

I. PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH (7 điểm)

Câu 1. (2 điểm) Cho hàm số $y = \frac{x-2}{x-1}$. (1)

- a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (1).
b) Tìm m để đường thẳng d: $y = -x + m$ cắt đồ thị hàm số (1) tại 2 điểm A, B tạo thành tam giác OAB thỏa mãn $\frac{1}{OA} + \frac{1}{OB} = 1$ với O là gốc tọa độ.

Câu 2. (1 điểm). Giải phương trình: $2\sqrt{2}\left(\sin^3 \frac{x}{2} - \cos^3 \frac{x}{2}\right) \cos \frac{x}{2} = (2 + \sin x) \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$

Câu 3. (1 điểm). Giải phương trình: $3x^2 - 5\sqrt[3]{x^3 + 1} + 8x + 5 = 0$.

Câu 4. (1 điểm). Tính tích phân: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \left(\sin x + \frac{\cos 2x}{\sqrt{1+3\cos x}} \right) dx$.

Câu 5. (1 điểm). Cho hình trụ có trục OO' bằng bán kính đáy và bằng a. Gọi A là điểm thuộc đường tròn tâm O, A' là điểm thuộc đường tròn tâm O' sao cho $AA' = 2a$. Tính thể tích của tứ diện OAA'O'.

Câu 6. (1 điểm). Cho 3 số dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $S = \sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} + \sqrt{z+x}$.

II. PHẦN RIÊNG (3 điểm). Thí sinh chỉ làm 1 trong 2 phần A hoặc B.

A. Theo chương trình chuẩn.

Câu 7a. (1 điểm). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có phương trình cạnh AB: $2x + y - 1 = 0$, phương trình cạnh AC: $3x + 4y + 6 = 0$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC biết M(1; -3) nằm trên cạnh BC thỏa mãn: $3MB = 2MC$.

Câu 8a. (1 điểm). Trong không gian Oxyz, cho 3 điểm M(3; 1; 1), N(4; 8; -3), P(2, 9, -7) và mặt phẳng (Q): $x + 2y - z - 6 = 0$. Tìm trên (Q) điểm A sao cho $|\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AP}|$ nhỏ nhất.

Câu 9.a (1 điểm). Giải phương trình sau trên tập số phức: $(z-i)^2(z+i)^2 - 5z^2 - 5 = 0$

B. Theo chương trình nâng cao.

Câu 7.b. (1 điểm). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn (C): $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$ và điểm N(2; 1). Tìm trên đường thẳng d: $x + y + 2 = 0$ điểm M sao cho từ M kẻ được hai tiếp tuyến MA, MB đến (C) (với A, B là 2 tiếp điểm) và đường thẳng AB đi qua N.

Câu 8b. (1 điểm). Trong không gian Oxyz, cho các điểm A(2; 3; 0), B(0; $-\sqrt{2}$; 0) và đường

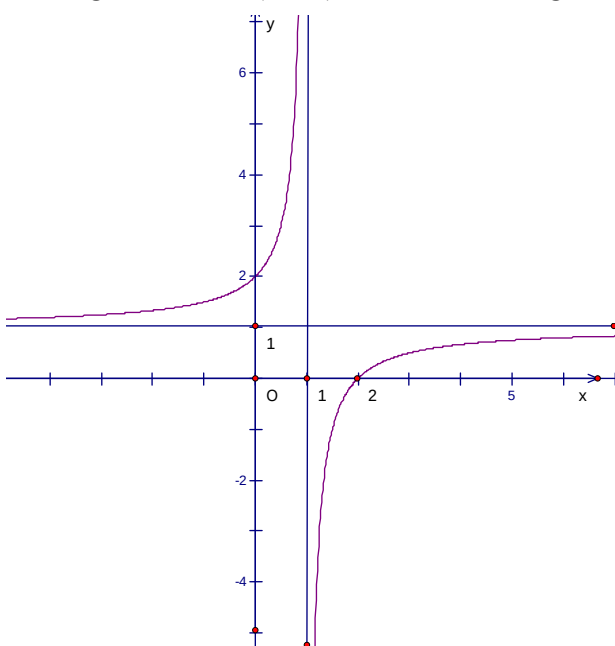
thẳng d có phương trình: $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 2 - t \end{cases}$. Tìm điểm C trên đường thẳng d sao cho tam giác ABC có

chu vi nhỏ nhất.

