

MỘT SỐ BÀI TOÁN HÌNH HỌC NỔI TIẾNG

1. Đường thẳng Euler

Cho tam giác ABC có H là trực tâm, G là trọng tâm, O là tâm đường tròn ngoại tiếp.
 Chứng minh rằng H, G, O thẳng hàng.

Chứng minh

Gọi E, F lần lượt là trung điểm của BC, AC. Ta có EF là đường trung bình của tam giác ABC nên $EF \parallel AB$. Ta lại có $OF \perp BH$ (cùng vuông góc với AC). Do đó

$\widehat{OFE} = \widehat{ABH}$ (góc có cạnh tương ứng song song). Chứng minh tương tự $\widehat{OEF} = \widehat{BAH}$.
 Từ đó có $\triangle ABH \sim \triangle EFO$ (g.g)

$\Rightarrow \frac{AH}{OE} = \frac{AB}{EF} = 2$ (do EF là đường trung bình của tam giác ABC). Mặt khác G là trọng tâm của tam giác ABC nên $\frac{AG}{GE} = 2$. Do đó

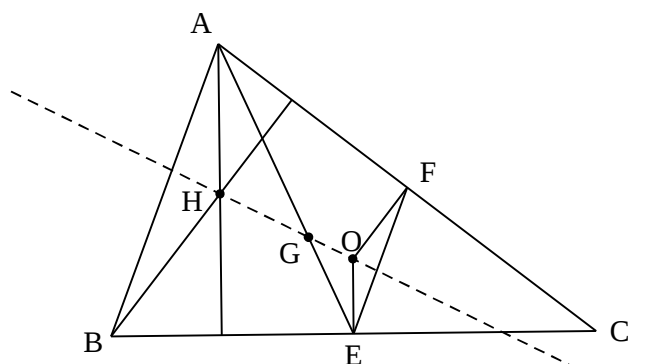
$\frac{AG}{EG} = \frac{AH}{OE} = 2$, lại có $\widehat{HAG} = \widehat{OEG}$ (so le trong, $OE \parallel AH$).

$\Rightarrow \triangle HAG \sim \triangle EOG$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{HGA} = \widehat{EGO}$. Do $\widehat{EGO} + \widehat{AGO} = 180^\circ$ nên $\widehat{HGA} + \widehat{AGO} = 180^\circ$ hay $\widehat{HGO} = 180^\circ$.

Vậy H, G, O thẳng hàng.

Đường thẳng đi qua H, G, O được gọi là *đường thẳng Euler* của tam giác ABC.

Ngoài ra ta còn có $OH = 3OG$.



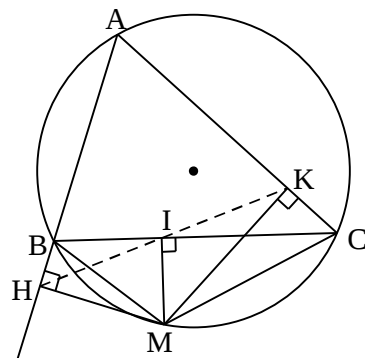
2. Đường thẳng Simson

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), M là một điểm bất kì trên đường tròn. Kẻ MH, MI, MK lần lượt vuông góc với AB, BC, AC. Chứng minh rằng ba điểm H, I, K thẳng hàng.

Chứng minh

Tứ giác MIBH có $\widehat{BHM} + \widehat{BIM} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ nên là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{MIH} = \widehat{MBH}$ (cùng chắn cung HM), mà tứ giác ABMC nội tiếp nên $\widehat{MBH} = \widehat{KCM}$, do đó $\widehat{MIH} = \widehat{KCM}$.

Mặt khác tứ giác KCMI nội tiếp (vì $\widehat{MIC} = \widehat{MKC} = 90^\circ$) nên $\widehat{KCM} + \widehat{MIK} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{MIH} + \widehat{MIK} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{HIK} = 180^\circ$.



Vậy H, I, K thẳng hàng.

Đường thẳng đi qua H, I, K được gọi là *đường thẳng Simson của điểm M*.

Chú ý : Ta có bài toán đảo về đường thẳng Simson như sau : Cho ΔABC và một điểm M nằm ngoài tam giác. Chứng minh rằng nếu hình chiếu của M lên ba cạnh của ΔABC là ba điểm thẳng hàng thì M nằm trên đường tròn ngoại tiếp ΔABC .

3. Đường thẳng Steiner

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), M là một điểm bất kì thuộc đường tròn.

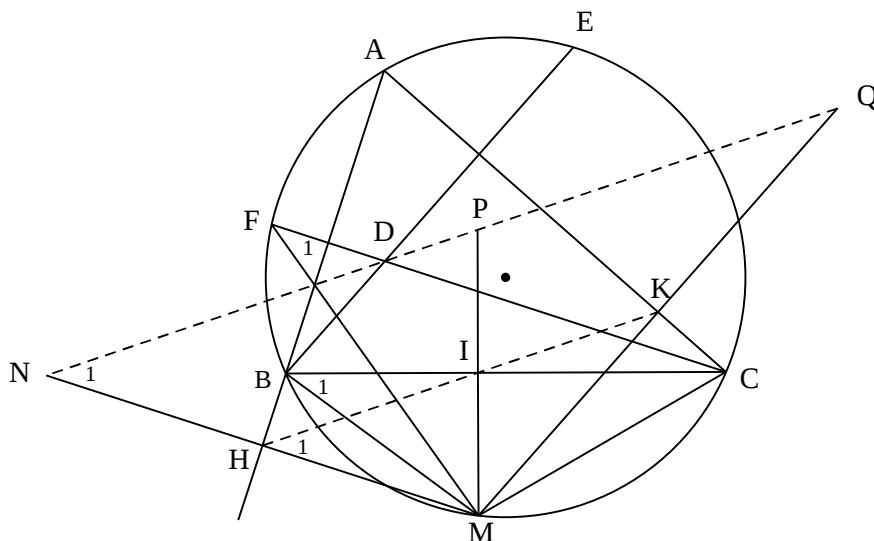
Gọi N, P, Q theo thứ tự là các điểm đối xứng với M qua AB, BC, CA.

Chứng minh rằng N, P, Q thẳng hàng.

Chứng minh

Gọi H, I, K theo thứ tự là hình chiếu của M lên AB, BC, AC, thế thì H, I, K thẳng hàng (đường thẳng Simson). Dễ thấy IH là đường trung bình của tam giác MNP nên $IH \parallel NP$. Tương tự $IK \parallel PQ$. Theo tiên đề O-clit và do H, I, K thẳng hàng nên suy ra N, P, Q thẳng hàng.

Đường thẳng đi qua N, P, Q được gọi là *đường thẳng Steiner của điểm M*.



Chú ý

a) Ta có thể chứng minh ba điểm N, P, Q thẳng hàng bằng cách dùng phép vị tự : Các điểm N, P, Q lần lượt là ảnh của H, I, K trong phép vị tự tâm M tỉ số 2, mà H, I, K thẳng hàng nên N, P, Q cũng thẳng hàng. Như vậy đường thẳng Steiner là ảnh của đường thẳng Simson trong phép vị tự tâm M tỉ số 2.

b) Đường thẳng Steiner đi qua trực tâm của tam giác ABC. Thật vậy, gọi D là trực tâm của tam giác ABC; BD, CD cắt (O) lần lượt ở E, F. Dễ dàng chứng minh được E đối xứng với D qua AC, F đối xứng với D qua AB.

Ta có FDMN là hình thang cân nên $\widehat{F}_1 = \widehat{N}_1$ mà $\widehat{F}_1 = \widehat{B}_1 = \widehat{H}_1$, do đó $\widehat{N}_1 = \widehat{H}_1$.

Suy ra $ND \parallel HK$. Tương tự $QD \parallel HK$.

Vậy N, D, Q thẳng hàng hay đường thẳng Steiner đi qua trực tâm của tam giác ABC.

Cách khác

Gọi AS, BJ, CR là các đường cao của tam giác ABC, D là trực tâm. Ta có

$\widehat{ANB} = \widehat{AMB}$ (tính chất đối xứng).

Lại có $\widehat{AMB} = \widehat{ACB}$ (cùng chắn cung AB) và $\widehat{ACB} = \widehat{ADJ}$ (cùng bù với góc SDJ).

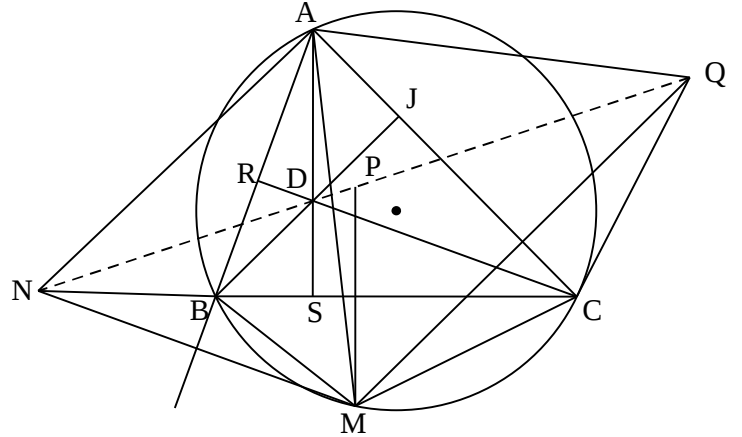
Suy ra $\widehat{ANB} = \widehat{ADJ}$ nên ADBN là tứ giác nội tiếp, do đó $\widehat{NAB} = \widehat{NDB}$.

Mà $\widehat{NAB} = \widehat{MAB} \Rightarrow \widehat{NDB} = \widehat{MAB}$.

Chứng minh tương tự $\widehat{CDQ} = \widehat{CAM}$. Ta có $\widehat{NDB} + \widehat{CDQ} = \widehat{MAB} + \widehat{CAM} = \widehat{BAC}$.

$\Rightarrow \widehat{NDQ} = \widehat{NDB} + \widehat{BDC} + \widehat{CDQ} = \widehat{BAC} + \widehat{BDC} = 180^\circ$.

Vậy N, D, Q thẳng hàng hay đường thẳng Steiner đi qua trực tâm của tam giác ABC.



4. Đường thẳng Gauss

Cho tứ giác ABCD có E là giao điểm của AB, CD và F là giao điểm của AD, BC. Chứng minh rằng trung điểm của ba đoạn AC, BD, EF là ba điểm thẳng hàng.

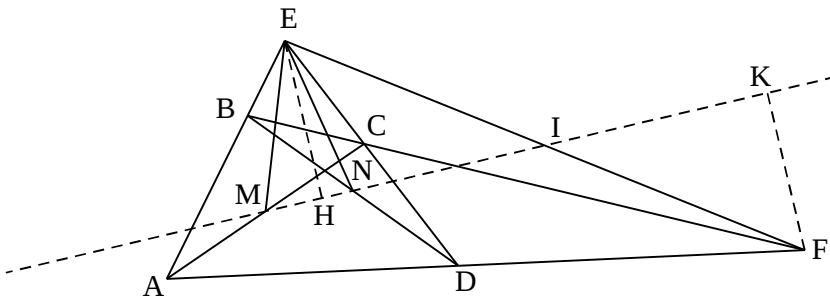
Chứng minh

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC, BD. Ta có

$$S_{EMN} = S_{EAD} - S_{EMA} - S_{END} - S_{AMD} - S_{DMN} \quad (1)$$

Do M, N là trung điểm của AC, BD nên

$$S_{EMA} = \frac{1}{2}S_{ECA}, S_{END} = \frac{1}{2}S_{EBD}, S_{AMD} = \frac{1}{2}S_{ACD}, S_{DMN} = \frac{1}{2}S_{BMD} \quad (2)$$



$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } S_{EMN} = S_{EAD} - \frac{1}{2}S_{ECA} - \frac{1}{2}S_{EBD} - \frac{1}{2}S_{ACD} - \frac{1}{2}S_{BMD}$$

$$= \frac{1}{2}(S_{EAD} - S_{ECA} - S_{ACD}) + \frac{1}{2}(S_{EAD} - S_{EBD} - S_{BMD})$$

$$= \frac{1}{2}(S_{EAD} - S_{EBD} - S_{BMD}) \text{ (vì } S_{EAD} - S_{EAC} - S_{ACD} = 0 \text{ do } S_{EAD} = S_{EAC} + S_{ACD})$$

$$= \frac{1}{2}(S_{ABD} - S_{BMD}) = \frac{1}{2}(S_{ABM} + S_{ADM}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}S_{ABC} + \frac{1}{2}S_{ACD}\right) = \frac{1}{4}S_{ABCD}$$

Chứng minh tương tự $S_{FMN} = \frac{1}{4}S_{ABCD}$. Do đó $S_{EMN} = S_{FMN}$. Kẻ EH, FK vuông góc với đường thẳng MN thì $EH = FK$, gọi I là giao điểm của đường thẳng MN với EF. Ta chứng minh được $\triangle EHI = \triangle FKI$ (góc nhọn kề cạnh góc vuông) nên $IE = IF$ hay I là trung điểm của EF. Vậy trung điểm của ba đoạn AC, BD, EF thẳng hàng. Đường thẳng đi qua I, M, N được gọi là *đường thẳng Gauss*.

5. Đường tròn Euler

Cho tam giác ABC có các đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB; S, R, Q lần lượt là trung điểm của HA, HB, HC. Chứng minh rằng chín điểm D, E, F, M, N, P, S, R, Q cùng nằm trên một đường tròn.

Chứng minh

Trong tam giác ABH thì PR là đường trung bình nên $PR \parallel AH$ và $PR = \frac{1}{2}AH$.

Trong tam giác ACH thì NQ là đường trung bình nên $NQ \parallel AH$ và $NQ = \frac{1}{2}AH$.

Do đó $PR \parallel NQ$ và $PR = NQ$ nên PNQR là hình bình hành.

Mặt khác $PR \parallel AH$ mà $AH \perp BC$ nên $PR \perp BC$, lại có $PN \parallel BC$ (PN là đường trung bình của $\triangle ABC$).

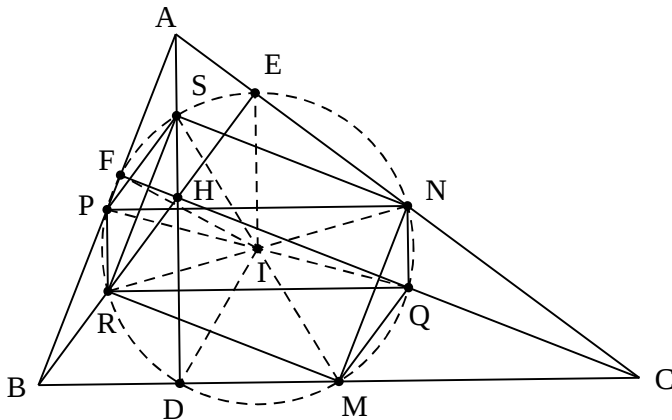
Suy ra $PN \perp PR$, do đó PNQR là hình chữ nhật. Gọi I là giao điểm của PQ và RN thì $IP = IN = IR = IQ$. Chứng minh tương tự ta có $IS = IM = IN = IR$.

