

I. PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ CÁC THÍ SINH (7,0 điểm)

Câu 1 (2,0 điểm). Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^3$ (1), m là tham số thực.

- Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (1) khi $m = 1$.
- Tìm m để đồ thị hàm số (1) có hai điểm cực trị A, B sao cho $OA + OB = 6$ (O là gốc tọa độ).

Câu 2 (1,0 điểm). Giải phương trình $\sqrt{2} \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 2 \sin x - 1$.

Câu 3 (1,0 điểm). Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - y = (2x + 1)(y - 1) \\ \sqrt{3x - 8} - \sqrt{y} = \frac{5}{x + y - 12} \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Câu 4 (1,0 điểm). Tính tích phân $I = \int_1^e \frac{(1 + x^2) \ln x + x^2}{x^3} dx$.

Câu 5 (1,0 điểm). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm I , $AB = a$; $BC = a\sqrt{3}$, tam giác SAC vuông tại S . Hình chiếu vuông góc của S xuống mặt phẳng đáy trùng với trung điểm H của đoạn AI . Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách từ điểm H đến mặt phẳng SAB .

Câu 6. (1,0 điểm) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $ac \geq 2b$ và $(ac + b)(ab + c) - a^2c^2 = 4b^2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \left(1 + \frac{b}{ac}\right)^2 + \left(\frac{ac + b}{ac - b}\right)^2$.

II. PHẦN RIÊNG (3,0 điểm): Thí sinh chỉ làm một trong hai phần (phần A hoặc phần B).

A. Theo chương trình Chuẩn.

Câu 7.a (1,0 điểm). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình vuông $ABCD$. Gọi E là trung điểm của cạnh AD , $H\left(\frac{11}{5}; -\frac{2}{5}\right)$ là hình chiếu vuông góc của B lên CE và $M\left(\frac{3}{5}; -\frac{6}{5}\right)$ là trung điểm của đoạn BH . Xác định tọa độ các đỉnh của hình vuông $ABCD$, biết điểm A có hoành độ âm.

Câu 8.a (1,0 điểm). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{2}$ và điểm $A(1; -1; 2)$.

Viết phương trình mặt phẳng (P) , biết (P) vuông góc với đường thẳng Δ và cách điểm A một khoảng bằng 3.

Câu 9.a (1,0 điểm). Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên gồm bốn chữ số phân biệt được chọn từ các chữ số 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7. Chọn ngẫu nhiên một số từ S , tính xác suất để số được chọn lớn hơn số 2014.

B. Theo chương trình Nâng cao.

Câu 7.b (1,0 điểm). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC vuông tại A . Gọi M là điểm trên cạnh AC sao cho $AB = 3AM$. Đường tròn tâm $I(1; -1)$ đường kính CM cắt BM tại D . Xác định tọa độ các đỉnh của ΔABC biết đường thẳng BC đi qua $N\left(\frac{4}{3}; 0\right)$, phương trình đường thẳng $CD: x - 3y - 6 = 0$ và điểm C có hoành độ dương.

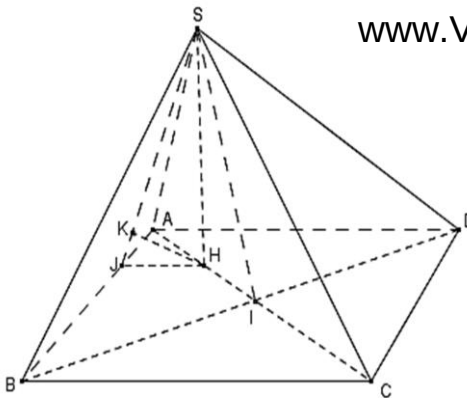
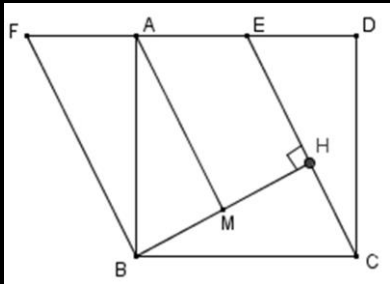
Câu 8.b (1,0 điểm). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm nằm trên trục Ox và tiếp xúc với Δ tại $A(1; 2; 2)$.

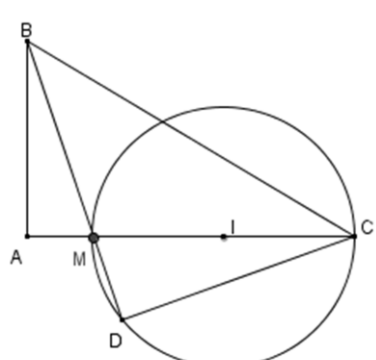
Câu 9.b (1,0 điểm). Giải phương trình $\log_2 \frac{2^x + 4}{2^x + 12} = x - 3$.

