

TUYỂN TẬP BÀI TOÁN HÌNH HỌC - TẠP CHÍ KVANT

Nhóm dịch thuật Kvant - <http://mathvn.org>

Version 1.0

- *Translated from the russian mathematical magazine "Kvant", all issues from 2000 to 2008.*
- *Typeset by $\text{\LaTeX}$ 2 ϵ .*
- *Copyright ©2008 Kvant Group, MathVn Community - <http://mathvn.org>*
- *This paper will be updated and completed in the next version.*

PROBLEMS

M1712. a. Trong một phẳng có các hình tam giác trong đó bất kì bốn tam giác nào cũng có đỉnh chung. Chứng minh rằng tất cả các tam giác như vậy đều có một đỉnh chung.
b. Trong mặt phẳng có các hình ngũ giác trong đó bất kì ba hình ngũ giác nào cũng có đỉnh chung. Chứng minh rằng tất cả các ngũ giác như vậy đều có một đỉnh chung.

V.Proizvolov

M1713. Trên các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC lấy các điểm A', B', C' sao cho các đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy. Gọi D, E, F, D', E', F' là trung điểm của các đoạn $AB, BC, CA, A'B', B'C', C'A'$. Chứng minh rằng:

- DD', EE', FF' đồng quy, hơn nữa điểm này và giao điểm của AA', BB', CC' , trọng tâm của tam giác ABC cùng nằm trên một đường thẳng.
- Nếu AA', BB', CC' là các đường cao của tam giác ABC thì giao điểm của các đường thẳng DD', EE', FF' trùng với tâm đường tròn Euler của tam giác ABC .
- Nếu AA', BB', CC' là các đường phân giác tam giác ABC thì điểm chung của chúng và điểm chung của các đường thẳng DD', EE', FF' , điểm chung của các đường thẳng đi qua các đỉnh và chia đôi chu vi của tam giác ABC cùng nằm trên một đường thẳng.
- Nếu AA', BB', CC' là các đường chia đôi chu vi tam giác ABC thì trọng tâm tam giác này trùng với giao điểm của DD', EE', FF' .

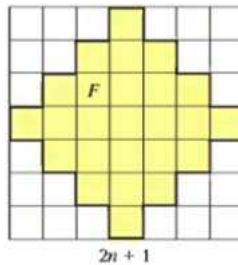
I. Vainchtein

M1717. Cho hai đường tròn Γ_1, Γ_2 chứa trong đường tròn Γ và tiếp xúc với đường tròn này lần lượt tại M, N . Đường tròn Γ_1 đi qua tâm của đường tròn Γ_2 . Đường thẳng đi qua giao điểm của Γ_1, Γ_2 cắt Γ tại A, B . Các đường thẳng MA, MB cắt Γ_1 tại C, D . Chứng minh rằng CD tiếp xúc với Γ_2 .

P. Kozhevnikov

M1724. Trong tam giác ABC cho hai đường cao AD, CE cắt nhau tại O . Đường thẳng DE cắt đường thẳng AC tại K . Chứng minh rằng, trung tuyến BM của tam giác ABC vuông góc với OK .

M. Volchkevich



M1725. Từ một tờ giấy kẻ caro $(2n+1) \times (2n+1)$ ta cắt ra một hình F như hình vẽ. Chứng minh rằng

- Hình F không thể cắt ra được thành $2n$ hình lồi.

b. Nếu hình F chia được ra thành $2n + 1$ đa giác lồi thì chúng phải là các hình chữ nhật.
V. Proizvolov

M1726. Trên mặt phẳng kẻ n đường thẳng mỗi đường thẳng thì giao đúng với 1999 đường thẳng khác. Tìm tất cả các giá trị có thể được của n .

R. Jenogarov

M1728. Các điểm K, L thuộc các cạnh AC, CB của tam giác ABC và nó cũng nằm trên đường tròn bàng tiếp của tam giác tiếp xúc với hai cạnh này. Chứng minh rằng đường thẳng đi qua trung điểm của KL và AB .

a. Chia chu vi của tam giác ABC thành hai phần bằng nhau.

b. Song song với đường phân giác góc ACB

L. Emilianov

M1730. Giả sử các cạnh đối diện của tứ giác lồi $ABCD$ cắt nhau tại M, K . Qua giao điểm O của hai đường chéo kẻ đường thẳng song song với MK . Chứng tỏ rằng đoạn thẳng thuộc đường thẳng này nằm trong miền trong của đa giác bị chia làm hai phần bằng nhau bởi điểm O .

M. Volchkevich

M1735. Đa diện lồi có sáu đỉnh nằm trên các trục dương của hệ trục tọa độ $Oxyz$. Chứng minh rằng 8 hình chiếu của gốc O lên các mặt của đa diện nằm trên một mặt cầu.

V. Proizvolov

M1737. Các dây cung AC và BD của đường tròn tâm O cắt nhau tại điểm K . Các điểm M, N là tâm các đường tròn ngoại tiếp các tam giác AKB và CKD . Chứng tỏ rằng $OMKN$ là hình bình hành.

A. Zaslavskij

M1744. Trên một bàn hình chữ nhật đặt những tấm bìa vuông với k màu sắc khác nhau, sao cho các cạnh của chúng song song với các cạnh của chiếc bàn. Trong k tấm bìa có màu khác nhau thì bất kì 2 trong số các tấm bìa đó có thể đóng vào bàn bằng 1 cái đinh. Chứng tỏ rằng có một màu nào đó sao cho tất cả các tấm bìa màu này có thể đóng vào bàn bởi $2k - 2$ cái đinh.

V. Dolnikov

M1746. Trên một đường tròn đặt n điểm được tô xanh và n điểm được tô đỏ sao cho chúng chia đường tròn ra làm $2n$ cung bằng nhau. Mỗi điểm màu đỏ là trung điểm của cung với 2 điểm màu xanh làm đầu mút. Chứng tỏ rằng mỗi điểm màu xanh cũng đồng thời là trung điểm của cung với 2 điểm màu đỏ làm đầu mút.

V. Proizvolov

M1747. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh của nó tại các điểm A', B', C' . Qua điểm P là điểm đồng quy của các đường thẳng AA', BB', CC' dựng 3 đường tròn sao cho mỗi đường tròn tiếp xúc với 2 cạnh của tam giác. Chứng minh rằng:

a. Sáu tiếp điểm của 3 đường tròn trên với các cạnh tam giác ABC nằm trên một đường tròn có tâm trùng với tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

b. Các đường chéo chính của lục giác tạo bởi sáu tiếp điểm này đồng quy tại P .

c. Các điểm giao thứ hai của sáu đường tròn đi qua P nêu trên nằm trên các đường thẳng AA', BB', CC' .

A. Zaslavskij

M1748. Trên mặt phẳng lấy 100 điểm khác nhau sao cho không có 3 điểm nào cùng nằm trên một đường thẳng. Xét tất cả các cách tô màu các điểm này bằng 2 màu. Một cách tô màu được gọi là "không thể chia cắt", nếu như không tồn tại bất cứ đường thẳng nào để cho các điểm với các màu khác nhau nằm ở hai nửa mặt phẳng khác nhau. Chứng minh rằng số các cách tô màu "không thể chia cắt" không phụ thuộc vào cách đặt các điểm.