Ta được $IP = IQ = IN = IR = IS = IM$.

Tam giác FPQ vuông tại F có I là trung điểm của PQ nên $IF = IP = IQ$. Tương tự $IE = IR = IN$; $ID = IS = IM$. Suy ra $ID = IE = IF = IM = IN = IP = IS = IR = IQ$.

Vậy chín điểm D, E, F, M, N, P, S, R, Q cùng nằm trên đường tròn tâm I.

Đường tròn đi qua chín điểm trên được gọi là *đường tròn Euler của tam giác ABC*.



Chú ý :

a) Tâm đường tròn Euler nằm trên đường thẳng Euler.

Thật vậy, gọi G và O theo thứ tự là trọng tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác

ABC. Ta chứng minh được $OM = \frac{1}{2}AH = SH$, lại có $OM \parallel SH \Rightarrow OMHS$ là hình

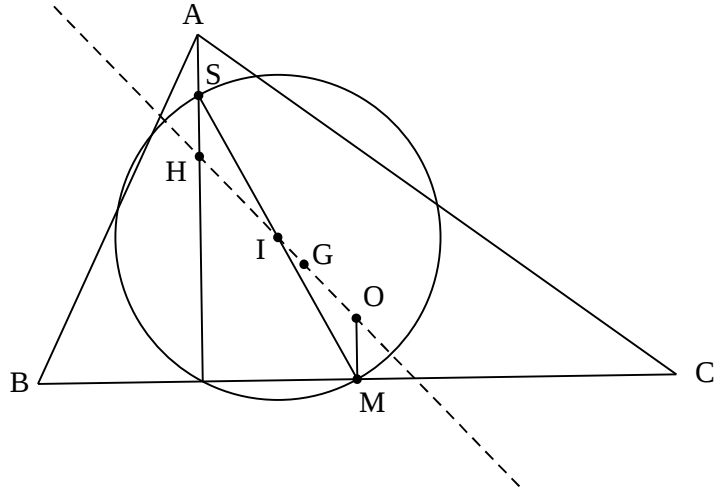
bình hành. Mà I là trung điểm của SM nên cũng là trung điểm của OH.

Như vậy bốn điểm H, I, O, G thẳng hàng, tức là tâm đường tròn Euler nằm trên đường thẳng Euler.

b) Bán kính đường tròn Euler bằng $\frac{R}{2}$

(với R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC). Thật vậy, ta có IS là đường trung bình của ΔAHO nên

$$IS = \frac{OA}{2} = \frac{R}{2}.$$



6. Đường tròn Miquel

Cho tứ giác ABCD có E là giao điểm của AB và CD, F là giao điểm của AD và BC.

Gọi M là điểm Miquel và O_1, O_2, O_3, O_4 lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp của các tam giác EBC, CDF, EAD, ABF. Chứng minh rằng năm điểm M, O_1, O_2, O_3, O_4 cùng nằm trên một đường tròn.

Chứng minh

Gọi H, I, K theo thứ tự là trung điểm của FM, BM, CM. Các đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau tại M và C nên O_1O_2 là đường trung trực của MC, do đó O_1O_2 vuông góc với MK tại K. Tương tự O_1O_4 vuông góc với MI tại I, O_2O_4 vuông góc với MH tại H.

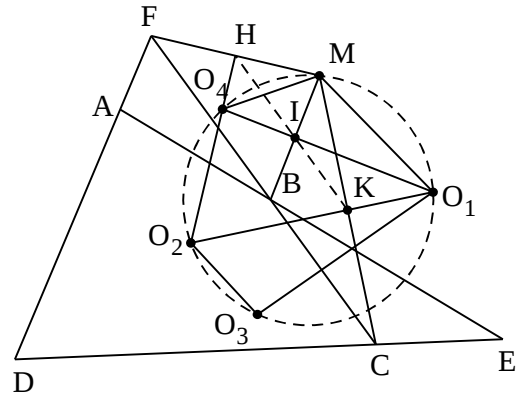
Nói cách khác H, I, K theo thứ tự là hình chiếu của M trên các cạnh O_2O_4, O_1O_4, O_1O_2 của tam giác $O_1O_2O_4$. Dễ thấy $IK \parallel BC$ và $IH \parallel FB$ mà F, B, C thẳng hàng nên H, I, K thẳng hàng.

Theo bài toán đảo về đường thẳng Simson (xem mục

2) ta có M, O_1, O_2, O_4 cùng nằm trên một đường tròn. Tương tự M, O_1, O_3, O_4 cùng nằm trên một đường tròn.

Vậy năm điểm M, O_1, O_2, O_3, O_4 cùng nằm trên một đường tròn.

Đường tròn đi qua năm điểm M, O_1, O_2, O_3, O_4 được gọi là *đường tròn Miquel*.



7. Hệ thức Euler

Cho tam giác ABC. Gọi (O ; R) và (I ; r) lần lượt là đường tròn ngoại tiếp và đường tròn nội tiếp tam giác. Đặt $OI = d$. Chứng minh rằng $d^2 = R^2 - 2Rr$.

Chứng minh

Gọi D là hình chiếu của I trên AB, vẽ đường kính EF đi qua O và I, M là giao điểm của AI với (O), vẽ đường kính MN. Ta có $\widehat{IBM} = \widehat{B_1} + \widehat{B_2}$,

$\widehat{BIM} = \widehat{A_1} + \widehat{B_3}$. Mặt khác $\widehat{B_2} = \widehat{B_3}$ và

$\widehat{B_1} = \widehat{A_2} = \widehat{A_1}$ nên $\widehat{BIM} = \widehat{IBM} \Rightarrow \Delta BIM$ cân tại M,

do đó $MB = MI$.

Do AI là tia phân giác của góc BAC nên M là điểm chính giữa của cung BC do đó

$\widehat{MB} = \widehat{MC} \Rightarrow MB = MC \Rightarrow MC = MI$.

Ta có $\Delta AEI \sim \Delta FMI$ (g.g) nên $\frac{IE}{IM} = \frac{IA}{IF}$

$\Rightarrow IE \cdot IF = IA \cdot IM$.

Lại có $IE = R - d$, $IF = R + d \Rightarrow$

$IA \cdot IM = (R + d)(R - d) = R^2 - d^2$ (1)

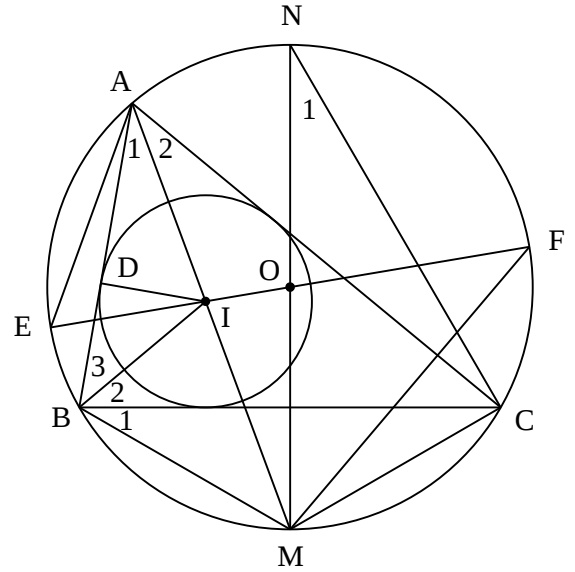
Xét hai tam giác vuông IAD và MNC, chúng có $\widehat{A_1} = \widehat{N_2} (= \widehat{A_2})$

$\Rightarrow \Delta IAD \sim \Delta MNC$ (g.g) $\Rightarrow \frac{IA}{MN} = \frac{ID}{MC} \Rightarrow IA \cdot MC = MN \cdot ID$. Do $MN = 2R$, $ID = r$ và

$MC = MI$ nên ta có $IA \cdot IM = 2Rr$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $R^2 - d^2 = 2Rr \Rightarrow d^2 = R^2 - 2Rr$.

Chú ý : Do $d^2 \geq 0$ nên từ định lý Euler ta suy ra $R \geq 2r$. Xảy ra $R = 2r$ khi $d = 0$, lúc đó $O \equiv I$ hay tam giác ABC đều.



8. Hệ thức Van Aubel

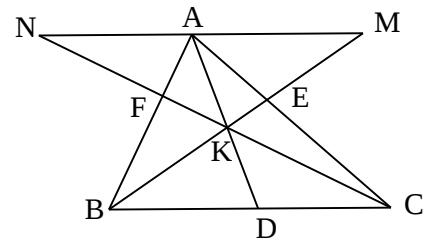
Cho tam giác ABC có AD, BE, CF đồng quy tại K (D, E, F theo thứ tự thuộc các cạnh BC, CA, AB).

Chứng minh rằng $\frac{AK}{KD} = \frac{AE}{EC} + \frac{AF}{FB}$.

Chứng minh

Qua A vẽ đường thẳng song song với BC cắt BE, CF tại M, N. Ta có

$$\frac{AK}{KD} = \frac{AM}{BD} = \frac{AN}{CD} = \frac{AM + AN}{BD + CD} = \frac{AM + AN}{BC} = \frac{AM}{BC} + \frac{AN}{BC} = \frac{AE}{EC} + \frac{AF}{FB}.$$



9. Công thức Carnot

Cho tam giác ABC nhọn có (O ; R) là đường tròn ngoại tiếp. Gọi x, y, z theo thứ tự là khoảng cách từ O đến BC, CA, AB, r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác.

Chứng minh rằng $x + y + z = R + r$.

Chứng minh

Kẻ $OD \perp BC, OE \perp AC, OF \perp AB$ thì

$OD = x, OE = y, OF = z$. Tứ giác OECD nội tiếp nên áp dụng định lý Ptolemy (mục 18) ta được

$$OE \cdot DC + OD \cdot EC = OC \cdot DE$$

$$\Rightarrow y \cdot \frac{a}{2} + x \cdot \frac{b}{2} = R \cdot \frac{c}{2} \Rightarrow ay + bx = cR.$$

Tương tự $az + cx = bR, bz + cy = aR$.

$$\text{Do đó } a(y + z) + b(x + z) + c(x + y) = (a + b + c)R. \quad (1)$$

Mặt khác

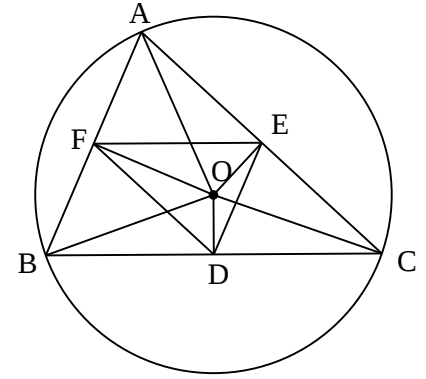
$$ax + by + cz = 2S_{BOC} + 2S_{AOC} + 2S_{AOB} = 2S_{ABC} = (a + b + c)r. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có

$$a(x + y + z) + b(x + y + z) + c(x + y + z) = (a + b + c)R + (a + b + c)r$$

$$\Rightarrow (a + b + c)(x + y + z) = (R + r)(a + b + c) \Rightarrow x + y + z = R + r.$$

Chú ý : Nếu góc A tù thì công thức Carnot có dạng $y + z - x = R + r$.



10. Định lý Céva

Cho tam giác ABC và các điểm D, E, F lần lượt nằm trên các cạnh BC, CA, AB.

Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để AD, BE, CF đồng quy là ta có hệ thức

$$\frac{DB}{DC} \cdot \frac{EC}{EA} \cdot \frac{FA}{FB} = 1. \quad (*)$$

Chứng minh

Điều kiện cần : Ta chứng minh rằng nếu AD, BE, CF đồng quy thì có (*).

Gọi K là điểm đồng quy của ba đoạn AD, BE, CF. Qua A vẽ đường thẳng song song với BC cắt BE, CF ở M, N. Theo định lý Ta-let ta có

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AM}{AN}, \frac{EC}{EA} = \frac{BC}{AM}, \frac{FA}{FB} = \frac{AN}{BC}, \text{ do đó } \frac{DB}{DC} \cdot \frac{EC}{EA} \cdot \frac{FA}{FB} = \frac{AM}{AN} \cdot \frac{BC}{AM} \cdot \frac{AN}{BC} = 1$$

(đpcm).

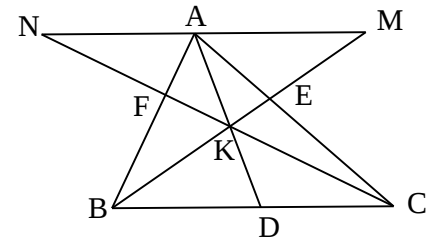
Điều kiện đủ : Ta chứng minh rằng nếu có (*) thì AD, BE, CF đồng quy. Thật vậy, gọi K là giao điểm của BE và CF, AK cắt cạnh BC tại D'.

Thế thì theo chứng minh ở điều kiện cần ta có

$$\frac{D'B}{D'C} \cdot \frac{EC}{EA} \cdot \frac{FA}{FB} = 1 \Rightarrow \frac{D'B}{D'C} = \frac{DB}{DC}.$$

Hai điểm D và D' đều chia trong đoạn BC theo cùng một tỉ số nên

$D' \equiv D$. Vậy AD, BE, CF đồng quy.



Chú ý : Bài toán vẫn đúng trong trường hợp các điểm D, E, F nằm trên các đường thẳng BC, CA, AB, trong đó có đúng hai điểm nằm ngoài tam giác.

11. Định lý Menelaus

Cho tam giác ABC và các điểm M, N, P theo thứ tự nằm trên các đường thẳng BC, CA, AB. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để M, N, P thẳng hàng là ta có hệ thức

$$\frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} \cdot \frac{PA}{PB} = 1 \quad (**)$$

Chứng minh

Điều kiện cần : Gọi a, b, c theo thứ tự là khoảng cách từ A, B, C đến cát tuyến MNP.

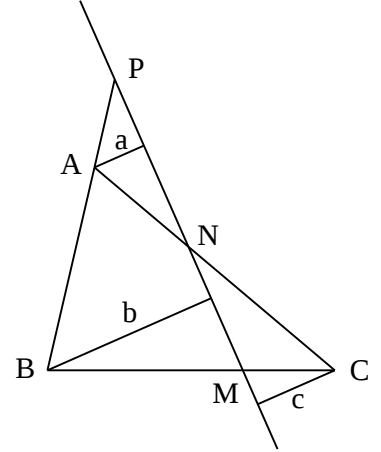
Ta có $\frac{MB}{MC} = \frac{b}{c}$, $\frac{NC}{NA} = \frac{c}{a}$, $\frac{PA}{PB} = \frac{a}{b}$. Do đó

$$\frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} \cdot \frac{PA}{PB} = \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a} \cdot \frac{a}{b} = 1 \quad (\text{đpcm}).$$

Điều kiện đủ : Giả sử có (**) và PN cắt cạnh BC tại M'.

$$\text{Thế thì } \frac{M'B}{M'C} \cdot \frac{NC}{NA} \cdot \frac{PA}{PB} = 1 \Rightarrow \frac{M'B}{M'C} = \frac{MB}{MC} \Rightarrow M' \equiv M.$$

Vậy M, N, P thẳng hàng (đpcm).



