HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM **ĐỀ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN NĂM 2014**

Môn thi: Giải tích
Thời gian làm bài: 180 phút

Câu 1. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $u_1 = 1$ và $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + a^n}, \forall\ n \geq 1$, trong đó $a \geq 0$. Tìm a sao cho (u_n) hội tụ và tìm giới hạn đó.

Câu 2. Cho hai hàm $f(x)$ và $g(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện

$$\Big(f(x) - f(y)\Big)\Big(g(x) - g(y)\Big) = 0 \text{ với mọi } x, y \in \mathbb{R}.$$

Chứng minh ít nhất một trong hai hàm f hoặc g là hàm hằng.

Câu 3. 1) Cho hàm số f đơn điệu trên $[0, \infty)$ và

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = +\infty.$$

Chứng minh rằng

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

2) Kết luận trên còn đúng không khi f là hàm liên tục trên $[0, \infty)$ nhưng không đơn điệu trên khoảng đó? Tại sao?

Câu 4. Tìm tất cả các hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên đoạn $[0, 1]$, khả vi trong khoảng $(0, 1)$ và thỏa mãn điều kiện

$$f(0) = f(1) = \frac{2015}{2014}; \quad 2013f'(x) + 2014f(x) \geq 2015 \quad \forall\ x \in (0, 1).$$

Câu 5. Cho dãy số (x_n) được xác định bởi $x_{n+2} = \sqrt{x_{n+1}} + \sqrt{x_n}, \quad n \geq 0$.
Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ với điều kiện $x_0 \geq 4;\ x_1 \geq 4$.

Câu 6. Thí sinh chọn một trong hai câu:
6a. Cho (a_n) là dãy số xác định bởi

$$a_1 = 3 - \sqrt{6}, a_2 = 3 - \sqrt{6 + \sqrt{6}}, ..., a_n = 3 - \underbrace{\sqrt{6 + \sqrt{6 + ... + \sqrt{6}}}}_{n \text{ lần}}.$$

Hãy chứng minh rằng chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ.

6b. Cho f là hàm số liên tục trên $[0, +\infty)$. Giả sử rằng

$$\int_0^x f^2(t)\,dt \leq \frac{x^3}{3}, \forall x \geq 0.$$

Chứng minh rằng $\displaystyle\int_0^x f(t)dt \leq \frac{x^2}{2}$ với mọi $x \geq 0$.

Ghi chú: Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM **OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN NĂM 2014**

ĐÁP ÁN ĐỀ THI MÔN GIẢI TÍCH

Giải câu 1:

Ta có $u_{n+1}^2 = u_n^2 + a^n$ vì vậy

$$u_n^2 = 1 + a + \cdots + a^{n-1}.$$

- Tính được công thức $u_n = \sqrt{\frac{a^n-1}{a-1}}$ khi $a \neq 1$ và $u_n = \sqrt{n}$ khi $a = 1$.
- Chỉ ra khi $a < 1$ dãy có giới hạn và giới hạn đó là $\sqrt{\frac{1}{1-a}}$.

Giải câu 2:

Giả sử f không phải là hàm hằng. Khi đó tồn tại các số a, b sao cho $f(b) - f(a) \neq 0$. Điều này kéo theo $g(a) = g(b) = m$.

Lần lượt lấy $y = a$ và $y = b$ ta có hệ

$$\Big(f(x) - f(a)\Big)\Big(g(x) - m\Big) = 0; \quad \Big(f(x) - f(b)\Big)\Big(g(x) - m\Big) = 0.$$

Trừ các phương trình của hệ cho nhau ta thu được $(f(a) - f(b))(g(x) - m) = 0$ với mọi x. Do $f(a) - f(b) \neq 0$ nên $g(x) = m \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Giải câu 3:

Nếu f đơn điệu giảm thì $f(x) \leq f(0) \ \forall x \in [0, +\infty)$. Do vậy, $\frac{1}{x}\int\limits_0^x f(t)dt \leq f(0)$. Điều này trái với giả thiết.

Vậy $f(x)$ là hàm không giảm trên $[0, \infty)$. Khi đó, $f(t) \leq f(x) \ \forall t \leq x$. Do đó $\frac{1}{x}\int\limits_0^x f(t)dt \leq \frac{1}{x}\int\limits_0^x f(x)dt = f(x)$ với mọi $x > 0$. Điều này kéo theo

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\int\limits_0^x f(t)dt \leq \lim_{x\to\infty} f(x).$$

2) Kết luận không còn đúng. Ta xét thí dụ sau: xét hàm số $f(x) = |sinx|x^2$. Ta có

$$\int_0^{2n\pi} f(x)\,dx \geq \sum_{k=1}^{n} \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} x\sin x\,dx = \sum_{k=1}^{n}(4k+1) = n(2n+3)$$

Do đó,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt \geq \lim_{x\to\infty} \frac{1}{[x/2\pi]2\pi + 2\pi}\int_0^{[x/2\pi]2\pi} f(t)\,dt = \infty.$$

Dễ thấy không tồn tại $lim_{x\to\infty} f(x)$.

