Chuyên đề

HÌNH HỌC PHẲNG

Hình học là một chủ đề quan trọng trong chương trình toán trung học cơ sở. Nắm vững các kiến thức và kĩ năng giải toán ở cấp độ này, học sinh sẽ có một sức bật tốt để có một nền tảng vững vàng về hình học ở cấp phổ thông trung học. Chuyên đề này điểm qua các định lí và bài toán quan trọng nhất trong chương trình hình học cấp trung học cơ sở. Vì đây là chuyên đề nâng cao nên chúng tôi sẽ không trình bày các định lí cơ bản như định lí Thales, định lí Pythagoras, định lí, tính chất của phân giác,...

Dưới đây là các chủ đề sẽ được đề cập. Ngoài ra, một số định lí, công thức, bài toán khác sẽ được trình bày dưới dạng hệ quả hay bài tập.

- Đường thẳng Euler
- Đường tròn Euler
- Đường thẳng Simson
- Đường thẳng Steiner
- Định lí Ptolemy
- Bất đẳng thức Ptolemy
- Tứ giác toàn phần
- Đường thẳng Newton
- Định lí Ceva, Menelaus, định lí Desargues
- Đường tròn Apollonius
- Bài toán con bướm
- Định lí Euler về tam giác pedal
- Một số quỹ tích cơ bản.
- Một số bài toán dựng hình bằng thước và compa.

§1. ĐỊNH LÍ ĐƯỜNG TRÒN 9-ĐIỂM *EULER*. ĐƯỜNG THẲNG *EULER* TRONG TAM GIÁC

Bài toán đường tròn 9-điểm *Euler* được nhà toán học *EULER (1707–1783)* đưa ra và chứng minh cho sáu điểm ban đầu, đó là trung điểm của các cạnh của tam giác và hình chiếu của các đỉnh của tam giác lên các cạnh đối diện của chúng cùng nằm trên một đường tròn. Đến năm 1820, *BRIANCHON (1783–1864)* và *PONCELET (1778–1876)* chứng minh thêm rằng đường tròn đi qua sáu điểm nói trên cũng đi qua trung điểm của các đoạn nối từ trực tâm đến các đỉnh của tam giác. Tên gọi "*Đường tròn 9–điểm*" được giới thiệu bởi *TERQUEM* năm 1842.

Việc phát hiện ra đường tròn *Euler* không chỉ đi qua trung điểm của các cạnh của một tam giác mà còn đi qua sáu điểm còn lại là một trong những kho tàng quý báu của hình học sơ cấp hiện đại.

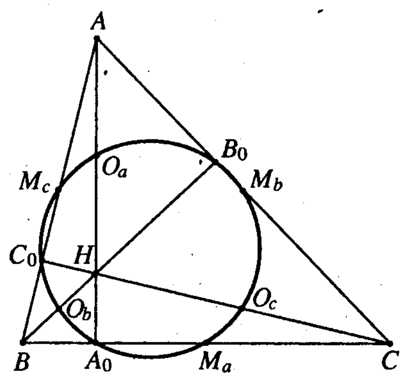
1. Đường tròn 9-điểm *Euler*

Bài toán 1. Cho tam giác ABC có H là trực tâm. Khi đó trung điểm các cạnh của tam giác ; chân đường cao hạ từ A, B, C tương ứng xuống BC, CA, AB ; trung điểm của HA, HB, HC cùng thuộc một đường tròn. Đường tròn này gọi là đường tròn 9-điểm Euler của tam giác ABC.

Trước khi đi vào việc chứng minh chi tiết, ta xét bổ đề sau :

Bổ đề. Cho tam giác ABC có H là trực tâm. Gọi A_0, B_0, C_0 lần lượt là hình chiếu của A, B, C tương ứng trên BC, CA, AB. Gọi M_a là trung điểm của BC ; O_a là trung điểm của HA. Chứng minh rằng : M_a, O_a nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_0B_0C_0$.

Chứng minh (h.5.1). Thật vậy, ta có $BB_0 \perp AC$ tại $B_0 \Rightarrow \widehat{BB_0C} = 90^o$. Hoàn toàn tương tự, ta cũng có $\widehat{BC_0C} = 90^o$. Từ đó suy ra được B, C, B_0, C_0 cùng thuộc đường tròn đường kính BC, hơn nữa M_a còn là tâm của đường tròn đó. Lập luận tương tự, ta cũng chứng minh được các tứ giác sau đây nội tiếp đường tròn : tứ giác C_0HA_0B, HB_0CA_0, AC_0HB_0, trong đó O_a là tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác AC_0HB_0.



Hình 5.1

Khi ấy, ta được $\widehat{B_0M_aC_0} = 2.\widehat{C_0CB_0} = 2.\widehat{C_0BB_0} = 2.\widehat{C_0A_0H} = 2.\widehat{HA_0B_0}$

$$\Rightarrow \widehat{B_0M_aC_0} = \widehat{C_0A_0B_0}.$$

Suy ra $C_0A_0M_aB_0$ nội tiếp, tức là $M_a \in (A_0B_0C_0)$. (1)

Ta lại có $\widehat{O_aB_0H} = \widehat{O_aHB_0} = \widehat{B_0CA_0} = \widehat{B_0CB} \Rightarrow O_aB_0$ là tiếp tuyến từ O_a đến đường tròn $\left(M_a, \dfrac{BC}{2}\right)$, lập luận tương tự cho O_aC_0.

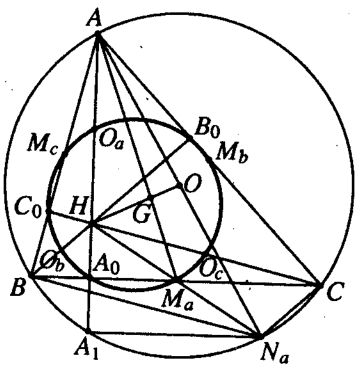
Suy ra $\widehat{O_aC_0M_a} = \widehat{O_aB_0M_a} = 90^\circ \Rightarrow C_0O_aB_0M_a$ nội tiếp đường tròn. (2)

Từ (1) & (2) suy ra đ.p.c.m. □

Trở lại bài toán ban đầu.

Ta gọi O_b, O_c lần lượt là trung điểm của HB, HC ; M_b, M_c lần lượt là trung điểm của CA, AB. Khi đó, lập luận tương tự bài toán 1, ta có : O_b, M_b, O_c, M_c thuộc $(A_0B_0C_0)$. Do vậy O_a, O_b, O_c, M_a, M_b, M_c, A_0, B_0, C_0 là *9 điểm cùng thuộc một đường tròn*. Đây chính là đường tròn *Euler* của tam giác ABC. □

Nhận xét (h.5.2) :



Hình 5.2

Nếu ta gọi A_1 là điểm đối xứng của H qua BC ; N_a là điểm đối xứng của H qua M_a. Khi ấy, ta có :

$\widehat{A_1BA_0} = \widehat{HBA_0} = \widehat{B_0BA_0}$.

Nhưng $\widehat{B_0BA_0} = \widehat{A_0AC} = \widehat{A_1AC}$.

Do vậy $\widehat{A_1BC} = \widehat{A_1BA_0} = \widehat{A_1AC}$.

Suy ra $A_1 \in (ABC)$.

Mặt khác dễ thấy HBN_aC là hình bình hành.

Do đó

$\widehat{BN_aC} = \widehat{BHC} = \widehat{C_0HB_0} = 180^\circ - \widehat{C_0AB_0} = 180^\circ - \widehat{BAC}$,

điều này chứng tỏ $N_a \in (ABC)$.

A_0M_a giờ đây đóng vai trò là đường trung bình của tam giác HA_1N_a. Suy ra $A_0M_a \,//\, A_1N_a$. Nhưng $A_0M_a \equiv BC \perp AA_1$. Suy ra $A_1N_a \perp AA_1 \Rightarrow \widehat{AA_1N_a} = 90^\circ$. Do vậy A, N_a sẽ là hai điểm đối xứng nhau qua tâm O của (ABC), dẫn đến A, O, N_a thẳng hàng.

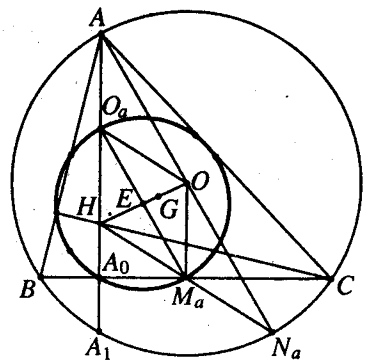
Xét trong tam giác AHN_a, gọi G là trọng tâm của tam giác. Khi đó $G \in AM_a$ và $\dfrac{AG}{AM_a} = \dfrac{2}{3}$. Suy ra G cũng là trọng tâm của tam giác ABC. Mặt khác HO là một trung tuyến từ H của tam giác AHN_a. Suy ra $G \in HO$.

2. Đường thẳng Euler của tam giác

Từ nhận xét trên, ta có được nội dung của bài toán *đường thẳng Euler* của tam giác.

Bài toán 2. Cho tam giác ABC có H, G, O lần lượt là trực tâm, trọng tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác. Khi ấy H, O, G thẳng hàng. Đường thẳng chứa H, O, G được gọi là đường thẳng Euler của tam giác ABC.

Hơn nữa tâm *đường tròn 9-điểm Euler* của tam giác ABC còn nằm trên *đường thẳng Euler* của tam giác ABC và là trung điểm của HO.



Hình 5.3

Thật vậy, ta có,

$$OM_a \,//\, O_aH, \quad OM_a = \frac{1}{2}.AH = HO_a.$$

Suy ra O_aOM_aH là hình bình hành. Do vậy, nếu gọi $E \equiv M_aO_a \cap OH$ thì E là trung điểm của O_aM_a. Mặt khác tam giác $M_aO_aA_0$ là một tam giác vuông tại A_0 nội tiếp *đường tròn 9−điểm Euler* của tam giác ABC. Suy ra E là tâm của *đường tròn Euler* của tam giác ABC. Điểm E chính là trung điểm của HO.

Đường thẳng Euler có nhiều tính chất thú vị mà cho đến gần đây người ta vẫn còn tiếp tục tìm ra. Vào năm 2006, một kiến trúc sư người Hy Lạp *Rostas Vittasko* có đưa ra một bài toán thú vị như sau

Giả sử ABCD là một tứ giác nội tiếp có các đường chéo cắt nhau tại P. Chứng minh rằng các đường thẳng Euler của các tam giác PAB, PBC, PCD, PDA đồng quy tại một điểm.

BÀI TẬP

1. (*VMO 2009*) Trong mặt phẳng cho hai điểm cố định A, B (A khác B). Một điểm C di động trên mặt phẳng sao cho $\widehat{ACB} = \alpha = \text{const}$ ($0^o < \alpha < 180^o$). Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC và tiếp xúc với AB, BC, CA lần lượt tại D, E, F. Các đường thẳng AI, BI cắt EF lần lượt tại M, N.

   a) Chứng minh rằng MN có độ dài không đổi.

   b) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác DMN luôn đi qua một điểm cố định khi C lưu động.

2. Cho tam giác ABC nhọn có các đường cao AA', BB', CC'. Chứng minh rằng các đường thẳng Euler của các tam giác $AB'C'$, $CA'B'$ và $BA'C'$ đồng quy tại một điểm.

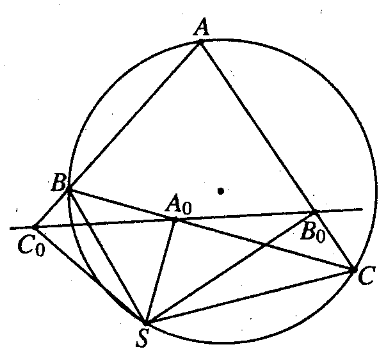
3. Cho tam giác ABC với góc A không vuông. Gọi D là một điểm sao cho

$$\widehat{DBA} = \widehat{BAC} = \widehat{DCA}.$$

Chứng minh rằng đường thẳng Euler của tam giác ABC đi qua D.

§2. ĐƯỜNG THẲNG SIMSON VÀ ĐƯỜNG THẲNG STEINER

Bài toán. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). Giả sử S là một điểm nằm trên (O) sao cho S không trùng với các đỉnh A, B, C của tam giác. Giả sử A_0, B_0, C_0 là hình chiếu của S tương ứng trên các cạnh BC, CA, AB. Khi đó A_0, B_0, C_0 thẳng hàng. Đường thẳng chứa A_0, B_0, C_0 được gọi là *đường thẳng Simson của S đối với tam giác ABC.*



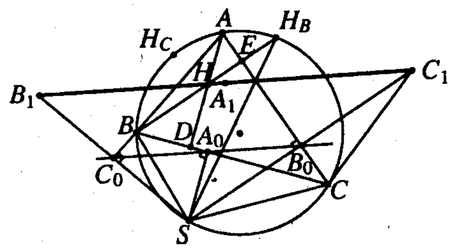
Hình 5.4

Bài toán đường thẳng Simson có thể xem như một hệ quả khá hiển nhiên của định lí Euler về tam giác pedal (xem §10 trong chuyên đề này). Song việc dùng một định lí mạnh để chứng minh định lí về đường thẳng Simson không phải là một phương án hay. Đường thẳng Simson có thể được chứng minh khá đơn giản bằng phương phăp biến đổi góc thông thường. Thật vậy, ta có $\widehat{CB_0S} = \widehat{CA_0S} = 90^o$, suy ra tứ giác A_0B_0SC là tứ giác nội tiếp, suy ra $\widehat{B_0A_0C} = \widehat{B_0SC}$. Mặt khác, vì $ABSC$ nội tiếp nên $\widehat{C_0BS} = \widehat{ACS} = \widehat{B_0CS} \Rightarrow \Delta SC_0B \backsim \Delta SB_0C$ (g.g) $\Rightarrow \widehat{BSC_0} = \widehat{CSB_0}$ $\Rightarrow \widehat{BSC_0} = \widehat{B_0A_0C}$. Nhưng vì A_0BC_0S là tứ giác nội tiếp ($\widehat{BA_0S} = \widehat{BC_0S} = 90^o$) nên $\widehat{BSC_0} = \widehat{BA_0C_0} \Rightarrow \widehat{B_0A_0C} = \widehat{BA_0C} \Rightarrow C_0, A_0, B_0$ thẳng hàng. □

Điều ngược lại của bài toán đường thẳng Simson cũng đúng. Cụ thể là *"Nếu M là điểm chạy trong mặt phẳng của tam giác ABC sao cho M không trùng với các đỉnh của tam giác và hình chiếu của nó xuống các cạnh của tam giác nằm trên một đường thẳng. Khi đó M nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC".*

Phép chứng minh mệnh đề đảo xin được dành cho bạn đọc.