-----Hết-----

Câu	Đáp án	Điểm															
1 (2,0 điểm)	a. (1,0 điểm)																
	Khi $m=1$, ta có $y=x^3-3x^2+4$ - Tập xác định $D=R$. - Sự biến thiên: - Chiều biến thiên: Đạo hàm $y'=3x^2-6x$; $y'=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$	0,25															
	Khoảng nghịch biến $(0;2)$; Các khoảng đồng biến $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$ - Cực trị: Hàm số đạt cực đại tại $x=0$, $y_{\text{CD}}=4$; đạt cực tiểu tại $x=2$, $y_{\text{CT}}=0$ - Giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$.	0,25															
	Bảng biến thiên <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>0</td><td></td><td>2</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td></td><td>+</td><td>0</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td><td></td></tr></table> y 4 <	x	$-\infty$		0		2		$+\infty$	y'		+	0	-	0	+	
	x	$-\infty$		0		2		$+\infty$									
	y'		+	0	-	0	+										

2 (1,0 điểm)	$\sqrt{2} \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 2 \sin x - 1 \Leftrightarrow \sin 2x - \cos 2x = 2 \sin x - 1 \Leftrightarrow \sin 2x + 2 \sin^2 x - 2 \sin x = 0$	0,25																	
	$\Leftrightarrow 2 \sin x (\cos x + \sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x + \sin x - 1 = 0 \end{cases}$	0,25																	
	$\bullet \cos x + \sin x = 1 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$	0,25																	
	$\bullet \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi (k \in \mathbb{Z})$ Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = k\pi; x = \frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$	0,25																	
3 (1,0 điểm)	Điều kiện $\begin{cases} 3x - 8 \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y - 12 \neq 0. \end{cases}$ Từ phương trình thứ nhất ta có $x^2 + y^2 + 1 - 2xy - 2y + 2x = 0 \Leftrightarrow (y - x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow y = x + 1$.	0,25																	
	Thay vào phương trình thứ hai của hệ cho ta: $\sqrt{3x - 8} - \sqrt{x + 1} = \frac{5}{2x - 11} (*)$ Xét hàm số $f(x) = \sqrt{3x - 8} - \sqrt{x + 1} - \frac{5}{2x - 11}, x \in \left[\frac{8}{3}; +\infty\right) \setminus \left\{\frac{11}{2}\right\}$ $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x - 8}} - \frac{1}{2\sqrt{x + 1}} + \frac{10}{(2x - 11)^2}$	0,25																	
	$\Rightarrow f'(x) = \frac{3\sqrt{x + 1} - \sqrt{3x - 8}}{2\sqrt{(3x - 8)(x + 1)}} + \frac{10}{(2x - 11)^2} = \frac{6x + 17}{2(3\sqrt{x + 1} + \sqrt{3x - 8})\sqrt{(3x - 8)(x + 1)}} + \frac{10}{(2x - 11)^2} > 0$	0,25																	
	Bảng biến thiên: <table><tr><td>x</td><td>$\frac{8}{3}$</td><td>3</td><td>$\frac{11}{2}$</td><td>8</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>f'(x)</td><td></td><td>+</td><td></td><td>+</td><td></td></tr><tr><td>f(x)</td><td></td><td></td><td>$+\infty$</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr></table> Từ đó suy ra phương trình (*) chỉ có hai nghiệm là $x = 3$ và $x = 8$. Hay nghiệm của hệ đã cho là $(x; y) = (3; 4), (x; y) = (8; 9)$.	x	$\frac{8}{3}$	3	$\frac{11}{2}$	8	$+\infty$	f'(x)		+		+		f(x)			$+\infty$		$+\infty$
x	$\frac{8}{3}$	3	$\frac{11}{2}$	8	$+\infty$														
f'(x)		+		+															
f(x)			$+\infty$		$+\infty$														
4 (1,0 điểm)	Ta có $I = \int_1^e \frac{x^2 (\ln x + 1) + \ln x}{x^3} dx = \int_1^e \frac{(\ln x + 1)}{x} dx + \int_1^e \frac{\ln x}{x^3} dx = I_1 + I_2$	0,25																	
	$\bullet I_1 = \int_1^e \frac{(\ln x + 1)}{x} dx = \int_1^e (\ln x + 1) d(\ln x + 1) = \frac{(\ln x + 1)^2}{2} \Big _1^e = \frac{3}{2}.$	0,25																	
	$\bullet I_2 = \int_1^e \frac{\ln x}{x^3} dx = \left(-\frac{1}{2x^2}\right) \ln x \Big _1^e + \frac{1}{2} \int_1^e \frac{1}{x^3} dx = \left(-\frac{1}{2x^2}\right) \ln x \Big _1^e - \frac{1}{4x^2} \Big _1^e = \frac{1}{4} - \frac{3}{4e^2}$	0,25																	
	Suy ra $I = I_1 + I_2 = \frac{7}{4} - \frac{3}{4e^2}.$	0,25																	
5 (1,0 điểm)	Ta có $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 2a \Rightarrow HI = \frac{1}{4} AC = \frac{a}{2}$	0,25																	
	Tam giác SAC vuông tại S, nên $IS = IA = IC = a \Rightarrow SH = \sqrt{SI^2 - HI^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ Suy ra $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SH.S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} .a.a\sqrt{3} = \frac{a^3}{2}.$	0,25																	

