 4$

$$L = f - \lambda g = a + b + c - \lambda(a^2 + b^2 + c^2 + abc - 4)$$

Điểm cực trị là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial a} = 1 - \lambda a - \lambda bc = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial b} = 1 - \lambda b - \lambda ac = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial c} = 1 - \lambda c - \lambda ba = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{1}{2a + bc} \\ \lambda = \frac{1}{2b + ac} \\ \lambda = \frac{1}{2c + ba} \end{cases}$$

Do  $\frac{1}{2a + bc} = \frac{1}{2b + ac} \Leftrightarrow (a - b)(2 - c) = 0$ . Tương tự ta có  $(b - c)(2 - a) = 0$  và  $(c - a)(2 - b) = 0$

Nếu  $a = b = 2$  từ  $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$  ta tìm được  $c = -2$  và vì vậy  $a + b + c = 6$

Nếu  $a = b = c \neq 2$  ta có  $3a^2 + a^3 = 4 \Leftrightarrow (a - 1)(a + 2)^2 = 0$

Vậy ta có  $a = b = c = 1$  hoặc  $a = b = c = -2$  và từ  $a + b + c = 3$  hoặc  $a + b + c = -6$  ta có giá trị nhỏ nhất của  $D = -6$

**6** Cho  $a, b, c$  thực dương thỏa  $a + b + c + d = 1$ . Chứng minh rằng:

$$abc + bcd + cda + dab \leq \frac{1}{27} + \frac{176}{27}abcd$$

**Giải**

Đặt  $f = abc + bcd + cda + dab$  ta sẽ chứng minh  $f \leq \frac{1}{27}$ .

Đặt  $g = a + b + c + d - 1$

Ta thiết lập hàm Lagrange

$$L = f - \lambda g = abc + bcd + cda + dab - \frac{126}{27}abcd - \lambda(a + b + c + d - 1)$$

Ta có:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial a} = bc + cd + db - \frac{176}{27}bcd - \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial b} = ac + cd + da - \frac{176}{27}acd - \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial c} = ba + ad + db - \frac{176}{27}bad - \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial d} = bc + ca + ab - \frac{176}{27}bca - \lambda = 0 \end{cases}$$

Từ hệ ta tìm được:

$$\lambda = bc + cd + db - \frac{176}{27}bcd = ac + cd + da - \frac{176}{27}acd = ab + bd + da - \frac{176}{27}abd = bc + ac + ab - \frac{176}{27}abc.$$

Từ  $bc + cd + db - \frac{176}{27}bcd = ac + cd + da - \frac{176}{27}acd$  ta có  $(b-a)(c+d - \frac{127}{27}cd) = 0$ . Thiết lập tương tự:

$$\begin{aligned} (b-c)(a+d - \frac{127}{27}ad) &= 0 \\ (b-d)(a+c - \frac{127}{27}ac) &= 0 \\ (a-c)(b+d - \frac{127}{27}bd) &= 0 \end{aligned}$$

Giải phương trình này ta có  $a = b = c = d$  và từ  $a + b + c + d = 1$  nên  $a = b = c = d = \frac{1}{4}$ . Vậy

$$f\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{27}. \text{ Từ đây ta có điều cần chứng minh. } \blacksquare$$

**7** Cho  $a, b, c$  thực thỏa  $a + b + c > 0$ . Chứng minh rằng:

$$a^3 + b^3 + c^3 \leq (a^2 + b^2 + c^2)^{3/2} + 3abc$$

Trong bài toán này ta sẽ tìm cách đặt ẩn thích hợp để tạo thêm điều kiện ràng buộc cho các biến để sử dụng phương pháp nhân tử *Lagrange*.

**Giải**

Đặt

$$x = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}; \quad y = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}; \quad z = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Bất đẳng thức cần chứng minh viết lại thành

$$x^3 + y^3 + z^3 \leq (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} + 3xyz \text{ với } x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

Đặt

$$f = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc; \quad g = a^2 + b^2 + c^2 - 1$$

Ta thiết lập hàm *Lagrange*

$$L = f - \lambda g = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc - \lambda(a^2 + b^2 + c^2 - 1)$$

Ta có hệ sau:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial a} = 3a^2 - 3bc - 2\lambda a = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial b} = 3b^2 - 3ac - 2\lambda b = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial c} = 3c^2 - 3ba - 2\lambda c = 0 \end{cases}$$

$$\lambda = \frac{3(a^2 - bc)}{2a} = \frac{3(b^2 - ac)}{2b} = \frac{3(c^2 - ab)}{2c}$$

Từ trên ta có

$$\frac{3(a^2 - bc)}{2a} = \frac{3(b^2 - ac)}{2b} \Leftrightarrow (a - b)(ab + bc + ac) = 0$$

Tương tự ta có  $(b - c)(ab + bc + ac) = 0$  và  $(c - a)(ab + bc + ac) = 0$ .

