

I. PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH (8 điểm)**Câu 1** (2,0 điểm). Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 2$.

- a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.
 b) Tìm trên đường thẳng $y = 9x - 7$ những điểm mà qua đó kẻ được ba tiếp tuyến đến đồ thị (C) của hàm số.

Câu 2 (2,0 điểm).

- a) Giải phương trình: $\frac{2\sqrt{3}\sin 2x(1 + \cos 2x) - 4\cos 2x \cdot \sin^2 x - 3}{2\sin 2x - 1} = 0$.
 b) Giải phương trình: $2\log_2 x + \log_{\frac{1}{2}}(1 - 2\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}}(2x - 2\sqrt{x} + 1) - 3$.

Câu 3 (1,5 điểm). Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (x + \sqrt{x^2 + 4})(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 2 \\ 12y^2 - 10y + 2 = 2\sqrt[3]{x^3 + 1} \end{cases}$$

Câu 4 (1,5 điểm). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O , cạnh a , $BD = a$. Trên cạnh AB lấy điểm M sao cho $BM = 2AM$. Biết rằng hai mặt phẳng (SAC) và (SDM) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và mặt bên (SAB) tạo với mặt đáy một góc 60° . Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$ theo a và cosin của góc tạo bởi hai đường thẳng OM và SA .

Câu 5 (1,0 điểm). Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn: $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = 3(a + b + c) + 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$.

II. PHẦN RIÊNG (2,0 điểm)**A. Dành cho thí sinh thi khối A, A1**

Câu 6a (1,0 điểm). Cho $P(x) = \left[\frac{1}{x} - (x + x^2)\right]^n$. Xác định số hạng không phụ thuộc vào x khi khai triển $P(x)$ biết n là số nguyên dương thỏa mãn $C_n^3 + 2n = A_{n+1}^2$.

Câu 7a (1,0 điểm). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh $A(1;5)$. Tâm đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp của tam giác lần lượt là $I(2;2)$ và $K\left(\frac{5}{2};3\right)$. Tìm tọa độ các đỉnh B và C của tam giác.

A. Dành cho thí sinh thi khối B, D

Câu 6b (1,0 điểm). Cho tập hợp A tất cả các số tự nhiên có năm chữ số mà các chữ số đều khác 0. Hỏi có thể lấy được bao số tự nhiên từ tập A mà số đó chỉ có mặt ba chữ số khác nhau.

Câu 7b (1,0 điểm). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(0;2)$, $B\left(0;\frac{-4}{5}\right)$ và hai đường thẳng $d_1: x - y - 1 = 0$, $d_2: 2x + y + 2 = 0$. Hãy viết phương trình đường thẳng d đi qua gốc tọa độ và cắt d_1, d_2 lần lượt tại M, N sao cho AM song song với BN .