G. Chelnokov

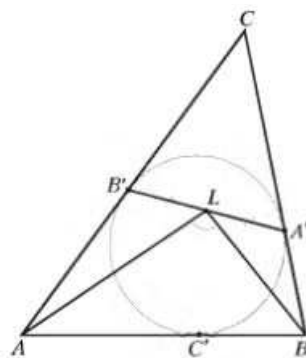
M1750. a. Cho 6 tờ giấy hình vuông, mà mỗi cạnh của mỗi tờ giấy có độ dài là 1. Dán chúng lên toàn bộ bề mặt của khối lập phương với cạnh độ dài là 1. Chứng tỏ rằng có thể tìm được một tờ giấy hình vuông sao được dán lên toàn bộ một mặt nào đó của khối lập phương.

b. Cho 4 tờ giấy có dạng tam giác đều với mỗi cạnh có độ dài là 1. Dán chúng lên toàn bộ bề mặt của một khối tứ diện. Hỏi có phải nhất thiết là luôn tìm được một tờ giấy dán lên toàn bộ một mặt nào đó của tứ diện hay không.

V. Proizvolov

M1753. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh của nó tại các điểm A', B', C' và điểm L là trung điểm của đoạn $A'B'$ (Hình dưới). Chứng tỏ rằng tam giác ALB tù.

A. Zaslavskij



M1755. Có 10 cái khăn ăn hình vuông, diện tích của mỗi cái bằng 1 và một cái bàn hình vuông có diện tích là 5. Chứng tỏ rằng có thể phủ cái bàn với 2 lớp khăn ăn (các khăn ăn có thể kề mép nhau nhưng không được đứt đoạn).

V. Proizvolov

M1757*. Một đa giác lồi có thể bị cắt ra thành 22 hình bình hành. Chứng tỏ rằng đa giác này cũng có thể bị cắt ra thành 15 hình bình hành.

V. Proizvolov

M1759. Có một tam giác nhọn với cạnh bé nhất là c đối diện với góc tương ứng là γ .

Biết rằng tam giác có thể tô bằng 2 màu sao cho khoảng cách giữa hai điểm cùng màu không lớn hơn c . Chứng tỏ rằng $\gamma \geq 36$.

A. Evnin

M1763*. Giả sử CH_1, CH_2, CH_3 là các đường cao của tam giác nhọn ABC . Đường tròn nội tiếp trong tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh của nó tại các điểm T_1, T_2, T_3 tương ứng. Các đường thẳng l_1, l_2, l_3 là ảnh của các đường thẳng H_2H_3, H_3H_1, H_1H_2 qua các phép đối xứng với các trục tương ứng T_2T_3, T_3T_1, T_1T_2 . Chứng tỏ rằng các đường thẳng l_1, l_2, l_3 tạo thành một tam giác với các đỉnh nằm trên đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

T. Emelianova

M1765. Các cạnh của một tứ diện đều bằng 1. Cho các trường hợp

a. Trên các cạnh có 5 điểm được đánh dấu.

b. Trên các mặt có 9 điểm được đánh dấu.

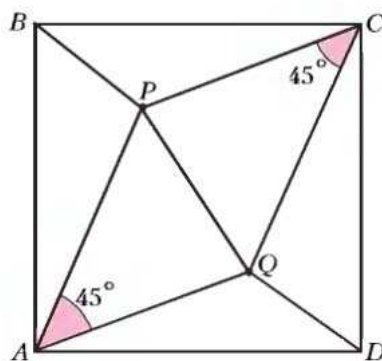
c. Trong tứ diện có 9 điểm được đánh dấu.

Chứng tỏ rằng trong mỗi trường hợp luôn tìm được hai điểm được đánh dấu sao cho khoảng cách giữa chúng không vượt quá 0,5.

V. Proizvolov

M1767. Trong hình vuông $ABCD$ lấy hai điểm P, Q sao cho $\angle PAQ = \angle PCQ = 45^\circ$ (Xem hình). Chứng minh rằng $PQ^2 = BP^2 + QD^2$

V. Proizvolov.



M1769. $2n$ đầu mút của các dây cung không giao nhau phân chia đường tròn thành $4n$ cung bằng nhau. Chứng tỏ rằng giữa các dây cung này tồn tại 2 dây cung song song với nhau.

V. Proizvolov.

M1773. Chiều cao CD và phân giác AE của tam giác vuông ABC ($\angle C = 90^\circ$) cắt nhau tại F . Đặt G là giao điểm của ED và BF . Chứng tỏ rằng diện tích của tứ giác $CEGF$ và tam giác BDG bằng nhau.

Y. Jyk

M1775. a. Tồn tại hay không một hình vuông mà tất cả các đỉnh và tất cả các trung

điểm của các cạnh của nó nằm trên hyperbol $xy = \pm 1$?

b. Chứng tỏ rằng tồn tại vô hạn các hình bình hành, sao cho một trong các đỉnh của mỗi hình bình hành này là gốc tọa độ, hai đỉnh khác nằm trên hyperbol $xy = 1$, và đỉnh còn lại nằm trên $xy = -1$.

c. Chứng tỏ rằng diện tích của mỗi hình bình hành như vậy bằng $\sqrt{5}$.

d. Xét với bất kì hình bình hành $OABC$ như vậy, tập hợp các điểm M sao cho $\overrightarrow{OM} = k\overrightarrow{OA} + l\overrightarrow{OC}$ với k, l nguyên, gọi là lưới sinh ra bởi hình bình hành này. Chứng tỏ rằng phần trong giới hạn bởi các hyperbol $xy = \pm 1$ không chứa bất kì điểm nào của lưới này trừ gốc tọa độ.

N. Ocínov

M1777. Trong hình vuông đơn vị nội tiếp một tứ giác, với các đỉnh nằm trên các cạnh của hình vuông này. Trong tam giác vuông tạo bởi các cạnh của hình vuông và tứ giác, lấy 4 đường tròn nội tiếp các tam giác này. Chứng minh rằng tổng bán của bốn đường tròn này không vượt quá $2 - \sqrt{2}$, và đạt được giá trị này khi và chỉ khi các cạnh của tứ giác nội tiếp song song với các đường chéo của hình vuông.

V. Proizvolov

M1780*. Mỗi điểm của mặt cầu được tô mà đỏ hoặc xanh. Chứng minh rằng có thể tìm được ba điểm cùng màu là ba đỉnh của một tam giác đều.

V. Proizvolov.

M1783. Trong tam giác ABC dựng đường cao AH , phân giác BL và trung tuyến CM . Biết rằng tam giác HML đều, chứng minh tam giác ABC cũng đều.

R. Jenodarov.

M1786. Trên mặt phẳng cho các 6 điểm sao cho không có 3 điểm nào trong số chúng thẳng hàng, hơn nữa khoảng cách giữa hai điểm bất kì đôi một khác nhau. Chứng tỏ rằng giữa các tam giác với các đỉnh lấy từ 6 điểm này thì có thể tìm được hai tam giác với cạnh chung sao cho đối với tam giác này là cạnh lớn nhất, đối với tam giác kia là cạnh nhỏ nhất.