12. Định lý Bramagupta

Cho tứ giác ABCD nội tiếp có hai đường chéo vuông góc với nhau tại I. Chứng minh rằng đường thẳng đi qua I và trung điểm của một cạnh của tứ giác vuông góc với cạnh đối diện.

Chứng minh

Không mất tính tổng quát, giả sử E là trung điểm của BC, ta chứng minh rằng IE vuông góc với AD.

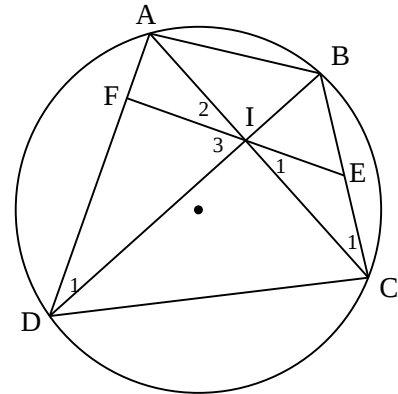
Thật vậy, gọi F là giao điểm của IE với AD.

Tam giác BIC vuông tại I có E là trung điểm của BC

nên $\hat{I}_1 = \hat{C}_1$. Mặt khác $\hat{C}_1 = \hat{D}_1$ và $\hat{I}_1 = \hat{I}_2$, do đó

$$\hat{D}_1 = \hat{I}_2 \Rightarrow \hat{D}_1 + \hat{I}_3 = \hat{I}_2 + \hat{I}_3 = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{IFD} = 90^\circ \Rightarrow IE \perp AD \quad (\text{đpcm}).$$

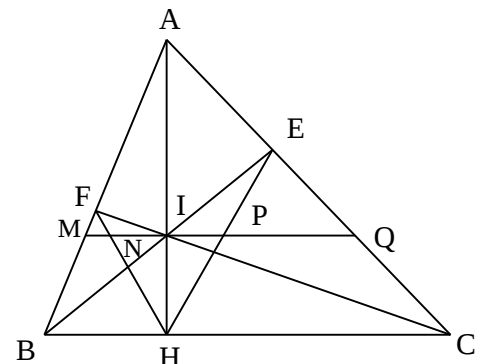


13. Định lý Blanchet

Cho tam giác ABC có đường cao AH, I là một điểm bất kì nằm trên đoạn AH. Các tia BI, CI cắt AC, AB ở E, F. Chứng minh rằng HA là tia phân giác của góc EHF.

Chứng minh

Qua I vẽ đường thẳng song song với BC cắt AB, HF, HE, AC ở M, N, P, Q. Theo định lý Ta-let ta có các tỉ số sau :



$$\frac{IN}{IM} = \frac{HC}{BC}; \frac{IQ}{IP} = \frac{BC}{HB}; \frac{IM}{IQ} = \frac{HB}{HC}. \text{ Do đó } \frac{IN}{IM} \cdot \frac{IQ}{IP} \cdot \frac{IM}{IQ} = \frac{HC}{BC} \cdot \frac{BC}{HB} \cdot \frac{HB}{HC} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{IN}{IP} = 1 \Rightarrow IN = IP. \text{ Lại có } IH \perp NP \text{ nên tam giác HNP cân tại H.}$$

Vậy HA là tia phân giác của góc EHF.

14. Định lý Napoleon

Cho tam giác ABC. Về phía ngoài tam giác ta vẽ các tam giác đều BCD, ACE, ABF. Gọi M, N, P theo thứ tự là tâm của các tam giác đều đó. Chứng minh rằng MNP là tam giác đều.

Chứng minh

Gọi I là giao điểm thứ hai của hai đường tròn (N) và (P).

Tứ giác AIBF nội tiếp có $\widehat{F} = 60^\circ$ nên

$\widehat{AIB} = 120^\circ$. Tương tự $\widehat{AIC} = 120^\circ$. Do đó

$\widehat{BIC} = 120^\circ \Rightarrow$ tứ giác BICD nội tiếp hay I nằm trên đường tròn (M). Các đường tròn (M) và (P) cắt nhau ở I và B nên $IB \perp MP$; các đường tròn (N) và (P) cắt nhau ở I và A nên $IA \perp PN$.

Lại có $\widehat{AIB} = 120^\circ$ nên tính được $\widehat{P} = 60^\circ$.

Tương tự $\widehat{N} = 60^\circ$.

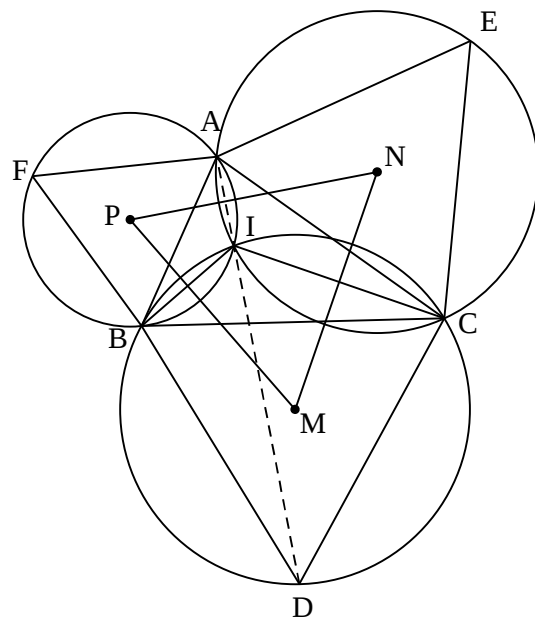
Vậy tam giác MNP đều.

Chú ý: Các đường thẳng AD, BE, CF đồng quy tại I.

Thật vậy, ta có tứ giác BICD nội tiếp nên

$\widehat{BID} = \widehat{BCD} = 60^\circ$, do đó $\widehat{AID} = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ$. Vậy AD đi qua I.

Chứng minh tương tự BE, CF cũng đi qua I.



15. Định lý Lyness

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn (O') tiếp xúc trong với (O) tại D và tiếp xúc với AB, AC ở E, F. Chứng minh rằng EF đi qua tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Chứng minh

Vẽ tia phân giác của góc BDC cắt EF tại I; gọi M, N là giao điểm của DF, DE với đường tròn (O). Ta có $\widehat{O'FD} = \widehat{OMD} (= \widehat{ODM})$ nên $O'F \parallel OM$ mà $O'F \perp AC \Rightarrow$

$OM \perp AC \Rightarrow M$ là điểm chính giữa của cung AC, do đó $\widehat{FDC} = \frac{1}{2} \widehat{ABC}$ (1)

Tam giác AEF cân tại A nên $\widehat{E}_1 = \widehat{F}_1 = \frac{180^\circ - \widehat{A}}{2}$, mặt khác

$$\widehat{IDC} = \widehat{IDB} = \frac{\widehat{BDC}}{2} = \frac{180^\circ - \widehat{A}}{2} \text{ nên}$$

$$\widehat{IDB} = \widehat{IDC} = \widehat{E}_1 = \widehat{F}_1. \text{ Mà } \widehat{EDF} = \widehat{F}_1 (= \frac{1}{2} \text{sđ } \widehat{EF})$$

$$\Rightarrow \widehat{IDC} = \widehat{EDF} \Rightarrow \widehat{IDE} = \widehat{FDC} \quad (2)$$

Vì $\widehat{E}_1 = \widehat{IDB}$ nên IEBD là tứ giác nội tiếp

$$\Rightarrow \widehat{IDE} = \widehat{IBE} \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) ta có $\widehat{IBE} = \frac{1}{2} \widehat{ABC}$, do đó IB là tia phân giác của góc ABC.

Do $\widehat{IDC} = \widehat{IDB}$ mà $\widehat{IDE} = \widehat{FDC}$ nên $\widehat{BDE} = \widehat{IDF}$. Tứ

giác IFCD nội tiếp (vì $\widehat{F}_1 = \widehat{IDC}$)

$$\Rightarrow \widehat{IDF} = \widehat{ICF} \Rightarrow \widehat{ICF} = \widehat{BDE} \quad (4)$$

Mặt khác, do N là điểm chính giữa của cung AB (chứng minh tương tự như ở trên)

$$\Rightarrow \widehat{BDE} = \frac{1}{2} \widehat{ACB} \quad (5).$$

Từ (4) và (5) suy ra $\widehat{ICF} = \frac{1}{2} \widehat{ACB}$, do đó IC là tia phân giác của góc ACB.

Vậy I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC (đpcm).

Cách khác

Vẽ tia phân giác của góc ABC cắt EF tại I, ta chứng minh IC là tia phân giác của góc ACB.

Vẽ tiếp tuyến chung Dx của (O) và (O'). Tương tự như cách trên, gọi M là giao điểm của DF với (O) thì M là điểm chính giữa của cung AC, do đó B, I, M thẳng hàng.

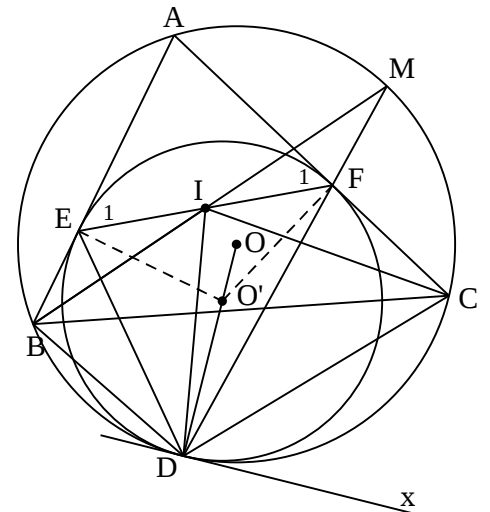
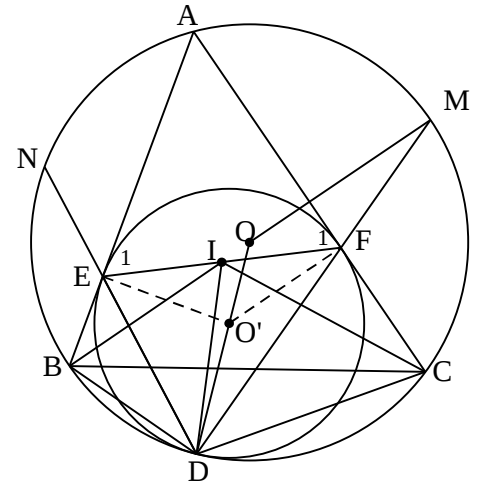
Ta có $\widehat{IED} = \widehat{IBD} (= \widehat{xDM})$ nên tứ giác IEBD nội tiếp

$$\Rightarrow \widehat{IDB} = \widehat{E}_1 = \frac{180^\circ - \widehat{A}}{2}, \text{ mà } \widehat{BDC} = 180^\circ - \widehat{A}, \text{ do đó}$$

$$\widehat{IDC} = \frac{180^\circ - \widehat{A}}{2} = \widehat{F}_1 \Rightarrow \text{tứ giác IDCF nội tiếp}$$

$$\Rightarrow \widehat{ICF} = \widehat{IDF}. \text{ Ta lại có}$$

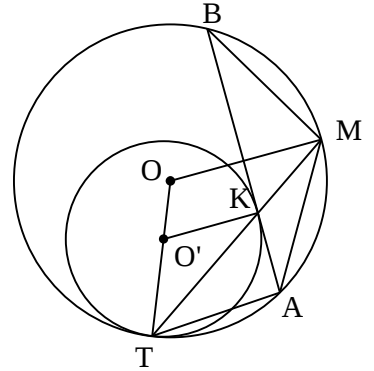
$$\widehat{IDF} = \widehat{IDC} - \widehat{FDC} = \frac{180^\circ - \widehat{A}}{2} - \frac{\widehat{ABC}}{2} = \frac{\widehat{ACB}}{2}$$



$$\Rightarrow \widehat{ICF} = \frac{\widehat{ACB}}{2}, \text{ do đó IC là tia phân giác của góc ACB (đpcm).}$$

16. Định lý Lyness mở rộng (bổ đề Sawayama)

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), M là một điểm bất kì trên cạnh AC. Đường tròn (O') tiếp xúc trong với (O) tại D và tiếp xúc với MB, MC lần lượt ở E, F. Chứng minh rằng tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC nằm trên EF.



Để chứng minh định lý này, ta cần hai bổ đề sau :

Bổ đề 1 : Cho AB là dây của đường tròn (O). Đường tròn (O') tiếp xúc trong với (O) tại T và tiếp xúc với AB tại K. Chứng minh rằng TK đi qua điểm chính giữa của cung AB và

$$MA^2 = MK.MT \text{ (với M là điểm chính giữa của cung AB).}$$

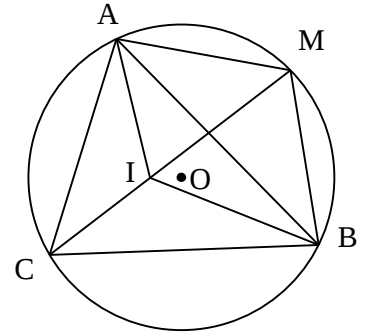
Chứng minh M là điểm chính giữa của cung AB như mục 14 ở trên.

Bây giờ ta chứng minh $MA^2 = MK.MT$.

Thật vậy, ta có $\widehat{MTA} = \widehat{MBA} = \widehat{MAK}$

$$\Rightarrow \Delta MKA \sim \Delta MAT \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{MK}{MA} = \frac{MA}{MT} \Rightarrow MA^2 = MK.MT.$$

Bổ đề 2 : Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và M là điểm chính giữa của cung AB không chứa C. Trên MC lấy I sao cho MI = MB. Chứng minh rằng I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.



