

ĐỀ CHÍNH THỨC

Bài 1:

1. Giải phương trình $x^3 + \sqrt{(1-x^2)^3} = x\sqrt{2-2x^2}$.
2. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $xyz = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$M = \frac{1}{x^3(y+z)} + \frac{1}{y^3(z+x)} + \frac{1}{z^3(x+y)}.$$

Bài 2:

1. Chứng minh rằng với n là số tự nhiên chẵn thì tổng T sau chia hết cho 2^n .

$$T = C_{2n}^0 + 5C_{2n}^2 + 5^2C_{2n}^4 + \dots + 5^i C_{2n}^{2i} + \dots + 5^n C_{2n}^{2n}.$$

2. Cho dãy số xác định bởi:
$$\begin{cases} u_1 = -1. \\ u_n = \frac{u_{n-1} + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}u_{n-1}} \end{cases}$$

- a. Lập công thức tổng quát của dãy (u_n) .
- b. Tính $S_{2014} = u_1 + u_2 + \dots + u_{2014}$.



Bài 3:

Cho bốn số thực a, b, c, d thỏa hệ thức $\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ c + d = 4 \end{cases}$.

Tìm giá trị lớn nhất của $P = ac + bd + cd$.

Bài 4:

Cho tam giác OAB đều cạnh a . Trên đường thẳng d qua O và vuông góc với mặt (OAB) , lấy điểm M sao cho $OM = x$. Gọi E, F là các hình chiếu của A lên MB, OB . Gọi N là giao điểm của EF và d . Xác định x để thể tích tứ diện $ABMN$ nhỏ nhất.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

1/ Điều kiện $x \in [-1; 1]$.

Biến đổi theo hằng đẳng thức ta nhận được phương trình: $(x + \sqrt{1-x^2})(1 - x\sqrt{1-x^2}) = \sqrt{2}x\sqrt{1-x^2}$

Đặt $t = x + \sqrt{1-x^2} \rightarrow x\sqrt{1-x^2} = \frac{1-t^2}{2}$, $(-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2})$. Phương trình được viết lại:

$$t \left(1 - \frac{1-t^2}{2} \right) = \sqrt{2} \frac{1-t^2}{2} \Leftrightarrow (\sqrt{2}t + 1)(t^2 - 1) = 0.$$

Đến đây giải tìm được t và suy ra nghiệm của phương trình.

Bài này nếu đặt $x = \sin t$ thì ta cũng nhận được phương trình lượng giác đơn giản.

2/ Nếu đặt $x = \frac{1}{a}$; $y = \frac{1}{b}$; $z = \frac{1}{c} \rightarrow abc = 1$. Như vậy:

$$M = \frac{a^3}{\frac{1}{b} + \frac{1}{c}} + \frac{b^3}{\frac{1}{c} + \frac{1}{a}} + \frac{c^3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = abc \left(\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \right) \geq abc \cdot \frac{(a+b+c)^2}{2(a+b+c)} \geq abc \cdot \frac{3}{2} \sqrt[3]{abc} = \frac{3}{2}.$$

Hoặc biến đổi trực tiếp với chú ý $xyz = 1$:

$$M = \frac{xyz}{x^3(y+z)} + \frac{xyz}{y^3(z+x)} + \frac{xyz}{z^3(x+y)} = \frac{(yz)^2}{xy+xz} + \frac{(zx)^2}{yz+xy} + \frac{(xy)^2}{xz+zy} \geq \frac{xy+yz+zx}{2} \geq \frac{3}{2}.$$

Nói chung, đây là một bài BĐT tương đối dễ vì ta có thể giải theo cách dùng trực tiếp AM – GM:

$$\frac{1}{x^3(y+z)} + \frac{x(y+z)}{4} \geq \frac{1}{x} = yz.$$

Xây dựng hai BĐT tương tự và cộng theo vế thì nhận được

$$M + \frac{xy+yz+zx}{2} \geq xy+yz+zx \rightarrow M \geq \frac{xy+yz+zx}{2} \geq \frac{3}{2}.$$

Tóm lại, giá trị nhỏ nhất của M là $\frac{3}{2}$ khi $x = y = z = 1$.

Bài toán này chính là IMO 1995 (Olympic toán học Quốc tế).