Lưu ý : Nếu gọi B_1, A_1 và C_1 lần lượt là điểm đối xứng của S qua AB, BC và CA. Dễ thấy A_1, B_1, C_1 thẳng hàng. Tuy nhiên, điều đặc biệt của đường thẳng chứa A_1, B_1, C_1 là nó đi qua trực tâm H của tam giác ABC. Thật vậy, ở §1 ta đã biết rằng nếu gọi H_C, H_B lần lượt là các điểm đối xứng của H qua AB, AC tương ứng thì khi đó H_B, H_C thuộc (O). Lưu ý tính chất này, bây giờ ta được : $\widehat{HC_1C} = \widehat{H_BSC}$ (tính chất đối xứng trục). Mặt khác, vì $H_B \in (O)$ nên $\widehat{H_BSC} = \widehat{H_BBC} = \widehat{DAC} = \widehat{HAC}$ (vì $AEDB$ là tứ giác nội tiếp, trong đó D, E lần lượt là hình chiếu của H trên BC, CA) $\Rightarrow \widehat{HC_1C} = \widehat{HAC} \Rightarrow HAC_1C$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow$ $\widehat{C_1HC} = \widehat{C_1AC} = \widehat{SAC}$ (tính chất đối xứng trục) $=$ $\widehat{SH_CC} = \widehat{SH_CH} = \widehat{B_1HH_C}$ (tính chất đối xứng trục) $\Rightarrow \widehat{CHC_1} = \widehat{H_CHB_1} \Rightarrow$ B_1, H, C_1 thẳng hàng, suy ra A_1, B_1, C_1, H thẳng hàng. Vậy H thuộc đường thẳng đi qua A_1, B_1, C_1.



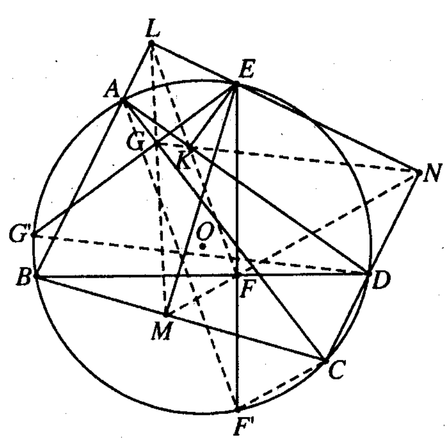
Hình 5.5

Đường thẳng này được gọi là ***đường thẳng Steiner của S đối với tam giác ABC.***

Để thấy rõ hơn ứng dụng của đường thẳng Simson và đường thẳng Steiner, ta xét các ví dụ sau

Ví dụ 1. *(Đề chọn đội tuyển dự JBMO của Rumani, 2001)*

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R. Với E là một điểm bất kỳ nằm trên (O), ta gọi K, L, M, N lần lượt là hình chiếu của E trên DA, AB, BC, CD. Chứng minh rằng N là trực tâm của tam giác KLM khi và chỉ khi $ABCD$ là hình chữ nhật.



Hình 5.6

Giải (h. 5.6). Gọi G và F lần lượt là hình chiếu của E lên AC và BD. Theo định lí đường thẳng Simson, ta có ngay các bộ ba điểm sau thẳng hàng (K, L, F), (M, N, F), (K, G, N), (M, L, G). Gọi G', F' là giao điểm thứ hai của EG và EF với (O). Ta thấy rằng $KL \parallel AF'$, $MG \parallel BG'$, $G'D \parallel KN$, $F'C \parallel MN$. Do đó N là trực tâm tam giác KLM khi và chỉ khi

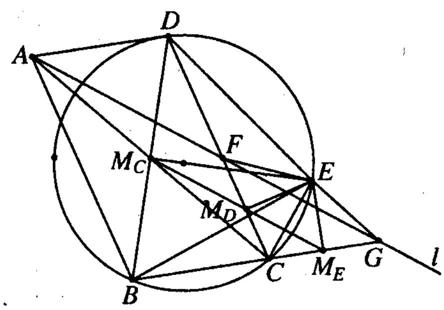
$$KF \perp MN \Leftrightarrow AF' \perp F'C \text{ và } MG \perp KN \Leftrightarrow BG' \perp G'D.$$

Mặt khác $AF' \perp F'C \Leftrightarrow \widehat{AF'C} = 90^o \Leftrightarrow O \in AC$.

Tương tự $BG' \perp G'D \Leftrightarrow O \in BD$. Do đó N là trực tâm của tam giác $KLM \Rightarrow O$ là giao điểm của AC và $BD \Leftrightarrow ABCD$ là hình chữ nhật.

Ngược lại, giả sử ta đã có $ABCD$ là hình chữ nhật, dễ thấy rằng với mọi điểm E di động trên (O) thì N là trực tâm của tam giác KLM. □

Ví dụ 2. (*IMO 2007*). Xét 5 điểm A, B, C, D, E sao cho $ABCD$ là hình bình hành và bốn điểm B, C, D, E cùng nằm trên một đường tròn. Gọi l là một đường thẳng qua A. Giả sử l cắt đoạn DC ở F và BC ở G. Giả sử $EF = EG = EC$. Chứng minh rằng l là phân giác góc DAB.



Hình 5.7

Giải (h. 5.7). Gọi M_E, M_D, M_C lần lượt là hình chiếu của E lên CB, CD, BD. Ta có theo giả thiết ban đầu thì E thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD, suy ra M_C, M_D, M_E thẳng hàng (đường thẳng Simson). Mặt khác $EG = EC = EF$ nên E là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $GCF \Rightarrow M_E$, M_D là trung điểm của CG, $CF \Rightarrow M_EM_D$ là đường trung bình của tam giác $CGF \Rightarrow (M_EM_DM_C) \parallel (AF) \equiv (GF) \Rightarrow M_C$ là trung điểm của CA cũng đồng thời là trung điểm của BD. Ta có trong tam giác EBD, EM_C là đường cao đồng thời cũng là đường trung tuyến $\Rightarrow$ tam giác EBD cân ở $E \Rightarrow EB = ED$. Mặt khác $\widehat{EBC} = \widehat{EDC} \Rightarrow$ tam giác EBM_E và tam giác EDM_D bằng nhau $\Rightarrow EM_E = EM_D \Rightarrow GC = CF \Rightarrow$ tam giác CFG cân ở $C \Rightarrow \widehat{CGF} = \widehat{CFG}$. Mà $\widehat{BAF} = \widehat{GFC}$, $\widehat{FAD} = \widehat{FGC} \Rightarrow \widehat{BAF} = \widehat{FAD} \Rightarrow FA$ là phân giác góc $\widehat{BAD}$ hay l là phân giác $\widehat{BAD}$. □

BÀI TẬP

4. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). S_1, S_2 là hai điểm di động trên (O) và đối xứng nhau qua O. Gọi Δ_1, Δ_2 tương ứng là đường thẳng Simson của S_1,

S_2 đối với tam giác ABC. Chứng minh rằng Δ_1 vuông góc với Δ_2 và giao điểm của Δ_1, Δ_2 chạy trên một đường tròn cố định.

5. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Gọi d_A, d_B, d_C, d_D là các đường thẳng Simson của A, B, C, D tương ứng đối với các tam giác BCD, CDA, DAB, ABC. Chứng minh rằng d_A, d_B, d_C, d_D đồng quy.

6. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) và M là một điểm nằm trên mặt phẳng tứ giác. Gọi X, Y, Z, T, U, V theo thứ tự là hình chiếu của M xuống AB, BC, CD, DA, AC, BD. Gọi N, P, Q lần lượt là trung điểm của XZ, YT, UV. Chứng minh rằng nếu M thuộc (O) thì N, P, Q thẳng hàng. Bài toán còn đúng không nếu M là một điểm bất kì trong mặt phẳng ?

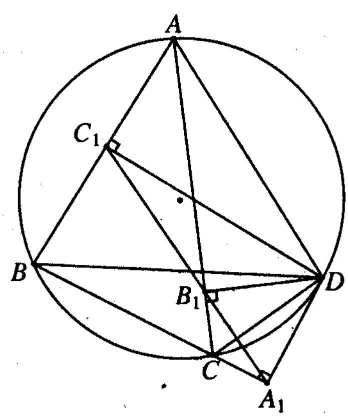
§3. ĐỊNH LÍ PTOLEMY

Định lí Ptolemy là một trong những định lí đẹp của hình học sơ cấp, có rất nhiều ứng dụng trong việc giải các bài toán hình học. Định lí này có một phát biểu hết sức đơn giản :

Định lí Ptolemy. Tứ giác lồi $ABCD$ nội tiếp một đường tròn khi và chỉ khi tổng của tích các cặp cạnh đối bằng tích hai đường chéo, nghĩa là

$$AB.CD + AD.BC = AC.BD.$$

Có nhiều cách khác nhau để chứng minh định lí này. Một số chứng minh sẽ được trình bày trong phần bất đẳng thức Ptolemy. Dưới đây ta trình bày một chứng minh sử dụng đường thẳng Simson.



Hình 5.8

Hạ DA_1 vuông góc với BC, DB_1 vuông góc với AC và DC_1 vuông góc với AB thì B_1, A_1, C_1 thẳng hàng và $A_1B_1 + B_1C_1 = A_1C_1$ (1).

Áp dụng định lí hàm số sin cho các đường tròn đường kính DC, DB, DA và các dây cung A_1B_1, A_1C_1 và B_1C_1 tương ứng, ta có

$$A_1B_1 = DC.\sin\widehat{ACB},\ A_1C_1 = DB.\sin\widehat{ABC},\ B_1C_1 = AD.\sin\widehat{BAC}$$

Lại áp dụng định lí hàm số sin cho tam giác ABC, ta có

$$\sin C = \frac{AB}{2R},\ \sin B = \frac{AC}{2R},\ \sin A = \frac{BC}{2R}.$$

Thay vào đẳng thức (1) và rút gọn, ta thu được

$$AB.CD + AD.BC = AC.BD.\ \square$$

Định lí Ptolemy có nhiều ứng dụng trong việc giải các bài toán hình học liên quan đến chứng minh và tính toán. Sau đây, ta sẽ xem xét một số ứng dụng của định lí Ptolemy về tứ giác nội tiếp trong việc chứng minh một số công thức lượng giác và hình học.

Công thức tính $\sin(\alpha + \beta)$

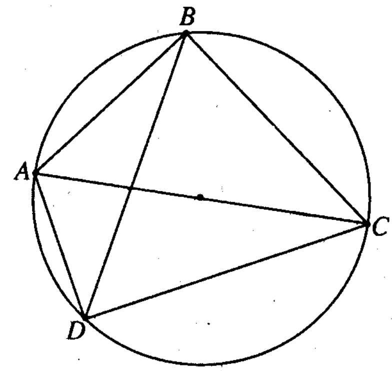
Với $\alpha + \beta$ là các góc nhọn, dựng đường tròn đường kính AC và chọn các điểm B và D nằm trên hai nửa đường tròn, sao cho $\widehat{BAC} = \alpha$, $\widehat{DAC} = \beta$. Áp dụng định lí Ptolemy, ta có

$AB.CD + AD.BC = AC.BD.$ (2)

Mặt khác, áp dụng định nghĩa của hàm số lượng giác, ta có

$AB = AC.\cos\alpha,\ BC = AC.\sin\alpha,$

$CD = AC.\sin\beta,\ DA = AC.\cos\beta.$



Hình 5.9

Cuối cùng, áp dụng định lí hàm số sin cho tam giác ABD, ta được

$$BD = AC.\sin(\alpha + \beta).$$

Thay vào (2), ta được

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha.\cos\beta + \sin\beta.\cos\alpha.\ \square$$

Định lí Pythagoras

Xét hình chữ nhật $ABCD$. Rõ ràng đây là một tứ giác nội tiếp. Vì thế ta có

$$AB.CD + AD.BC = AC.BD.$$

Do $AB = CD$, $AD = BC$ nên từ đây suy ra

$$AB^2 + BC^2 = AC^2\ \square$$

Định lí hàm số côsin

Xét tam giác ABC với các cạnh $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Dựng điểm D trên đường tròn ngoại tiếp tam giác sao cho $AD = BC$ và $AC = BD$ (D chính là điểm đối xứng của C qua trung trực của AB). Gọi E và F lần lượt là hình chiếu của C và D trên AB. Áp dụng định lí Ptolemy cho tứ giác nội tiếp $ABCD$ ta có

$$AB.CD + AD.BC = AC.BD. \qquad (3)$$

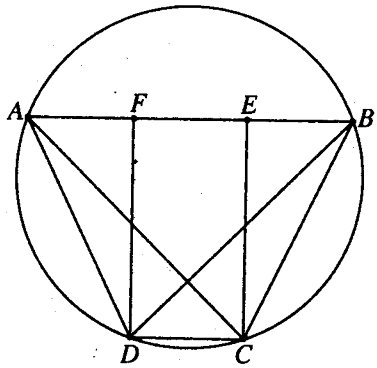
Mặt khác,

$$CD = AB - AF - BE = AB - 2BC\cos B.$$

Thay $CD = AB - 2BC\cos B$, $AD = BC$, $BD = AC$ vào (3), ta có

$$AB^2 - 2AB.BC.\cos B + BC^2 = AC^2$$

hay $\qquad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos B.$ □



Hình 5.10

Hệ thức Feuerbach

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong một đường tròn, khi đó

$$BD^2.S_{ACD} = CD^2.S_{ABD} + AD^2.S_{BCD}. \qquad (4)$$

Chứng minh. Theo công thức tính diện tích thì

$$S_{ACD} = \frac{AC.AD.CD}{4R},\ S_{ABD} = \frac{AB.AD.BD}{4R},\ S_{BCD} = \frac{BC.BD.CD}{4R}.$$

Do đó (4) tương đương với

$$BD^2.AC.AD.CD = CD^2.AB.AD.BD + AD^2.BC.BD.CD$$

hay là

$$AC.BD = AB.CD + AD.BC. \quad □$$

Như vậy, có thể thấy định lí Ptolemy tương đương với hệ thức Feuerbach.