Thật vậy, gọi I' là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC thì I' nằm trên MC. Ta chứng minh được MI' = MB (xem mục 7), do đó MI = MI' hay I $\equiv$ I'. Vậy I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Chứng minh

Gọi N giao điểm của DF với (O) thì N là điểm chính giữa của cung AC và

$$NC^2 = NF.ND \text{ (theo bổ đề 1).}$$

Gọi Dx là tiếp tuyến chung của (O) và (O') tại D, I là giao điểm của BN và EF. Ta có

$$\widehat{IED} = \widehat{IBD} (= xDN) \text{ nên IEBD là tứ giác}$$

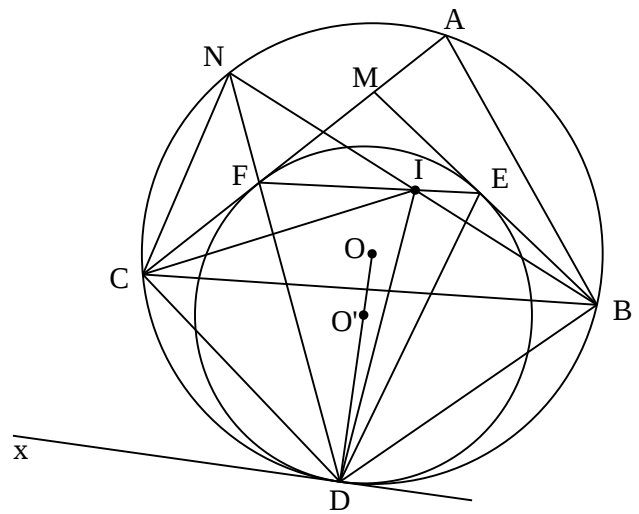
$$\text{nội tiếp} \Rightarrow \widehat{DIB} = \widehat{DEB}. \text{ Mà } \widehat{DEB} = \widehat{DFI}$$

$$\text{nên } \widehat{DIB} = \widehat{DFI}, \text{ do đó } \widehat{NID} = \widehat{NFI} \text{ (cùng kề bù với hai góc bằng nhau). Từ đó}$$

$$\text{chứng minh được } \Delta NFI \sim \Delta NID \text{ (g.g)}$$

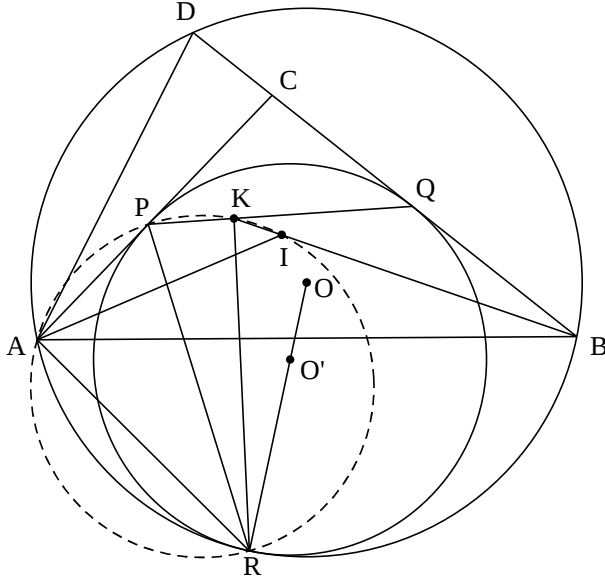
$$\Rightarrow \frac{NF}{NI} = \frac{NI}{ND} \Rightarrow NI^2 = NF.ND = NC^2 \Rightarrow NI = NC$$

Theo bổ đề 2, ta có I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC (đpcm).



17. Một hệ quả của định lý Lyness mở rộng

Cho đường tròn (O), hai điểm A và B nằm trên đường tròn, điểm C nằm trong đường tròn (O). Đường tròn (O') tiếp xúc trong với (O) tại R và tiếp xúc với CA, CB theo thứ tự ở P, Q. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng I nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác APR.



Chứng minh

Gọi D là giao điểm của BC với (O), K là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ADB.

Ta có B, I, K thẳng hàng và K nằm trên PQ (theo bổ đề Sawayama).

Để thấy A, P, K, R cùng nằm trên một đường tròn (xem mục 8). (1)

Do I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC nên $\widehat{AIB} = 90^\circ + \frac{\widehat{ACB}}{2}$.

Ta lại có $\widehat{APK} = 180^\circ - \widehat{CPK} = 180^\circ - \frac{180^\circ - \widehat{ACB}}{2} = 90^\circ + \frac{\widehat{ACB}}{2}$

Do đó $\widehat{AIB} = \widehat{APK}$ nên A, P, K, I cùng nằm trên một đường tròn. (2)

Từ (1) và (2) suy ra A, P, R, K, I cùng trên một đường tròn.

Vậy I thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác APR.

18. Định lý Ptolemy cho tứ giác nội tiếp

Cho tứ giác ABCD nội tiếp trong đường tròn (O).

Chứng minh rằng

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD.$$

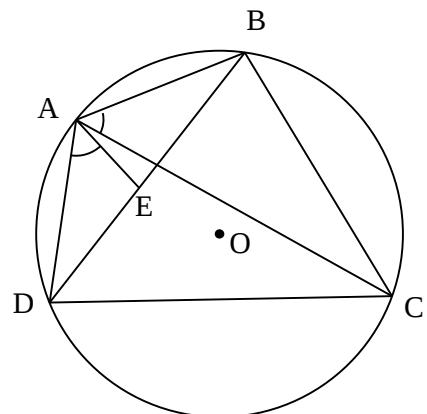
Chứng minh

Trên đường chéo BD lấy điểm E sao cho

$$\widehat{DAE} = \widehat{BAC}. \text{ Ta có } \widehat{DAE} = \widehat{BAC} \text{ và}$$

$$\widehat{ADE} = \widehat{ACB} \text{ (cùng chắn cung AB) nên}$$

$$\triangle ADE \sim \triangle ACB \text{ (g.g)}$$



$$\Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow AD \cdot BC = AC \cdot DE \quad (1)$$

Do $\widehat{DAE} = \widehat{CAB}$ nên $\widehat{DAC} = \widehat{EAB}$, lại có $\widehat{ABE} = \widehat{ACD}$ (cùng chắn cung AD)

$$\Rightarrow \triangle ABE \sim \triangle ACD \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CD}$$

$$\Rightarrow AB \cdot CD = AC \cdot BE \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot (BE + DE) = AC \cdot BD$.

19. Định lý Ptolemy cho tứ giác bất kì

Cho tứ giác ABCD. Chứng minh rằng $AB \cdot CD + AD \cdot BC \geq AC \cdot BD$.

Chứng minh

Bên trong tứ giác ABCD lấy điểm M sao cho $\widehat{MAD} = \widehat{CAB}$ và $\widehat{MDA} = \widehat{ACB}$.

$$\text{Ta có } \triangle ADM \sim \triangle ACB \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{DM}{BC} \Rightarrow AD \cdot BC = AC \cdot DM \quad (1)$$

Do $\widehat{MAD} = \widehat{CAB}$ nên $\widehat{DAC} = \widehat{MAB}$.

Xét tam giác ADC và tam giác MAB, có:

$\widehat{DAC} = \widehat{MAB}$ (chứng minh trên)

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AM}{AB} \text{ (do } \triangle ADM \sim \triangle ACB \text{) nên}$$

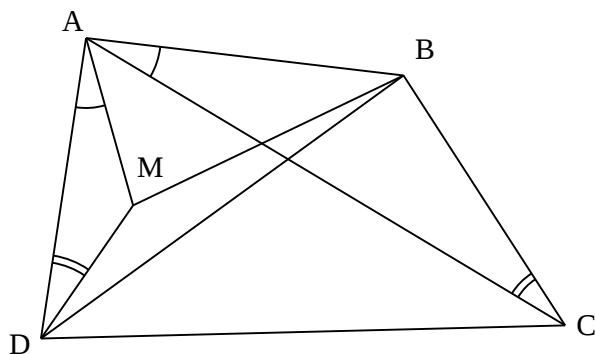
$\triangle ADC \sim \triangle AMB \text{ (c.g.c)}$

$$\Rightarrow \frac{DC}{MB} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow AB \cdot CD = AC \cdot MB \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot (BM + DM) \geq AC \cdot BD.$$

Xảy ra đẳng thức khi M nằm trên đường chéo BD, lúc đó tứ giác ABCD nội tiếp.



20. Định lý Miquel

Cho tam giác ABC, các điểm D, E, F lần lượt nằm trên các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp của các tam giác AEF, BDF, CDE đồng quy.

Chứng minh

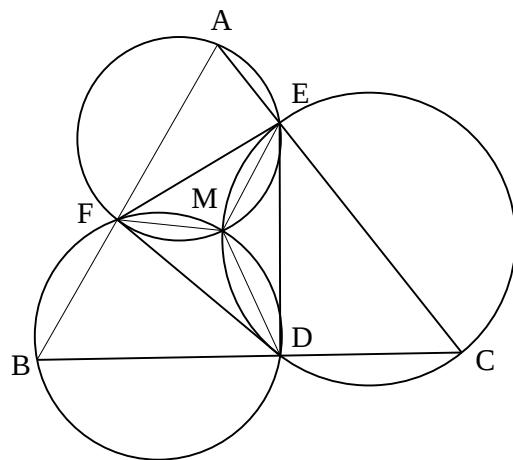
Gọi M là giao điểm khác D của đường tròn ngoại tiếp

hai tam giác BFD, CDE. Ta có $\widehat{AFM} = \widehat{BDM}$ và

$\widehat{AEM} = \widehat{CDM}$ (do BFMD, DMEC là các tứ giác nội

tiếp). Do đó $\widehat{AEM} + \widehat{AFM} = \widehat{BDM} + \widehat{CDM} = 180^\circ$ nên tứ giác AEMF nội tiếp hay M cũng thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF.

Vậy đường tròn ngoại tiếp của các tam giác AEF, BDF, CDE đồng quy tại M (đpcm).



21. Định lý Viviani

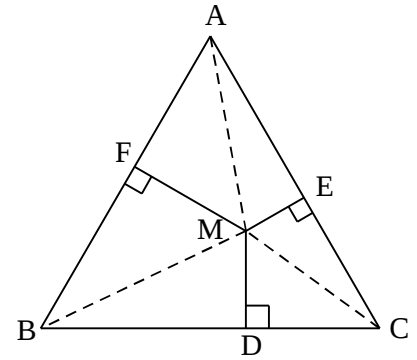
Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a, M là một điểm bất kì nằm bên trong tam giác. Chứng minh rằng tổng các khoảng cách từ M đến ba cạnh của tam giác bằng độ dài đường cao của tam giác.

Chứng minh

Kẻ MD, ME, MF vuông góc với BC, CA, AB. Ta có

$$S_{BMC} + S_{CMA} + S_{BAM} = S_{ABC} \quad \text{nên}$$

$$\frac{1}{2}a \cdot MD + \frac{1}{2}a \cdot ME + \frac{1}{2}a \cdot MF = \frac{1}{2}ah \quad (h \text{ là độ dài đường cao của tam giác ABC}) \Rightarrow MD + ME + MF = h \text{ (đpcm).}$$



22. Định lý Gergonne-Euler

Cho tam giác ABC và các đoạn thẳng AD, BE, CF đồng quy tại O (D, E, F theo thứ tự nằm trên các cạnh BC, CA, AB). Chứng minh rằng $\frac{OD}{AD} + \frac{OE}{BE} + \frac{OF}{CF} = 1$.

Chứng minh

Vẽ AH, OK vuông góc với BC. Ta có OK // AH nên

$$\frac{OD}{AD} = \frac{OK}{AH} = \frac{S_{BOC}}{S_{ABC}}.$$

$$\text{Tương tự } \frac{OE}{BE} = \frac{S_{AOC}}{S_{ABC}}; \quad \frac{OF}{CF} = \frac{S_{AOB}}{S_{ABC}}.$$

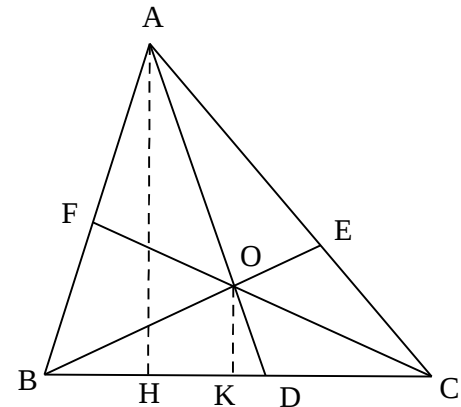
Cộng từng vế các đẳng thức trên ta được

$$\frac{OD}{AD} + \frac{OE}{BE} + \frac{OF}{CF} = \frac{S_{BOC} + S_{AOC} + S_{AOB}}{S_{ABC}} = 1.$$

Chú ý : Có thể chứng minh $\frac{OD}{AD} = \frac{S_{BOC}}{S_{ABC}}$ theo cách

khác như sau : Hai tam giác BOD và ABD có cùng chiều cao kẻ từ B nên

$$\frac{OD}{AD} = \frac{S_{BOD}}{S_{BAD}}. \quad \text{Tương tự } \frac{OD}{AD} = \frac{S_{OCD}}{S_{CAD}} \Rightarrow \frac{OD}{AD} = \frac{S_{BOD}}{S_{BAD}} = \frac{S_{COD}}{S_{CAD}} = \frac{S_{BOD} + S_{COD}}{S_{BAD} + S_{CAD}} = \frac{S_{BOC}}{S_{ABC}}.$$



23. Định lý con bướm với đường tròn

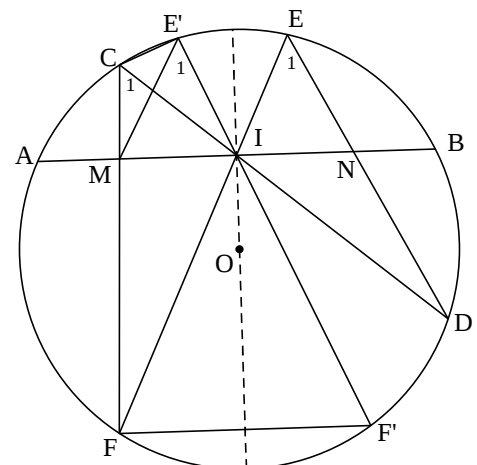
Cho đường tròn (O), dây AB. Gọi I là trung điểm của dây AB, vẽ các dây CD, EF đi qua I (C và E nằm về một phía của cung AB). Gọi giao điểm của CF, DE với AB là M, N. Chứng minh rằng IM = IN.

Chứng minh

Cách 1. Vẽ dây E'F' đối xứng với dây EF qua OI. Tứ giác

CE'F'F nội tiếp nên $\widehat{MCE'} + \widehat{F'} = 180^\circ$. Mà FF' // AB nên

$\widehat{F'} = \widehat{MIE'}$, do đó $\widehat{MIE'} + \widehat{MCE'} = 180^\circ$



$\Rightarrow$ tứ giác MCE'I nội tiếp $\Rightarrow \widehat{C}_1 = \widehat{E}_1'$. Mặt khác $\widehat{E}_1 = \widehat{C}_1$ nên $\widehat{E}_1 = \widehat{E}_1'$. Ta lại có $IE = IE'$, $\widehat{MIE'} = \widehat{NIE}$ (tính chất đối xứng). Từ đó chứng minh được $\Delta MIE' = \Delta NIE$ (g.c.g) $\Rightarrow IM = IN$.