TRƯỜNG HÀ NỘI – AMSTERDAM
TỔ TOÁN – TIN

ĐÁP ÁN – THANG ĐIỂM
ĐỀ THI THỬ ĐẠI HỌC LẦN THỨ I NĂM 2014
Môn: TOÁN

Câu	Đáp án	Điểm
Câu 1 (2,0 điểm)	a) Học sinh tự giải b) Gọi $M(m; 9m - 7)$ là điểm bất kì nằm trên đường thẳng $y = 9x - 7$. Vì mọi đường thẳng có dạng $x = m$ không là tiếp tuyến của đồ thị (C) nên ta xét d là đường thẳng đi qua M và có dạng: $y = k(x - m) + 9m - 7$. Đường thẳng d là tiếp tuyến của (C) khi và chỉ khi hệ sau có nghiệm: $\begin{cases} x^3 + 3x^2 - 2 = k(x - m) + 9m - 7 \\ 3x^2 + 6x = k \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 3x^2 - 2 = (3x^2 + 6x)(x - m) + 9m - 7 \\ 3x^2 + 6x = k \end{cases}$ Qua M kẻ được ba tiếp tuyến đến (C) khi hệ trên có ba nghiệm phân biệt hay phương trình sau có ba nghiệm phân biệt: $2x^3 + 3x^2 - 3mx^2 - 6mx + 9m - 5 = 0$ $\Leftrightarrow (x - 1)[2x^2 + (5 - 3m)x + 5 - 9m] = 0$ Do đó điều kiện của m là: $\begin{cases} (5 - 3m)^2 - 8(5 - 9m) > 0 \\ 2.1^2 + (5 - 3m).1 + 5 - 9m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9m^2 + 42m - 15 > 0 \\ m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{1}{3} \\ m < -5 \\ m \neq 1 \end{cases}$ Vậy các điểm M cần tìm có tọa độ $(m; 9m - 7)$ với $m < -5$ hoặc $\frac{1}{3} < m \neq 1$.	1,0 0,5 0,5
Câu 2 (2,0 điểm)	a) Điều kiện: $\sin 2x \neq \frac{1}{2}$. Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương: $2\sqrt{3}\sin 2x(1 + \cos 2x) - 4\cos 2x \cdot \sin^2 x - 3 = 0$ $\Leftrightarrow 2\sqrt{3}\sin 2x + 2\sqrt{3}\sin 2x \cdot \cos 2x - 2\cos 2x(1 - \cos 2x) - 3 = 0$ $\Leftrightarrow 2(\sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x) - (3\sin^2 2x - 2\sqrt{3}\sin 2x \cdot \cos 2x + \cos^2 2x) = 0$ $\Leftrightarrow (\sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x)(\sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x - 2) = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x = 0 \\ \sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x = 2(*) \end{cases}$ Mà $\sin 2x \neq \frac{1}{2} \Rightarrow \cos 2x \neq \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x \neq 0$ $(*) \Leftrightarrow \sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x = 2 \Leftrightarrow \sin(2x - \frac{\pi}{6}) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi.$ Vậy nghiệm của phương trình là: $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.	0,5 0,5

	b) Điều kiện $0 < x < \frac{1}{4}$. Phương trình đã cho tương đương với: $\frac{x^2}{1-2\sqrt{x}} = \frac{2x-2\sqrt{x}+1}{8}$ $\Leftrightarrow \frac{x^2}{1-2\sqrt{x}} = \frac{4x-4\sqrt{x}+2}{16} (*)$	0,5
	Chia hai vế của (*) cho $1-2\sqrt{x}$ ta được: $\frac{(4x)^2}{(1-2\sqrt{x})^2} = \frac{4x}{1-2\sqrt{x}} + 2$. Đặt $t = \frac{4x}{1-2\sqrt{x}} \Rightarrow t^2 = t + 2 \Leftrightarrow t = 2 \Rightarrow x = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$. Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$.	0,5
Câu 3 (1,5 điểm)	Phương trình đầu tiên của hệ tương đương với: $x + \sqrt{x^2 + 4} = \sqrt{(-2y)^2 + 4} + (-2y)$ $\Leftrightarrow f(x) = f(-2y) \text{ với } y = f(t) = \sqrt{t^2 + 4} + t.$ Ta có $f'(t) = 1 + \frac{t}{\sqrt{t^2 + 4}} = \frac{\sqrt{t^2 + 4} + t}{\sqrt{t^2 + 4}} > \frac{ t + t}{\sqrt{t^2 + 4}} \geq 0, \forall t \Rightarrow f(t)$ là hàm số đồng biến trên R. Từ đó $f(x) = f(-2y) \Leftrightarrow x = -2y$.	0,75
	Thế $x = -2y$ vào phương trình sau của hệ phương trình đã cho ta được: $3x^2 + 5x + 2 = 2\sqrt[3]{x^3 + 1}$ $\Leftrightarrow (x+1)^3 + 2(x+1) = (x^3 + 1) + 2\sqrt[3]{x^3 + 1}$ $\Leftrightarrow g(x+1) = g(\sqrt[3]{x^3 + 1}) \text{ với } y = g(t) = t^3 + 2t.$ Ta có $g'(t) = 3t^2 + 2 > 0, \forall t \Rightarrow g(t)$ là hàm số đồng biến trên R. Từ đó: $g(x+1) = g(\sqrt[3]{x^3 + 1})$ $\Leftrightarrow x+1 = \sqrt[3]{x^3 + 1}$ $\Leftrightarrow 3x^2 + 3x = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow y = 2 \\ x = 0 \Rightarrow y = 0 \end{cases}$ Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là: $(-1; 2), (0; 0)$.	0,75
Câu 4 (1,5 điểm)	Gọi $H = AC \cap DM$ vì $(SAC) \perp (ABCD), (SDM) \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp (ABCD)$. Từ H kẻ $HK \perp AB \Rightarrow SK \perp AB \Rightarrow \widehat{SKH} = 60^\circ$ là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và $(ABCD)$. Do $AM \parallel CD \Rightarrow \frac{HA}{HC} = \frac{AM}{CD} = \frac{1}{3} \Rightarrow AH = \frac{1}{4}AC = \frac{AO}{2}$. Mà $\triangle ABD$ đều, AO là đường cao $\Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{4} \Rightarrow HK = AH \cdot \sin \widehat{HAK} = \frac{a\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{8}$ $\Rightarrow SH = HK \cdot \tan 60^\circ = \frac{3a}{8}$	0,75