Định lí Carnot

Xét tam giác nhọn ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O bán kính R. Gọi x, y, z là các khoảng cách từ O đến BC, CA, AB tương ứng. Khi đó

$$x + y + z = R + r$$

trong đó r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác.

Chứng minh (h. 5.11). Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB. Áp dụng định lí Ptolemy cho tứ giác nội tiếp $AEOF$, ta được

$$AF.OE + AE.OF = AO.EF \Leftrightarrow c.y + b.z = R.a.$$

Tương tự

$$c.x + az = R.b,\ ay + bx = R.c.$$

Cộng các đẳng thức vế theo vế, ta được

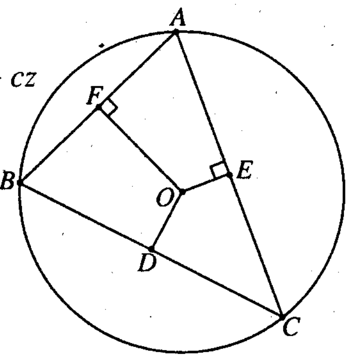
$(b + c)x + (c + a)y + (a + b)z = R(a + b + c)$

$\Leftrightarrow\ (a + b + c)(x + y + z) = R(a + b + c) + ax + by + cz$

$\Leftrightarrow x + y + z = R + r$

(Vì $ax + by + cz = 2S_{OBC} + 2S_{OCA} + 2S_{OAB}$

$= 2S_{ABC}$ và $r = \dfrac{S}{p}$) $\square$



Hình 5.11

Viết dưới dạng lượng giác, định lí Carnot chính là hệ thức

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R}.$$

Chú ý hệ thức này đúng với mọi tam giác. Với hệ thức hình học, định lí Carnot vẫn đúng trong trường hợp tam giác tù, nhưng nếu chẳng hạn A tù thì ta có $-x + y + z = R + r$.

BÀI TẬP

7. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O) và $AC = 2AB$. Các đường thẳng tiếp xúc với đường tròn (O) tại A, C cắt nhau tại P. Chứng minh rằng BP đi qua điểm chính giữa của cung $\overset{\frown}{BAC}$.

8. Cho tam giác ABC có I là tâm đường tròn nội tiếp, O là tâm đường tròn ngoại tiếp và G là trọng tâm. Giả sử rằng $\widehat{OIA} = 90^o$. Chứng minh rằng IG song song với BC.

9. (*IMO Shortlist*) Giả sử M, N là các điểm nằm trong tam giác ABC sao cho $\widehat{MAB} = \widehat{NAC}$, $\widehat{MBA} = \widehat{NBC}$. Chứng minh rằng :

$$\frac{AM.AN}{AB.AC} + \frac{BM.BN}{BA.BC} + \frac{CM.CN}{CA.CB} = 1.$$

10. (*VMO 1997*) Trong mặt phẳng, cho đường tròn tâm O bán kính R và điểm P nằm trong đường tròn ($OP = d < R$). Trong tất cả các tứ giác lồi $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn (O) và có hai đường chéo AC, BD vuông góc và cắt nhau tại P, hãy tìm tứ giác có chu vi lớn nhất và tứ giác có chu vi nhỏ nhất. Tính các giá trị lớn nhất và nhỏ nhất này theo R và d.

§4. BẤT ĐẲNG THỨC PTOLEMY

Định lí Ptolemy có nhiều mở rộng khác nhau, trong đó một mở rộng thú vị và có nhiều ứng dụng chính là bất đẳng thức Ptolemy.

Bất đẳng thức Ptolemy. Với 4 điểm A, B, C, D bất kỳ trên mặt phẳng, ta có

$$AB.CD + AD.BC \geq AC.BD. \qquad (1)$$

Rất thú vị là bất đẳng thức tam giác ($AB + BC \geq AC$ với ba điểm A, B, C bất kỳ) là một trường hợp đặc biệt của bất đẳng thức Ptolemy. Thật vậy

Chia hai vế của (1) cho BD, ta được

$$AB\frac{CD}{BD} + BC\frac{AD}{BD} \geq AC.$$

Nếu chọn D "đủ xa" thì từ đây ta sẽ suy ra $AB + BC \geq AC$.

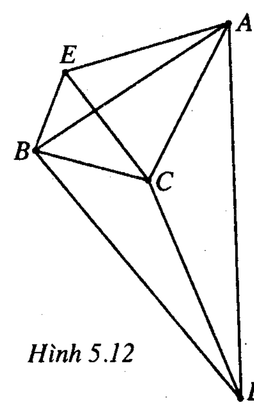
Điều này nghe cũng ngạc nhiên, tuy nhiên lợi ích đem lại của sự đặc biệt hoá này không nhiều, vì chẳng lẽ lại dùng bất đẳng thức Ptolemy cao siêu để chứng minh bất đẳng thức tam giác vốn được coi như tiên đề.

Tuy nhiên, một lôgic rất tự nhiên dẫn chúng ta đến một ý tưởng hữu ích hơn : Như vậy bất đẳng thức Ptolemy có liên quan đến bất đẳng thức tam giác. Vậy là bất đẳng thức Ptolemy có thể được chứng minh nhờ vào bất đẳng thức tam giác ? Quả là như vậy. Phép chứng minh dưới đây sẽ minh chứng cho luận điểm này :

Dựng điểm E sao cho tam giác BCD đồng dạng với tam giác BEA. Khi đó, theo tính chất của tam giác đồng dạng, ta có

$$\frac{BA}{EA} = \frac{BD}{CD}$$

Suy ra $BA.CD = EA.BD$ (2)



Hình 5.12

Mặt khác, hai tam giác EBC và ABD cũng đồng dạng,

do có $\dfrac{BA}{BD} = \dfrac{BE}{BC}$ và $\widehat{EBC} = \widehat{ABD}$.

Từ đó $\dfrac{EC}{BC} = \dfrac{AD}{BD}$.

Suy ra $AD.BC = EC.BD$. (3)

Cộng (2) và (3) ta suy ra

$$AB.CD + AD.BC = BD.(EA + EC).$$

Áp dụng bất đẳng thức tam giác, ta suy ra $AB.CD + AD.BC \geq AC.BD$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi A, E, C thẳng hàng, tức là khi A và D cùng nhìn BC dưới một góc bằng nhau, và khi đó tứ giác $ABCD$ nội tiếp. □

Bất đẳng thức Ptolemy có nhiều ứng dụng trong các bài toán bất đẳng thức hình học, đặc biệt là trong các bài toán so sánh độ dài các đoạn thẳng. Trước hết ta xem xét ứng dụng của bất đẳng thức Ptolemy trong việc chứng minh một số kết quả kinh điển của hình học phẳng.

Điểm Torricelli. Xét bài toán "*Cho tam giác ABC bất kỳ. Hãy tìm điểm M trong mặt phẳng tam giác sao cho MA + MB + MC đạt giá trị nhỏ nhất*".

Điểm M tìm được được gọi là điểm Torricelli của tam giác ABC. Có thể giải ngắn gọn bài toán này bằng cách sử dụng bất đẳng thức Ptolemy như sau :

Trên cạnh BC, dựng ra phía ngoài tam giác đều BCA'. Áp dụng bất đẳng thức Ptolemy cho tứ giác $MBA'C$ ta có

$$BM.CA' + CM.BA' \geq BC.MA'.$$

Từ đó, do $CA' = BA' = BC$ nên ta được

$$BM + CM \geq MA'.$$

Như thế

$$AM + BM + CM \geq MA + MA' \geq AA'.$$

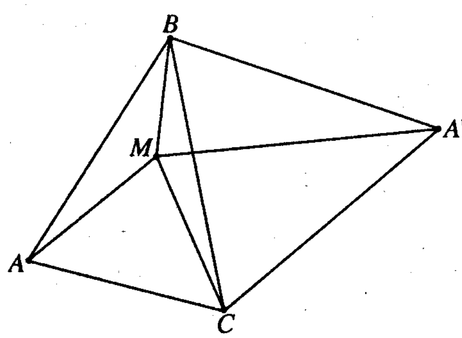
Tức là

$$AM + BM + CM \geq AA' \text{ (là hằng số).}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

i) Tứ giác $BMCA'$ nội tiếp ;

ii) M nằm giữa A và A'.



Hình 5.13

Dễ thấy ta có thể tìm được điểm M thoả mãn cả hai điều kiện này khi và chỉ khi tất cả các góc của tam giác ABC đều không lớn hơn 120°.

Nếu chẳng hạn góc $A > 120^\circ$ thì điểm M cần tìm sẽ chính là điểm A (bạn đọc tự chứng minh!). □

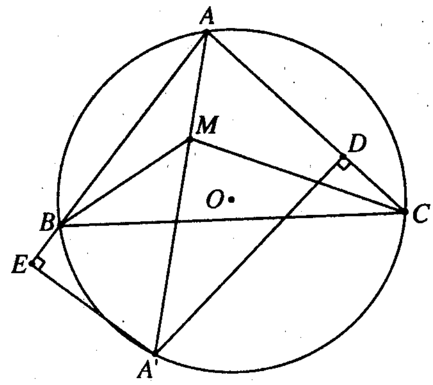
Rõ ràng phương pháp nói trên có thể áp dụng cho bài toán tổng quát hơn : "*Cho tam giác ABC và các số thực dương m, n, p. Hãy tìm điểm M trong mặt phẳng tam giác sao cho m.MA + n.MB + p.MC đạt giá trị nhỏ nhất*".

Tất nhiên, chúng ta cũng sẽ gặp phải tình huống tương tự như tình huống tam giác ABC có một góc lớn hơn 120° như ở trên.

Bất đẳng thức Erdos-Mordell. Cho tam giác ABC. M là một điểm bất kỳ nằm trong tam giác. Đặt $x_1 = MA$, $x_2 = MB$, $x_3 = MC$; p_1, p_2, p_3 lần lượt là khoảng cách từ M đến BC, CA, AB. Khi đó ta có bất đẳng thức

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 2(p_1 + p_2 + p_3).$$

Có rất nhiều cách chứng minh kết quả kinh điển này. Sau đây chúng ta trình bày phương pháp chứng minh sử dụng định lí Ptolemy.



Hình 5.14

Nối dài AM cắt đường tròn nội tiếp tam giác tại A'. Áp dụng định lí Ptolemy cho tứ giác nội tiếp $ABA'C$, ta có

$$AB.CA' + AC.BA' = BC.AA'.$$

Hạ $A'D$ vuông góc với AC và $A'E$ vuông góc với AB thì rõ ràng

$$A'B \geq A'E, A'C \geq A'D.$$

Do đó $a.AA' \geq c.A'D + b.A'E$

hay $1 \geq \dfrac{A'D}{AA'}.\dfrac{c}{a} + \dfrac{A'E}{AA'}.\dfrac{b}{a}$.

Nhưng $\dfrac{A'D}{AA'} = \dfrac{p_2}{x_1}$ và $\dfrac{A'E}{AA'} = \dfrac{p_3}{x_1}$ nên từ đó :

$$x_1 \geq p_2.\frac{c}{a} + p_3.\frac{b}{a}.$$

Tương tự ta có các đánh giá cho x_2, x_3, từ đó

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq p_1\left(\frac{c}{b} + \frac{b}{c}\right) + p_2\left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) + p_3\left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) \geq 2(p_1 + p_2 + p_3).$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều và M trùng với tâm O của tam giác. □

Phép chứng minh bất đẳng thức Ptolemy cũng như cách từ bất đẳng thức Ptolemy suy ra bất đẳng thức tam giác cho thấy bất đẳng thức này có thể áp dụng để đánh giá độ dài các đoạn thẳng. Việc dựng tam giác đều BCA' ra phía ngoài trong lời giải bài toán Torricelli chính là một cách làm mẫu mực để áp dụng được bất đẳng thức Ptolemy.

Ý tưởng chung là : Để đánh giá tổng $p.MA + q.MB$, ta có thể dựng điểm N sao cho $p.NA = q.NB$. Sau đó áp dụng bất đẳng thức Ptolemy thì được

$$NA.MB + NB.MA \geq AB.MN.$$

Từ đó $\quad pNA.MB + p.NB.MA \geq AB.MN$

$$\Leftrightarrow qNB.MB + p.NB.MA \geq AB.MN$$

$$\Leftrightarrow p.MA + q.MB \geq AB.\frac{MN}{NB}.$$

Chú ý rằng điểm N là cố định, như thế $p.MA + q.MB$ đã được đánh giá thông qua MN.

Ý tưởng này là chìa khoá để giải hàng loạt các bài toán cực trị hình học. Ta xem xét một số ví dụ :

Ví dụ 1. Cho điểm M nằm trong góc nhọn xOy. Hai điểm A, B lần lượt thay đổi trên Ox, Oy sao cho $2OA = 3OB$. Tìm vị trí của A, B sao cho $2MA + 3MB$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Giải. Áp dụng bất đẳng thức Ptolemy cho tứ giác $OAMB$, ta có

$$OA.MB + OB.MA \geq OM.AB.$$

Từ đó $\quad 2OA.MB + 2.OB.MA \geq 2.OM.AB$

$$\Leftrightarrow 3OB.MB + 2.OB.MA \geq 2.OM.AB$$

$$\Leftrightarrow 2MA + 3MB \geq 2.OM.\left(\frac{AB}{OB}\right).$$

Vì tam giác OAB luôn đồng dạng với chính nó nên $\dfrac{AB}{OB}$ là một đại lượng không đổi. Từ đó suy ra $2MA + 3MB$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $2.OM.\left(\dfrac{AB}{OB}\right)$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi tứ giác $OAMB$ nội tiếp. □

Ví dụ 2. Một lục giác có độ dài 6 cạnh đều bằng 1. Chứng minh rằng lục giác đó có ít nhất một đường chéo chính nhỏ hơn hay bằng 2. (Đường chéo chính là đường chéo chia lục giác thành hai tứ giác).

Giải. Không ngờ gợi ý cho lời giải bài toán này lại là một đẳng thức lớp một : "..."1 với 1 là 2"...". Và để thực hiện phép cộng hai cạnh thành ra đường chéo đó, ta sẽ áp dụng bất đẳng thức Ptolemy.