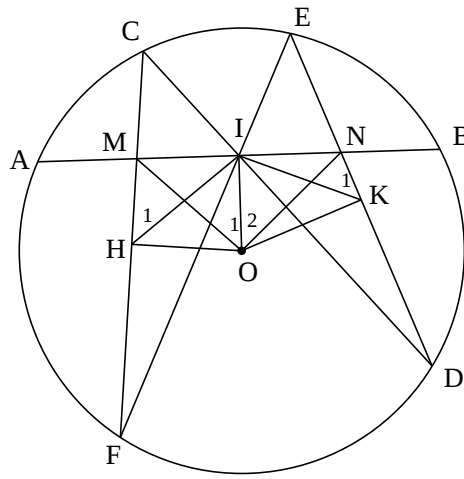
Cách 2. Kẻ $OH \perp CF, OK \perp DE$ thì H, K lần lượt là trung điểm của CF, DE.

Ta có $\Delta ICF \sim \Delta IED$ (g.g) có IH, IK là các trung tuyến tương ứng nên

$$\frac{IH}{IK} = \frac{IC}{IE} = \frac{CF}{DE} = \frac{HC}{KE} \Rightarrow \Delta ICH \sim \Delta IEK \text{ (c.c.c)} \Rightarrow \widehat{H}_1 = \widehat{K}_1. (1)$$

Các tứ giác OIMH, OINK nội tiếp (tổng hai góc đối) nên $\widehat{O}_1 = \widehat{H}_1, \widehat{O}_2 = \widehat{K}_1. (2)$

Từ (1) và (2) có $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$ nên tam giác MON cân tại O. Vậy $IM = IN$.



Cách 3. Kẻ $MM_1, NN_1 \perp CF; MM_2, NN_2 \perp DE$.

Ta có :

$$\Delta IMM_1 \sim \Delta INN_1 \Rightarrow \frac{IM}{IN} = \frac{MM_1}{NN_1} \quad (1)$$

$$\Delta IMM_2 \sim \Delta INN_2 \Rightarrow \frac{IM}{IN} = \frac{MM_2}{NN_2} \quad (2)$$

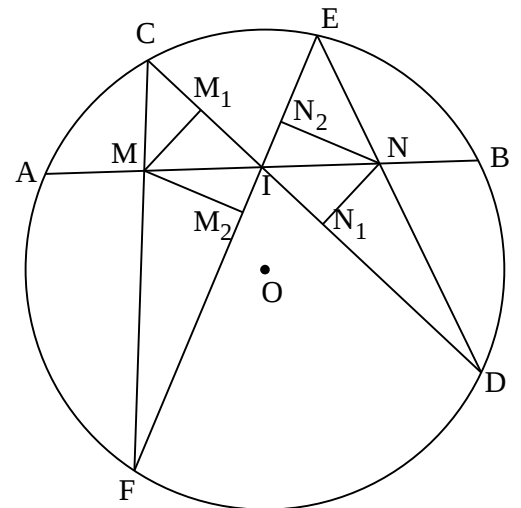
$$\Delta CMM_1 \sim \Delta ENN_2 \Rightarrow \frac{MM_1}{NN_2} = \frac{CM}{EN} \quad (3)$$

$$\Delta FMM_2 \sim \Delta DNN_1 \Rightarrow \frac{MM_2}{NN_1} = \frac{FM}{DN} \quad (4)$$

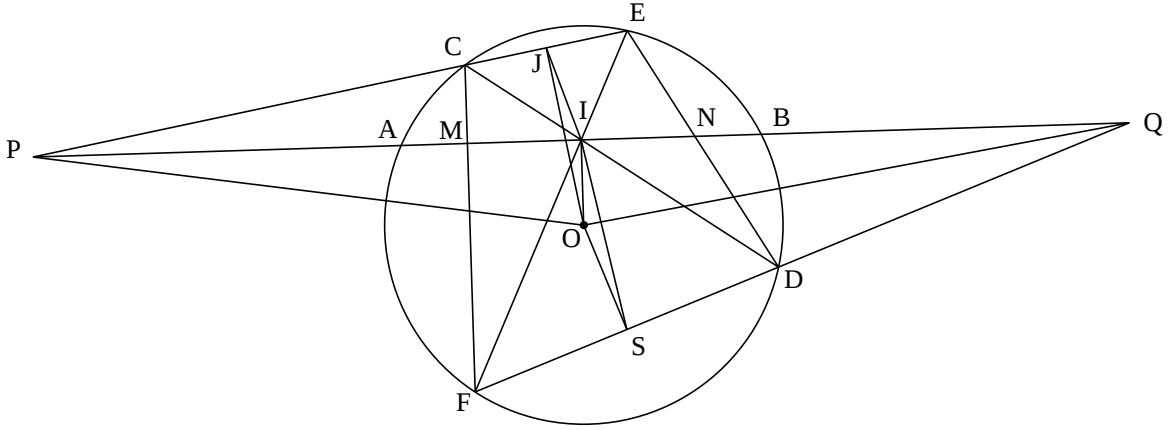
Từ (1), (2), (3), (4) suy ra:

$$\frac{IM^2}{IN^2} = \frac{MM_1 \cdot MM_2}{NN_1 \cdot NN_2} = \frac{CM \cdot FM}{EN \cdot DN} = \frac{AM \cdot MB}{BN \cdot AN}.$$

Đặt $IM = m, IN = n, IA = IB = a$.



Ta có $\frac{m^2}{n^2} = \frac{(a-m)(a+m)}{(a-n)(a+n)} = \frac{a^2 - m^2}{a^2 - n^2} = \frac{m^2 + a^2 - m^2}{n^2 + a^2 - n^2} = 1$.
 $\Rightarrow m^2 = n^2 \Rightarrow m = n$. Vậy $IM = IN$.



Chú ý : Nếu gọi P, Q là giao điểm của CE, DF với đường thẳng AB thì ta cũng có $IP = IQ$. Thật vậy, kẻ $OS \perp DF, OJ \perp EC$ và chứng minh tương tự như cách 2.

24. Định lí con bướm mở rộng với đường tròn

Cho đường tròn (O), dây AB và I là một điểm bất kì thuộc dây AB. Vẽ các dây CD, EF đi qua I (C và E nằm về một phía của cung AB). Gọi giao điểm của CF, DE với AB là M, N. Chứng minh rằng $\frac{1}{IA} + \frac{1}{IN} = \frac{1}{IB} + \frac{1}{IM}$.

Chứng minh

Trước hết ta chứng minh rằng $\frac{AM \cdot IB}{IM} = \frac{BN \cdot IA}{IN}$ (*)

Thật vậy, vẽ đường tròn ngoại tiếp tam giác CMD cắt AB ở K. Theo hệ thức lượng trong đường tròn, ta có $IM \cdot IK = IC \cdot ID$ và $IC \cdot ID = IA \cdot IB$ nên $IM \cdot IK = IA \cdot IB$

$$\Rightarrow IM(IB + BK) = (AM + IM)IB \Rightarrow IM \cdot BK = AM \cdot IB \Rightarrow \frac{AM \cdot IB}{IM} = BK \quad (1)$$

Vì $\widehat{K_1} = \widehat{C_1} = \widehat{E_1}$ nên tứ giác EIDK nội tiếp, tương tự như trên ta có $IN \cdot NK = EN \cdot ND = AN \cdot NB \Rightarrow IN(NB + BK) = (IA + IN)BN$

$$\Rightarrow IN \cdot BK = IA \cdot BN \Rightarrow \frac{BN \cdot IA}{IN} = BK \quad (2)$$

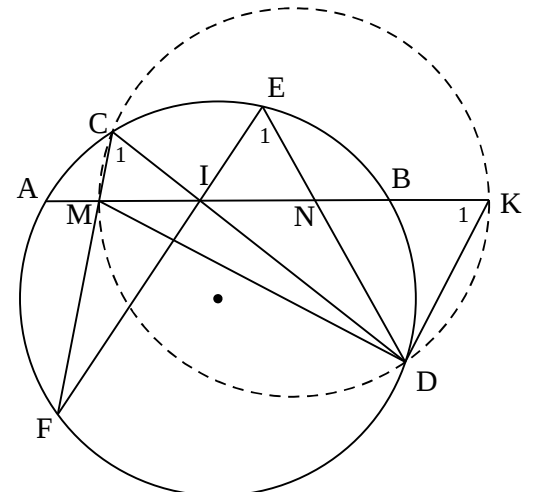
Từ (1) và (2) suy ra $\frac{AM \cdot IB}{IM} = \frac{BN \cdot IA}{IN}$, (*) đã được

chứng minh.

Đặt $IA = a, IB = b, IM = m, IN = n$, từ (*) ta có

$$\frac{(a-m)b}{m} = \frac{(b-n)a}{n}$$

$$\Rightarrow (a-m)bn = (b-n)am \Rightarrow abn - bmn = abm - amn$$



Chia hai vế cho abmn ta được $\frac{1}{m} - \frac{1}{a} = \frac{1}{n} - \frac{1}{b}$

$$\Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{n} = \frac{1}{b} + \frac{1}{m} \text{ hay } \frac{1}{IA} + \frac{1}{IN} = \frac{1}{IB} + \frac{1}{IM}.$$

Ghi chú : Bổ đề (*) được gọi là *bổ đề Haruki*.

25. Định lý con bướm với cặp đường thẳng

Cho tam giác ABC có I là trung điểm của cạnh BC. Qua I vẽ đường thẳng thứ nhất cắt AB, AC ở M, P ; đường thẳng thứ hai cắt AB, AC ở Q, N. MN, PQ cắt BC lần lượt tại E, F. Chứng minh rằng $IE = IF$.

Chứng minh

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác ABC với cát tuyến IPM và NIQ, ta có:

$$\frac{IB}{IC} \cdot \frac{PC}{PA} \cdot \frac{MA}{MB} = 1 \Rightarrow \frac{PC}{PA} \cdot \frac{MA}{MB} = 1 \Rightarrow \frac{PC}{PA} = \frac{MB}{MA} \quad (1)$$

$$\frac{IB}{IC} \cdot \frac{NC}{NA} \cdot \frac{QA}{QB} = 1 \Rightarrow \frac{NC}{NA} \cdot \frac{QA}{QB} = 1 \Rightarrow \frac{QA}{QB} = \frac{NA}{NC} \quad (2)$$

Lại áp dụng định lý Menelaus cho tam giác ABC với cát tuyến MNE và PFQ, ta được:

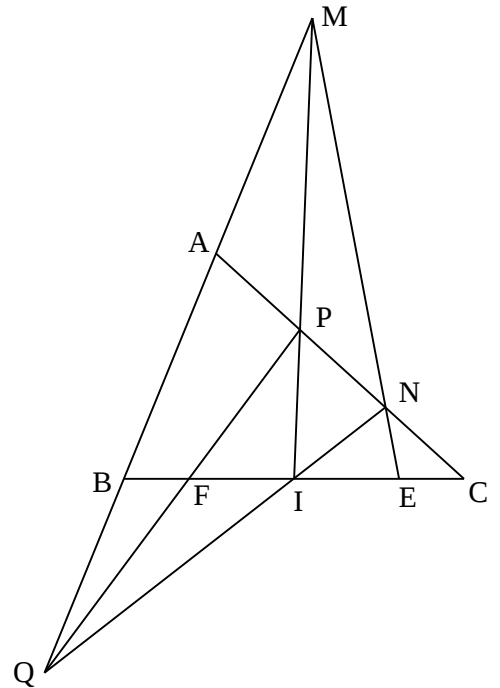
$$\frac{FB}{FC} \cdot \frac{PC}{PA} \cdot \frac{QA}{QB} = 1 \quad (3)$$

$$\frac{EC}{EB} \cdot \frac{MB}{MA} \cdot \frac{NA}{NC} = 1 \quad (4)$$

Từ (1), (2), (3) và (4) suy ra

$$\frac{FB}{FC} = \frac{EC}{EB} \Rightarrow \frac{FB}{BC} = \frac{EC}{BC} \Rightarrow FB = EC.$$

Lại có $IA = IB$ nên $IE = IF$.



26. Định lý Newton

Cho tứ giác ABCD ngoại tiếp đường tròn (O ; R). Gọi I, K theo thứ tự là trung điểm của AC, BD. Chứng minh rằng I, O, K thẳng hàng.

Chứng minh

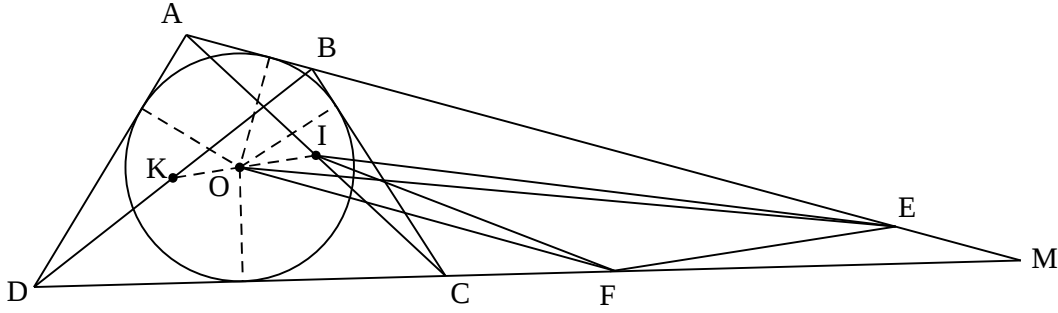
Trường hợp $AB \parallel CD$, bài toán được chứng minh dễ dàng.