Giải câu 4:

Chia hai vế cho 2013 ta nhận được

$$f'(x) + kf(x) \geq \frac{2015}{2013}; \quad \text{với } k = \frac{2014}{2013}.$$

Đặt $g(x) = e^{kx}(f(x) - m)$ với $m = \frac{2015}{2014}$ ta có

$$g'(x) = e^{kx}[k(f(x) - m) + f'(x)] \geq 0.$$

Từ đó suy ra g là hàm không giảm.

Mặt khác, $g(0) = g(1) = 0$ nên ta suy ra $g(x) \equiv 0$. Từ đó $f(x) \equiv m$.

Giải câu 5:

Cách 1:

Bằng quy nạp chứng minh được $x_n \geq 4$.

Xét dãy $b_{n+1} = 2\sqrt{b_n}$ với b$_0$ = $\max\{4, x_0, x_1\}$. Do $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \sqrt{\frac{b_n}{b_{n-1}}}$ và $b_1 \leq b_0$ nên ta suy ra là dãy không tăng và bị chặn dưới, do đó $\lim_n b_n = 4$. Ta chứng minh $\max\{x_{2n}, x_{2n+1}\} \leq b_n$ với mọi n.

Với $n = 1$ ta có $x_2 = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_0} \leq 2\sqrt{\max\{x_1, x_0\}} \leq 2\sqrt{b_0} = b_1$.

$x_3 = \sqrt{x_2} + \sqrt{x_1} \leq 2\sqrt{\max\{x_2, x_1\}} \leq 2\sqrt{\max\{b_1, b_0\}} \leq b_1$

Giả thiết $\max\{x_{2k}, x_{2k+1}\} \leq b_k$ với mọi $k = 0, 1, ..., n-1$. Khi đó,

$x_{2n} = \sqrt{x_{2n-1}} + \sqrt{x_{2n-2}} \leq 2\sqrt{\max\{x_{2n-1}, x_{2n-2}\}} \leq 2\sqrt{b_{n-1}} = b_n$.

$x_{2n+1} = \sqrt{x_{2n}} + \sqrt{x_{2n-1}} \leq 2\sqrt{\max\{x_{2n}, x_{2n-1}\}} \leq 2\sqrt{\max\{b_n, b_{n-1}\}} \leq b_n$.

Tổng kết lại, ta có $4 \leq \max\{x_{2n}, x_{2n+1}\} \leq b_n$ với mọi n và $\lim_n b_n = 4$. Vậy $\lim_n x_n = 4$.

Cách 2:

Giả thiết $x_1 \leq x_0$. Khi đó

$$x_2 = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_0} \leq 2\sqrt{x_0} \leq x_0,$$

do $x_0 \geq 4$.

$$x_3 = \sqrt{x_2} + \sqrt{x_1} \leq \sqrt{x_1} + \sqrt{x_0} = x_2.$$

Như vậy bằng quy nạp ta chứng minh được

$$x_{2n+2} \leq 2\sqrt{x_{2n}} \leq x_{2n};$$
$$x_{2n+1} \leq x_{2n}.$$

Như thế dãy (x_{2n}) là dãy không tăng bị chặn dưới bởi 4. Từ đó suy ra tồn tại giới hạn $\lim x_{2n} = a \leq 2\sqrt{a}$. Hay là $a \leq 4$. Kết hợp với điều kiện $x_{2n} \geq 4$ ta có $a = 4$.

Kết hợp điều này với bất đẳng thức thứ 2 ở trên ta được $\lim x_{2n+1} = 4$.

Vậy $\lim x_n = 4$.

Nếu $x_1 \geq x_0$ ta thấy $x_2 = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_0} \leq 2\sqrt{x_1} \leq x_1$ và lý luận như trên khi thay x_0 bởi x_1 còn x_1 bởi x_2.

Giải câu 6:

6a.

Đặt $b_n = \underbrace{\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots+\sqrt{6}}}}_{n \text{ lần}}$. Do $b_{n+1} = \sqrt{6+b_n}$. Bằng quy nạp ta chứng minh được b_n là dãy tăng bị chặn trên bởi 3 và $b_n \uparrow 3$.

Mặt khác,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3-b_{n+1}}{3-b_n} = \frac{3-\sqrt{6+b_n}}{3-b_n} = \frac{1}{3+\sqrt{6+b_n}} \to \frac{1}{6}.$$

Theo tiêu chuẩn D'Alambert chuỗi số hội tụ.

6b.

Từ giả thiết

$$\int_0^x f^2(t)\,dt \le \int_0^x t^2\,dx.$$

Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwartz ta có

$$\left(\int_0^x tf(t)\,dt\right)^2 \le \int_0^x t^2\,dt \int_0^x f^2(t)\,dt \le \left(\int_0^x t^2\,dt\right)^2.$$

Vì vậy

$$\int_0^x tf(t)\,dt \le \int_0^x t^2\,dt \quad \text{hay là } F(x) = \int_0^x t(t-f(t))\,dt \ge 0.$$

Mặt khác,

$$\begin{aligned}\int_0^x (t-f(t))\,dt &= \int_0^x \frac{1}{t}t(t-f(t))\,dt\\ &= \int_0^x \frac{1}{t}dF(t) = \frac{F(x)}{x} + \int_0^x \frac{F(t)}{t^2}\,dt \ge 0.\end{aligned}$$

Từ đó, $\int_0^x (t-f(t))\,dt \ge 0$ hay là $\int_0^x f(t)\,dt \le \int_0^x t\,dt = \frac{x^2}{2}$.