C. Pukshin.

M1788. Trong tam giác ABC điểm I là tâm đường tròn nội tiếp, A', B', C' là tiếp điểm của đường tròn này với các cạnh BC, CA, AB . Đường thẳng AA' và BB' giao nhau tại điểm P , AC và $A'C'$ giao nhau tại điểm M , BC và $B'C'$ tại điểm N . Chứng minh rằng IP và MN vuông góc nhau.

A. Zaslavskij.

M1790. Trên mặt phẳng cho một số lượng các tam giác đều, sao cho mỗi tam giác có một cạnh màu xanh, một cạnh màu vàng, một cạnh màu đỏ. Ta tiến hành đính liền các tam giác này với nhau bằng cách đính liền các cạnh cùng màu, hoặc một phần các cạnh cùng màu với nhau giữa hai tam giác sao cho tạo ra được một tam giác đều lớn Δ . Chứng minh rằng trên biên của tam giác đều lớn Δ tổng độ dài các phần cạnh của mỗi màu đều bằng nhau.

S. Volchenkov.

M1791. a. Trên mặt phẳng cho 5 đường tròn sao cho 4 đường tròn bất kì đều có tiếp

tuyến chung. Liệu chẳng tất cả 5 đường tròn này có tiếp tuyến chung.

b. Trên mặt phẳng cho n đường tròn sao cho 5 đường tròn bất kì đều có tiếp tuyến chung. Chứng minh rằng tất cả n đường tròn này đều có tiếp tuyến chung.

V. Proizvolov.

M1793. Cho ma phươg kích thước $n \times n$ được đặt các chữ số $1, 2, \dots, n^2$ ở mỗi ô. Với hai ô bất kì, người ta dựng một vector với đỉnh và gốc tại tâm của hai ô này, hướng từ ô có số lớn hơn đến ô có số bé hơn. Chứng minh rằng tổng các vector nhận được bằng vector không. (Ma phươg là bảng vuông được viết số trong đó các tổng các số được viết ở mỗi dòng và mỗi cột đều bằng nhau).

I. Bogdanov.

M1797. Các điểm màu xanh và đỏ lần lượt luân phiên nhau chia đường tròn thành $2n$ cung. Biết rằng bất kì hai cung kề nhau có độ dài sai khác nhau là 1. Chứng minh rằng n -giác với các đỉnh màu đỏ và n -giác với các đỉnh màu xanh có cùng chu vi và cùng diện tích.

V. Proizvolov.

M1800. Chứng minh rằng tổng bình phương diện tích 4 mặt của một tứ diện bằng 4 lần tổng bình phương diện tích 3 tiết diện đi qua các bộ bốn trung điểm đồng phẳng của các cạnh tứ diện.

A. Zaslavskij.

M1803. Trong hình vuông $ABCD$ lấy hai điểm P, Q sao cho $\angle PAQ = \angle QCP = 45^\circ$. Chứng minh rằng tổng diện tích các tam giác PAQ, PCB, QCD bằng tổng diện tích các tam giác QCP, QAD, PAB .

V. Proizvolov.

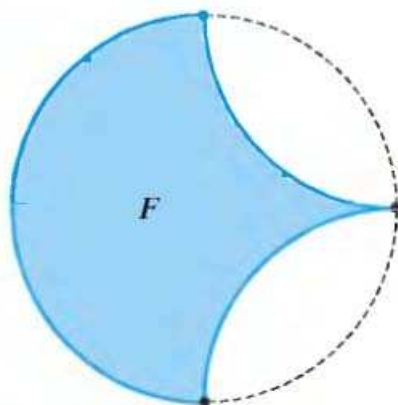
M1809. Sử dụng một thức thẳng, tìm tâm của:

- a. Hai đường tròn giao nhau.
- b. Hai đường tròn tiếp xúc trong, hai đường tròn tiếp xúc ngoài.
- c. Hai đường tròn đồng tâm.

I. Vainshtein.

M1810. Mỗi đỉnh của một đa diện lồi là đầu mút chung của số lẻ các cạnh. Một mặt được tô màu đỏ, các mặt còn lại được tô màu xanh. Chu vi của mỗi mặt xanh bằng 1. Chứng minh rằng chu vi của mặt đỏ cũng bằng 1.

V. Proizvolov.



M1813. Hình F được giới hạn bởi nửa đường tròn và hai cung một phần tư đường tròn cùng bán kính như hình vẽ.

- Chia F thành 3 phần sao cho có thể ghép lại thành một hình vuông.
- Chia F thành 4 phần sao cho một phần là hình vuông còn các phần còn lại có thể ghép thành hình vuông khác.

V. Proizvolov.

M1815. Các đường vuông góc chung của các cạnh đối diện của tứ giác gheñh $ABCD$ vuông góc với nhau, chứng tỏ chúng cắt nhau.

A. Zaslavskij.

M1817. Hình tứ giác với hai đường chéo vuông góc nội tiếp trong một hình vuông. Đường chéo, các cạnh của tứ giác này chia hình vuông thành 8 tam giác. Tô màu các tam giác này bằng hai màu xanh và đỏ sao cho không có hai tam giác nào chung cạnh mà cùng màu. Chứng minh rằng tổng các bán kính các đường tròn nội tiếp trong các tam giác xanh bằng tổng bán kính các đường tròn nội tiếp trong các tam giác màu đỏ.

V. Proizvolov.

M1819. Cho tam giác ABC với O, I là tâm của các đường tròn ngoại và nội tiếp. Gọi A', B', C' là giao điểm của đường tròn nội tiếp với các cạnh BC, CA, AB . P là trực tâm của tam giác ABC . Chứng minh rằng P, O, I nằm trên một đường thẳng.

A. Zaslavskij.

M1824. Cho $A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2), \dots, A_n(x_n, y_n)$ là các điểm trên mặt phẳng tọa độ, $n \geq 2$ với $M(\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}, \frac{y_1+y_2+\dots+y_n}{n})$ là trọng tâm của chúng. Kí hiệu C là tâm của đường tròn có bán kính nhỏ nhất r , trong nó chứa các điểm $A_1, A_2, \dots, A_n$ và d là khoảng cách giữa M và C . Chứng minh rằng $\frac{d}{r} \leq \frac{n-2}{n}$.

I. Protacov, G. Radzievskij.

M1825. Bề mặt của khối lập phương kích thước $5 \times 5 \times 5$ có thể được bao phủ hoàn toàn bởi 150 tờ giấy dạng hình vuông đơn vị. Trên mỗi mặt của hình lập phương này có thể được phủ bởi 25 hình vuông đơn vị. Chứng minh rằng có thể phủ 150 tờ giấy hình vuông đơn vị lên bề mặt hình lập phương sao cho không có mặt nào của nó được phủ bởi 25 tờ giấy hình vuông đơn vị.

V. Proizvolov.

M1827. Cho Q là một điểm nằm trên đường tròn đường kính AB . QH là đường vuông góc hạ xuống AB , điểm C, M là các giao điểm của đường tròn tâm Q bán kính QH với đường tròn đầu tiên. Chứng minh rằng CM chia đôi bán kính QH .

V. Dubov.

M1829. Có thể hay không khi tô màu các hình vuông và hình tròn bằng các màu đen và trắng, sao cho các tập điểm đen của hình tròn và hình vuông đồng dạng với nhau, tập các điểm trắng của hình tròn và hình vuông cũng đồng dạng với nhau.