Xét trường hợp AB cắt CD tại M. Lấy E trên tia MA, F trên tia MD sao cho $ME = AB$, $MF = CD$.

$$\text{Ta có } S_{ABCD} = S_{AOB} + S_{DOC} + S_{AOD} + S_{BOC} = \frac{1}{2}(AB + CD)R + \frac{1}{2}(AD + BC)R.$$

Do ABCD là tứ giác ngoại tiếp nên $AB + CD = AD + BC$, do đó

$$S_{AOB} + S_{DOC} = \frac{1}{2}S_{ABCD} \quad (1)$$



Do I, K lần lượt là trung điểm của AC, BD nên

$$S_{AIB} = \frac{1}{2}S_{ABC}, S_{DIC} = \frac{1}{2}S_{ACD} \Rightarrow S_{AIB} + S_{DIC} = \frac{1}{2}S_{ABCD} \quad (2)$$

$$S_{AKB} = \frac{1}{2}S_{ABD}, S_{CKD} = \frac{1}{2}S_{BCD} \Rightarrow S_{AKB} + S_{CKD} = \frac{1}{2}S_{ABCD} \quad (3)$$

Các tam giác IEM và AIB có cạnh đáy bằng nhau và có cùng chiều cao kẻ từ I nên

$$S_{AIB} = S_{IEM}, \text{ tương tự } S_{DIC} = S_{IFM}. \text{ Do đó } S_{AIB} + S_{DIC} = S_{IEM} + S_{IFM}, \text{ mặt khác} \quad (4)$$

$S_{IEM} + S_{IFM} = S_{IEMF} = S_{IEF} + S_{MEF}$ nên $S_{AIB} + S_{DIC} = S_{IEF} + S_{MEF}$

$$S_{AOB} = S_{OEM}, \text{ tương tự } S_{DOC} = S_{OFM} \Rightarrow S_{AOB} + S_{DOC} = S_{OEM} + S_{OFM} \text{ mà} \quad (5)$$

$$S_{OEM} + S_{OFM} = S_{OEMF} = S_{OEF} + S_{MEF} \text{ nên } S_{AOB} + S_{DOC} = S_{OEF} + S_{MEF} \quad (6)$$

Chứng minh tương tự ta có: $S_{AKB} + S_{CKD} = S_{KEF} + S_{MEF}$

Từ (1), (2), (3), (4), (5), (6) suy ra $S_{IEF} = S_{OEF} = S_{KEF} \Rightarrow I, O, K$ cách đều đường thẳng EF $\Rightarrow I, O, K$ cùng nằm trên một đường thẳng song song với EF.

Vậy I, O, K thẳng hàng.

27. Định lí Pascal

Cho lục giác ABCDEF nội tiếp trong một đường tròn. Gọi giao điểm của AB và DE là G, BC và EF là H, CD và FA là K. Chứng minh rằng G, H, K thẳng hàng.

Chứng minh

Vẽ đường tròn ngoại tiếp tam giác DFK và BGD, chúng cắt nhau tại I (khác D).

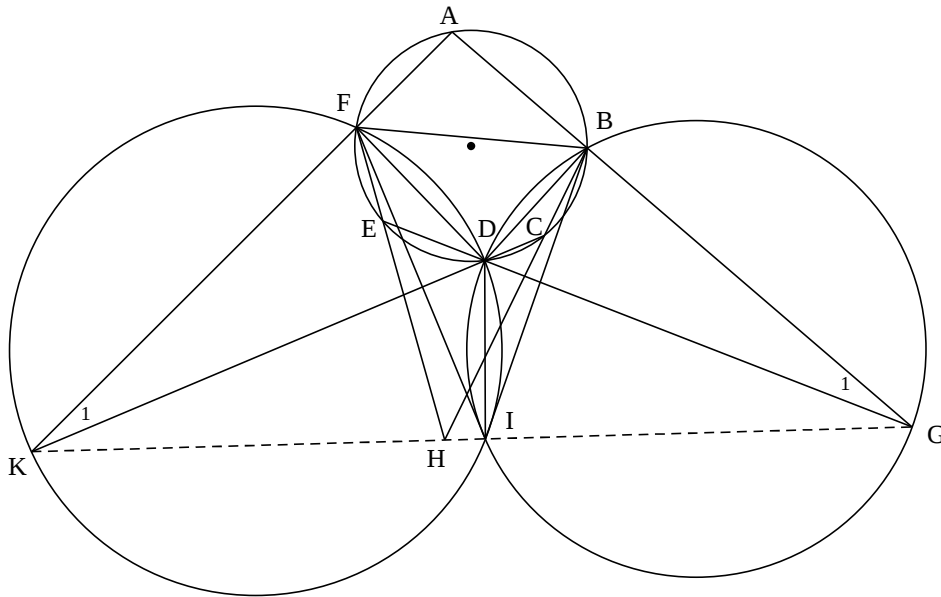
Ta có $\widehat{FIB} = \widehat{FID} + \widehat{BID} = \widehat{K}_1 + \widehat{G}_1$. Mặt khác :

$$\widehat{K}_1 = \frac{sđ \widehat{AC} - sđ \widehat{FD}}{2} = \frac{(sđ \widehat{AB} + sđ \widehat{BC}) - (sđ \widehat{EF} + sđ \widehat{ED})}{2}$$

$$\widehat{G}_1 = \frac{sđ \widehat{AE} - sđ \widehat{BD}}{2} = \frac{(sđ \widehat{FA} + sđ \widehat{EF}) - (sđ \widehat{DC} + sđ \widehat{BC})}{2}$$

$$\Rightarrow \widehat{K}_1 + \widehat{G}_1 = \frac{(sđ \widehat{AB} + sđ \widehat{FA}) - (sđ \widehat{ED} + sđ \widehat{DC})}{2} = \frac{sđ \widehat{FB} - sđ \widehat{EC}}{2} = \widehat{FHB}$$

$$\Rightarrow \widehat{FIB} = \widehat{FHB} \Rightarrow \text{tứ giác FBIH nội tiếp} \Rightarrow \widehat{BFH} + \widehat{BIH} = 180^\circ.$$



Ta lại có $\widehat{BIG} = \widehat{BDG}$ (cùng chắn cung BG) và $\widehat{BDG} = \widehat{BFH}$ (do tứ giác BDEF nội tiếp) nên $\widehat{BIG} = \widehat{BFH}$. Do đó $\widehat{BIG} + \widehat{BIH} = 180^\circ$ hay H, I, G thẳng hàng. (1)

Ta có $\widehat{FIK} = \widehat{FDK} = \widehat{FBH} = \widehat{FIH}$ nên I, H, K thẳng hàng. (2)

Từ (1) và (2) ta có G, H, K thẳng hàng.

Chú ý : Bài toán vẫn đúng nếu thay "lục giác ABCDEF nội tiếp" bởi "sáu điểm A, B, C, D, E, F cùng nằm trên một đường tròn". Thật vậy, ta cũng vẽ đường tròn ngoại tiếp tam giác BGD và DFK, chúng cắt nhau tại I (khác D); BI, DI, FI cắt đường tròn (O) lần lượt tại P, Q, R.

Ta có $\widehat{BGD} = \widehat{BID}$ (cùng chắn cung BD) mà $\widehat{BID} = \frac{sđ\widehat{BD} + sđ\widehat{PQ}}{2}$, $\widehat{BGD} = \frac{sđ\widehat{BD} + sđ\widehat{AE}}{2}$ (góc

có đỉnh ở bên trong đường tròn (O)) nên

$$\widehat{PQ} = \widehat{AE} \quad (1)$$

Ta lại có $\widehat{AFR} = \widehat{CDQ}$ (cùng chắn cung IK) nên

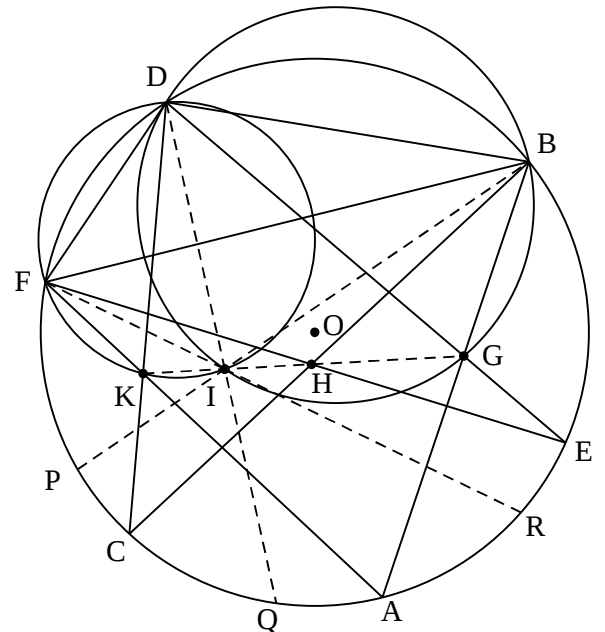
$$\widehat{CQ} = \widehat{AR} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{PC} = \widehat{RE}$, do đó

$\widehat{IBH} = \widehat{IFH} \Rightarrow$ tứ giác BFIH nội tiếp.

$\Rightarrow \widehat{BIH} = \widehat{BFH} = \widehat{BDG} = \widehat{BIG}$ nên I, H, G thẳng hàng.

Ta lại có $\widehat{FIK} = \widehat{FDK} = \widehat{FBH}$ mà $\widehat{FIH} + \widehat{FBH} = 180^\circ$ nên $\widehat{FIK} + \widehat{FIH} = 180^\circ$. Do đó K, I, H cũng thẳng hàng. Vậy G, H, K thẳng hàng.



28. Định lý Carnot

Cho tam giác ABC có M, N, P theo thứ tự nằm trên các cạnh BC, CA, AB. Vẽ các đường thẳng d_1, d_2, d_3 vuông góc với BC, CA, AB theo thứ tự tại M, N, P. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để d_1, d_2, d_3 đồng quy là ta có hệ thức

$$MB^2 + NC^2 + PA^2 = MC^2 + NA^2 + PB^2. \quad (1)$$

Chứng minh

Điều kiện cần : Gọi O là điểm đồng quy của d_1, d_2, d_3 .

Áp dụng định lý Py-ta-go ta có:

$$MB^2 = OB^2 - OM^2, NC^2 = OC^2 - ON^2, PA^2 = OA^2 - OP^2.$$

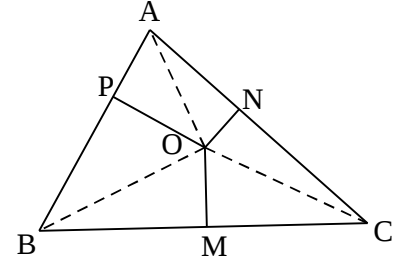
$$\begin{aligned} \Rightarrow MB^2 + NC^2 + PA^2 &= (OB^2 - OM^2) + (OC^2 - ON^2) + (OA^2 - OP^2) \\ &= (OC^2 - OM^2) + (OA^2 - ON^2) + (OB^2 - OP^2) = MC^2 + NA^2 + PB^2 \quad (\text{đpcm}). \end{aligned}$$

Điều kiện đủ : Giả sử có (1). Gọi O là giao điểm của d_2, d_3 .

Vẽ $OM' \perp BC$ ($M' \in BC$). Thế thì theo chứng minh ở điều kiện cần ta có

$$M'B^2 + NC^2 + PA^2 = MC^2 + NA^2 + PB^2 \Rightarrow M'B^2 = MB^2 \Rightarrow MB = M'B \Rightarrow M \equiv M'.$$

Vậy d_1, d_2, d_3 đồng quy tại O (đpcm).



29. Định lý Morley

Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 3\alpha, \hat{B} = 3\beta, \hat{C} = 3\gamma$. Vẽ các tia chia ba các góc A, B, C của tam giác. Tia chia ba góc B và góc C kề cạnh BC cắt nhau ở D, tia chia ba góc A và góc C kề cạnh AC cắt nhau ở E, tia chia ba góc A và góc B kề cạnh AB cắt nhau ở F. Chứng minh rằng tam giác DEF là tam giác đều.

Chứng minh

Tia chia ba góc B kề cạnh AB và tia chia ba góc C kề cạnh AC cắt nhau tại K. Lấy E trên KC, F trên KB sao

cho $\widehat{EDK} = \widehat{FDK} = 30^\circ$. Ta có $\triangle EDK = \triangle FDK$ (g.c.g) $\Rightarrow DE = DF$, mà $\widehat{EDF} = 60^\circ$

nên $\triangle DEF$ là tam giác đều. Ta sẽ chứng minh AF, AE là các tia chia ba góc A.

Gọi M, N theo thứ tự là các điểm đối xứng của D qua KC, KB. Dễ dàng chứng minh được $M \in AC, N \in AB$ và $DM = DN$.

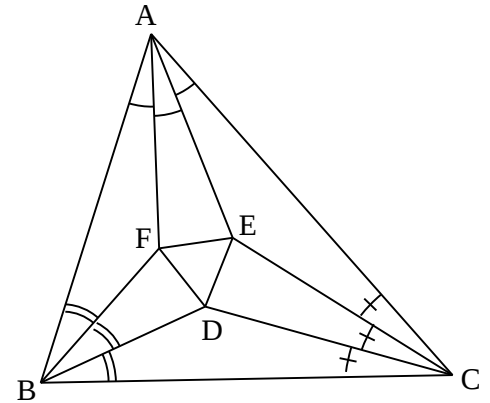
Ta có $DK \perp EF, DK \perp MN$ (DK là đường phân giác của tam giác đều DEF và cũng là đường phân giác của tam giác cân DMN) nên $MN \parallel EF$.

$$\widehat{NFE} = 360^\circ - \widehat{DFE} - \widehat{NFD} = 300^\circ - 2\widehat{BFD} \quad (1)$$

$$\widehat{BFD} = \widehat{FKD} + \widehat{FDK} = \frac{1}{2}\widehat{BKC} + 30^\circ \quad (\text{góc ngoài của } \triangle KFD) \quad (2)$$

$$\widehat{BKC} = 180^\circ - 2\beta - 2\gamma = 180^\circ - 2(\beta + \gamma) = 180^\circ - 2(60^\circ - \alpha) = 60^\circ + 2\alpha \quad (3)$$

(vì $\alpha + \beta + \gamma = 60^\circ$ do $3\alpha + 3\beta + 3\gamma = 180^\circ$)



Từ (1), (2) và (3) ta có $\widehat{NFE} = 300^\circ - (60^\circ + \widehat{BKC}) = 240^\circ - \widehat{BKC} = 240^\circ - (60^\circ + 2\alpha)$
 $= 180^\circ - 2\alpha$. Tương tự $\widehat{MEF} = 180^\circ - 2\alpha$.
 Do đó MEFN là hình thang cân.

Tam giác EFN cân tại F có $\widehat{NFE} = 180^\circ - 2\alpha$
 nên $\widehat{FEN} = \frac{180^\circ - (180^\circ - 2\alpha)}{2} = \alpha$

$\Rightarrow \widehat{MEN} = 180^\circ - 2\alpha - \alpha = 180^\circ - 3\alpha$

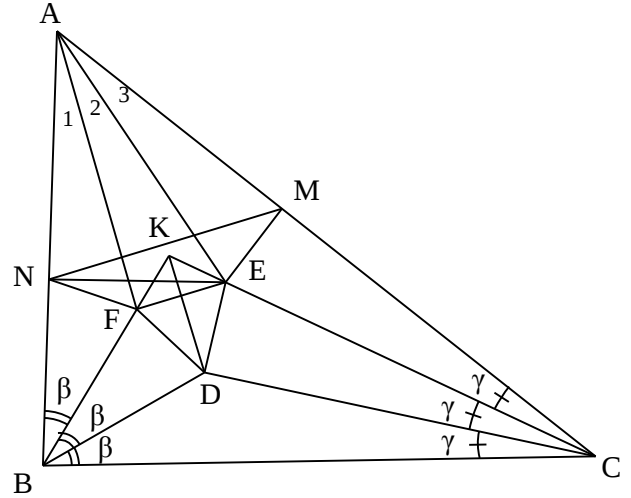
$\Rightarrow \widehat{MEN} + \widehat{MAN} = 180 - 3\alpha + 3\alpha = 180^\circ$, do đó
 tứ giác AMEN nội tiếp. MEFN là hình thang
 cân nên cũng là tứ giác nội tiếp.