Giải phương trình này ta thu được  $a = b = c$  hoặc  $ab + bc + ac = 0$ .

Nếu  $a = b = c$  thì  $f(a; a; a) = 0 < 1$

Nếu  $ab + bc + ac = 0$  thì  $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac) = 1$

Và từ  $a + b + c > 0$  ta có  $a + b + c = 1$

Vì vậy

$$f(a; b; c) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac) = 1$$

Phép chứng minh hoàn tất. ■

**8** (China TST -2004) Cho  $a, b, c, d$  thực dương thỏa  $abcd = 1$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} + \frac{1}{(1+c)^2} + \frac{1}{(1+d)^2} \geq 1$$

**Giải**

Đặt  $f(a; b; c; d) = \frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} + \frac{1}{(1+c)^2} + \frac{1}{(1+d)^2}$  và  $g(a; b; c; d) = abcd - 1$

Ta thiết lập hàm *Lagrange*

$$L = f - \lambda g = \frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} + \frac{1}{(1+c)^2} + \frac{1}{(1+d)^2} - \lambda(abcd - 1).$$

Ta có hệ sau

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial a} = \frac{-4}{(1+a)^2} - \frac{\lambda}{a} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial b} = \frac{-4}{(1+b)^2} - \frac{\lambda}{b} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial c} = \frac{-4}{(1+c)^2} - \frac{\lambda}{c} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial d} = \frac{-4}{(1+d)^2} - \frac{\lambda}{d} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{-4a}{(1+a)^2} \\ \lambda = \frac{-4b}{(1+b)^2} \\ \lambda = \frac{-4c}{(1+c)^2} \\ \lambda = \frac{-4d}{(1+d)^2} \end{cases}$$

Từ hệ ta thu được

$$\frac{-4a}{(1+a)^2} = \frac{-4b}{(1+b)^2} = \frac{-4c}{(1+c)^2} = \frac{-4d}{(1+d)^2} = \lambda$$

Ta có:

$$(a - b)(1 - ab) = 0; (a - c)(1 - ac) = 0; (a - d)(1 - ad) = 0$$

$$(b - c)(1 - bc) = 0; (b - d)(1 - bd) = 0; (c - d)(1 - cd) = 0$$

Giải phương trình ta thu được  $a = b = c = d$  và từ  $abcd = 1$  nên  $a = b = c = d = 1$  vì vậy ta có

$$f(1; 1; 1; 1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

Từ

$$f(1; 1; \frac{1}{2}; 2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9} = \frac{1}{2} + \frac{5}{9} > 1$$

Nên theo phương pháp nhân tử *Lagrange* ta kết luận được  $f(a; b; c; d) \geq 1$ . Vậy bài toán được chứng minh. ■

**9** Cho  $a, b, c, d$  là những số thực dương thỏa  $a + b + c + d = 4$ . Chứng minh rằng:

$$27 \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \right) \geq 9(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) + 8.$$

**Giải**

Ta thiết lập hàm *Lagrange* lấy vế trái trừ vế phải, và đặt  $g$  là  $a + b + c + d - 4 = 0$ . Ta dễ dàng thấy

$$\frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial a})}{\partial a} < 0, \text{ nên nó tồn tại giá trị cực tiểu.}$$

$$\text{Nên nó tồn tại hằng số } \lambda \text{ thỏa mãn } \frac{\partial f}{\partial a} = \lambda \times \frac{\partial g}{\partial a}.$$

$$\Leftrightarrow -27\left(\frac{1}{a^2} + a^2\right) = \lambda$$

Từ trên ta có  $a, b, c, d = k$  hoặc  $\frac{1}{k}$ .

1) Nếu  $a, b, c, d = k$  thì  $k = 1$ , ta tìm được  $f > 0$ .

2) Nếu  $a, b, c = k$  và  $d = \frac{1}{k}$ , thì  $k = \frac{1}{3}$  và  $f = 0$ .