G. Galperin.

M1831. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB tại A', B', C' . Gọi Q là trung điểm của $A'B'$. Chứng minh rằng góc $\angle B'C'Q$ và $\angle A'C'Q$ bằng nhau.

A. Zaslavskij.

M1835. Cho một tứ giác ngoại tiếp và nội tiếp. Dựng một đường thẳng qua tâm đường tròn nội tiếp song song với một cạnh nào đó của tứ giác, đường thẳng này bị chặn bởi hai cạnh đối diện của tứ giác. Chứng minh độ dài đoạn chặn bằng một phần tư chu vi của tứ giác.

V. Proizvolov.

M1838. Trên mặt phẳng, cho hữu hạn các đường thẳng được tô màu xanh hoặc màu đỏ, giữa chúng không có hai đường thẳng nào song song. Qua bất kì giao điểm của các đường thẳng cùng màu thì có một đường thẳng khác màu đi qua. Chứng minh rằng các đường thẳng này đồng quy tại một điểm.

V. Dolnikov, I. Bogdanov.

M1840. Một số các tứ diện đều nội tiếp trong một mặt cầu sao cho hai trong chúng đều có điểm chung. Chứng minh rằng tất cả các tứ diện này đều có điểm chung.

V. Proizvolov.

M1842. Hai đỉnh A, B của tam giác ABC nằm trên một đường tròn tâm O sao cho đỉnh C và tâm O nằm cùng phía đối với đường thẳng AB . Quay tam giác ABC quanh tâm O nhận được tam giác $A_1B_1C_1$ sao cho C_1B_1 đi qua đỉnh C , cắt đường tròn tại điểm F . Chứng minh rằng $CF = CB$.

V. Dubov.

M1844. Ngũ giác lồi $ABCDE$ có chu vi bằng 4, cạnh $AB = DE = 1$ và $\angle BAE = \angle DEA = \angle BCD = 90^\circ$. Chứng tỏ rằng phân giác của góc C chia ngũ giác ra thành hai tứ giác có chu vi và diện tích bằng nhau.

V. Proizvolov.

M1848. Cho đường tròn tâm O nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh của nó tại A_1, B_1, C_1 . Các đường thẳng AO, BO, CO cắt đường tròn tại A_2, B_2, C_2 . Chứng minh rằng diện tích tam giác A_2, B_2, C_2 bằng một nửa diện tích lục giác $B_1A_2C_1B_2A_1C_2$.

V. Proizvolov.

M1855. Các mặt phẳng song song với các mặt của hình hộp chữ nhật chia nó ra thành các hình hộp khác nhỏ hơn và tô màu các hình hộp này theo kiểu bàn cờ vua với hai màu trắng đen, sao cho tổng thể tích các khối màu đen bằng tổng thể tích của các khối màu trắng. Chứng minh rằng, từ những khối màu đen hợp thành hình hộp P và từ những khối màu trắng hợp thành hình hộp Q thì P và Q bằng nhau.

V. Proizvolov.

M1856. Đường tròn tâm O nội tiếp trong tam giác ABC tiếp xúc với AC tại E và hai cạnh còn lại tại M, K . Đường thẳng MK cắt AC tại P . Chứng minh PO vuông góc với BE .

V. Proizvolov.

M1857. Trên đường tròn cho tập hợp K gồm k điểm chia đường tròn thành k cung bằng nhau. Trong K lấy hai tập con M, N chứa m và n điểm sao cho các tập này có đúng r điểm chung. Hơn nữa nếu ta quay các điểm của tập N một góc bội của $2\pi/k$ thì tập N' các điểm mới nhận được này vẫn có chung r điểm với tập M . Chứng tỏ đẳng thức $rk = mn$.

V. Proizvolov.

M1859. Trên một chiếc bàn hình vuông có diện tích là 2. Xếp 2 lớp khăn từ bốn tấm khăn diện tích bằng 1, sao cho hai tấm khăn trên một lớp thì có chung biên với nhau chứ không đè lên nhau. Tìm 100 cách xếp khăn như vậy.

V. Proizvolov.

M1860. Điểm F là tiêu cự của một ellipse nội tiếp trong tứ giác lồi $ABCD$. Chứng tỏ $\angle AFB + \angle CFD = 180^\circ$

M. Volchkevich.

M1861. Chứng minh rằng giữa $n + 1$ đỉnh bất kì của một $2n + 1$ -giác đều, $n > 1$ thì có 3 đỉnh tạo thành một tam giác cân.

V. Proizvolov.

M1862. Phân giác AD, BE, CF của tam giác ABC đồng quy tại I . Chứng minh rằng:
a. Nếu $ID = IE = IF$ thì tam giác ABC đều.

b. Nếu tam giác DFE đều thì tam giác ABC cũng đều

A. Zaslavskij, V. Senderov.

M1864. Trong hình vuông $ABCD$ lấy nội tiếp một đường gấp khúc $MKALN$ sao cho các góc $\angle MKA, \angle KAL, \angle ALN$ đều bằng 45° . Chứng minh rằng $MK^2 + AL^2 = AK^2 + NL^2$

V. Proizvolov.

M1870. a. Trên mặt phẳng cho các điểm A, B, C, D , biết rằng, góc giữa các đường thẳng AB và CD , AC và BD , AD và BC . Chứng minh rằng chúng thẳng hàng.

b. Các góc giữa hai cạnh đối diện của một tứ diện đều bằng nhau, phải chăng chúng là các góc vuông.

A. Zaslavskij.

M1872. Hình chữ nhật được cắt thành các hình chữ nhật sao cho mỗi hình chữ nhật này

có ít nhất một cạnh nằm trên biên của hình chữ nhật ban đầu. Chứng tỏ rằng tồn tại hai hình chữ nhật có cạnh chung.

V. Proizvolov.

M1875. Số mặt của một hình đa diện lồi có thể là bao nhiêu sao cho với bất kì cạnh nào thì góc nhị diện trong tương ứng với nó là góc nhọn.

A. Zaslavskij, O. Podlinskij.

M1878. Cho tam giác ABC với CH đường cao, dựng đường tròn đường kính CH cắt hai cạnh CA và CB tại M, N . Chứng minh rằng các tiếp tuyến của đường tròn này tại M, N cắt nhau tại điểm nằm trên trung tuyến của tam giác kể từ đỉnh C .

A. Zaslavskij.

M1880. Trên đường thẳng cho $2k - 1$ đoạn thẳng và $2k - 1$ đoạn thẳng màu trắng. Biết rằng bất kì đoạn màu trắng nào giao với ít nhất k đoạn thẳng màu đen, và bất kì một đoạn màu đen giao với ít nhất k đoạn màu trắng. Chứng minh rằng, có ít nhất một đoạn thẳng màu trắng giao với tất cả các đoạn màu đen, có một đoạn màu đen giao với tất cả các đoạn màu trắng.

V. Dolnikov.

M1884. a. Một hình vuông được cắt ra thành các hình vuông nhỏ, một hình được tô màu đỏ, còn lại được tô xanh. Chu vi của mỗi hình vuông xanh là một số nguyên. Chứng tỏ chu vi của hình vuông đỏ cũng là một số nguyên.