Xét lục giác $ABCDEF$. Xét tam giác ACE. Không mất tính tổng quát, có thể giả sử CE là cạnh lớn nhất trong tam giác. áp dụng bất đẳng thức Ptolemy cho tứ giác $ACDE$, ta có

$$AC.DE + AE.CD \geq AD.CE$$

Từ đó, do $CD = DE = 1$ và $CE \geq AC, CE \geq AE$ nên ta suy ra $AD \leq 2$. □

BÀI TẬP

11. (*IMO SL 1997*) Cho lục giác lồi $ABCDEF$ có $AB = BC$, $CD = DE$, $EF = FA$. Chứng minh rằng $\dfrac{BC}{BE} + \dfrac{DE}{DA} + \dfrac{FA}{FC} \geq \dfrac{3}{2}$. Dấu bằng xảy ra khi nào ?

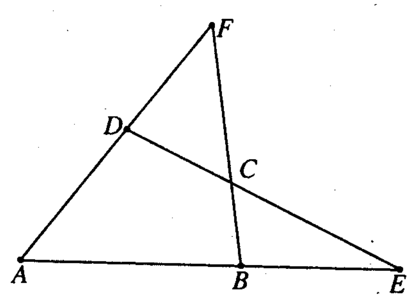
12. *(IMO 2001)* Cho tam giác ABC với trọng tâm G và độ dài các cạnh $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$. Tìm điểm P trên mặt phẳng tam giác sao cho đại lượng $AP.AG + BP.BG + CP.CG$ đạt giá trị nhỏ nhất và tìm giá trị nhỏ nhất đó theo a, b, c.

13. Cho đường tròn (O) và dây cung BC khác đường kính. Tìm điểm A thuộc cung lớn BC của đường tròn để $AB + 2AC$ đạt giá trị lớn nhất.

14. Lục giác lồi $ABCDEF$ có ABF là tam giác vuông cân tại A, $BCEF$ là hình bình hành, $AD = 3$, $BC = 1$, $CD + DE = 2\sqrt{2}$. Tính diện tích lục giác.

§5. TỨ GIÁC TOÀN PHẦN

Hình gồm tứ giác $ABCD$ có AB cắt CD tại E, AD cắt BC tại F được gọi là *tứ giác toàn phần* (h. 5.15).



Hình 5.15

Tứ giác toàn phần có một số tính chất sau :

Tính chất 1. Các đường tròn ngoại tiếp các tam giác BCE, CDF, ADE, ABF cùng đi qua một điểm. Điểm này gọi là điểm Miquel của tứ giác toàn phần.

Chứng minh (h. 5.16). Gọi M là giao điểm của hai đường tròn (ABF) và (CDF).

Ta có : $\overline{(MC, MB)} = \overline{(MC, MF)} + \overline{(MF, MB)}$

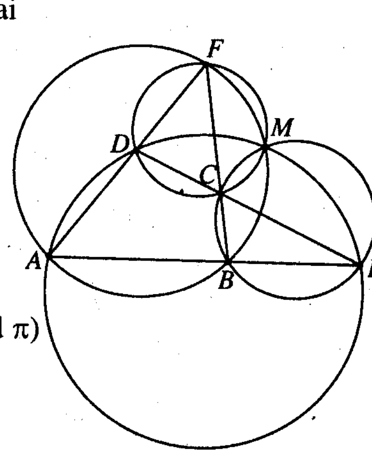
$= \overline{(DC, DF)} + \overline{(AF, AB)}$

$= \overline{(DE, AD)} + \overline{(AD, AE)}$

$= \overline{(DE, AE)} = \overline{(EC, EB)} \pmod{\pi}$

$\Rightarrow M \in (BCE)$.

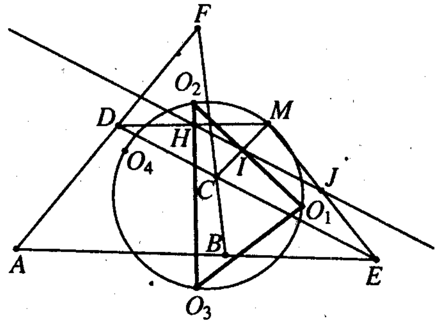
Chứng minh tương tự ta có $M \in (ADE)$. □



Hình 5.16

Tính chất 2. Gọi O_1, O_2, O_3, O_4 lần lượt là tâm của các đường tròn (BCE), (CDF), (ADE), (ABF). Khi đó O_1, O_2, O_3, O_4 , điểm Miquel M cùng thuộc một đường tròn.

Chứng minh (h.5.17). Ta có O_1O_2, O_2O_3, O_3O_1 lần lượt là các trung trực của MC, MD, ME. Vì thế các hình chiếu của M lên các đường thẳng này là trung điểm của MC, MD, ME nên chúng thẳng hàng. Từ đó suy ra $M \in (O_1O_2O_3)$ (định lí đảo của định lí về đường thẳng Simson) .



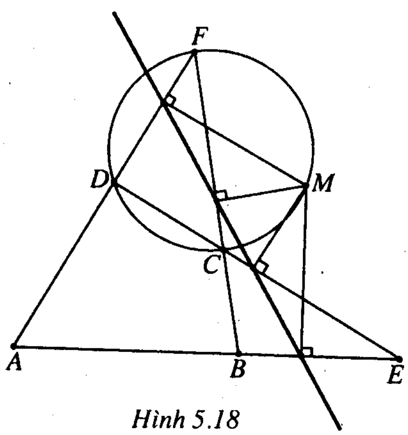
Hình 5.17

Chứng minh tương tự, ta cũng có $M \in (O_1O_2O_4)$ □

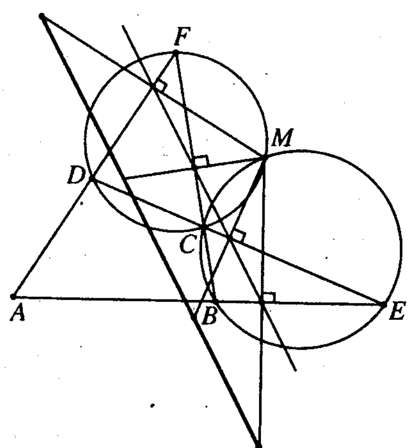
Tính chất 3. Chân các đường vuông góc hạ từ điểm Miquel M lên các đường thẳng AB, BC, CD, DA cùng nằm trên một đường thẳng (đường thẳng Simson).

Chứng minh (h. 5.18). Do $M \in (CDF)$ nên các hình chiếu của nó lên CD, DF, FC thẳng hàng (đường thẳng Simson)

Chứng minh tương tự cho các điểm còn lại. □



Hình 5.18



Hình 5.19

Tính chất 4. Các trực tâm của các tam giác BCE, CDF, ADE, ABF cùng nằm trên một đường thẳng (***Đường thẳng Steiner của tứ giác***).

Chứng minh (h. 5.19). Gọi M là điểm Miquel của tứ giác toàn phần. Phép vị tự tâm M, tỉ số 2 biến đường thẳng Simson của mỗi tam giác BCE, CDF, ADE, ABF thành đường thẳng Steiner của tam giác đó, đi qua trực tâm tam giác (xem §2). Từ tính chất 3 suy ra các đường thẳng Steiner của bốn tam giác trên trùng nhau và đường thẳng đó đi qua trực tâm của bốn tam giác. □

Nhận xét. Hai đường thẳng Simson và Steiner song song với nhau.

Tính chất 5. Các trung điểm của các đoạn AC, BD, EF cùng nằm trên một đường thẳng *(**Đường thẳng Gauss**)*.

Chứng minh (h 5.20). Gọi H, I, J, K, L, G lần lượt là trung điểm của AC, BD, EF, BE, EC, CB.

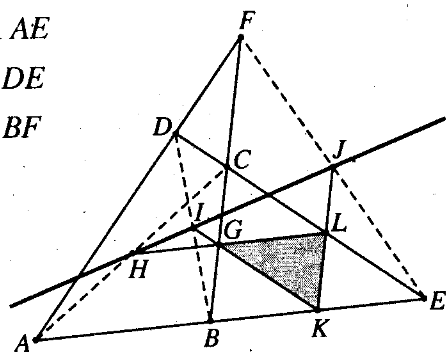
Ta có :

H, G, L nằm trên đường thẳng song song với AE

I, G, K nằm trên đường thẳng song song với DE

J, L, K nằm trên đường thẳng song song với BF

$$\Rightarrow \frac{HG}{HL}\cdot\frac{JL}{JK}\cdot\frac{IK}{IG}=\frac{AB}{AE}\cdot\frac{FC}{FB}\cdot\frac{DE}{DC}.$$



Hình 5.20

Áp dụng định lí Menelaus đối với tam giác BCE và đường thẳng ADF, ta có

$$\frac{AB}{AE}\cdot\frac{FC}{FB}\cdot\frac{DE}{DC}=1$$

$\Rightarrow \dfrac{HG}{HL}\cdot\dfrac{JL}{JK}\cdot\dfrac{IK}{IG}=1 \Rightarrow H, I, J$ thẳng hàng (định lí Menelaus đảo đối với tam giác GKL). □

Tính chất 6. Đường thẳng Steiner và đường thẳng Gauss vuông góc với nhau.

Chứng minh (h. 5.21). Gọi H, K lần lượt là trực tâm của các tam giác CDF, CBE.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn BD, EF.

Khi đó HK, MN lần lượt là các đường thẳng Steiner và Gauss của tứ giác toàn phần.

Ta có $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EN}$

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FN}$

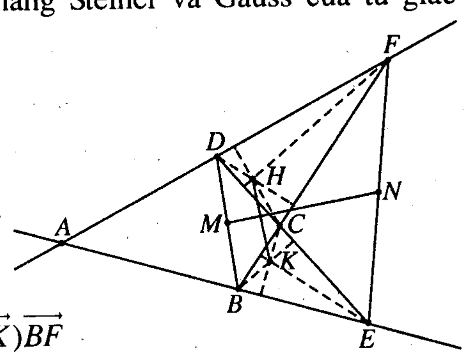
$\Rightarrow \quad 2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{BF}.$

$\overrightarrow{HK}.2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{HK}.\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{HK}.\overrightarrow{BF}$

$=(\overrightarrow{HF}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{BK})\overrightarrow{DE}+(\overrightarrow{HD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EK})\overrightarrow{BF}$

$=\overrightarrow{HF}.\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{FB}.\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{HD}.\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{EK}.\overrightarrow{BF}$

$=\overrightarrow{FB}.\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{BF}=\vec{0}.$



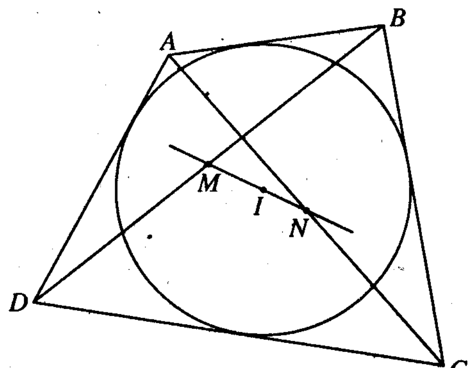
Hình 5.21

Vậy $HK \perp MN$. □

§6. ĐƯỜNG THẲNG NEWTON

Bài toán 1. Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn tâm I. Gọi N và M là trung điểm của các đường chéo AC và BD. Khi đó M, I, N cùng nằm trên một đường thẳng.

Đường thẳng này được gọi là ***đường thẳng Newton*** của tứ giác ngoại tiếp $ABCD$.



Hình 5.22

Chứng minh (h. 5.22). Nối dài DA và CB cắt nhau tại P. Trên (DA) lấy điểm D' sao cho $PD' = AD$ và trên (BC) lấy điểm C' sao cho $PC' = BC$.

Để ý rằng do M và N là trung điểm của BD và AC nên ta có

$$\mathrm{dt}(MAD) + \mathrm{dt}(MBC) = \mathrm{dt}(MAB) + \mathrm{dt}(MCD) = \frac{1}{2}\mathrm{dt}(ABCD)$$

$$\mathrm{dt}(NAD) + \mathrm{dt}(NBC) = \mathrm{dt}(NAB) + \mathrm{dt}(NCD) = \frac{1}{2}\mathrm{dt}(ABCD).$$

Theo cách dựng điểm D' và C' và hai đẳng thức trên, ta có

$$\mathrm{dt}(MPD') + \mathrm{dt}(MPC') = \mathrm{dt}(NPD') + \mathrm{dt}(NPC')$$

$$\Rightarrow \mathrm{dt}(MD'PC') = \mathrm{dt}(ND'PC')$$

$$\Rightarrow \mathrm{dt}(MD'C') = \mathrm{dt}(ND'C')$$

$$\Rightarrow MN \parallel D'C'. \qquad (1)$$

Mặt khác do tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn nên ta có $AD + BC = AB + CD$. Từ đó

$$\mathrm{dt}(IAD) + \mathrm{dt}(IBC) = \mathrm{dt}(IAB) + \mathrm{dt}(ICD) = \frac{1}{2}\mathrm{dt}(ABCD)$$

Lí luận tương tự như trên ta cũng có

$$IM \parallel D'C'. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra M, I, N thẳng hàng. □

Đường thẳng Newton có một trường hợp đặc biệt khá đẹp là bài toán sau :

Bài toán 2. Cho tam giác ABC. Đường tròn nội tiếp tâm I của tam giác tiếp xúc với cạnh BC tại D. Gọi M là trung điểm của BC và N là trung điểm của AD. Chứng minh rằng M, I, N thẳng hàng.

Ở đây tứ giác $ABCD$ biến thành tứ giác suy biến $ABDC$ với góc $BDC = 180^{\circ}$. Tất nhiên là các cách giải nêu trên vẫn tỏ ra hiệu quả. Ngoài ra, do tính chất đặc biệt của nó, bài toán còn có nhiều cách giải khác. Xin được dành cho bạn đọc phần tìm kiếm thêm các lời giải này.

BÀI TẬP

15. Cho đường tròn (O) đường kính AB. M là điểm tùy ý nằm trong (O). Đường phân giác từ M của tam giác AMB cắt (O) tại N. Phân giác ngoài góc AMB cắt NA, NB lần lượt tại P, Q. AM cắt đường tròn đường kính NQ tại điểm thứ hai R, BM cắt đường tròn đường kính NP tại điểm thứ hai S. Chứng minh đường trung tuyến kẻ từ N của tam giác NSR đi qua một điểm cố định.