$\Rightarrow$ Năm điểm A, M, E, F, N cùng nằm trên
 một đường tròn.

Do FN = FE = EM nên $\widehat{FN} = \widehat{FE} = \widehat{EM}$

$\Rightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 = \widehat{A}_3$.

Từ đây ta có đpcm.



30. Định lý Bottema

Cho tam giác ABC có BC cố
 định, A thay đổi trên một nửa
 mặt phẳng bờ BC. Về phía
 ngoài tam giác ABC, vẽ
 $\triangle ABD$ vuông cân tại B,
 $\triangle ACE$ vuông cân tại C.
 Gọi M là trung điểm của DE.
 Chứng minh rằng $\triangle MBC$ luôn
 là tam giác vuông cân.

Chứng minh

Lấy điểm N đối xứng với B qua M. Ta có BDNE là hình bình hành nên $BD = EN$ và
 $BD \parallel EN$. Do $BD \perp AB$ nên $EN \perp AB$, lại có $EC \perp AC \Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{CEN}$.

Xét hai tam giác NCE và BCA, ta có : $EN = AB (= BD)$, $CE = AC$, $\widehat{BAC} = \widehat{CEN}$, do đó

$\triangle NCE = \triangle BCA$ (c.g.c) $\Rightarrow NC = BC$ và $\widehat{NCE} = \widehat{BCA}$. Ta lại có $\widehat{NCE} + \widehat{ACN} = 90^\circ$ nên

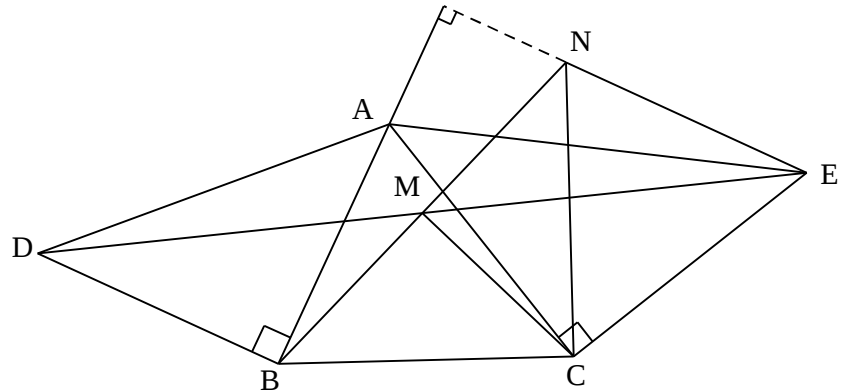
$\widehat{BCA} + \widehat{ACN} = 90^\circ$ hay $\widehat{BCN} = 90^\circ \Rightarrow$ tam giác BCN vuông cân tại C, mà M là trung
 điểm của BN nên $\triangle MBC$ vuông cân tại M.

Do tam giác NBC vuông cân tại C mà BC cố định nên điểm N cố định, suy ra điểm
 M cố định. Vậy $\triangle MBC$ luôn là tam giác vuông cân.

Cách khác

Vẽ DD' , AA' , MM' , EE' vuông góc với BC.

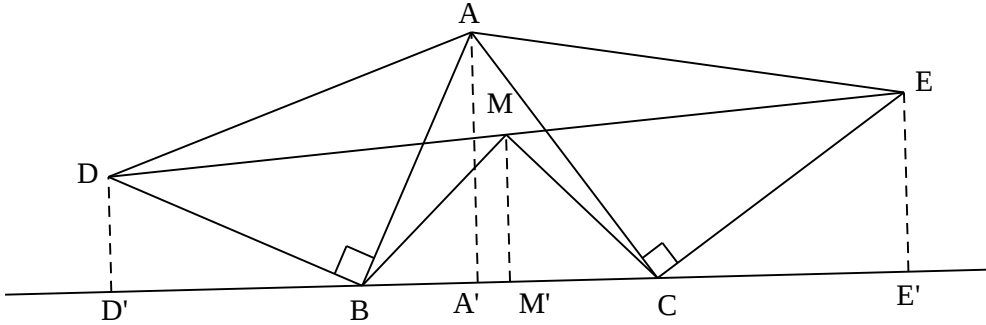
Ta có $DD' \parallel MM' \parallel EE'$ và $MD = ME$ nên $M'D' = M'E'$.



Để dàng chứng minh được $\triangle BDD' = \triangle ABA'$ (cạnh huyền – góc nhọn) $\Rightarrow BD' = AA'$.
Tương tự $CE' = AA'$. Do đó $BD' = CE'$, suy ra $M'B = M'C$ (1)

$$\text{Ta có } MM' = \frac{DD' + EE'}{2} = \frac{BA' + CA'}{2} = \frac{BC}{2} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra tam giác MBC vuông cân tại M . Điểm M' cố định vì là trung điểm của cạnh BC cố định. Từ đó dễ dàng suy ra được M cố định. Ta có đpcm.



31. Định lí Shooten

Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O) . Chứng minh rằng với mỗi điểm M bất kì nằm trên đường tròn (O) thì một trong ba đoạn MA, MB, MC có một đoạn có độ dài bằng tổng độ dài hai đoạn kia.

Chứng minh

Xét điểm M nằm trên cung nhỏ BC .

Áp dụng định lí Ptolemy cho tứ giác nội tiếp $ABMC$, ta có $MA \cdot BC = MB \cdot AC + MC \cdot AB$.

Vì $AB = AC = BC$ nên $MA = MB + MC$.

Tương tự, nếu điểm M nằm trên các cung nhỏ AC và AB thì ta lần lượt có $MB = MC + MA$ và $MC = MA + MB$.

Suy ra đpcm.

Cách khác để chứng minh $MA = MB + MC$ (trường hợp điểm M nằm trên các cung AC, AB thì tương tự).

Trên MA lấy điểm I sao cho $MI = MB$, ta cần chứng minh

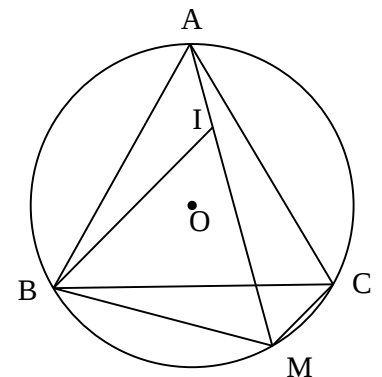
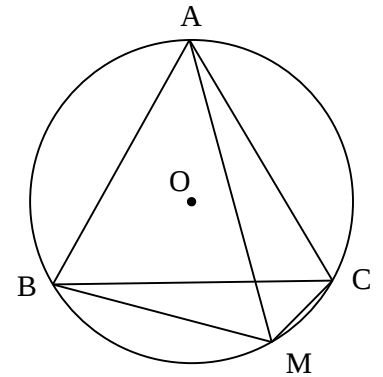
$MC = AI$. Thật vậy, ta có $\widehat{BMI} = \widehat{ACB} = 60^\circ$ mà $MB = MI$

nên tam giác BMI đều, do đó $BI = BM$ và $\widehat{IBM} = 60^\circ$. Ta lại

có $\widehat{ABC} = 60^\circ$ nên $\widehat{ABC} = \widehat{IBM}$, suy ra $\widehat{CBM} = \widehat{ABI}$.

Để dàng chứng minh được

$\triangle BCM = \triangle BAI$ (c.g.c) nên $MC = AI$.



32. Định lý Steiner-Lehmus

Chứng minh rằng nếu tam giác ABC có hai đường phân giác BD và CE bằng nhau thì ΔABC là tam giác cân.

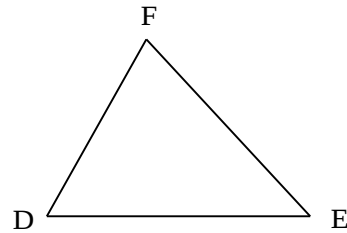
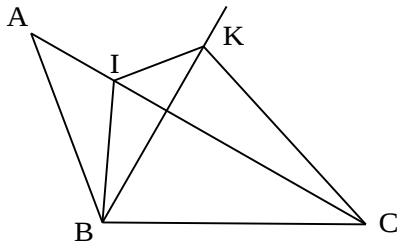
Trước hết ta chứng minh bổ đề sau đây : Nếu hai tam giác có hai cạnh tương ứng bằng nhau từng đôi một nhưng các góc xen giữa không bằng nhau thì các cạnh thứ ba cũng không bằng nhau và cạnh nào đối diện với góc lớn hơn là cạnh lớn hơn.

Thật vậy, xét hai tam giác ABC và DEF có $AB = DF$, $BC = DE$, $\widehat{B} > \widehat{D}$, cần chứng minh rằng $AC > EF$. Trên nửa mặt phẳng bờ BC chứa A, vẽ điểm K sao cho

$\widehat{KBC} = \widehat{D}$ và $KB = DF$, thế thì $\Delta KBC = \Delta FDE$ (c.g.c) $\Rightarrow KC = EF$.

Vẽ tia phân giác của góc ABK cắt AC tại I, ta có $\Delta ABI = \Delta KBI$ (c.g.c) nên $AI = KI$.

$\Rightarrow AC = AI + IC = IK + IC > KC = EF$. Bổ đề được chứng minh.



Chứng minh

Giả sử $\widehat{B} > \widehat{C}$ thì $\widehat{B}_1 > \widehat{C}_1$, $\widehat{B}_2 > \widehat{C}_2$. Xét hai tam giác BEC và

CDB, ta có: $BD = CE$, BC là cạnh chung, $\widehat{B}_1 > \widehat{C}_1$ nên $CD > BE$.

Vẽ hình bình hành BEKD.

Ta có $CD > BE$ và $BE = KD$ nên $CD > KD$. Trong tam giác

KCD ta có $CD > KD$ nên $\widehat{K}_2 > \widehat{C}_3$. Ta lại có $\widehat{K}_1 = \widehat{B}_2 > \widehat{C}_2$ nên $\widehat{K}_1 + \widehat{K}_2 > \widehat{C}_2 + \widehat{C}_3$ hay $\widehat{EKC} > \widehat{ECK}$ (1).

Do $EK = BD = CE$ nên $\widehat{EKC} = \widehat{ECK}$, mâu thuẫn với (1).

Vậy không thể xảy ra $\widehat{B} > \widehat{C}$. Tương tự không thể xảy ra $\widehat{B} < \widehat{C}$.

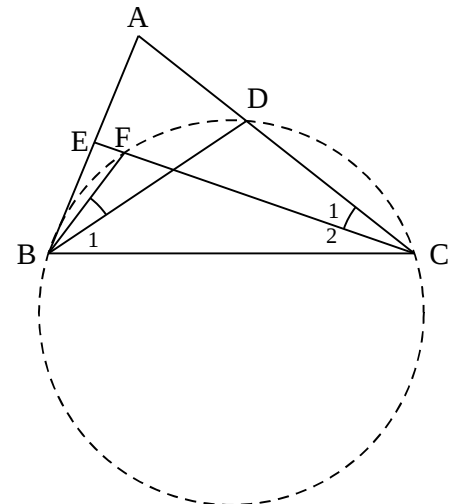
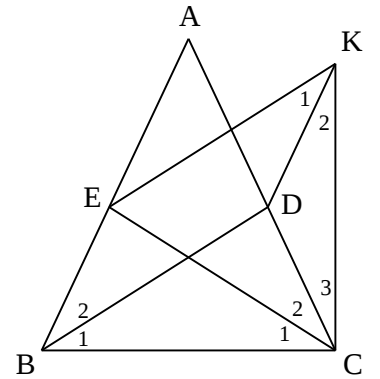
Do đó phải có $\widehat{B} = \widehat{C}$, tức là tam giác ABC cân tại A.

Cách khác. Giả sử $\widehat{B} > \widehat{C}$ thì $\widehat{EBD} > \widehat{C}_1$, do đó tồn tại một

điểm F nằm trên đoạn CE sao cho $\widehat{FBD} = \widehat{C}_1$, thế thì tứ giác BFDC nội tiếp.

Ta có $\widehat{B}_1 > \widehat{C}_2$, $\widehat{FBD} = \widehat{C}_1$ nên

$\widehat{FBD} + \widehat{B}_1 > \widehat{C}_2 + \widehat{C}_1$ hay $\widehat{FBC} > \widehat{C}$.



Ta lại có $\widehat{FBC} = \frac{\widehat{B}}{2} + \frac{\widehat{C}}{2} < \frac{\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}}{2} = 90^\circ$ nên $\widehat{C} < \widehat{FBC} < 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{CF} > \widehat{BD} \Rightarrow CF > BD$. Mặt khác $CE > CF$, do đó $CE > BD$, trái với giả thiết

$CE = BD$. Tương tự nếu giả sử $\widehat{B} < \widehat{C}$ thì cũng đến điều trái với giả thiết.

Vậy phải có $\widehat{B} = \widehat{C}$ hay tam giác ABC cân tại A.

33. Bài toán của Gergonne

Cho tứ giác ABCD. Gọi E, F, G, H, M, N theo thứ tự là trung điểm của AB, BC, CD, DA, AC, BD. Chứng minh rằng EG, FH, MN đồng quy.

Chứng minh

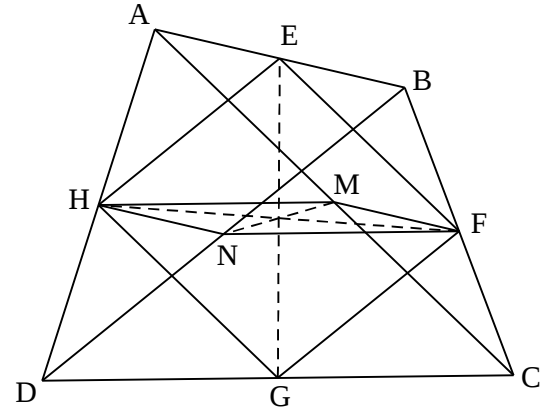
Ta có EF là đường trung bình của tam giác ABC nên

$EF \parallel AC$ và $EF = \frac{AC}{2}$.

Tương tự $HG \parallel AC$ và $HG = \frac{AC}{2}$. Do đó $EF \parallel HG$ và $EF = HG \Rightarrow EFGH$ là hình

bình hành $\Rightarrow EG$ và FH cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

Ta cũng có MFNH là hình bình hành nên FH và MN cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường. Vậy EG, FH, MN đồng quy.



34. Định lý Brocard

Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O). Gọi M là giao điểm của AB và CD, N là giao điểm của AD và BC, I là giao điểm của AC và BD. Chứng minh rằng I là trực tâm của tam giác OMN.