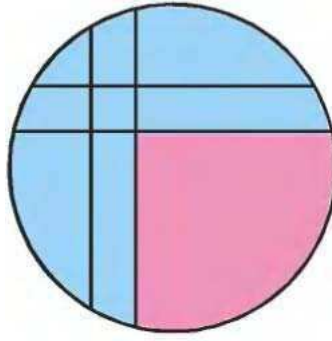
b. Tam giác đều được cắt ra thành các tam giác đều nhỏ, một hình được tô màu đỏ, còn lại được tô xanh. Chu vi của mỗi tam giác xanh là một số nguyên. Chứng minh chu vi của tam giác màu đỏ cũng là một số nguyên. *V. Proizvolov.*

M1887. Từ giao điểm của hai đường chéo của một tứ giác ngoại tiếp, dựng các đoạn vuông góc với các cạnh của nó. Chứng minh rằng tổng độ dài các đoạn vuông góc hạ xuống hai cặp cạnh đối diện bằng tổng độ dài các đoạn thẳng vuông góc với hai cặp cạnh đối diện còn lại.

A. Zaslavskij

M1889. Trên mặt phẳng cho các điểm $A_1, A_2, \dots, A_n$ và $B_1, B_2, \dots, B_n$. Chứng minh rằng các điểm $B_1, B_2, \dots, B_n$ có thể đánh số lại sao cho với bất kì cặp chỉ số k, j khác nhau thì góc giữa các vector $\vec{A_k A_j}, \vec{B_k B_j}$ nhọn hoặc vuông góc.

R. Karasev.



M1890. Bốn cung chia hình tròn thành 9 phần, một trong chúng là hình chữ nhật (như hình vẽ). Các diện tích của 8 hình tô màu xanh là các số hữu tỉ. Chứng tỏ rằng diện tích của tam giác cong màu đỏ cũng là số hữu tỉ.

V. Proizvolov

M1892. Nếu $\angle ACB = 45^\circ$, chứng minh rằng $AB^4 = (BC^2 - AB^2)^2 + (CA^2 - AB^2)^2$
A. Rumjanzheva.

M1893. Trong một vòng tròn dựng 100 dây cung sao cho trung điểm bất kì của dây cung nào nằm trên một dây cung khác. Chứng tỏ rằng giữa chúng tìm được ít nhất hai dây cung là đường kính.

V. Proizvolov.

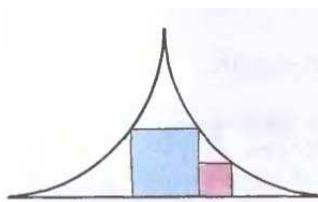
M1895. Trong hình vuông $ABCD$, lấy nội tiếp tam giác MAN sao cho $\angle MAN = 45^\circ$. Chứng tỏ rằng đường chéo BD chia tam giác này thành hai phần có diện tích bằng nhau.
M. Volchkevich.

M1898. Cạnh AD của hình chữ nhật $ABCD$ bị chia thành n đoạn bởi các điểm $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$. Trên cạnh BC lấy các điểm $B_1, B_2, \dots, B_n$, một vài trong chúng có thể trùng nhau. Dựng trong hình chữ nhật hình gấp khúc ziczac $A_0B_1A_1B_2\dots A_kB_{k+1}A_{k+1}\dots A_n$ (đường này có thể tự cắt), trong đó A_0 là A còn A_n là D . Phải chọn điểm A_k, B_k , $1 \leq k \leq n-1$ như thế nào để tổng độ dài bán kính r_k của đường tròn nội tiếp trong tất cả các tam giác $A_kB_{k+1}A_{k+1}$ là lớn nhất.

S. Dvorjaninov

M1900. Sắp xếp trong không gian 5 hình lập phương đơn vị như thế nào để bất kì hai trong chúng có đường chéo chung, mà không có 3 hình nào có chung đường chéo.

A. Zaslavskij

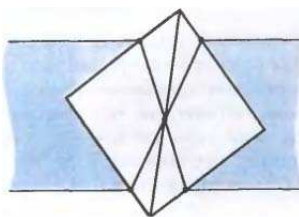


M1901. Trong tam giác cong bị chặn bởi hai đường tròn tiếp xúc nhau và tiếp tuyến chung của chúng, xét hình vuông được tô xanh và hình vuông được tô đỏ như hình vẽ. Chứng minh rằng cạnh của hình vuông màu xanh lớn gấp 2 lần cạnh hình vuông màu đỏ.
S. Berlov

M1903. Trên mặt phẳng cho đoạn thẳng AB . Dựng các nửa đường tròn đường kính AX, BX bên ngoài tam giác ABX . Tìm tập hợp các điểm X sao cho tồn tại một đường tròn tiếp xúc với các nửa đường tròn này tại trung điểm của chúng.
V. Senderov.

M1905. Có 50 chiếc khăn kích thước 1×1 dùng để xếp lại thành 2 lớp phủ một cái bàn có kích thước 5×5 , sao cho không có mép của cái khăn nào nằm trên mép của bàn và các khăn được xếp khít mép với nhau chứ không được đè lên nhau, khăn có thể được gấp. Làm cách nào để thực hiện điều này.
V. Proizvolov.

M1906. Cho một dải băng, đặt một hình vuông có cạnh bằng chiều rộng của dải băng, sao cho 4 cạnh của hình vuông cắt 2 cạnh của dải băng (như hình vẽ). Chứng minh rằng hai đường thẳng đi qua các giao điểm đó cắt nhau tại điểm nằm trên đường chéo của hình vuông.
V. Proizvolov.



M1909. 9 đường thẳng nằm ngang và 9 đường thẳng nằm dọc cắt hình chữ nhật ra làm 100 hình chữ nhật nhỏ, 91 hình trong chúng được tô màu xanh, còn lại tô màu đỏ. Chu vi của mỗi hình màu xanh là một số nguyên. Chứng minh rằng chu vi của mỗi hình màu đỏ cũng là một số nguyên.
V. Proizvolov.

M1910. Trên cạnh huyền AB của tam giác vuông ABC lấy điểm trong D . Các điểm O_1, O_2 là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD, BCD . Gọi E là giao điểm của BO_1 và AO_2 . Chứng minh rằng $\angle BCE = \angle ACD$.
A. Vasilev.

M1915. Tứ diện $ABCD$ có $AB = BC = CD = a$, $BD = DA = AC = b$. Tính khoảng cách giữa AD và BC .

A. Zaslavskij

M1916. Làm thế nào để cắt tam giác đều ra thành 25 tam giác đều nhỏ sao cho chỉ một chúng có diện tích khác 1.

V. Proizvolov.

M1918. Kẻ các tiếp tuyến chung trong đối với hai đường tròn, một trong chúng tiếp xúc với các đường tròn tại A, B . Một quả bi-da được đánh từ điểm A bị phản xạ khi gặp tiếp tuyến thứ hai và lăn vào điểm B . Chứng minh các dây cung mà viên bi-da vạch ra đối với hai đường tròn đã cho là bằng nhau.

A. Zaslavskij

M1921. Trên cạnh lớn nhất AB của tam giác ABC lấy các điểm M, N sao cho $BC = BM$, $CA = AN$, trên cạnh CA, BC lấy các điểm P và Q sao cho $PM \parallel BC$, $QN \parallel CA$. Chứng minh $QC = CP$.