	$\text{Vậy } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3a}{8} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{16}.$	
	Ta có $\cos(OM; SA) = \frac{ \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{SA} }{ \overrightarrow{OM} \overrightarrow{SA} }$ Mà $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{SA} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}) \cdot (\overrightarrow{SH} + \overrightarrow{HA})$ $= \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AH} = \frac{1}{2} AO^2 - AM \cdot AH \cdot \cos 30^\circ$ $= \frac{1}{2} \left(\frac{a\sqrt{3}}{2} \right)^2 - \frac{a}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2}{4}.$ Vậy $\cos(OM, SA) = \frac{\frac{a^2}{4}}{\frac{a\sqrt{13}}{6} \cdot \frac{a\sqrt{21}}{8}} = \frac{12}{\sqrt{273}}$	0,75
Câu 5 (1,0 điểm)	Ta chứng minh $3a + \frac{2}{a} \geq \frac{a^2}{2} + \frac{9}{2}$ với $0 < a < \sqrt{3} \Rightarrow a^3 - 6a^2 + 9a - 4 \leq 0 \Leftrightarrow (a-1)^2(a-4) \leq 0 \quad (\text{đúng})$	0,5
	Tương tự $3b + \frac{2}{b} \geq \frac{b^2}{2} + \frac{9}{2}; 3c + \frac{2}{c} \geq \frac{c^2}{2} + \frac{9}{2}$ Vậy $3(a+b+c) + 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{27}{2} = 15$ Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c = 1$.	0,5
Câu 6a (1,0 điểm)	Ta có $C_n^3 + 2n = A_{n+1}^2 \Leftrightarrow \begin{cases} n \in N, n \geq 3 \\ \frac{n(n-1)(n-2)}{6} + 2n = (n+1)n \Rightarrow n = 8 \end{cases}$	0,5
	Ta có $f(x) = \left[\frac{1}{x} - x(1+x) \right]^8 = C_8^0 \frac{1}{x^8} - C_8^1 \frac{1}{x^6} (1+x) + C_8^2 \frac{1}{x^4} (1+x)^2 - \dots + C_8^8 x^8 (1+x)^8$ Số hạng không phụ thuộc vào x chỉ có trong hai biểu thức $-C_8^3 \frac{1}{x^2} (1+x)^3$ và $C_8^4 (1+x)^4$ Trong đó có hai số hạng không phụ thuộc x là $-C_8^3 C_3^2$ và $C_8^4 C_4^0$ Vậy $-C_8^3 C_3^2 + C_8^4 C_4^0 = -98$.	0,5
Câu 7a (1,0 điểm)	Phương trình đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ tâm $K\left(\frac{5}{2}; 3\right)$ bán kính $R = AK = \frac{5}{2}$: $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + (y-3)^2 = \frac{25}{4}.$ Phân giác AI có phương trình $\frac{x-1}{2-1} = \frac{y-5}{2-5} \Leftrightarrow 3x + y - 8 = 0$ Gọi $D = AI \cap (K) \Rightarrow$ tọa độ của D là nghiệm của hệ $\begin{cases} 3x + y - 8 = 0 \\ \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + (y-3)^2 = \frac{25}{4} \end{cases}$	0,5