§7. ĐỊNH LÍ CEVA, ĐỊNH LÍ MENELAUS VÀ ĐỊNH LÍ DESARGUES

Bài toán đồng quy và thẳng hàng là những bài toán phổ biến trong hình học và có nhiều cách để chứng minh. Trong bài này, chúng tôi xin nêu ra các định lí cổ điển và được xem như là các tiêu chuẩn để chứng minh 3 đường thẳng đồng quy hay 3 điểm thẳng hàng.

1. Định lí Ceva

Trong chương trình lớp 7, ta đã biết rằng trong một tam giác thì các đường trung tuyến, các đường phân giác, các đường cao đồng quy. Thực ra đó chỉ là trường hợp đặc biệt của những bộ ba đường thẳng đồng quy được xác định trong định lí sau đây.

Định lí Ceva. Cho tam giác ABC và các điểm A_1, B_1, C_1 lần lượt thuộc các cạnh BC, CA, AB. Khi đó AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy khi và chỉ khi :

$$\frac{A_1B}{A_1C}\cdot\frac{B_1C}{B_1A}\cdot\frac{C_1A}{C_1B} = 1. \qquad (1)$$

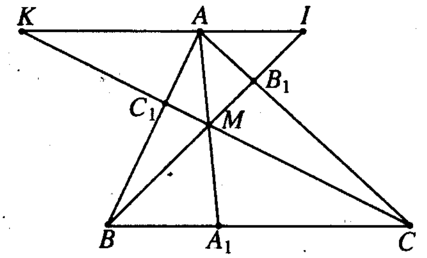
Chứng minh (h. 5.23). ($\Rightarrow$) Cho AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy, ta chứng minh (1)

Giả sử BB_1, CC_1 cắt đường thẳng qua A song song với BC lần lượt là I và K. Áp dụng định lí Thales ta có :

$$\frac{B_1C}{B_1A} = \frac{BC}{AI};\frac{C_1A}{C_1B} = \frac{AK}{BC}. \qquad (2)$$

Hơn nữa ta có :

$$\frac{AI}{A_1B} = \frac{AM}{MA_1} = \frac{AK}{A_1C} \Rightarrow \frac{A_1B}{A_1C} = \frac{AI}{AK} \qquad (3)$$



Hình 5.23

Từ (2) và (3) ta có $\frac{A_1B}{A_1C}.\frac{B_1C}{B_1A}.\frac{C_1A}{C_1B} = \frac{AI}{AK}.\frac{BC}{AI}.\frac{AK}{BC} = 1.$

($\Leftarrow$) Giả sử ta có hệ thức (1), ta cần chứng minh AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy.

Gọi P là giao điểm của AA_1 và BB_1, C' là giao điểm của CP và AB. Khi đó áp dụng phần trên ta có

$$\frac{A_1B}{A_1C}.\frac{B_1C}{B_1A}.\frac{C'A}{C'B} = 1. \qquad (4)$$

Từ (1) và (4) ta có $\frac{C_1A}{C_1B} = \frac{C'A}{C'B} \Rightarrow C_1 \equiv C'$ (Do C_1 và C' cùng thuộc cạnh AB).

Vậy AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy tại P. □

Bộ ba đường thẳng AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy như trên được gọi là *bộ ba đường thẳng Ceva* và các đoạn thẳng AA_1, BB_1 và CC_1 gọi là *bộ ba đoạn thẳng Ceva.*

Định lí Ceva là định lí cơ bản nhất dùng để chứng minh các đường thẳng đồng quy, ta có thể xét một vài ví dụ sau đây.

Ví dụ 1. Chứng minh rằng trong một tam giác :

a) Ba đường trung tuyến đồng quy ; b) Ba đường phân giác đồng quy ;

c) Ba đường cao đồng quy ; d) Ba đường trung trực đồng quy.

Chứng minh. Xét tam giác ABC.

a) Ba đường trung tuyến AM, BN và CP đồng quy.

Thật vậy ta có $\frac{MB}{MC}.\frac{NC}{NA}.\frac{PA}{PB} = 1.1.1 = 1$. Theo định lí Ceva, AM, BN và CP đồng quy tại G (G là trọng tâm của tam giác).

b) Ba đường phân giác AD, BE và CF đồng quy.

Áp dụng tính chất đường phân giác ta có $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC};\frac{EC}{EA} = \frac{BC}{BA}$ và $\frac{FA}{FB} = \frac{CA}{CB}$.

Do đó $\frac{DB}{DC}.\frac{EC}{EA}.\frac{FA}{FB} = \frac{AB}{AC}.\frac{BC}{BA}.\frac{CA}{CB} = 1$, theo định lí Ceva ta có AD, BE và CF đồng quy tại I (I là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC).

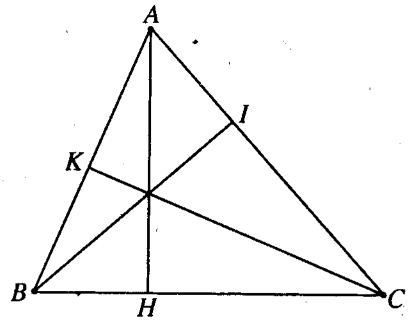
c) Ba đường cao AH, BI và CK đồng quy.

Trường hợp ΔABC nhọn (h. 5.24)

Ta có $\Delta AKC \backsim \Delta AIB \Rightarrow \frac{AK}{AI} = \frac{AC}{AB}$

$\Delta ABH \backsim \Delta CBK \Rightarrow \frac{BH}{BK} = \frac{AB}{BC}$

$\Delta BCI \backsim \Delta ACH \Rightarrow \frac{CI}{CH} = \frac{BC}{AC}$.



Hình 5.24

Do đó $\frac{HB}{HC}.\frac{IC}{IA}.\frac{KA}{KC} = 1$, theo định lí Ceva thì 3 đường thẳng AH, BI và CK đồng quy tại một điểm được gọi là trực tâm của tam giác.

Trường hợp ΔABC tù tại A.

Gọi O là giao điểm của BI và CK. Khi đó A là trực tâm của tam giác OBC nên $OA \perp BC$, suy ra $O \in AH$.

d) Ba đường trung trực d_a, d_b, d_c đồng quy.

Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, AC và AB. Khi đó d_a, d_b, d_c là ba đường cao của tam giác MNP nên đồng quy. □

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC và đường tròn tâm I nội tiếp tam giác tiếp xúc với các cạnh BC, AC và AB lần lượt tại D, E, F. Khi đó các đường thẳng AD, BE và CF đồng quy tại một điểm.

Chứng minh. Ta có $BD = BF$, $CD = CE$ và $AE = AF$. Suy ra $\frac{DB}{DC}.\frac{EC}{EA}.\frac{FA}{FB} = 1$, theo định lí Ceva thì các đường thẳng AD, BE và CF đồng quy tại một điểm J (J được gọi là ***điểm Gergonne*** của tam giác ABC). □

2. Định lí Menelaus

Phần trên chúng ta đã thấy một tiêu chuẩn để 3 đường thẳng đồng quy, trong phần này ta sẽ xét một tiêu chuẩn để 3 điểm thẳng hàng thông qua định lí sau :

Định lí Menelaus. Cho tam giác ABC và ba điểm A', B' và C' trên các đường thẳng BC, AC và AB sao cho : hoặc cả ba điểm A', B', C' đều nằm trên phần kéo dài của ba cạnh, hoặc một trong ba điểm trên nằm trên phần kéo dài của một cạnh còn hai điểm còn lại nằm trên hai cạnh của tam giác (*). Điều kiện cần và đủ để A', B', C' thẳng hàng là

$$\frac{A'B}{A'C}.\frac{B'C}{B'A}.\frac{C'A}{C'B} = 1. \qquad (5)$$

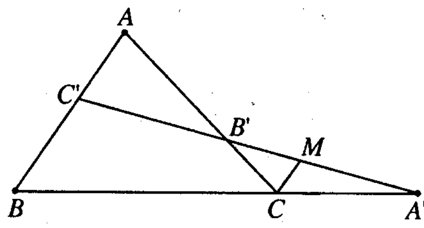
Chứng minh (h.5.25)

($\Rightarrow$) Cho A', B', C' thẳng hàng, ta chứng minh (5)

Từ C vẽ đường thẳng song song với AB cắt $A'C'$ tại M.

Áp dụng định lí Thales ta có :

$$\frac{A'B}{A'C} = \frac{A'C'}{A'M}, \ \frac{B'C}{B'A} = \frac{B'M}{B'C'}.$$



Hình 5.25

Mặt khác ta có

$$\frac{CM}{CA} = \frac{B'M}{B'C'} \text{ và } \frac{CM}{C'B} = \frac{A'M}{A'C'},$$

suy ra $\dfrac{C'A}{C'B} = \dfrac{(A'M.B'C')}{(A'C'.B'M)}$.

Do đó ta có $\dfrac{A'B}{A'C}.\dfrac{B'C}{B'A}.\dfrac{C'A}{C'B} = \dfrac{A'C'}{A'M}.\dfrac{B'M}{B'C'}.\left(\dfrac{A'M.B'C'}{A'C'.B'M}\right) = 1.$

($\Leftarrow$) Cho các điểm A', B', C' thoả mãn (*) và (5), ta chứng minh A', B', C' thẳng hàng.

Giả sử B', C' nằm trên 2 cạnh của tam giác và A' thuộc phần kéo dài của cạnh còn lại. Gọi B'' là giao điểm của $A'C'$ và AC.

Khi đó, theo chứng minh trên ta có $\dfrac{A'B}{A'C}.\dfrac{B''C}{B''A}.\dfrac{C'A}{C'B} = 1.$ (6)

Từ (6) và (5) ta có $\dfrac{B''C}{B''A} = \dfrac{B'C}{B'A} \Rightarrow B' \equiv B''$ (vì đều thuộc cạnh AC).

Vậy A', B', C' thẳng hàng.

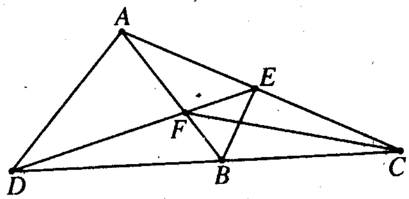
Trong trường hợp 3 điểm A', B' và C' cùng thuộc phần kéo dài của các cạnh thì chứng minh tương tự. □

Nhận xét. Hệ thức (1) và (5) là giống nhau, tuy nhiên vị trí của các điểm trên các cạnh là khác nhau.

Ta xét một vài ví dụ ứng dụng định lí Menelaus để chứng minh ba điểm thẳng hàng.

Ví dụ 3. Chứng minh rằng trong một tam giác, chân đường phân giác trong của hai góc và chân đường phân giác ngoài của góc thứ 3 là thẳng hàng.

Chứng minh (h. 5.26). Cho tam giác ABC, gọi BE, CF là hai đường phân giác trong và AD là phân giác ngoài. ($E \in AC$, $F \in AB$ và $D \in BC$).



Hình 5.26

Trước hết ta thấy 3 điểm E, F và D thỏa điều kiện (*) (E, F thuộc cạnh AC và AB còn D nằm ngoài đoạn BC).

Mặt khác, theo tính chất đường phân giác (trong hoặc ngoài), ta có

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}, \qquad \frac{EC}{EA} = \frac{BC}{BA}, \qquad \frac{FA}{FB} = \frac{CA}{CB}.$$

Suy ra $\dfrac{DB}{DC}.\dfrac{EC}{EA}.\dfrac{FA}{FB} = \dfrac{AB}{AC}.\dfrac{BC}{BA}.\dfrac{CA}{CB} = 1.$ □

Ví dụ 4. Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn (I), gọi M, N, P, Q lần lượt là các tiếp điểm của (I) với AB, BC, CD và AD. Chứng minh rằng NP, MQ và BD đồng quy.

Chứng minh (h. 5.27). Theo giả thiết ta có : $AQ = AM, BM = BN, CN = CP, DP = DQ.$

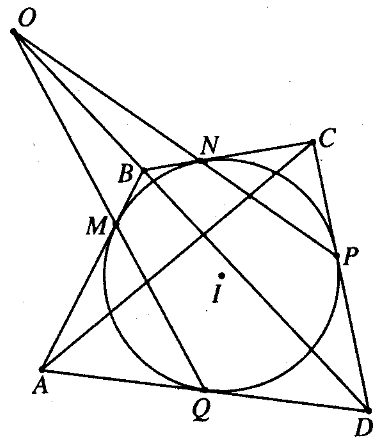
Gọi O là giao điểm của NP và BD. Áp dụng định lí Menelaus cho tam giác BCD ta có

$$\frac{OB}{OD}.\frac{PD}{PC}.\frac{NC}{NB} = 1 \Rightarrow \frac{OB}{OD} = \frac{NB}{PD}.$$

Khi đó ta có : $\dfrac{OB}{OD}.\dfrac{QD}{QA}.\dfrac{MA}{MB} = \dfrac{NB}{PD}.\dfrac{QD}{MB} = 1,$

áp dụng định lí Menelaus cho tam giác ABD thì O, M, Q thẳng hàng.

Vậy NP, BD và MQ đồng quy. □



Hình 5.27

3. Định lí Desargues

Định lí Menelaus cho ta một tiêu chuẩn để chứng minh ba điểm thẳng hàng, và sau đây chúng tôi xin giới thiệu một định lí cũng được xem như là tiêu chuẩn để chứng minh ba điểm thẳng hàng.

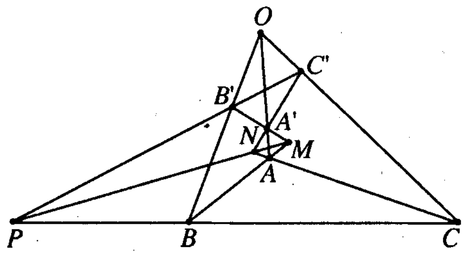
Định lí Desargues. Cho hai tam giác ABC và $A'B'C'$. Gọi M là giao điểm của AB và $A'B'$, N là giao điểm của AC và $A'C'$, P là giao điểm của BC và $B'C'$. Khi đó M, N, P thẳng hàng khi và chỉ khi AA', BB' và CC' đồng quy.

Chứng minh (h. 5.28).

($\Leftarrow$) Cho AA', BB', CC' đồng quy tại O. Ta chứng minh M, N, P thẳng hàng.