V. Proizvolov.

M1922. Chiếc bàn bi-da có hình đa giác (không nhất thiết phải lồi), có các cạnh kề nhau vuông góc với nhau. Mỗi đỉnh của đa giác chính là lỗ mà các viên bi-da có thể rơi vào. Từ một đỉnh với góc trong là 90° , một quả cầu được đánh ra và sẽ bị phản xạ nếu gặp cạnh của đa giác theo luật góc tới bằng góc phản xạ. Chứng minh rằng quả cầu sẽ không bao giờ trở lại vị trí ban đầu.

A. Kanel-Belov.

M1923. Trên mặt phẳng cho trước N điểm phân biệt. Biết rằng trong số các khoảng cách giữa từng cặp điểm thì có không lớn hơn n khoảng cách khác nhau. Chứng tỏ $N \leq (n+1)^2$.

V. Dolnikov.

M1927. Giả sử tam giác ABC không phải là tam giác đều, O, I là tâm đường tròn ngoại và nội tiếp, H là trực tâm của tam giác ABC . Các đỉnh O, I, H có thể là 3 đỉnh của một tam giác đều hay không.

R. Budilin, A Kulikov, V. Senderov.

M1930. Phải chăng là có thể chọn được 4 điểm trên 4 đường thẳng cắt nhau đôi một bất kì để chung là đỉnh của

- a. Của một hình thang.
- b. Của một hình bình hành.

P. Borodin.

M1931. Mỗi điểm tọa độ nguyên trên mặt phẳng được tô bởi một trong ba màu (mỗi màu đều được sử dụng). Chứng tỏ rằng tồn tại một tam giác vuông với ba đỉnh có ba màu khác nhau.

S. Berlov.

M1935. Tất cả các mặt của tứ diện là các tam giác đồng dạng nhau. Chứng minh rằng chúng phải bằng nhau.

V. Proizvolov.

M1936. Chiều rộng bé nhất của một băng giấy vô hạn là bao nhiêu để có thể cắt ra một tam giác bất kì có diện tích là 1.

D. Semenov.

M1937. Các đường tròn S_1, S_2, S_3 đôi một tiếp xúc ngoài nhau. Gọi A, B, C lần lượt là các tiếp điểm của S_1 và S_2 , S_1 và S_3 , S_2 và S_3 . Đường thẳng AB cắt lần thứ 2 S_2 và S_3 tại D và E . Đường thẳng DC cắt lần thứ 2 S_3 tại F . Chứng minh tam giác DEF vuông.

I. Rudakov.

M1939. Các đỉnh của 50 hình chữ nhật chia đường tròn ra làm 200 cung bằng nhau. Chứng minh rằng giữa chúng có ít nhất hai hình chữ nhật bằng nhau.

V. Proizvolov.

M1942. Trong góc nhọn với đỉnh O cho trước hai điểm A, B . Viên bi-da có bị đánh từ A , phản xạ hoặc trên một cạnh của góc đã cho tại điểm M hoặc tại N trên cạnh kia để đến điểm B . Chứng minh rằng nếu $OA = OB$ thì các điểm O, A, B, M, N cùng nằm trên một đường tròn.

A. Zaslavskij

M1944. Một chiếc bàn hình vuông có diện tích là 5 có thể được trải 4 lớp khăn bằng 5 chiếc khăn, mỗi chiếc có diện tích là 4. Làm cách nào để thực hiện điều này (các chiếc khăn có mép kề sát nhau chứ không được đè lên nhau trên mỗi lớp, khăn có thể được gấp).

V. Proizvolov

M1945. Có phải mọi tam giác nhọn có thể sắp trong không gian sao cho các đỉnh của nó:

- Nằm trên các cạnh của một hình lập phương nào đó, mỗi cạnh này đi qua một trong các đỉnh của nó.
- Nằm trên các đường chéo của mặt của một hình lập phương nào đó, mỗi đường chéo đi qua một trong các đỉnh của nó.

S. Dvorjanikov, V. Senderov.

M1946. AH, CL là các đường cao của tam giác ABC , I là tâm đường tròn nội tiếp, $AC = CB$. Chứng minh rằng độ dài hình chiếu CH của cạnh AC lên cạnh BC bằng độ dài đoạn AB khi và chỉ khi $IH \parallel AB$.

A. Poljanskij.

M1948. Các đường tròn S_1, S_2, S_3 tiếp xúc ngoài nhau đôi một. S_1, S_2 có cùng bán kính và tiếp xúc nhau tại B . S_1 và S_3 tiếp xúc nhau tại A . S_2, S_3 tiếp xúc nhau tại C . Đường thẳng AB cắt lần thứ 2 S_2 tại D . Đường thẳng DC cắt lần thứ 2 S_3 tại F . Đường thẳng FA cắt lần thứ 2 S_1 tại N . Đường thẳng AC cắt lần thứ 2 S_2 tại L . Chứng minh $DNAL$ là hình thoi.

I. Rudakov.

M1949. Trong mặt phẳng tọa độ có đa giác đều lồi với tâm là $O(0, 0)$ và một trong các đỉnh là điểm $(1, 0)$.

- a. Giả sử $\{x_1, \dots, x_n\}$ là tập hợp các hoành độ hình chiếu của các đỉnh của đa giác lên Ox . Chứng minh rằng tồn tại một đa thức bậc n với hệ số nguyên nhận các số trên làm nghiệm.
- b. Giả sử $\{x_1, \dots, x_m\}$ là tập hợp các tung độ hình chiếu của các đỉnh của đa giác lên Oy . Chứng minh rằng tồn tại một đa thức bậc m với hệ số nguyên nhận các số trên làm nghiệm.
- I. Dorofeev.

M1950. Chứng minh một bát giác đều có thể cắt ra thành các hình bình hành nhưng không thể cắt ra thành các hình bình hành cùng diện tích.

V. Proizvolov.

M1952. AH là đường cao, BL là phân giác, CM là trung tuyến của tam giác ABC . Chứng tỏ rằng các đường thẳng này đồng quy tại một điểm khi và chỉ khi:

a. $LH \parallel AB$.

b. $\sin \angle A = \tan \angle B \cos \angle C$.

A. Poljanskij.

M1953. Từ một tờ giấy kẻ ô vuông cắt theo đường lưới thẳng ra một đa giác không có lỗ (đa giác cũng không nhất thiết lồi). Biết rằng nó có thể cắt theo đường thẳng lưới ra một hình chữ nhật kích thước 2×1 . Chứng tỏ rằng nó có ít nhất một cạnh có độ dài chẵn.

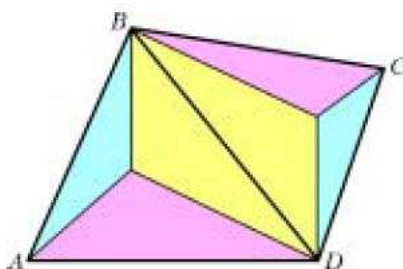
B. Gurovish.

M1955. Điểm D nằm trên đường trung trực của một cạnh nào đó của tam giác ABC . Chứng tỏ rằng điểm C nằm trên đường trung trực của một cạnh của tam giác ABD .