3) Nếu  $a, b = k$  và  $c, d = \frac{1}{k}$ , thì  $k = 1$ , và  $f > 0$ .

Từ 1) 2) 3) ta có điều cần chứng minh. ■

**10** Cho  $a, b, c, d$  thực dương thỏa  $a + b + c + d + abcd = 5$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \geq 4$$

**Giải**

Đặt  $f(a; b; c; d) = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$  và  $g(a; b; c; d) = a + b + c + d + abcd - 5 = 0$

Ta thiết lập hàm *Lagrange*

$$L = f - \lambda g = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} - \lambda(a + b + c + d + abcd - 5)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial a} = -\frac{1}{a^2} - \lambda(1 + bcd) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial b} = -\frac{1}{b^2} - \lambda(1 + acd) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial c} = -\frac{1}{c^2} - \lambda(1 + bad) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial d} = -\frac{1}{d^2} - \lambda(1 + bca) = 0 \end{cases}$$

$$\lambda = \frac{-1}{a^2(1 + bcd)} = \frac{-1}{b^2(1 + acd)} = \frac{-1}{c^2(1 + abd)} = \frac{-1}{1 + d^2(acb)}$$

Từ 2 phương trình đầu ta có:

$$a^2(1 + bcd) = b^2(1 + cad) \Leftrightarrow (a - b)(a + b + abcd) = 0$$

Từ  $a + b + abcd > 0$  ta có  $a = b$ . Tương tự ta có  $a = c = d$  nên  $a = b = c = d$

Sử dụng giả thiết  $a + b + c + d + abcd = 5$  ta thu được  $a^4 + 4a - 5 = 0 \Leftrightarrow (a - 1)(a^3 + a^2 + a + 5) = 0$  giải phương trình này ta tìm được  $a = 1$ . Do đó  $a = b = c = d = 1$ . Nên  $f(1, 1, 1, 1) = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$  vậy ta có điều cần chứng minh. ■

**11** Cho  $a, b, c$  thực dương thỏa  $a + b + c = 1$ . Chứng minh rằng:

$$7(ab + bc + ac) \leq 9abc + 2$$

**Giải**

Đặt  $f(a; b; c) = 7(ab + cb + ac) - 9abc - 2$ ,  $g(a; b; c) = a + b + c - 1$  Ta thiết lập hàm *Lagrange*

$$L = f - \lambda g = 7(ab + bc + ac) - 9abc - 2 - \lambda(a + b + c - 1)$$

Điểm cực trị là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial a} = 7(b+c) - 9bc - \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial b} = 7(c+a) - 9ac - \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial c} = 7(a+b) - 9ab - \lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 7(b+c) - 9bc \\ \lambda = 7(a+c) - 9ac \\ \lambda = 7(b+a) - 9ba \end{cases}$$

Nên

$$7(b+c) - 9bc = 7(c+a) - 9ac = \lambda \Leftrightarrow (b-a)(7-9c) = 0(1)$$

Thiết lập tương tự ta cũng có  $(c-a)(7-9a) = 0(2)$  và  $(a-c)(7-9b) = 0(3)$  giải phương trình ta có  $a = b = c = \frac{1}{3}$  và

$$f(a; b; c) = 7(ab + bc + ac) - 9abc - 2 = \frac{21}{9} - \frac{9}{27} - 2 = 0$$

Từ (1) nếu  $a = b$  và  $b \neq c$  thì từ phương trình trên ta có  $a = \frac{7}{9} = b$  và  $a + b = \frac{14}{9} > 1$  điều này mâu thuẫn do  $a + b < a + b + c = 1$

Nếu  $7 - 9c = 0$  thì ta không thể có  $7 - 9a = 0$  hoặc  $7 - 9b = 0$  nên từ (2); (3) ta phải có  $b = c$  và  $a = c$  nên  $a = b = c = \frac{7}{9}$ .