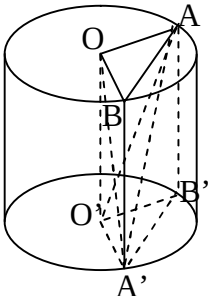
Câu 9b. (1 điểm). Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2^{2y-x} + 2^y = 2^{x+1} \\ \log_5(x^2 + 3y + 1) - \log_5 y = -2x^2 + 4y - 1 \end{cases}$

-----Hết-----

HƯỚNG DẪN CHẤM THI THỬ ĐẠI HỌC MÔN TOÁN LẦN 2 NĂM 2014

Câu	Nội dung	Điểm											
1.a	a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x-1}$.	1 điểm											
	Tập xác định : $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ Giới hạn và tiệm cận: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 1$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 1$ Suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 1$ $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = -\infty$ Suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 1$	0,25đ											
	• Chiều biến thiên $y' = \frac{1}{(x-1)^2} > 0$ với $\forall x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$. Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$	0,25đ											
	• Cực trị : Hàm số không có cực trị	0,25đ											
	• Bảng biến thiên <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>1</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td colspan="2">+</td><td>+</td></tr><tr><td>y</td><td>1</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td></tr></table>	x	$-\infty$	1	$+\infty$	y'	+		+	y	1	$+\infty$	$-\infty$
x	$-\infty$	1	$+\infty$										
y'	+		+										
y	1	$+\infty$	$-\infty$										
• Đồ thị : Đồ thị cắt trục Ox tại điểm (2 ; 0) Đồ thị cắt trục Oy tại điểm (0 ; 2) Đồ thị nhận giao điểm của 2 đường tiệm cận I(1 ; 1) là tâm đối xứng		0,25đ											

1.b	b/ Tìm m để đường thẳng d: $y = -x + m$ cắt đồ thị hàm số (1) tại 2 điểm A, B tạo thành tam giác OAB thỏa mãn $\frac{1}{OA} + \frac{1}{OB} = 1$ với O là gốc tọa độ.	1 điểm
	* Xét phương trình hoành độ: $\frac{x-2}{x-1} = -x+m \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x^2 - mx + m - 2 = 0. \end{cases} \quad (*)$ Phương trình (*) có $\Delta = m^2 - 4m + 8 > 0 \forall m$ suy ra (*) có hai nghiệm phân biệt khác 1 với mọi m. Vậy d cắt đồ thị hàm số (1) tại hai điểm phân biệt A, B với mọi m.	0,25đ
	* Gọi $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ với x_1, x_2 là hai nghiệm của (*) $y_1 = -x_1 + m$; $y_2 = -x_2 + m$. Ta có: $OA = \sqrt{2x_1^2 - 2mx_1 + m^2} = \sqrt{2x_1^2 - 2mx_1 + 2m - 4 + m^2 - 2m + 4}$ $= \sqrt{m^2 - 2m + 4}.$ Tương tự, $OB = \sqrt{m^2 - 2m + 4}$	0,25đ
	* Từ $\frac{1}{OA} + \frac{1}{OB} = 1$, ta có: $\frac{2}{\sqrt{m^2 - 2m + 4}} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{m^2 - 2m + 4} = 2$ $\Leftrightarrow m = 0 \vee m = 2$ Vì O, A, B tạo thành tam giác nên giá trị thỏa mãn là $m = 2$	0,5đ
2	Giải phương trình: $2\sqrt{2} \left(\sin^3 \frac{x}{2} - \cos^3 \frac{x}{2} \right) \cos \frac{x}{2} = (2 + \sin x) \cos \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \quad (1)$ * Phương trình (1) tương đương với: $2\sqrt{2} \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right) \left(1 + \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \right) \cos \frac{x}{2} = 2 \left(1 + \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \right) \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} \right)$ $\Leftrightarrow \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right) \left(2 \cos \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} + 1 + \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \right) = 0$ $\Leftrightarrow \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right) \left(2 \cos \frac{x}{2} + 1 \right) \left(\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + 1 \right) = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \sin \frac{x}{2} = \cos \frac{x}{2} \\ \cos \frac{x}{2} = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \pm \frac{4\pi}{3} + k4\pi \end{cases}; k \in \mathbb{Z}$	1 điểm
3	Giải phương trình: $3x^2 - 5\sqrt{x^3 + 1} + 8x + 5 = 0.$ * Phương trình tương đương với: $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + 5x + 5 = x^3 + 1 + 5\sqrt{x^3 + 1}$ $\Leftrightarrow (x+1)^3 + 5(x+1) = x^3 + 1 + 5\sqrt{x^3 + 1}$	1 điểm
		0,25đ