A. Zaslavskij.

M1960. Hình chiếu của một điểm nằm trong tứ diện đều xuống các mặt là đầu mút của các đoạn thẳng có đầu mút còn lại chính là các đỉnh của tứ diện. Bề mặt của tứ diện bị các đoạn thẳng này phân chia thành 6 miền (mỗi miền không phẳng này có dạng gấp). Cặp miền chứa cặp cạnh đối diện nhau của tứ diện thì được tô cùng màu. Có 3 màu được tô đó là vàng, xanh, đỏ. Chứng tỏ diện tích mỗi phần được tô bởi mỗi màu bằng nhau.

V. Proizvolov.



M1961. Điểm Q nằm trong hình bình hành $ABCD$ sao cho $\angle AQB + \angle CQD = 180^\circ$. Chứng minh rằng $\angle QBA = \angle QDA$ và $\angle QAD = \angle QCD$.

V. Proizvolov.

M1962. Hình chữ nhật kẻ được ô vuông được phủ hoàn toàn bởi các quân đô-mi-nô

(dạng 2 ô vuông kề nhau). Với hình chữ nhật dạng nào thì xảy ra trường hợp có một cách phủ các quân đô-mi-nô sao cho có một cách phủ khác chứa một quân đô-mi-nô được giữ nguyên vị trí so với cách phủ ban đầu.

I. Akylich.

M1964. Đường tròn bàng tiếp của tam giác không cân ABC tiếp xúc với cạnh AB tại C' , AC, BC kéo dài tại B', A' . Đường thẳng AA', BB' cắt nhau tại K . Chứng minh rằng K nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC khi và chỉ khi bán kính của đường tròn ngoại tiếp ABC và $A'B'C'$ bằng nhau.

A. Zaslavskij

M1968. Mỗi đỉnh tứ giác lồi Q sao cho khi đối xứng qua đường chéo thì tứ giác không chứa đỉnh này. Các điểm nhận được bằng phép đối xứng là đỉnh của tứ giác Q' .

a. Chứng minh rằng nếu Q là hình thang thì Q' cũng là hình thang.

b. Chứng minh tỉ số diện tích của Q' với Q bé hơn 3.

L. Emeljanov.

M1972. Trên mặt phẳng cho tập hợp vô hạn các đường thẳng L mà không có hai đường thẳng nào song song. Biết rằng nếu bỏ một hình vuông có cạnh là 1 trên mặt phẳng này thì nó bị cắt bởi ít nhất một đường thẳng của tập L . Chứng minh rằng tồn tại hình vuông với cạnh:

a. 0,8

b. 0,75

mà nó bị cắt bởi không ít hơn 3 đường thẳng thuộc L .

S. Volchenkov.

M1973. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC , $AB < AC$, M và N là trung điểm đoạn AC và cung ABC của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Chứng minh rằng $\angle IMA = \angle INB$.

A. Badzjan.

M1974. Trên một tờ giấy trắng kẻ ca-rô vô hạn có hữu hạn các ô vuông được tô màu đen sao cho mỗi ô màu đen có số chẵn các ô trắng kề cạnh với nó (0, 2 hoặc 4). Chứng minh rằng mỗi ô trắng có thể tô màu đỏ hoặc vàng sao cho mỗi ô đen có số ô vàng và ô đỏ bằng nhau kề cạnh với nó.

A. Glebov, D. Fon-Der-Flaass.

M1978. Phân giác góc BAD, BCD của tứ giác nội tiếp $ABCD$ cắt nhau tại K nằm trên đường chéo BD . Điểm M là trung điểm của BD . Đường thẳng song song với AD và qua điểm C cắt tia AM tại P , nằm ngoài tứ giác. Chứng minh rằng $DP = DC$.

V. Shmarov.

M1980. Chứng minh rằng bất kì hình đa giác lồi đối xứng tâm với diện tích bằng 1 có thể được đặt trong một hình đa giác đối xứng tâm có diện tích là $4/3$.

V. Dolnikov.

M1984. Cho 1000 điểm trong mặt phẳng sao cho không tồn tại bất kì bộ ba điểm thẳng hàng. Chứng minh rằng có ít hơn 1.000.000 tam giác cân được xác định từ 1000 điểm đã

cho.

C. Berlov, Y. Bogdanov

M1985. Cho tứ giác $ABCD$ sao cho không có bất kì 2 cạnh song song, và ngoại tiếp đường tròn tâm O . Trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA lần lượt là K, L, M, N . Chứng minh rằng nếu O, K, M thẳng hàng thì O, L, N cũng thẳng hàng.

A. Zaslavskij, M. Ycaev, D. Tsvetov

M1987. Cho một khối thập diện đều và khối hình thập nhị diện đều với các khoảng cách từ tâm đến các cạnh bên tương ứng bằng nhau. Thể tích hình nào lớn hơn? Hãy chứng minh điều này.

A. Zaslavskij

M1990. Cho tam giác ABC trên đường kéo dài của BC về phía C lấy điểm X . Đường tròn nội tiếp tam giác ABX và ACX cắt nhau tại P, Q . Chứng minh rằng đường thẳng P, Q luôn đi qua một điểm cố định không phụ thuộc vào vị trí của X .

L. Emelianov

1992. Lật khối lập phương một vài lần (mỗi lần qua một cạnh) sao cho nó lại trở về vị trí cũ với cùng mặt trên. Phải chăng mặt trên có thể quay 90^{circ} so với vị trí ban đầu của nó.

I. Bogdanov.

1993. Gọi H là trực tâm tam giác ABC , điểm X không nằm trên các cạnh AH, BH, CH . Đường tròn đường kính HX cắt lần thứ hai các đường thẳng AH, BH, CH tại các điểm A_1, B_1, C_1 , và các đường thẳng AX, BX, CX tại A_2, B_2, C_2 . Chứng minh rằng các đường thẳng A_1A_2, B_1B_2 và C_1C_2 đồng quy tại một điểm.

A. Zaslavskij.

M1997. Cho tam giác vuông ABC với diện tích là 1, về phía ngoài các cạnh tam giác dựng hình vuông lấy tâm lần lượt là D, E, F . Chứng tỏ diện tích tam giác DEF không nhỏ hơn 2.

V. Filimonov, I. Bogdanov, Yu. Kudrjashov.

M2001. Cho tam giác ABC và các đường phân giác AA_1, BB_1, CC_1 . Số đo các góc tam giác tỉ lệ với $4 : 2 : 1$. Chứng minh $A_1B_1 = A_1C_1$.

C. Tokarev.

M2005. Chứng minh rằng bất kì hình đa diện lồi n đỉnh nào cũng không thể chia ra thành ít hơn $n - 3$ tứ diện.

N. Agakhanov.

M2007. Tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn tâm I . Trên đoạn AI và CI lấy M, N theo thứ tự sao cho $\angle MBN = 1/2\angle ABC$. Chứng minh rằng $\angle MDN = 1/2\angle ADC$.

L. Emeljanov.

M2012. Trong tứ diện $ABCD$ hạ các đường vuông góc AB', AC', AD' xuống các mặt phẳng chia góc nhị diện cạnh CD, BD, BC làm đôi. Chứng minh rằng mặt phẳng $B'C'D'$

song song với mặt phẳng BCD .