		Gọi J là hình chiếu vuông góc của H lên AB, K là hình chiếu vuông góc của H lên SJ. Ta có $\begin{cases} AB \perp SH \\ AB \perp HJ \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SHJ) \Rightarrow AB \perp HK$. Mà $HK \perp SJ \Rightarrow HK \perp (SAB) \Rightarrow HK = d(H; (SAB))$ Do $HJ \parallel BC \Rightarrow \frac{AH}{AC} = \frac{HJ}{BC} \Rightarrow HJ = \frac{1}{4} BC = \frac{a\sqrt{3}}{4}$. Trong tam giác vuông SHJ: $\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HJ^2} + \frac{1}{HS^2} = \frac{20}{3a^2}$ $\Rightarrow HK = a\sqrt{\frac{3}{20}} \Rightarrow d(H; (SAB)) = a\sqrt{\frac{3}{20}}$.	0,25
6 (1,0 điểm)		Ta có $(ac+b)(ab+c) - a^2c^2 = 4b^2 \Leftrightarrow \left(a + \frac{b}{c}\right)\left(\frac{ab}{c} + 1\right) = a^2 + 4\frac{b^2}{c^2} \Leftrightarrow \left(a + \frac{b}{c}\right)\left(1 + \frac{c}{ab}\right) = \frac{ac}{b} + 4\frac{b}{ac}$ $\Leftrightarrow \frac{ac}{b} + 4\frac{b}{ac} = \left(a + \frac{c}{b}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{1}{a}\right) \geq 2\left(\sqrt{\frac{ac}{b}} + \sqrt{\frac{b}{ac}}\right) (*)$	0,25
		Đặt $t = \sqrt{\frac{ac}{b}} (t \geq \sqrt{2})$, từ (*) ta có $t^2 + \frac{4}{t^2} \geq 2\left(t + \frac{1}{t}\right) \Leftrightarrow t^4 - 2t^3 - 2t + 4 = 0 \Leftrightarrow (t-2)(t^3-2) = 0 \Leftrightarrow t = 2 (do t \geq \sqrt{2})$ hay $\frac{ac}{b} \geq 4$	0,25
		Lại có $P = \left(1 + \frac{b}{ac}\right)^2 + \left(\frac{ac+b}{ac-b}\right)^2 = \left(1 + \frac{b}{ac}\right)^2 + \left(\frac{1 + \frac{b}{ac}}{1 - \frac{b}{ac}}\right)^2$ Xét hàm số $f(u) = (1+u)^2 + \left(\frac{1+u}{1-u}\right)^2, u = \frac{b}{ac} \leq \frac{1}{4}$, ta có $f'(u) = 2(1+u) + \frac{4(1+u)}{(1-u)^3} \geq 0, \forall u \leq \frac{1}{4} \Rightarrow f(u) \leq f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{625}{144}$.	0,25
		Vậy $MaxP = \frac{625}{144} \Leftrightarrow \begin{cases} ac = 4b \\ ab = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ c = 2b \end{cases}$	0,25
7.a (1,0 điểm)		Gọi F là điểm đối xứng của E qua A. Suy ra $BCEF$ là hình bình hành nên AM là đường trung bình của hình thang vuông $EHBF$. Do đó $AM \parallel EH \Rightarrow AM \perp BH$.	0,25
		M là trung điểm BH $\Rightarrow B(-1; -2)$ Phương trình đường thẳng $AM: 2x + y = 0$ Phương trình đường thẳng $CE: 2x + y - 4 = 0$	0,25
		Do góc $\widehat{ECD} = \widehat{BAM} \Rightarrow \cos \widehat{BAM} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ Giả sử $A(a; -2a)$, từ $\cos \widehat{BAM} = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \frac{ AB \cdot u_{AM} }{ AB \cdot u_{AM} } = \frac{2}{\sqrt{5}}$ $\Rightarrow 5a^2 - 6a - 11 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = \frac{11}{5} \text{ (loại)} \end{cases} \Rightarrow A(-1; 2)$	0,25
	Phương trình đường thẳng $AD: y = 2$ mà $E = CE \cap AD \Rightarrow E(1; 2) \Rightarrow D(3; 2)$ Phương trình đường thẳng $BC: y = -2$ mà $C = BC \cap CE \Rightarrow C(3; -2)$.	0,25	