Chứng minh

Gọi E là giao điểm khác I của hai đường tròn ngoại tiếp tam giác AID và BIC.

Ta có $\widehat{DEC} = 360^\circ - (\widehat{DEI} + \widehat{IEC}) = 360^\circ - (180^\circ - \widehat{DAI} + 180^\circ - \widehat{CBI})$
 $= \widehat{DAI} + \widehat{CBI} = \text{sđ } \widehat{CD} = \widehat{DOC}$, do đó tứ giác DOEC nội tiếp.

Ta có $\widehat{AEB} = \widehat{AEI} + \widehat{BEI} = \widehat{ADI} + \widehat{BCI} = \text{sđ } \widehat{AB} = \widehat{AOB}$
 nên AOEB cũng là tứ giác nội tiếp.

Gọi E' là giao điểm của OM với đường tròn ngoại tiếp tam giác DOC.

Thế thì $ME' \cdot MO = MC \cdot MD$, mà $MC \cdot MD = MA \cdot MB$ nên $ME' \cdot MO = MA \cdot MB$.

Từ đó chứng minh được tứ giác AOEB' nội tiếp. Như vậy E' là điểm chung khác O của hai đường tròn ngoại tiếp tam giác AOB và DOC. Do đó $E \equiv E'$ hay M, E, O thẳng hàng.

Tương tự N, I, E thẳng hàng.

Ta có :

$$\widehat{IEO} = \widehat{AEI} + \widehat{AEO} = \widehat{DAI} + \widehat{OBA} \quad (1)$$

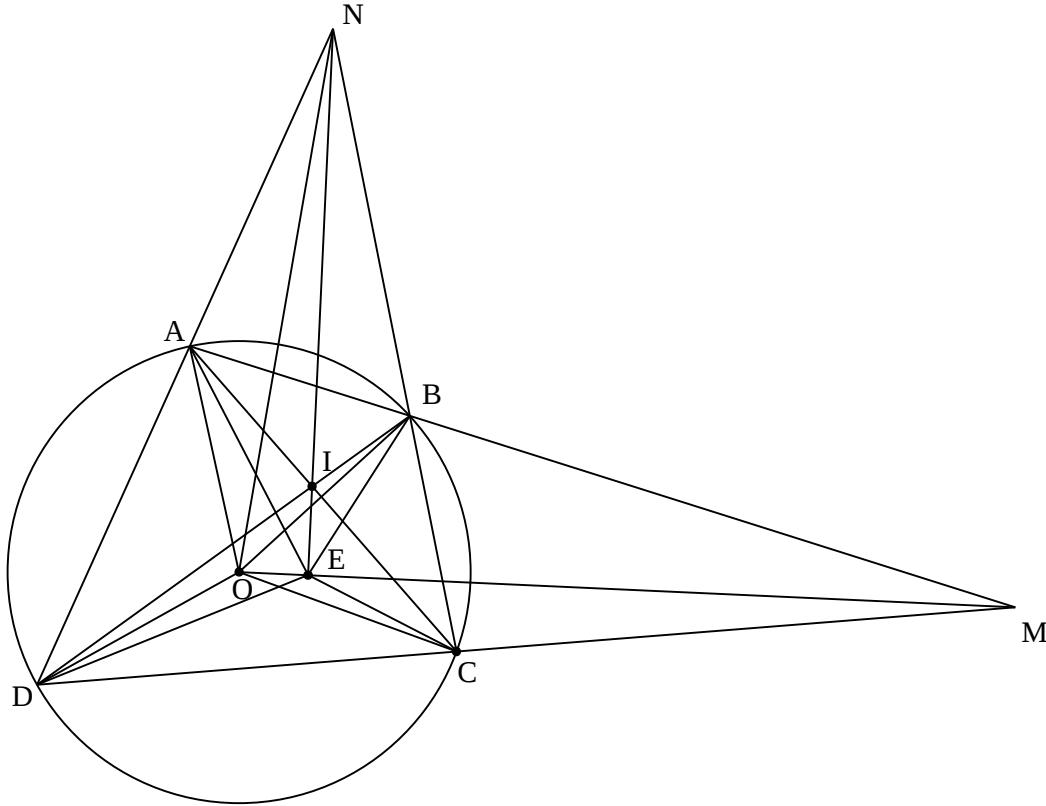
$$\widehat{IEM} = \widehat{IEB} + \widehat{BEM} = \widehat{BCI} + \widehat{OAB} \quad (2)$$

Lại có $\widehat{DAI} = \widehat{BCI}$ và $\widehat{OBA} = \widehat{OAB}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) ta có $\widehat{IEO} = \widehat{IEM}$, mà $\widehat{IEO} + \widehat{IEM} = 180^\circ$ nên $\widehat{IEO} = \widehat{IEM} = 90^\circ$ hay $NI \perp OM$.

Tương tự, gọi F là giao điểm khác I của hai đường tròn ngoại tiếp tam giác AIB và DIC thì M, I, F thẳng hàng và $MI \perp ON$.

Vậy I là trực tâm của tam giác OMN.



35. Định lí Johnson

Cho ba đường tròn (A), (B), (C) đều có bán kính bằng R và cùng đi qua điểm I. Gọi M, N, P là các giao điểm khác I của ba đường tròn (A), (B), (C). Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP có bán kính bằng R.

Chứng minh

Dễ thấy $IA = IB = IC = R$ nên (I ; R) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Ta có BMCI là hình thoi vì

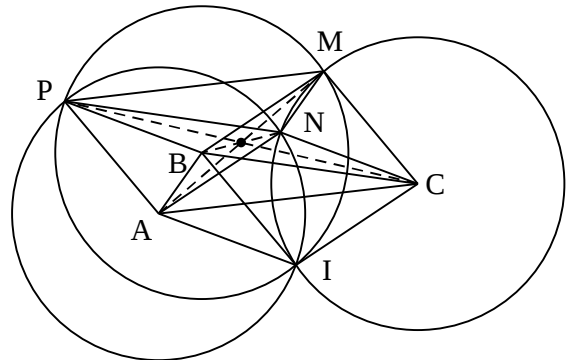
$BM = MC = CI = IB = R$. Tương tự APBI cũng là hình thoi $\Rightarrow CM = AP (= BI)$ và $CM \parallel AP$ ($\parallel BI$).

Do đó AMNC là hình bình hành nên AM và CP cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

Ta cũng có BPNC là hình bình hành nên BN và CP đồng quy tại trung điểm của mỗi đường.

Suy ra AM, BN, CP đồng quy.

Gọi O điểm đồng quy của AM, BN, CP thì O là trung điểm của các đoạn thẳng đó.



Nói cách khác, A và M đối xứng với nhau qua O ; B đối xứng với N qua O ; C đối xứng với P qua O $\Rightarrow \triangle ABC = \triangle MNP$ (tính chất đối xứng)
 $\Rightarrow$ Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP cũng bằng R.
 Vậy ta có đpcm.

36. Định lí Archimedes

Cho đường tròn (O) và hai điểm A, B cố định trên (O). Gọi M là điểm chính giữa của cung AB, C là điểm chuyển động trên cung AB chứa M. Từ M kẻ $MD \perp AC$. Chứng minh rằng $AD = BC + CD$.

Chứng minh

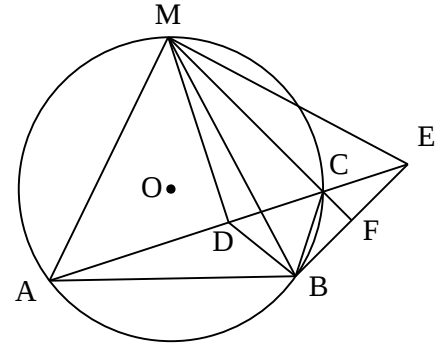
Lấy điểm E đối xứng với B qua MC và MC cắt BE tại F.

Ta có $\widehat{BCF} = \widehat{MAB}$ (do tứ giác ABCM nội tiếp) nên

$\widehat{BCE} = 2\widehat{BCF} = 2\widehat{MAB}$, lại có $\widehat{ACB} = \widehat{AMB}$

$\Rightarrow \widehat{ACB} + \widehat{BCE} = \widehat{AMB} + 2\widehat{MAB} = 180^\circ$ (vì tam giác MAB cân tại M), do đó A, D, C, E thẳng hàng.

Do $MA = MB = ME$ nên tam giác MAE cân tại M, mà $MD \perp AC$ nên $AD = DE = CE + CD = BC + CD$.



37. Điểm Brocard

Cho tam giác ABC. Dựng điểm I và K nằm bên trong tam giác ABC sao cho

$\widehat{IAB} = \widehat{IBC} = \widehat{ICA}$ và $\widehat{KBA} = \widehat{KCB} = \widehat{KAC}$.

Phân tích. Giả sử ta đã dựng được điểm I bên trong

tam giác ABC sao cho $\widehat{IAB} = \widehat{IBC} = \widehat{ICA}$. Vẽ tia

$Bx \parallel AC$ cắt CI tại D thì $\widehat{IDB} = \widehat{ICA}$ (Bx nằm trên nửa mặt phẳng bờ BC chứa A), do đó

$\widehat{IDB} = \widehat{IAB} = \widehat{IBC}$ nên AIBD là tứ giác nội tiếp và

BC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tứ giác AIBD.

Cách dựng. Dựng đường tròn tâm O đi qua A và tiếp xúc với BC tại B. Vẽ dây BD song song với AC. Gọi I là giao điểm của CD với (O). Điểm I là điểm cần dựng.

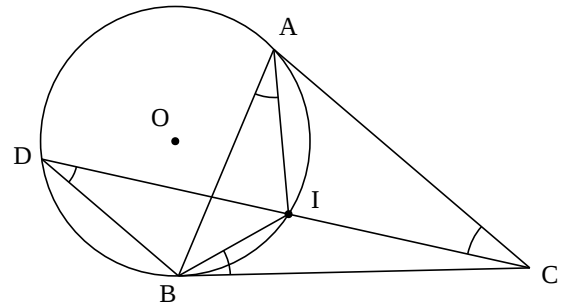
Chứng minh. Đường tròn (O) đi qua A và tiếp xúc với BC tại B nên $\widehat{IAB} = \widehat{IBC}$. Do

$BD \parallel AC$ nên $\widehat{IDB} = \widehat{ICA}$ mà $\widehat{IDB} = \widehat{IAB}$. Vậy $\widehat{IAB} = \widehat{IBC} = \widehat{ICA}$.

Biện luận. Bài toán luôn có một nghiệm hình.

Tương tự đối với điểm K.

Hai điểm I và K được xác định như trên được gọi là *điểm Brocard* của tam giác ABC.



38. Điểm Miquel

Cho tứ giác ABCD có E là giao điểm của AB và CD, F là giao điểm của AD và BC. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp của các tam giác EBC, FCD, EAD, FAB đồng quy.

Chứng minh:

Gọi M là giao điểm thứ hai của hai đường tròn ngoại tiếp tam giác EBC và FCD.

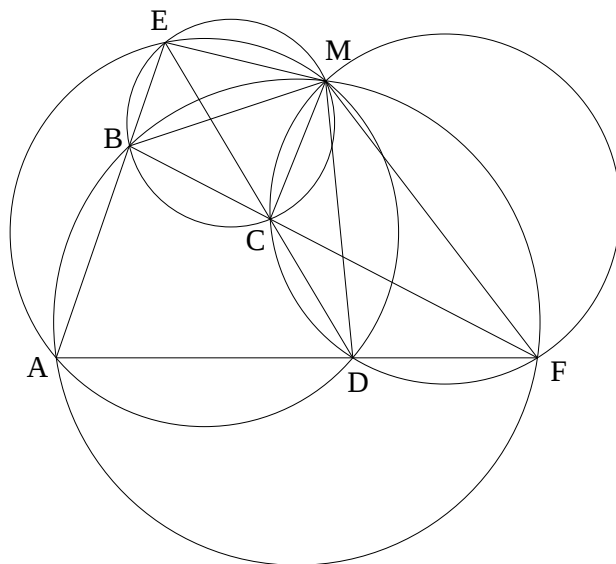
Ta có

$$\begin{aligned}\widehat{EMD} &= \widehat{EMC} + \widehat{CMD} = \widehat{ABF} + \widehat{AFB} \\ &= 180^\circ - \widehat{EAD} \Rightarrow \widehat{EAD} + \widehat{EMD} = 180^\circ.\end{aligned}$$

Do đó tứ giác EMDA nội tiếp hay M thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác EAD. Chứng minh tương tự M cũng thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác FAB.

Vậy đường tròn ngoại tiếp của các tam giác EBC, FCD, EAD, FAB đồng quy tại M.

Điểm M được gọi là *điểm Miquel*.



39. Điểm Gergonne

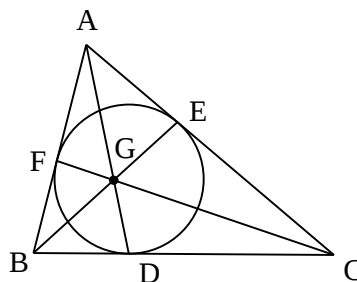
Cho tam giác ABC, đường tròn nội tiếp tam giác tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Chứng minh rằng AD, BE, CF đồng quy.

Chứng minh

Ta có $DB = FB$, $DC = EC$, $EA = FA$ nên

$$\frac{DB}{DC} \cdot \frac{EC}{EA} \cdot \frac{FA}{FB} = 1. \text{ Theo định lí Ceva thì } AD, BE, CF \text{ đồng quy.}$$

Giao điểm G của ba đoạn AD, BE, CF được gọi là *điểm Gergonne*.



40. Điểm Nagel

Cho tam giác ABC. Đường tròn bàng tiếp trong góc A, B, C tiếp xúc với BC, CA, AB theo thứ tự ở D, E, F. Chứng minh rằng AD, BE, CF đồng quy.

Chứng minh: Gọi H, K theo thứ tự là tiếp điểm của đường tròn bàng tiếp trong góc A với AB, AC. Gọi p là nửa chu vi của tam giác ABC, $BC = a, CA = b, AB = c$. Ta có $AH + AK = AB + BK + AC + CK = AB + AC + BC = 2p \Rightarrow AH = AK = p$.

Do đó $DB = BH = p - c$, $DC = CK = p - b$.

Chứng minh tương tự ta được $EC = p - a, EA = p - c, FA = p - b, FB = p - a$.

$$\Rightarrow \frac{DB}{DC} \cdot \frac{EC}{EA} \cdot \frac{FA}{FB} = \frac{p-c}{p-b} \cdot \frac{p-a}{p-c} \cdot \frac{p-b}{p-a} = 1 \Rightarrow AD, BE, CF \text{ đồng quy (theo định lí Ceva).}$$

Giao điểm N của ba đoạn AD, BE, CF được gọi là *điểm Nagel*.