A. Bagzjan.

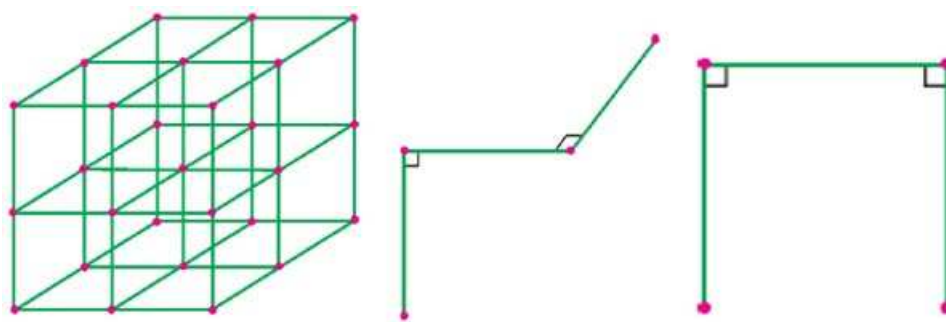
M2014. Trên hai cung AB và BC của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC lấy các điểm K và L sao cho các đường thẳng KL, AC song song. Chứng minh rằng tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABK, CBL cách đều trung điểm cung ABC .

S. Berlov.

M2015. Có thể hay không để hằn một khung dây thép dạng khối lập phương kích thước $2 \times 2 \times 2$ được phân hoạch thành các khung lập phương nhỏ kích thước $1 \times 1 \times 1$ (như hình vẽ) từ 18 chi tiết cấu trúc, mà mỗi chi tiết như vậy có dạng.

- Dạng 3 đoạn ghép đôi một vuông góc, mỗi đoạn ghép có độ dài bằng 1.
- Dạng 3 đoạn ghép hình chữ Π , mỗi đoạn ghép có độ dài là 1.

L. Emeljanov



M2016. Hình đa diện lồi $2n$ mặt ($n \geq 3$) có tất cả các mặt đều là tam giác. Tìm số đỉnh nhỏ nhất mà tại mỗi đỉnh đó là đầu mút của đúng 3 cạnh.

A. Garber.

M2017. Hình vuông kích thước 3000×3000 được phân hoạch tùy ý thành các ôminô (là hình chữ nhật kích thước 1×2).

- Chứng rằng có thể tô màu các ôminô bằng 3 màu sao cho số ôminô của mỗi màu đều bằng nhau và mỗi ôminô có không nhiều hơn 2 ôminô cùng màu kề với nó (các ôminô được xem là kề nếu chúng có chứa ô chung cạnh).
- Chứng minh rằng có thể tô màu các ôminô bằng 4 màu sao cho số ôminô của mỗi màu đều bằng nhau và không có hai ôminô cùng màu kề nhau.

M. Pastor

M2019. Đường tròn ω tiếp xúc với hai cạnh bằng nhau AB, AC của tam giác cân ABC và cắt cạnh BC tại K, L . Đoạn AK cắt đường tròn ω lần thứ hai tại điểm M . Điểm P, Q tương ứng đối xứng với điểm K qua B và C . Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác PMQ tiếp xúc với đường tròn ω .

V. Filimonov.

M2022. Cho một đường tròn có điểm A nằm trên và điểm M nằm trong đường tròn này. Dây cung BC đi qua điểm M . Chứng minh rằng đường tròn đi qua trung điểm các

cạnh của tam giác ABC tiếp xúc với một đường tròn cố định.

V. Protacov

M2026. Trên các cạnh AB, AC, CD và DA của hình vuông $ABCD$ lấy tương ứng các điểm P, M, N, Q sao cho $\angle MNA = 45^\circ$, $PM \parallel AN$, $AM \parallel NQ$. Đoạn PQ cắt AM, AN tương ứng tại các điểm F và G . Chứng minh rằng, diện tích của tam giác AFG bằng tổng diện tích của các tam giác FMP và GNQ .

V. Proizvolov

M2030. Có thể nội tiếp một hình bát diện đều vào một hình lập phương sao cho các đỉnh của hình bát diện nằm ở các cạnh của hình lập phương được hay không?

L. Radzivilovskij

M2031. Các đường thẳng đi qua các trung tuyến của tam giác ABC cắt đường tròn ngoại tiếp ω của tam giác này tại các điểm A_1, B_1, C_1 . Các đường thẳng đi qua các đỉnh A, B, C và song song với các cạnh đối diện cắt ω lần thứ hai tại A_2, B_2, C_2 . Chứng minh rằng A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 đồng quy tại một điểm.

A. Zaslavskij

M2034. Trên các cạnh AB, BC, CA của tam giác ABC lấy tương ứng các điểm X, Y, Z sao cho tam giác XYZ đồng dạng với tam giác ABC ($\angle X = \angle A, \angle Y = \angle B$). Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác XYZ cách đều trục tâm của của các tam giác ABC và XYZ .

N. Nikolov (Bulgaria)

M2037. Các đường chéo tứ giác nội tiếp $ABCD$ cắt nhau tại điểm E ; điểm K, M là trung điểm của cạnh AB, CD ; điểm L, N là hình chiếu của E xuống cạnh BC, AD . Chứng tỏ rằng các đường thẳng KM, LN vuông góc nhau.

Folklor

M2043. Có thể hay không thể ghép một hình vuông từ 4 hình đa giác giống nhau và một hình vuông và 3 đa giác trong số các đa giác giống nhau đó có thể ghép lại được thành một hình tam giác đều.

M2047. Điểm T nằm bên trong tam giác ABC sao cho $\angle ATB = \angle BTC = \angle CTA = 120^\circ$. Chứng tỏ rằng các đường thẳng đối xứng với AT, BT, CT qua các đường thẳng tương ứng BC, CA, AB đồng quy với nhau tại một điểm.

M2073. Cho hai đường tròn, cắt nhau tại điểm P và Q . Đặt C là điểm bất kì nằm trên một trong hai đường tròn khác P, Q . Điểm A, B là giao điểm thứ hai của các đường thẳng CP, CQ với đường tròn kia. Tìm vị trí hình học của tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

A. Zaslavskij

M2075. Mỗi cạnh của một hình đa diện lồi này song song với một cạnh của hình đa diện lồi khác. Hỏi có phải chúng có cùng thể tích hay không?

A. Zaslavskij

M2078. Điểm A', B', C' là chân của các đường cao của tam giác nhọn ABC . Đường tròn tâm B bán kính BB' cắt đường thẳng $A'C'$ tại K, L (K, A nằm về một phía của đường thẳng BB'). Chứng tỏ rằng giao điểm của đường thẳng AK, CL nằm trên đường thẳng BO , với O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

V. Protasov

M2080. Dãy véc-tơ $\{e_n\}$ trên mặt phẳng thỏa mãn điều kiện $e_1 = (0, 1)$, $e_2 = (1, 0)$, $e_{n+2} = e_{n+1} + e_n$ với $n \leq 1$. Đặt lại tất cả các véc-tơ là tổng của một nhóm số hạng nào đó của dãy trên về gốc tọa độ. Chứng tỏ rằng tập các đầu mút của các véc-tơ là các điểm có tọa độ nguyên nằm bên trong một dải tạo nào đó tạo bởi hai đường thẳng song song.

I. Pushkarev

M2082. Các đường chéo của tứ giác nội tiếp $ABCD$ cắt nhau tại P . Giả sử K, L, M, N là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DA theo thứ tự. Chứng tỏ rằng bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác PKL, PLM, PMN, PNK bằng nhau.

A. Zaslavskij