8.a (1,0 điểm)	Véc tơ chỉ phương của đường thẳng Δ là $\vec{u}(1;-2;2)$	0,25	
	Do mặt phẳng (P) vuông góc với Δ nên có phương trình $x-2y+2x+d=0$	0,25	
	Lại có $d(A;(P))=3 \Leftrightarrow \frac{ 7+d }{3}=3 \Leftrightarrow 7+d =9 \Leftrightarrow \begin{cases} d=2 \\ d=-16 \end{cases}$	0,25	
	Vậy phương trình mặt phẳng (P) là $x-2y+2x+2=0$ hoặc $x-2y+2x-16=0$.	0,25	
9.a (1,0 điểm)	Số phần tử của tập S là $A_7^4=840$.	0,25	
	Giả sử $\overline{abcd}$ là số tự nhiên có bốn chữ số phân biệt được chọn từ các chữ số 1;2;3;4;5;6;7 và lớn hơn 2014. +) TH1: $a=2$, chọn b,c,d có A_6^3 cách chọn.	0,25	
	+) TH2: $a>2$, chọn a có 5 cách chọn, chọn b,c,d có A_6^3 cách chọn.	0,25	
	Vậy $P=\frac{(1.A_6^3)+(5.A_6^3)}{A_7^4}=\frac{6}{7}\approx 0,857$	0,25	
7.b (1,0 điểm)		Ta có $\widehat{MDC}=\widehat{BAM}=90^0 \Rightarrow$ tứ giác ABCD nội tiếp Suy ra $\widehat{ABM}=\widehat{ACD}$ Lại có $\cos\widehat{ABM}=\frac{AB}{BM}=\frac{3}{\sqrt{10}} \Rightarrow \cos\widehat{ACD}=\frac{3}{\sqrt{10}}$	0,25
		Giả sử $C(3c+6;c)$, ta có $\cos\widehat{ACD}=\frac{ \vec{IC}.\vec{u}_{DC} }{ \vec{IC} . \vec{u}_{DC} }=\frac{3}{\sqrt{10}}$ $\Rightarrow \frac{ 10c+16 }{\sqrt{10c^2+32c+26}}=3 \Rightarrow 5c^2-16c+11=0 \Rightarrow \begin{cases} c=-1 \\ c=-\frac{11}{5} \text{ (loại)} \end{cases}$	0,25
		Với $c=-1 \Rightarrow C(3;-1)$ Phương trình đường thẳng $BC: 3x+5y-4=0$ Điểm $M(-1;-1)$ Phương trình đường thẳng $BM: 3x+y+4=0$ Điểm $B=BC \cap BM \Rightarrow B(-2;2)$	0,25
		Phương trình đường thẳng $AC: y+1=0$ Phương trình đường thẳng $AB: x+2=0$ Điểm $A=AB \cap AC \Rightarrow A(-2;-1)$	0,25
8.b (1,0 điểm)	Ta có $B(0;1;0) \in \Delta; \vec{u}_{\Delta}(1;1;2)$. Giả sử $I(t;0;0)$, ta có:		0,25
	$d(I;\Delta)=IA \Leftrightarrow \frac{ \vec{IB}.\vec{u}_{\Delta} }{ \vec{u}_{\Delta} }=IA$		0,25
	$\Leftrightarrow \frac{5t^2+2t+5}{6}=t^2-2t+9 \Leftrightarrow (t-7)^2=0 \Leftrightarrow t=7$		0,25
	Khi đó $I(7;0;0)$, $IA=2\sqrt{11}$ hay $(S):(x-7)^2+y^2+z^2=44$.		0,25
9.b (1,0 điểm)	$\log_2 \frac{2^x+4}{2^x+12}=x-3 \Leftrightarrow \frac{2^x+4}{2^x+12}=2^{x-3}$		0,25
	$\Leftrightarrow 8(2^x+4)=2^x(2^x+12) \Leftrightarrow 2^{2x}+4.2^x-32=0$		0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^x=4 \\ 2^x=-8 \text{ (loại)} \end{cases}$		0,25
	• $2^x=4 \Leftrightarrow x=2$. Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=2$.		0,25