	* Đặt $x+1=u$; $\sqrt[3]{x^3+1}=v$, phương trình trở thành: $u^3+5u=v^3+5v \Leftrightarrow (u-v)(u^2+v^2+uv+5)=0 \Leftrightarrow u=v$ (do $u^2+v^2+uv+5>0$ với mọi u, v)	0,25đ
	* $\sqrt[3]{x^3+1}=x+1 \Leftrightarrow 3x^2+3x=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=-1$	0,25đ
	* Phương trình có 2 nghiệm $x=0, x=-1$.	0,25đ
4	Tính tích phân: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \left(\sin x + \frac{\cos 2x}{\sqrt{1+3\cos x}} \right) dx.$	1 điểm
	* $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos 2x}{\sqrt{1+3\cos x}} dx = I_1 + I_2$	0,25đ
	* $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x \right) \Big _0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$	0,25đ
	* $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos 2x}{\sqrt{1+3\cos x}} dx$ Đặt $\sqrt{1+3\cos x}=u \Rightarrow u^2=1+3\cos x \Rightarrow 2udu=-3\sin x dx$ $x=0 \rightarrow u=2; x=\frac{\pi}{2} \rightarrow u=1$ $I_2 = \frac{2}{27} \int_1^2 (2u^4 - 4u^2 - 7) du = \frac{2}{27} \left(\frac{2}{5}u^5 - \frac{4}{3}u^3 - 7u \right) \Big _1^2 = -\frac{118}{405}$ * Vậy $I = \frac{\pi}{4} - \frac{118}{405}$	0,25đ
5	Cho hình trụ có trục OO' bằng bán kính đáy và bằng a. Gọi A là điểm thuộc đường tròn tâm O, A' là điểm thuộc đường tròn tâm O' sao cho $AA'=2a$. Tính thể tích tứ diện $OAA'O'$.	1 điểm
	* Dựng lăng trụ $OAB.O'B'A'$ Ta có $V_{OO'A'A} = \frac{1}{3} V_{OAB.O'B'A'}$ * Tam giác OAB cân có $OA=OB=a, AB=a\sqrt{3}$ $\Rightarrow dtOAB = \frac{1}{2} a\sqrt{3} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ * $V_{OAB.O'B'A'} = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$ * $V_{OO'A'A} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$	0,25đ
		0,25đ
		0,25đ