	Giải ra ta được hai nghiệm $\begin{cases} x=1 \\ y=5 \end{cases}$ và $\begin{cases} x=\frac{5}{2} \\ y=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow D\left(\frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right)$.	
	Lại có $\widehat{ICD} = \widehat{ICB} + \widehat{BCD} = \frac{\widehat{C}}{2} + \frac{\widehat{A}}{2} = \widehat{ICA} + \widehat{IAC} = \widehat{CID} \Rightarrow \Delta ICD$ cân tại $D \Rightarrow DC = DI$ mà $DC = DB \Rightarrow B, C$ là nghiệm của hệ $\begin{cases} \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = DI^2 = \frac{5}{2} \\ \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + (y-3)^2 = \frac{25}{4} \end{cases} \Rightarrow y=1 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=4 \end{cases}$ Vậy B, C có tọa độ là $(1;1), (4;1)$.	0,5
Câu 6b (1,0 điểm)	Số cách chọn 3 chữ số phân biệt a, b, c từ 9 chữ số thập phân khác 0 là C_9^3. Chọn 2 chữ số còn lại từ 3 chữ số đó, có 2 trường hợp sau đây: <i>Trường hợp 1.</i> Cả 2 chữ số còn lại cùng bằng 1 trong 3 chữ số a, b, c: có 3 cách; mỗi hoán vị từ 5! hoán vị của 5 chữ số (chẳng hạn) a, a, a, b, c tạo ra một số tự nhiên n; nhưng cứ 3! hoán vị của các vị trí mà a, a, a chiếm chỗ thì chỉ tạo ra cùng một số n, nên trong trường hợp này có cả thảy $3 \cdot \frac{5!}{3!} = 60$ số tự nhiên.	0,5
	<i>Trường hợp 2.</i> Một trong 2 chữ số còn lại bằng 1 trong 3 chữ số a, b, c và chữ số kia bằng 1 chữ số khác trong 3 chữ số đó: có 3 cách; mỗi hoán vị từ 5! hoán vị của 5 chữ số (chẳng hạn) a, a, b, b, c tạo ra một số tự nhiên n; nhưng cứ 2! hoán vị của các vị trí mà a, a chiếm chỗ và 2! hoán vị của các vị trí mà b, b chiếm chỗ thì chỉ tạo ra cùng một số n, nên trong trường hợp này có cả thảy $3 \cdot \frac{5!}{2!2!} = 90$ số tự nhiên. Vậy: $(60 + 90)C_9^3 = 150 \cdot \frac{9!}{3!6!} = 150 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 3 = 12600$ số thỏa mãn điều kiện đề bài.	0,5
Câu 7b (1,0 điểm)	Giả sử $M \in d_1 \Rightarrow M(t; -1+t), N \in d_2 \Rightarrow N(s; -2-2s)$ Nếu $t = 0 \Rightarrow M(0; -1) \Rightarrow AM \equiv Oy$ (loại) Do O, M, N thẳng hàng và $AM \parallel BN$ nên: $\begin{cases} \overrightarrow{OM} = k\overrightarrow{ON} \\ \overrightarrow{AM} = l\overrightarrow{BN} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{s}{t} = \frac{-2-2s}{-1+t} \\ \frac{s}{t} = \frac{-\frac{6}{5}-2s}{-3+t} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3st = s-2t \\ 15st = 15s-6t \end{cases} \Rightarrow t = -\frac{5}{2}s \Rightarrow \begin{cases} t=2 \\ s=-\frac{4}{5} \end{cases} \text{ Vậy}$ $M(2;1), N\left(-\frac{4}{5}; \frac{2}{5}\right)$.	1,0

Chú ý. Nếu học sinh có cách giải khác mà kết quả đúng vẫn tính điểm tối đa.