Áp dụng định lí Menelaus cho tam giác OAC với ba điểm N, A' và C', ta có :

$$\frac{NA}{NC}\cdot\frac{C'C}{C'O}\cdot\frac{A'O}{A'A} = 1. \quad (1)$$



Hình 5.28

Tương tự ta có : $\frac{PC}{PB}\cdot\frac{B'B}{B'O}\cdot\frac{C'O}{C'C} = 1.$ (2)

và $$\frac{MB}{MA}\cdot\frac{A'A}{A'O}\cdot\frac{B'O}{B'B} = 1. \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) ta có $\frac{NA}{NC}\cdot\frac{PC}{PB}\cdot\frac{MB}{MA} = 1$, do đó, áp dụng định lí Menelaus cho tam giác ABC, ta có M, N, P thẳng hàng.

($\Rightarrow$) Cho M, N, P thẳng hàng, ta chứng minh AA', BB', CC' đồng quy.

Xét hai tam giác MBB' và NCC' có MN, BC, $B'C'$ đồng quy tại P.

Ta có O là giao của BB' và CC'. Hơn nữa A là giao của MB và NC, A' là giao của MB' và NC'. Do đó theo chứng minh phần trên, ta có O, A và A' thẳng hàng, hay AA', BB' và CC' đồng quy. □

Ví dụ 5. Cho tam giác ABC và AD, BE, CF là bộ ba đường thẳng Ceva. Gọi P là giao của DE và AB, N là giao của DF và AC, M là giao điểm của EF và BC. Chứng minh rằng M, N, P thẳng hàng.

Chứng minh. Xét hai tam giác ABC và DEF có AD, BE, CF đồng quy. Áp dụng định lí Desargues ta có ngay điều cần chứng minh. □

BÀI TẬP

16. Chứng minh rằng trong một tam giác, ba đường thẳng nối trung điểm của mỗi cạnh với trung điểm của đoạn thẳng Ceva bất kì xuất phát từ đỉnh đối diện của cạnh đó đồng quy.

17. Cho tam giác ABC và đường tròn tâm I nội tiếp tam giác tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Gọi D', E', F' lần lượt là điểm đối xứng của D, E, F qua I. Chứng minh rằng AD', BE' và CF' đồng quy.

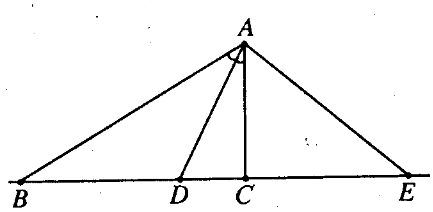
18. Trên các cạnh AB, AC của tam giác ABC vuông tại A, người ta dựng các hình vuông $ABEF$ và $ACGI$ ở bên ngoài tam giác. GB cắt đường cao AH tại O. Chứng minh rằng ba điểm C, E, O thẳng hàng.

19. Cho 3 đường tròn có bán kính khác nhau trong đó không đường tròn nào chứa đường tròn khác. Từng cặp đường tròn có các đường tiếp tuyến chung ngoài cắt nhau tại một điểm. Chứng minh rằng 3 điểm đó thẳng hàng.

§8. ĐƯỜNG TRÒN APOLLONIUS

Chúng ta nhắc lại tính chất của đường phân giác trong tam giác : chân các đường phân giác xuất phát từ một đỉnh của tam giác chia cạnh đối diện thành hai đoạn tỉ lệ với hai cạnh kề với hai đoạn ấy. Cụ thể ở hình vẽ 5.29 :

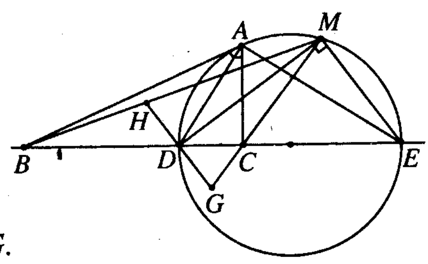
$$\frac{DB}{DC} = \frac{EB}{EC} = \frac{AB}{AC}.$$



Hình 5.29

Vấn đề đặt ra là liệu có còn những điểm nào khác D và E cũng có tính chất như vậy, chẳng hạn điểm M nào đó trong mặt phẳng có tính chất $\frac{MB}{MC} = \frac{AB}{AC}$.

Câu trả lời là có. Ta vẽ đường tròn có đường kính là DE và lấy một điểm M bất kì trên đường tròn này (h. 5.30).



Hình 5.30

Từ D kẻ đường thẳng song song với EM cắt MB, MC lần lượt tại H, G.

Ta có : $\frac{DH}{EM} = \frac{BD}{BE}, \frac{DG}{EM} = \frac{CD}{CE}$

mà $\frac{BD}{BE} = \frac{CD}{CE}$ nên $\frac{DH}{EM} = \frac{DG}{EM} \Rightarrow DH = DG.$

Mặt khác $MD \perp HG$ nên MHG là tam giác cân tại $M \Rightarrow MD$ là phân giác của góc $\widehat{BMC} \Rightarrow \frac{MB}{MC} = \frac{AB}{AC}\left(= \frac{DB}{DC}\right)$. □

Bây giờ ta sẽ mở rộng bài toán trên bằng cách thay tỉ số $\frac{AB}{AC}$ bởi một số dương k bất kì.

Bài toán. Cho hai điểm A, B cố định và số thực dương k. Tìm tập hợp tất cả những điểm M sao cho $\dfrac{MA}{MB} = k$.

Giải. Ta xét hai trường hợp sau

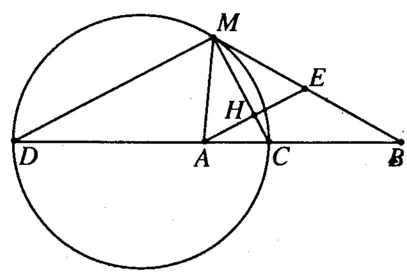
Trường hợp 1 : $k = 1$.

Khi đó $MA = MB$. Quỹ tích những điểm M là đường trung trực của AB.

Trường hợp 2 : $k \neq 1$. Ta tìm lời giải trong trường hợp $k < 1$.

Gọi C, D là điểm chia trong, chia ngoài đoạn thẳng AB theo tỉ số k, tức là $\dfrac{CA}{CB} = \dfrac{DA}{DB} = k$ (C nằm giữa A, B và D nằm ngoài đoạn AB). Khi đó $M \equiv C$, $M \equiv D$ thỏa mãn bài toán. Nếu M khác C và D. Ta có $\dfrac{MA}{MB} = \dfrac{CA}{CB} = \dfrac{DA}{DB}$ nên MC, MD lần lượt là phân giác trong và phân giác ngoài của $\widehat{AMB}$. Do đó $\widehat{CMD} = 90^{\circ}$. Suy ra M thuộc đường tròn đường kính CD.

Đảo lại. Lấy M bất kì thuộc đường tròn đường kính CD. Ta cần chứng minh $\dfrac{MA}{MB} = k$.



Hình 5.31

Nếu M trùng C hoặc D thì hiển nhiên.

Nếu M khác C và D, qua A vẽ đường thẳngvuông góc với MD cắt MB tại E và cắt MC tại H.

Ta có $\dfrac{AE}{DM} = \dfrac{BA}{BD} = 1 - k$

và $\dfrac{AH}{DM} = \dfrac{AC}{CD} = \dfrac{1-k}{2}$ (vì $k = \dfrac{DA}{DB} = \dfrac{CA}{BC} = \dfrac{DC - 2AC}{DB - BC} = 1 - 2\dfrac{CA}{CD}$).

Do đó $AE = 2AH$, suy ra H là trung điểm AE, suy ra $ME = MA$.

Từ đó ta có $\dfrac{MA}{MB} = \dfrac{ME}{MB} = \dfrac{DA}{DB} = k$.

(Chú ý : Nếu dùng độ dài đại số thì ta không phải xét $k > 1$ hay $k < 1$).

Vậy với $k \neq 1$, quỹ tích những điểm M thỏa mãn $\dfrac{MA}{MB} = k$ là đường tròn đường kính CD. □

Người ta gọi đường tròn này *là **đường tròn Apollonius tỉ số k (≠1) dựng trên đoạn AB***.

Trên đây là đường tròn Apollonius của đoạn thẳng, ngoài ra đối với tam giác, ta còn có các đường tròn Apollonius được xác định như sau :

Đối với một tam giác bất kì, ta có đường tròn Apollonius liên kết với mỗi đỉnh được xác định như sau : Đó là đường tròn có đường kính là chân các đường phân giác trong và ngoài xuất phát từ đỉnh đó. Ta có 3 đường tròn Apollonius tương ứng liên kết với 3 đỉnh của tam giác.

Ta có các định lí sau :

***Định lí 1** : Trong một tam giác, mỗi đường tròn Apollonius liết kết với một đỉnh thì trực giao với đường tròn có đường kính là cạnh đối diện với đỉnh đó.*

***Định lí 2** : Ba đường tròn Apollonius của một tam giác cùng đi qua 2 điểm.*

***Định lí 3** : Mỗi đường tròn Apollonius thì trực giao với đường tròn ngoại tiếp tam giác. Đường thẳng đi qua hai giao điểm của các đường tròn Apollonius đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác.*

Sau đây chúng ta xét một vài ví dụ liên quan đến đường tròn Apollonius.

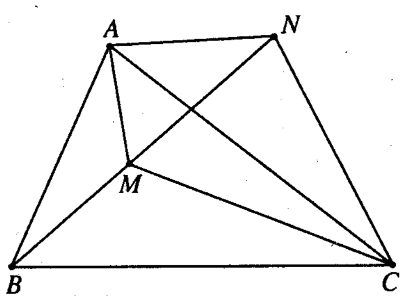
Ví dụ 1. Cho tam giác ABC không cân. Điểm M thay đổi trong tam giác sao cho $\widehat{AMC} - \widehat{B} = \widehat{AMB} - \widehat{C}$. Chứng minh rằng M thuộc một đường tròn cố định.

Giải (h. 5.32). Dựng ra phía ngoài tam giác ABC một điểm N sao cho $\Delta ANC \backsim \Delta AMB$. Khi đó

$$\frac{AN}{AM} = \frac{AC}{AB} \text{ và } \widehat{BAC} = \widehat{MAN}$$

Suy ra $\Delta AMN \backsim \Delta ABC$, do đó $\widehat{AMN} = \widehat{ABC}$, suy ra

$$\widehat{AMC} - \widehat{ABC} = \widehat{AMC} - \widehat{AMN} = \widehat{CMN}. \quad (1)$$



Hình 5.32

Mặt khác $\widehat{ANC} = \widehat{AMB}$ và $\widehat{ANM} = \widehat{ACB}$.

Suy ra $\widehat{AMB} - \widehat{ACB} = \widehat{ANC} - \widehat{ANM} = \widehat{MNC}$. (2)

Từ (1) và (2) kết hợp với giả thiết ta có $\widehat{CMN} = \widehat{CNM}$, suy ra $CN = CM$.

Do đó $\frac{MB}{AB} = \frac{CN}{AC} = \frac{CM}{AC}$, suy ra $\frac{BM}{CM} = \frac{AB}{AC}$ không đổi. Vậy M thuộc đường tròn Apollonius dựng trên đoạn BC tỉ số là $\frac{AB}{AC}$. □

Ví dụ 2 (*Iran 1997*). Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Điểm M thay đổi trên cung BC (không chứa A) của đường tròn (O) (M khác B và C). Gọi I, J lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ABM và ACM. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác MIJ luôn đi qua một điểm cố định.

Giải. Gọi N là giao điểm của (MIJ) và (O).

MI cắt (O) tại E, MJ cắt (O) tại D. Suy ra E, D lần lượt là điểm chính giữa các cung AB, AC nên cố định. Hơn nữa ta có $EA = EI = EB$ và $DA = DJ = DC$.

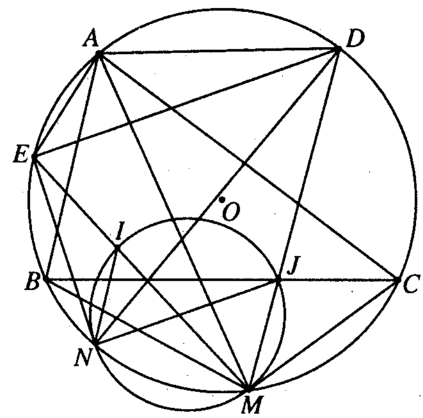
Xét tam giác NIE và tam giác NJD có

$\widehat{NEI} = \widehat{NDJ}$ (cùng chắn cung MN),

$\widehat{EIN} = \widehat{DJN}$ (cùng bù với hai góc bằng nhau là $\widehat{NIM}$ và $\widehat{NJM}$).

Suy ra $\Delta NIE \backsim \Delta NJD$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{NE}{ND} = \dfrac{EI}{DJ} = \dfrac{AE}{AD}$ không đổi.



Hình 5.33

Do đó N thuộc đường tròn Apollonius dựng trên đoạn ED tỉ số $\dfrac{AE}{AD}$.

Vậy N là giao điểm của đường tròn trên và (O) nên cố định (A là giao điểm còn lại của hai đường tròn trên). □

BÀI TẬP

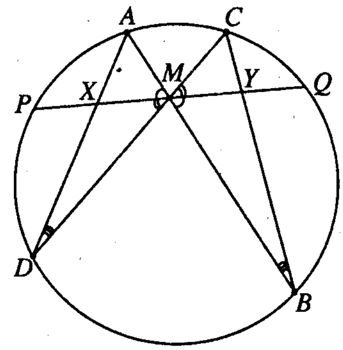
20. Cho bốn điểm A, B, C, D thẳng hàng theo thứ tự đó, $AB \neq CD$. Điểm M thay đổi sao cho $\widehat{AMB} = \widehat{CMD}$, M không thuộc AB. Chứng minh rằng M thuộc một đường tròn cố định.

21. Cho tam giác ABC không cân. Gọi I, J lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp và bàng tiếp góc A của tam giác ABC. Chứng minh rằng IJ là một tiếp tuyến của hai đường tròn Apollonius dựng trên đoạn BC theo các tỉ số là $\dfrac{IB}{IC}$ và $\dfrac{JB}{JC}$.