Vậy giá trị nhỏ nhất  $L = 0$  hay  $7(ab + ac + bc) \leq 9abc + 2$

**12** Cho  $a, b, c$  thực thỏa  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$  chứng minh rằng:

$$A = a^3 + b^3 + c^3 + abc + bcd + cda + dab \leq 1$$

**Giải**

Ta thiết lập hàm *Lagrange*

$$L = a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + abc + bcd + cda + dab - 1 - \lambda(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 1)$$

Điểm cực trị là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial a} = 3a^2 + bc + cd + bd - 2\lambda a = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial b} = 3b^2 + ac + cd + ad - 2\lambda b = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial c} = 3c^2 + ba + bd + ad - 2\lambda c = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial d} = 3d^2 + bc + ca + ba - 2\lambda d = 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\lambda = \frac{3a^2 + bc + ac + bd}{a} \\ 2\lambda = \frac{3b^2 + ac + cd + ad}{b} \\ 2\lambda = \frac{3c^2 + ba + bd + ad}{c} \\ 2\lambda = \frac{3d^2 + ca + bc + ab}{d} \end{cases}$$

Ta quy ước nếu mẫu bằng 0 thì tử bằng 0 Từ đây ta có:

$$\frac{3a^2 + bc + ac + bd}{a} = \frac{3b^2 + ac + cd + ad}{b}$$



$$= \frac{3c^2 + ba + bd + ad}{c} = \frac{3d^2 + ca + bc + ab}{d} = 2\lambda$$

Theo bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz* ta có:

$$\begin{aligned} 9VT^2 &= \left[ \sum a(3a^2 + bc + cd + db) \right]^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2) \left[ \sum (3a^2 + bc + cd + db)^2 \right] \\ &= 9(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 - 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + d^2a^2 + d^2b^2 + c^2d^2) - abc(a + b + c) \\ &\quad - bcd(b + c + d) - cda(c + d + a) - bab(b + d + a) \leq 9 \end{aligned}$$

Thật vậy bất đẳng thức cuối tương đương:

$$2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + d^2a^2 + d^2b^2 + c^2d^2) \geq abc(a + b + c) + bcd(b + c + d) + cda(c + d + a) + dab(d + b + a)$$

Luôn đúng do *AM – GM*. (bộ  $[2; 2; 0; 0] \gg [2; 1; 1; 0]$ ) Bất đẳng thức được chứng minh. ■

**12** (IMO Shortlist 2007) Cho  $a_1; a_2; \dots; a_{100} \geq 0$  thỏa  $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{100}^2 = 1$  chứng minh rằng:

$$a_1^2 a_2 + a_2^2 a_3 + \dots + a_{100}^2 a_1$$

**Giải**

Để thuận tiện biến đổi ta đặt  $a_{101} = a_1; a_{102} = a_2$  và  $S = a_1^2 a_2 + a_2^2 a_3 + \dots + a_{100}^2 a_1$  Áp dụng bất đẳng thức *Cauchy-Schwarz*:

$$\begin{aligned} 9S^2 &= \left[ \sum_{k=1}^{100} a_{k+1}(a_k^2 + 2a_{k+1}a_{k+2}) \right]^2 \leq \left( \sum_{k=1}^{100} a_{k+1}^2 \right) \left[ \sum_{k=1}^{100} (a_k^2 + 2a_{k+1}a_{k+2}) \right]^2 \\ &= \sum_{k=1}^{100} (a_k^2 + 2a_{k+1}a_{k+2})^2 = \sum_{k=1}^{100} (a_k^4 + 4a_k^2 a_{k+1} a_{k+2} + 4a_{k+1}^2 a_{k+2}^2)^2 \end{aligned}$$

Mặt khác theo bất đẳng thức *AM-GM* ta có

$$4a_k^2 a_{k+1} a_{k+2} \leq 2a_k^2 (a_{k+1}^2 + a_{k+2}^2)$$

Từ trên ta có

$$9S^2 \leq \sum_{k=1}^{100} [a_k^4 + 2a_k^2(a_{k+1}^2 + a_{k+2}^2) + 4a_{k+1}^2 a_{k+2}^2] = \sum_{k=1}^{100} [a_k^4 + 6a_{k+1}^2 a_k^2 + 2a_k^2 a_{k+2}^2]$$

Sử dụng các đánh giá đơn giản

$$\sum_{k=1}^{100} [a_k^4 + 2a_{k+1}^2 a_k^2 + 2a_k^2 a_{k+2}^2] \leq \left( \sum_{k=1}^{100} a_k^2 \right)^2 = 1$$

$$\sum_{k=1}^{100} a_k^2 a_{k+1}^2 \leq \left( \sum_{i=1}^{50} a_{2i-1}^2 \right) \left( \sum_{j=1}^{50} a_{2j}^2 \right)$$