Bài 2:

1/ Có thể sử dụng nhị thức Niuton để giải bài này. Ta có:

$$(1+\sqrt{5})^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1\sqrt{5} + C_{2n}^2 5 + C_{2n}^3\sqrt{5^3} + C_{2n}^4 5^2 + \dots + C_{2n}^{2n} 5^n$$

$$(1-\sqrt{5})^{2n} = C_{2n}^0 - C_{2n}^1\sqrt{5} + C_{2n}^2 5 - C_{2n}^3\sqrt{5^3} + C_{2n}^4 5^2 \dots + C_{2n}^{2n} 5^n$$

$$\rightarrow (1+\sqrt{5})^{2n} + (1-\sqrt{5})^{2n} = 2T \rightarrow T = \frac{1}{2} \left((1+\sqrt{5})^{2n} + (1-\sqrt{5})^{2n} \right)$$

Như vậy để chứng minh T chia hết cho 2^n thì ta chứng minh

$$\frac{T}{2^n} = \frac{1}{2} \left[\frac{(1+\sqrt{5})^{2n}}{2^n} + \frac{(1-\sqrt{5})^{2n}}{2^n} \right] = \frac{1}{2} \left[(3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n \right]$$

là một số nguyên. Đến đây có thể chứng minh $\frac{T}{2^n}$ nguyên bằng cách khai triển trực tiếp Niuton hoặc theo cách làm quen thuộc của phương trình bậc 2.

Xét phương trình $x^2 - 6x + 4 = 0$ có hai nghiệm $x_1 = 3 + \sqrt{5}$; $x_2 = 3 - \sqrt{5}$. Đặt $S_n = x_1^n + x_2^n$, bằng phương pháp quy nạp chứng minh được $S_n = 6S_{n-1} - 4S_{n-2}$; 2 , $(n \geq 2)$. Bài toán được giải quyết.



$$2/ \text{ Ta thấy } u_2 = \frac{u_1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}u_1} = \frac{\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \tan\left(\frac{\pi}{3}\right)}{1 - \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \tan\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right)$$

Theo quy nạp ta sẽ chứng minh được $u_n = \tan\left(-\frac{\pi}{4} + (n-1)\frac{\pi}{3}\right)$

Bài 3:

Ta có $ac + bd + cd \leq \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} + cd = \sqrt{16 - 2cd} + cd \rightarrow f(x) = \sqrt{16 - 2x} + x, \quad x = cd$

Từ giả thiết $c + d = 4 \rightarrow cd \leq 4 \rightarrow x \leq 4$. Như vậy với việc khảo sát $f(x)$ như trên trong điều kiện $x \leq 4$ ta nhận được giá trị lớn nhất của P là $4 + 2\sqrt{2}$.

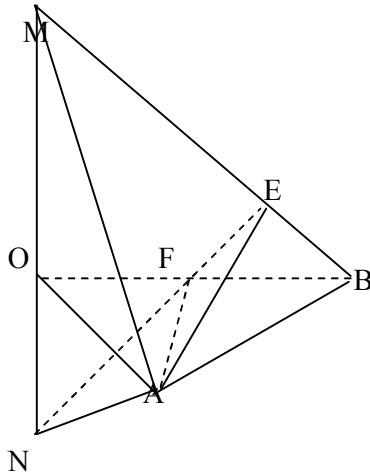
Có thể giải bài này theo kiểu rối rắm như sau:

Do $d = 4 - c$ nên $P = ac + b(4 - c) + c(4 - c) = -c^2 + (a - b + 4)c + 4b \leq \frac{-(a - b + 4)^2 - 16b}{-4}$ (đỉnh của

parabol) $\rightarrow P \leq \frac{1 + 16 - 2ab + 8a + 8b}{4} = \frac{-(a + b)^2 + 8(a + b) + 18}{4}$ với $a^2 + b^2 = 1 \rightarrow a + b \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$.

Khảo sát hàm số này với biến $(a + b)$ ta cũng nhận được đáp số tương tự.

Bài 4:



Ta có $\left. \begin{array}{l} AF \perp OB \\ AF \perp SO \end{array} \right\} \rightarrow AF \perp SB$, lại thêm $AE \perp SB \rightarrow EF \perp SB$.

Xét hai tam giác vuông đồng dạng NOF và BOM (cùng đồng dạng với BEF) có

$$\frac{NO}{OF} = \frac{BO}{OM} \rightarrow NO = \frac{OF \cdot BO}{OM} = \frac{a^2}{2x}$$

$$\text{Do đó } V_{MNAB} = V_{MOAB} + V_{NOAB} = \frac{1}{3} S_{OAB} (MO + ON) = \frac{a^2 \sqrt{3}}{12} \left(x + \frac{a^2}{2x} \right) \geq \frac{a^3 \sqrt{6}}{12}$$

Vậy để V_{MNAB} nhỏ nhất thì $x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.