22. Cho tam giác ABC. Hai điểm phân biệt M, N thay đổi sao cho $\dfrac{MA}{NA} = \dfrac{MB}{NB} = \dfrac{MC}{NC} \neq 1$. Chứng minh rằng đường thẳng MN đi qua một điểm cố định.

§9. ĐỊNH LÍ CON BƯỚM

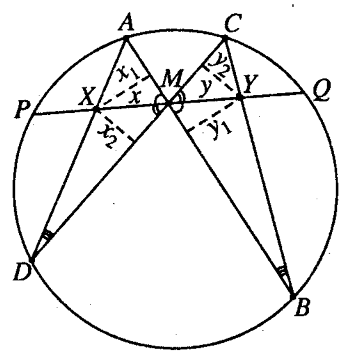
Định lí (Bài toán con bướm). Cho dây cung PQ của một đường tròn. Vẽ hai dây cung AB và CD khác của đường tròn đi qua trung điểm M của PQ. Gọi giao điểm của AD và BC với PQ là X và Y. Khi đó M cũng là trung điểm của XY.



Hình 5.34

Chứng minh. Có nhiều cách chứng minh chứng minh cho định lí này, dưới đây trình bày cách chứng minh của Coxeter và Greitzer.

Kẻ các đường vuông góc x_1, y_1 từ X, Y xuống AB và x_2, y_2 từ X, Y xuống CD. Đặt $a = PM = MQ$, $MX = x$, $MY = y$. Áp dụng tính chất của tam giác đồng dạng, ta có



Hình 5.35

$$\frac{x}{y} = \frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} \qquad (1)$$

$$\frac{x_1}{y_2} = \frac{AX}{CY} \qquad (2)$$

$$\frac{x_2}{y_1} = \frac{XD}{YB}. \qquad (3)$$

Từ đó suy ra

$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{x_1}{y_1}.\frac{x_2}{y_2} = \frac{x_1}{y_2}.\frac{x_2}{y_1} = \frac{AX}{CY}.\frac{XD}{YB} = \frac{PX.XQ}{PY.YQ}$$

$$= \frac{(a-x)(a+x)}{(a+y)(a-y)} = \frac{a^2-x^2}{a^2-y^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1.$$

Suy ra $x = y$.

Trong chứng minh trên, ta sử dụng tính chất $AX.XD = PX.XQ$ và $CY.YB = PY.YQ$ suy ra từ các cặp tam giác đồng dạng $PXD \backsim AXQ$ và $CYQ \backsim PYB$.

Có 1 cách chứng minh khác cho định lí trên như sau : Gọi O là tâm đường tròn và I, J lần lượt là trung điểm của BC và AD.

Do tứ giác $OMYI$ nội tiếp nên ta có

$$\widehat{MOY} = \widehat{MIY}. \qquad (4)$$

Tương tự ta có

$$\widehat{MOX} = \widehat{MJX}. \quad (5)$$

Mặt khác, do hai tam giác MCB và MAD đồng dạng và MI, MJ là các trung tuyến tương ứng nên

$$\widehat{MIY} = \widehat{MJX}. \quad (6)$$

Từ (4), (5), (6) suy ra $\widehat{MOY} = \widehat{MOX}$, suy ra tam giác OXY cân vì có OM vừa là đường cao vừa là đường phân giác, từ đó $MX = MY$. □

Chú ý là định lí con bướm vẫn đúng nếu ta nối AC và BD kéo dài cắt PQ tại X' và Y' (đây được gọi là con bướm ngoài).

Ngoài hai cách chứng minh trên đây, định lí con bướm còn có nhiều cách chứng minh khác và có nhiều mở rộng thú vị. Bạn đọc có thể tham khảo thêm ở trang web : http ://www.cut-the-knot.org/pythagoras/Butterfly.shtml

§10. ĐỊNH LÍ EULER VỀ TAM GIÁC PEDAL

Cho tam giác ABC và một điểm M bất kỳ trong mặt phẳng tam giác. Hạ MX, MY, MZ lần lượt vuông góc với BC, CA, AB. Khi đó XYZ được gọi là *tam giác pedal* (hoặc *tam giác bàn đạp*) của tam giác ABC ứng với điểm M. Tam giác pedal có nhiều tính chất thú vị, chẳng hạn

Định lí 1 (*Định lí Euler*). Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O bán kính R. M là một điểm bất kì nằm trong mặt phẳng tam giác. Hạ MX, MY, MZ lần lượt vuông góc với BC, CA, AB. Khi đó diện tích tam giác XYZ có thể tính theo diện tích tam giác ABC và khoảng cách MO theo công thức sau

$$S_{XYZ} = \frac{1}{4}S_{ABC}\left|1 - \frac{MO^2}{R^2}\right|.$$

Chứng minh : Ta kí hiệu $S_{XYZ} = S_1$, $S_{ABC} = S$.

Nối dài AM, BM, CM cắt đường tròn ngoại tiếp tại các điểm X', Y', Z' tương ứng. Ta có $\widehat{ZXM} = \widehat{MBZ}$ (tứ giác $BZMX$ nội tiếp)

$\widehat{MBZ} = \widehat{ABY'}$ (B, Z, A thẳng hàng và B, M, Y' thẳng hàng)

$\widehat{ABY'} = \widehat{AX'Y'}$ (cùng chắn cung AY').

Từ đó suy ra $\widehat{ZXM} = \widehat{AX'Y'}$. Tương tự $\widehat{YXM} = \widehat{AX'Z'}$.

Từ đó suy ra $\widehat{ZXY} = \widehat{Z'X'Y'}$. Ta sẽ kí hiệu hai góc này tương ứng là X và X'.

Ta có

$$S_1 = \frac{1}{2}XY.XZ.\sin X$$

$$= \frac{1}{2}MC.\sin C.MB.\sin B.\sin X \qquad \text{(định lí hàm số sin)}$$

$$= \frac{1}{2}MB.MY'.\frac{MC}{MY'}.\sin B.\sin C.\sin X$$

$$= \frac{1}{2}|MO^2 - R^2|\,\frac{BC}{Z'Y'}.\sin B.\sin C.\sin X \qquad (\text{phương tích}, \Delta MBC \backsim \Delta MZ'Y')$$

$$= \frac{1}{2}|MO^2 - R^2|.BC.\sin C.\sin B.\frac{\sin X'}{Y'Z'}$$

$$= \frac{1}{8}\left|1 - \frac{MO^2}{R^2}\right|AC.BC.\sin C \quad \left(\sin B = \frac{AC}{2R},\ \frac{\sin X'}{Y'Z'} = \frac{1}{2}R\right)$$

$$= \frac{1}{4}S\left|1 - \frac{MO^2}{R^2}\right|. \ \square$$

Định lí Euler là một kết quả thú vị và sâu sắc của hình học trong tam giác. Định lí này có nhiều hệ quả hay. Chúng ta sẽ xem xét một số hệ quả đó :

Đường thẳng Simson. Từ kết quả của định lí Euler, ta thấy nếu M nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, tức là nếu $OM = R$ thì diện tích tam giác pedal bằng 0. Điều đó có nghĩa là tam giác XYZ suy biến thành đường thẳng. Và như vậy, ta đã chứng minh được một kết quả quen thuộc sau đây :

Định lí 2 (*Đường thẳng Simson*). Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). M là một điểm bất kỳ trên (O). Hạ MX, MY, MZ lần lượt vuông góc với BC, CA, AB. Khi đó X, Y, Z cùng nằm trên một đường thẳng.

Đường thẳng đi qua X, Y, Z được gọi là đường thẳng Simson ứng với điểm M. Tính chất thú vị này có thể chứng minh khá dễ dàng mà không cần thông qua định lí Euler, sử dụng tính chất của tứ giác nội tiếp (xem thêm ở §2).

Công thức Euler. Khi M trùng với I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác thì XYZ là tam giác nội tiếp trong đường tròn tâm I bán kính r, có các góc X, Y, Z tương ứng bằng $90^\circ - \frac{A}{2}$, $90^\circ - \frac{B}{2}$, $90^\circ - \frac{C}{2}$ nên ta có

$$S_{XYZ} = 2r^2\sin X\sin Y\sin Z = \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = S.\frac{r}{2R}$$

Từ đó, thay vào định lí Euler, ta được

$$S\frac{r}{2R} = \frac{1}{4}S\left(1 - \frac{IO^2}{R^2}\right) \Leftrightarrow 2Rr = R^2 - IO^2$$

$$\Leftrightarrow IO^2 = R^2 - 2Rr.$$

Ta thu được một kết quả đẹp mắt khác của hình học phẳng (được gọi là công thức Euler)

Định lí 3. (*Công thức Euler*) Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O bán kính R và ngoại tiếp đường tròn tâm I bán kính r. Khi đó khoảng cách IO có thể tính theo công thức sau :

$$IO^2 = R^2 - 2Rr.$$

Sau đây, chúng ta sẽ làm quen với định lí qua một số ví dụ cơ bản.

Ví dụ 1. Cho đường tròn $(O\,;R)$ và điểm M cố định. Trên (O) lấy các điểm A, B, C sao cho tam giác ABC đều và đặt $AM = x$, $BM = y$, $CM = z$. Chứng minh rằng tam giác mà độ dài các cạnh là x, y, z có diện tích không đổi khi A, B, C thay đổi.

Giải. Gọi (T) là tam giác có độ dài các cạnh là x, y, z. Dựng D, E, F lần lượt là hình chiếu của M trên các cạnh AB, BC, CA của tam giác ABC.

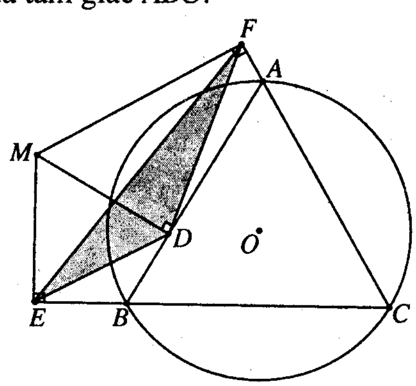
Theo định lí sin ta dễ dàng có được :

$$\frac{DE}{MB} = \frac{DF}{MA} = \frac{EF}{MC} = \sin 60^\circ$$

$$\Leftrightarrow \frac{DE}{y} = \frac{DF}{x} = \frac{EF}{z} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Suy ra : ΔDEF đồng dạng với (T) theo tỉ số đồng dạng là $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\Rightarrow \frac{S_{DEF}}{S_{(T)}} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow S_{(T)} = \frac{4}{3}.S_{DEF}$$



Hình 5.36

Do DEF là tam giác pedal dựng từ điểm M của tam giác ABC nên theo định lí Euler, ta có được : $S_{DEF} = \frac{\left|R^2 - OM^2\right|}{4R^2}.S_{ABC}$.

Mà đường tròn $(O\ ;\ R)$ và điểm M cố định, ΔABC đều nên S_{ABC} cố định $\Rightarrow S_{DEF} = const$ □

Ví dụ 2. Cho tứ giác lồi $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn tâm O (với O nằm bên trong tứ giác). Gọi $MNPQ$ là tứ giác mà các đỉnh lần lượt là hình chiếu của giao điểm 2 đường chéo của tứ giác $ABCD$ đến các cạnh AB, BC, CD, DA. Chứng minh rằng :

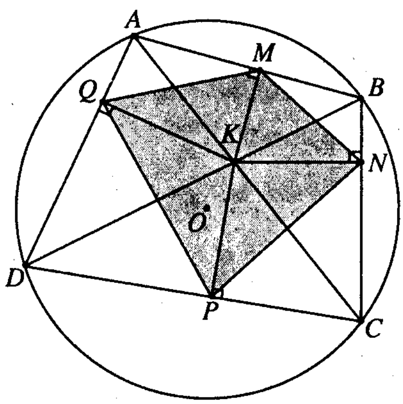
$$S_{MNPQ} \le \frac{S_{ABCD}}{2}.$$

Giải (h.5.37). Gọi K là giao điểm 2 đường chéo AC và BD của tứ giác $ABCD$.

Dễ thấy KMN là tam giác pedal dựng từ điểm K của tam giác ABC, do đó áp dụng định lí Euler ta được :

$$\frac{S_{KMN}}{S_{ABC}} = \frac{\left|R^2 - OK^2\right|}{4R^2} = \frac{R^2 - OK^2}{4R^2}$$ (vì K ở trong tứ giác)

$$\Rightarrow S_{KMN} = \frac{(R^2 - OK^2)}{4R^2}.S_{ABC}.$$



Hình 5.37

Làm tương tự cho các tam giác KNP, KPQ, KQM và cộng các kết quả lại :

$$S_{KMN} + S_{KNP} + S_{KPQ} + S_{KQM} = \frac{R^2 - OK^2}{4R^2}.(S_{ABC} + S_{BCD} + S_{CDA} + S_{DAB})$$

$$\Rightarrow S_{MNPQ} = \frac{R^2 - OK^2}{2R^2}.S_{ABCD} \le \frac{R^2 - 0}{2R^2}.S_{ABCD} = \frac{1}{2}S_{ABCD}.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow OK^2 = 0 \Leftrightarrow OK = 0 \Leftrightarrow K \equiv O$. □

BÀI TẬP

23. Cho tam giác ABC, M là một điểm bất kì trong mặt phẳng tam giác, XYZ là tam giác pedal của tam giác ABC ứng với điểm M. Các đường đối xứng qua các đường phân giác cùng đỉnh (còn gọi là *đường đối phân giác*) của AM, BM, CM đồng quy tại một điểm M_1, $X_1Y_1Z_1$ là tam giác pedal của tam giác ABC

ứng với điểm M_1. Chứng minh rằng 6 điểm X, Y, Z, X_1, Y_1, Z_1 cùng nằm trên một đường tròn (gọi là *đường tròn pedal* ứng với điểm M cũng như ứng với điểm M_1).

24. Cho 4 điểm trong mặt phẳng, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng các đường tròn pedal của 1 điểm tuỳ ý trong chúng ứng với tam giác tạo bởi 3 đỉnh còn lại đồng quy tại một điểm.

25. (*Serbia and Montenegro 2003*) Cho tam giác ABC có trực tâm H. Gọi D, E, F lần lượt là chân các đường cao hạ từ các đỉnh A, B, C. Gọi P là điểm đối xứng với A qua BC, Q là điểm đối xứng với B qua CA, R là điểm đối xứng với C qua AB. Chứng minh rằng nếu $S_{DEF} = S_{PQR} = T$ thì ta có $T = \frac{3}{5}S$ hoặc $T = S$ (với S là diện tích tam giác ABC).