6	Cho 3 số dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $S = \sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} + \sqrt{z+x}.$	1 điểm
	* Ta có $\sqrt{x+y} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{(x+y)\frac{4}{3}} \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{x+y+\frac{4}{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(x+y+\frac{4}{3}\right)$ * Tương tự: $\sqrt{y+z} \leq \frac{\sqrt{3}}{4} \left(y+z+\frac{4}{3}\right); \sqrt{z+x} \leq \frac{\sqrt{3}}{4} \left(z+x+\frac{4}{3}\right)$ * $S = \sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} + \sqrt{z+x} \leq \frac{\sqrt{3}}{4} (2x+2y+2z+4) = 2\sqrt{3}$ Có dấu “=” khi $x = y = z = \frac{2}{3}$. * Vậy $\max S = 2\sqrt{3}$, đạt được khi $x = y = z = \frac{2}{3}$	0,5đ 0,25đ 0,25đ
7a	Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có phương trình cạnh AB: $2x + y - 1 = 0$, phương trình cạnh AC: $3x + 4y + 6 = 0$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC biết M(1; -3) nằm trên cạnh BC thỏa mãn: $3MB = 2MC$. * Tọa độ A là nghiệm của hệ: $\begin{cases} 2x+y-1=0 \\ 3x+4y+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-3 \end{cases}$ hay A(2; -3) * Gọi B(b; 1-2b), C(c; $\frac{-3c-6}{4}$) $\Rightarrow \overrightarrow{MB} = (b-1; 4-2b), \overrightarrow{MC} = (c-1; \frac{-3c+6}{4})$ * Do M nằm trên cạnh BC và $3MB = 2MC$ nên ta có: $3\overrightarrow{MB} = -2\overrightarrow{MC}$ hay $\begin{cases} 3(b-1) = -2(c-1) \\ 3(4-2b) = -2\left(\frac{-3c+6}{4}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3b+2c=5 \\ 4b+c=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=3 \\ c=-2 \end{cases}$ * Vậy A(2; -3); B(3; -5); C(-2; 0) nên tam giác ABC có trọng tâm G(1; $-\frac{8}{3}$)	1 điểm 0,25đ 0,25đ 0,25đ 0,25đ
8a	Trong không gian Oxyz, cho 3 điểm M(3; 1; 1), N(4; 8; -3), P(2, 9, -7) và mặt phẳng (Q): $x + 2y - z - 6 = 0$. Tìm trên (Q) điểm A sao cho $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AP}$ nhỏ nhất. * Tam giác MNP có trọng tâm G(3; 6; -3) $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AP} = 3 \overrightarrow{AG}$ * $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AP}$ nhỏ nhất khi $\overrightarrow{AG}$ nhỏ nhất $\Rightarrow$ A là hình chiếu vuông góc của G trên (Q). * Đường thẳng d qua G, vuông góc với (Q) có phương trình:	1 điểm 0,25đ 0,25đ

	$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 6 + 2t \\ z = -3 - t \end{cases}$ * Đường thẳng d cắt (Q) tại A, tọa độ A là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 6 + 2t \\ z = -3 - t \\ x + 2y - z - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(1; 2; -1)$	0,25đ 0,25đ
9a	Giải phương trình sau trên tập số phức: $(z - i)^2(z + i)^2 - 5z^2 - 5 = 0$	1 điểm
	* Phương trình tương đương với: $(z^2 + 1)^2 - 5(z^2 + 1) = 0$	0,25đ
	$\Leftrightarrow \begin{cases} z^2 + 1 = 0 \\ z^2 + 1 = 5 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} z = \pm i \\ z = \pm 2 \end{cases}$	0,25đ 0,5đ
7b	Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn (C): $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$ và điểm N(2; 1). Tìm trên đường thẳng d: $x + y + 2 = 0$ điểm M sao cho từ M kẻ được hai tiếp tuyến MA, MB đến (C) (với A, B là 2 tiếp điểm) và đường thẳng AB đi qua N.	1 điểm
	Đường tròn (C) có tâm I(1; 2); bán kính R = 2 Gọi $M(t; -2 - t) \in d$ Nếu T(x; y) là tiếp điểm của tiếp tuyến kẻ từ M đến (C) thì $\begin{cases} T \in (C) \\ \overrightarrow{MT} \cdot \overrightarrow{IT} = 0 \end{cases}$	0,25đ
	$\overrightarrow{MT} = (x - t; y + 2 + t), \overrightarrow{IT} = (x - 1; y - 2)$ Do đó ta có hệ: $\begin{cases} (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4 & (1) \\ (x - t)(x - 1) + (y - 2)(y + 2 + t) = 0 & (2) \end{cases}$	0,25đ
	Trừ vế với vế của (1) cho (2) ta được $(-t + 1)x + (t + 4)y - t - 5 = 0$ (*) Tọa độ các tiếp điểm kẻ từ M đến (C) thỏa mãn (*) nên phương trình đường thẳng AB là $(-t + 1)x + (t + 4)y - t - 5 = 0$	0,25đ
	Vì AB đi qua N(2; 1) nên $(-t + 1)2 + (t + 4)1 - t - 5 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$ Vậy $M\left(\frac{1}{2}; -\frac{5}{2}\right)$	0,25đ