Ta được:

$$9S^2 \leq 1 + 4 \left( \sum_{i=1}^{50} a_{2i-1}^2 \right) \left( \sum_{j=1}^{50} a_{2j}^2 \right) \leq 1 + \left( \sum_{i=1}^{50} a_{2i-1}^2 + \sum_{j=1}^{50} a_{2j}^2 \right)^2 = 2$$

Từ đây suy ra  $S \leq \frac{\sqrt{2}}{3} < \frac{12}{25}$ . Vậy bài toán được chứng minh ■

## BÀI TẬP

Bài 1: Cho  $x, y, z$  thực thuộc đoạn  $[0; 1]$ , chứng minh rằng

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 + x^2y + y^2z + z^2x$$

Bài 2: Cho  $x, y, z$  thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{1+x+xy} + \frac{y}{1+y+yz} + \frac{z}{1+z+xz} \leq 1$$

Bài 3: (USAMO -1997) Cho  $a, b, c, d$  thực dương. Chứng minh rằng:

$$25 \leq (a+b+c+d+e) \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e} \right) \leq 25 + 6 \left( \sqrt{\frac{p}{q}} - \sqrt{\frac{q}{p}} \right)^2$$

Bài 4: (USAMO 2001) Cho  $a, b, c$  thực dương thỏa  $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$  chứng minh rằng

$$ab + bc + ac - abc \leq 2$$

Bài 5: (1999 Canada Math Olympiad) Cho  $x, y, z$  là những số thực không âm thỏa  $x + y + z = 1$ . Chứng minh rằng

$$x^2y + y^2z + z^2x \leq \frac{4}{27}$$

Bài 6: (Bất đẳng thức Schur) Cho  $a, b, c \geq 0$ . Chứng minh

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)$$

Bài 7: (Romanian IMO-BMO TST -2007) Cho các số thực  $a_1; a_2; \dots; a_n; b_1; b_2; \dots; b_n (n \geq 2)$  thỏa mãn  $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2 = 1; a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n = 0$ . Chứng minh rằng

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 + (b_1 + b_2 + \dots + b_n)^2 \leq n$$

Bài 8: Cho  $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$  và  $a_1.a_2.\dots.a_n = 1$ . Chứng minh

$$\frac{1}{(1+a_1)^k} + \frac{1}{(1+a_2)^k} + \dots + \frac{1}{(1+a_n)^k} \geq \min \left\{ 1; \frac{n}{2^k} \right\} \forall k \geq 0$$

Bài 9: (VMEO II) Cho  $a, b, c, x, y, z$  thỏa  $ax + by + cz = xyz$ . Chứng minh

$$x + y + z \geq \sqrt{4(a+b+c)} + \sqrt{8(ab+bc+ca)}$$

Bài 10: Cho  $a, b, c > 0$  thỏa  $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ . Chứng minh:

$$2(a^2b + b^2c + c^2a) + 15 \geq 3(a+b+c) + 4(ab+bc+ca)$$

Bài 11: Cho  $a, b, c \in R$  thỏa  $2a^3 + 2b^3 + c^3 = 4$ . Tìm GTLN và GTNN của

$$c^2 - 2ab$$

Bài 12: Cho  $a, b, c \geq 0, a + b + c = 3$ . Chứng minh rằng:

$$a^4 + b^4 + c^4 + ab + bc + ca \geq 6$$

Bài viết xin kết thúc tại đây. Nhân đây, tôi xin cảm ơn anh Hoàng Quốc Việt-sinh viên trường Đại học Bách Khoa Hà Nội đã có những ý kiến đóng góp để hoàn thiện chuyên đề này. Việc biên soạn không thể tránh khỏi những thiếu sót, rất mong những ý kiến đóng góp của các bạn để chuyên đề được hoàn thiện hơn! Mọi đóng góp xin gửi về địa chỉ: *manmelody193@yahoo.com*

## Tài liệu

- [1] Võ Quốc Bá Cẩn -Trần Quốc Anh *Sử dụng phương Pháp Cauchy-Schwarz để chứng minh bất đẳng thức.*
- [2] [www.diendantoanhoc.net](http://www.diendantoanhoc.net)
- [3] [www.artofproblemsolving.com/Forum](http://www.artofproblemsolving.com/Forum)
- [4] Ngô Thành Phong *Giáo trình giản yếu giải tích toán học - ĐHKHTN -ĐHQG TP HCM*
- [5] Zdravko Cvetkovski *Inequalities theorems, techniques and Selected Problems*