§11. MỘT SỐ QUỸ TÍCH CƠ BẢN

Bài toán quỹ tích là dạng toán thường gặp trong chương trình toán phổ thông. Để đoán nhận quỹ tích, chúng ta cần có kiến thức về một số quỹ tích cơ bản. Ngoài ra cần có khả năng dự đoán quỹ tích qua suy luận cũng như qua các phép dựng hình chính xác.

Các quỹ tích cơ bản

1) Tập hợp các điểm cách đều hai điểm cố định cho trước là đường trung trực của đoạn thẳng nối hai điểm đó.

2) Tập hợp các điểm cách đều hai cạnh của một góc là đường phân giác của góc đó.

3) Tập hợp các điểm cách đường thẳng cho trước một khoảng không đổi là hai đường thẳng song song với đường thẳng đó.

4) Tập hợp các điểm cách đều hai đường thẳng song song là một đường thẳng song song với hai đường thẳng đó (đi qua trung điểm của đoạn thẳng bất kì có hai đầu mút lần lượt nằm trên hai đường thẳng song song đó)

5) Tập hợp các điểm cách đều một điểm cho trước một khoảng không đổi là một đường tròn.

6) Tập hợp các điểm có cùng phương tích đối với hai đường tròn là trục đẳng phương của hai đường tròn đó.

7) Tập hợp các điểm có tổng khoảng cách đến hai điểm cho trước không đổi là một elip.

8) Tập hợp các điểm có giá trị tuyệt đối của hiệu các khoảng cách từ điểm đó đến hai điểm cho trước không đổi là một hypebol.

9) Tập hợp các điểm điểm cách đều một điểm cho trước và một đường thẳng cho trước là một parabol.

10) Tập hợp các điểm có tỉ số khoảng cách từ điểm đó đến một điểm cho trước và đến một đường thẳng cho trước không đổi là một đường cônic.

Các dạng quỹ tích thường gặp

Dạng 1. Cho đoạn thẳng AB và số $k > 0$. Tìm tập hợp các điểm M sao cho

$$MA^2 + MB^2 = k.$$

Giải. Gọi I là trung điểm của AB, ta có

$$MA^2 + MB^2 = k \Leftrightarrow 2MI^2 + \frac{AB^2}{2} = k \Leftrightarrow MI^2 = \frac{2k - AB^2}{4}.$$

Nếu $2k < AB^2$ thì không tồn tại điểm M.

Nếu $2k = AB^2$ thì điểm M chính là điểm I.

Nếu $2k > AB^2$ thì tập hợp các điểm M là đường tròn tâm I bán kính $\frac{\sqrt{2k - AB^2}}{2}$. □

Dạng 2. Cho đoạn thẳng AB và số thực k. Tìm tập hợp những điểm M sao cho $MA^2 - MB^2 = k$.

Giải. Gọi I là trung điểm của AB và H là hình chiếu của M trên đường thẳng AB. Ta có

$$\mathrm{MA}^2 - \mathrm{MB}^2 = \mathrm{k} \Leftrightarrow \overline{HA}^2 - \overline{HB}^2 = k \Leftrightarrow (\overline{HA} + \overline{HB})(\overline{HA} - \overline{HB}) = k$$

$$\Leftrightarrow 2\overline{HI}.\overline{BA} = k \Leftrightarrow \overline{IH} = \frac{k}{2\overline{AB}}.$$ Suy ra H là điểm cố định.

Vậy tập hợp các điểm M là đường thẳng vuông góc với AB tại H. □

Dạng 3. Cho đoạn thẳng AB và các số thực a, b, c $(ab \neq 0)$. Tìm tập hợp những điểm M sao cho $aMA^2 + bMB^2 = c$.

Giải.

Nếu $a + b = 0$ thì $aMA^2 + bMB^2 = c \Leftrightarrow MA^2 - MB^2 = \frac{c}{a}$ (đã giải quyết ở dạng 2)

Trường hợp $a + b \neq 0$:

Gọi I là điểm sao cho $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{O}$ (I cố định). Khi đó

$$aMA^2 + bMB^2 = c \Leftrightarrow a\overrightarrow{MA}^2 + b\overrightarrow{MB}^2 = c$$

$$\Leftrightarrow a(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + b(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 = c$$

$$\Leftrightarrow (a + b)\overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI}.(a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB}) + aIA^2 + bIB^2 = c$$

$$\Leftrightarrow MI^2 = \frac{c(a + b) - abAB^2}{(a + b)^2} = d$$

Nếu $d < 0$ thì không tồn tại M.

Nếu $d = 0$ thì M trùng I.

Nếu $d > 0$ thì M thuộc đường tròn tâm I bán kính $\sqrt{d}$. □

Dạng 4. Cho đoạn thẳng AB và số thực $k > 0, k \neq 1$. Tìm tập hợp các điểm M sao cho $\dfrac{MA}{MB} = k$.

Kết quả : Tập hợp các điểm M sao cho $\dfrac{MA}{MB} = k$ ($k > 0$, $k \neq 1$) là một đường tròn và đường tròn này được gọi là đường tròn Apollonius (xem §8. Đường tròn Apollonius).

BÀI TẬP

26. Cho tam giác ABC có BC cố định còn đỉnh A thay đổi sao cho $\widehat{BAC} = \alpha$ không đổi. Hãy tìm quỹ tích trọng tâm G, trực tâm H, tâm đường tròn nội tiếp I của tam giác ABC khi A thay đổi.

27. Cho hình vuông $ABCD$. M là một điểm thay đổi trên BC. Nối AM, DM cắt DC, AB tương ứng tại P và Q. Nối BP, CQ cắt nhau tại K. Tìm quỹ tích điểm K khi M di chuyển trên BC.

28. Hai đường tròn tâm O và O' cắt nhau tại hai điểm A và B. Một cát tuyến thay đổi qua A cắt đường tròn tâm O tại điểm E và cắt đường tròn tâm O' tại điểm F. Hai đường thẳng OE và $O'F$ cắt nhau tại điểm M. Tìm tập hợp các điểm M.

29. Cho một góc nhọn Oxy và một điểm M nằm trong góc ấy. Từ M ta kẻ các đường vuông góc MH xuống cạnh Ox và MK xuống cạnh Oy. Tìm tập hợp các điểm M thoả mãn điều kiện $MH + MK = l$, trong đó l là một độ dài cho trước.

§12. MỘT SỐ BÀI TOÁN DỰNG HÌNH BẰNG THƯỚC VÀ COMPA

Trong hình học, dựng hình là một vấn đề quan trọng. Bài toán dựng hình cũng giúp chúng ta phát triển được nhiều kĩ năng, hỗ trợ cho các bài toán chứng minh, quỹ tích và tính toán. Nhưng hiện nay dựng hình rất ít được các giáo viên và học sinh quan tâm, phần lớn các em học sinh chỉ làm các bài toán chứng minh, tính toán, tìm quỹ tích. Đành rằng đối với những bài toán chứng minh thì không cần vẽ hình thật chính xác nhưng đôi khi gặp phải những bài toán nhất thiết phải vẽ chính xác thì hầu hết phải bó tay (chẳng hạn những bài toán đảo trong quỹ tích, dựng một hình vuông có diện tích bằng diện tích tam giác cho trước...).

Một bài toán dựng hình đầy đủ gồm 4 bước, đó là

Phân tích : Giả sử bài toán đã dựng được, kết nối các yếu tố để suy ra cách dựng.

Cách dựng : Nêu các bước dựng hình thoả mãn yêu cầu của bài toán.

Chứng minh : Chứng minh tính đúng đắn của phép dựng đã nêu ra.

Biện luận : Biện luận số nghiệm của bài toán, tìm các điều kiện để bài toán có nghiệm.

Sau đây là những bài toán cơ bản về dựng hình bằng hai công cụ thước thẳng và compa.

a) Các bài toán cơ bản về dựng hình

1) Chia đôi một góc.

2) Gấp đôi một góc.

3) Dựng một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.

4) Dựng một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và song song với một đường thẳng cho trước.

5) Chia một đoạn thẳng thành n phần bằng nhau.

6) Dựng tâm của một đường tròn cho trước.

7) Dựng tiếp tuyến của một đường tròn tại điểm nằm trên đường tròn.

8) Dựng tiếp tuyến của một đường tròn đi qua một điểm nằm ngoài đường tròn.

9) Dựng cung chứa góc trên một đoạn cho trước.

10) Dựng tiếp tuyến chung của hai đường tròn.

11) Qua một điểm đã cho dựng một đường tròn tiếp xúc với hai đường thẳng song song.

12) Dựng một đường tròn tiếp xúc với một đường tròn đã cho và một đường thẳng a tại một điểm A cho trước.

13) Dựng một đường tròn tiếp xúc với một đường tròn đã cho tại một điểm đã cho và một đường thẳng đã cho.

14) Dựng một đường tròn tiếp xúc với hai đường tròn đã cho, đối với một trong hai đường tròn đó thì tiếp xúc tại một điểm đã cho.

15) Dựng một điểm chia một đoạn thẳng cho trước theo một tỉ số cho trước.

b) Một số bài tập dựng hình cơ bản

1) Cho trước đoạn thẳng có độ dài 1. Hãy dựng các đoạn thẳng có độ dài

i) 2 ii) $\frac{1}{2}$ iii) $\frac{1}{3}$ iv) $\sqrt{5}$ v) $\sqrt[4]{5}$.

Hướng dẫn :

iii) Dùng định lí Thales.

iv) Dùng định lí Pythagoras.

v) Dùng tính chất của tam giác vuông : Tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH thì $AH^2 = BH.CH$.

2) Dựng tam giác ABC biết a, b và m_c.

Hướng dẫn : Giả sử dựng được tam giác ABC. Nối dài trung tuyến CP một đoạn $PC' = CP$ thì được tam giác CAC' có $CA = b$, $AC' = a$ và $CC' = 2m_c$.

3) Dựng tam giác ABC biết b, $a + c$ và C.

Hướng dẫn : Giả sử tam giác ABC đã dựng được. Nối dài CB về phía B tới điểm D sao cho $BD = BA$. Khi đó tam giác ACD có góc C đã cho, $AC = b$ và $CD = a + c$ nên hoàn toàn xác định. Đỉnh B là đỉnh của tam giác cân BDA, do đó là giao điểm của trung trực đoạn AD với CD.

4) Dựng tam giác ABC biết m_a, m_b, m_c.

Hướng dẫn : Giả sử tam giác ABC đã dựng xong. Trung tuyến AM, BN, CP cắt nhau tại G. Gọi D là trung điểm của AG thì tam giác GDN có $GD = \frac{m_a}{3}$, $GN = \frac{m_b}{3}$ và $DN = \frac{m_c}{3}$ hoàn toàn xác định. Từ đó tiếp tục xác định A, B và C.

5) Dựng tam giác ABC biết h_a, h_b, h_c.

Hướng dẫn : Sử dụng $ah_a = bh_b = ch_c = 2S$.

BÀI TẬP

30. Dựng một tam giác biết cạnh đáy a, góc ở đỉnh A và điểm D là giao điểm của cạnh đáy với phân giác của góc trong ở đỉnh A.

31. Qua điểm A, hãy dựng một đường tròn bán kính R sao cho tiếp tuyến từ một điểm B cho trước tới nó có độ dài cho trước.

32. Dựng một hình bình hành biết một cạnh và hai chiều cao.

33. Dựng một hình bình hành biết đáy, chiều cao và góc giữa hai đường chéo.

34. Dựng một tam giác biết đáy, góc đối diện và chiều cao thuộc một cạnh bên nào đó.

35. Dựng một tam giác biết a, A và m_a.

36. Dựng một tam giác có chu vi $2p$, góc A và chiều cao h_a.

37. Dựng một tam giác biết góc B, góc C và trung tuyến m_a.

38. Dựng một tam giác biết góc A, h_b và m_a.

39. Dựng một tam giác biết đáy a, góc A và trung tuyến m_b.

40. Dựng một tam giác biết góc A, đáy a và bán kính r của đường tròn nội tiếp.

41. Dựng một tam giác biết các bán kính R, r và một góc của tam giác.

42. Trong một đường tròn đã cho, dựng một dây sao cho nó được nhìn từ ba điểm đã cho dưới những góc bằng nhau.

43. Trong một đường tròn đã cho, nội tiếp một hình chữ nhật sao cho hai cạnh của nó đi qua hai điểm đã cho.

44. Trong một đường tròn đã cho, nội tiếp một tam giác vuông biết một góc nhọn và một điểm mà một trong các cạnh góc vuông đi qua.

45. Trong một đường tròn đã cho, nội tiếp một tam giác có một góc đã biết sao cho hai cạnh của nó đi qua hai điểm đã cho.

46. Cho một điểm ở trong đường tròn. Dựng qua điểm đó một dây sao cho hiệu các đoạn thẳng được chia bởi điểm đó bằng một độ dài cho trước.

47. Dựng một hình bình hành sao cho hai đỉnh liên tiếp ở tại hai điểm đã cho và hai đỉnh khác nằm trên một đường tròn đã cho.

48. Qua hai điểm cho trước trên một đường tròn, dựng hai dây song song sao cho tổng của chúng bằng một đoạn thẳng đã cho.

49. Dựng một hình bình hành có độ dài đường chéo đã cho và có cùng diện tích với một tứ giác đã cho.

50. Dựng một hình chữ nhật có độ dài đường chéo đã cho và có cùng diện tích với một tam giác đã cho.

51. Dựng một tam giác biết a, h_a và $b^2 + c^2$.

52. Dựng một tam giác biết a, h_a và $b^2 - c^2$.

53. Dựng một tam giác biết a, A và $b^2 - c^2$.

54. Dựng một tam giác biết a, A và tỉ số hai cạnh b và c.

55. Dựng một tam giác biết a, h_a và tỉ số hai cạnh b và c.

56. Dựng một tam giác ABC biết phân giác BD và các đoạn thẳng AD, DC mà nó chia cạnh đối diện.

57. Dựng một tam giác biết đáy và các giao điểm của đáy với phân giác và đường cao.

58. Dựng tam giác ABC biết a, b, m_a.

59. Dựng tam giác ABC biết B, $a + b$, C.