8b	Trong không gian Oxyz, cho các điểm A(2; 3; 0), B(0; $-\sqrt{2}$; 0) và đường thẳng d có phương trình: $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 2 - t \end{cases}$. Tìm điểm C trên đường thẳng d sao cho tam giác ABC có chu vi nhỏ nhất.	1 điểm
	Vì AB không đổi nên tam giác ABC có chu vi nhỏ nhất khi CA + CB nhỏ nhất Gọi $C(t; 0; 2 - t) \in d$. Ta có: $CA = \sqrt{(t-2)^2 + 3^2 + (2-t)^2} = \sqrt{2(t-2)^2 + 3^2}$ $CB = \sqrt{t^2 + 2 + (2-t)^2} = \sqrt{2(t-1)^2 + 2^2}$ Đặt $\vec{u} = (\sqrt{2}(t-2); 3)$, $\vec{v} = (\sqrt{2}(1-t); 2) \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} = (-\sqrt{2}; 5)$ Áp dụng t/chất $\vec{u} + \vec{v} \geq \vec{u} + \vec{v}$, dấu “=” xảy ra khi $\vec{u}$ cùng hướng $\vec{v}$ ta có $CA + CB = \vec{u} + \vec{v} \geq \vec{u} + \vec{v} = \sqrt{2+25} = 3\sqrt{3}$ dấu “=” xảy ra khi $\frac{\sqrt{2}(t-2)}{\sqrt{2}(1-t)} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow t = \frac{7}{5}$ Khi đó $C\left(\frac{7}{5}; 0; \frac{3}{5}\right)$	0,25đ 0,25đ 0,25đ 0,25đ
9b	Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2^{2y-x} + 2^y = 2^{x+1} & (1) \\ \log_5(x^2 + 3y + 1) - \log_5 y = -2x^2 + 4y - 1 & (2) \end{cases}$ Đk: $y > 0$ (1) $\Leftrightarrow 2^{y-x} + 1 = 2.2^{x-y} \Leftrightarrow 2.2^{x-y} - \frac{1}{2^{x-y}} - 1 = 0 \Leftrightarrow 2^{x-y} = 1 \Leftrightarrow x = y$ Thay vào (2) được: $\log_5(x^2 + 3x + 1) - \log_5 x = -2x^2 + 4x - 1$ $\Leftrightarrow \log_5\left(x + \frac{1}{x} + 3\right) = -2(x-1)^2 + 1 \quad (3)$ Do $x + \frac{1}{x} \geq 2 \quad \forall x > 0$ nên $\log_5\left(x + \frac{1}{x} + 3\right) \geq 1 \quad \forall x > 0$. Đẳng thức xảy ra khi $x = 1$ $-2(x-1)^2 + 1 \leq 1 \quad \forall x$. Đẳng thức xảy ra khi $x = 1$ Phương trình (3) có nghiệm duy nhất $x = 1$ Vậy hệ có nghiệm (1; 1)	1 điểm 0,25đ 0,25đ 0,25đ 0,25đ