

I. PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH (7,0 điểm)

Câu 1 (2,0 điểm). Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 2$ (1), m là tham số thực.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số đã cho khi $m = 1$.

b) Tìm $m \in \mathbb{R}$ để đồ thị hàm số (1) có hai điểm cực trị và đường thẳng đi qua hai điểm cực trị tạo với trục Ox một góc φ mà $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Câu 2 (1,0 điểm). Giải phương trình: $\sin x + \sin 5x = 2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - x \right) - 2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} + 2x \right)$ ($x \in \mathbb{R}$).

Câu 3 (1,0 điểm). Giải phương trình: $\sqrt{2x+1} + \sqrt[4]{2x-1} = \sqrt{x-1} + \sqrt{x^2-2x+3}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Câu 4 (1,0 điểm). Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường: $y = (2x-1)\sqrt{\ln x}$, $y = 0$, $x = e$. Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình (H) quanh trục Ox .

Câu 5 (1,0 điểm). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi. Biết rằng tứ diện $SABD$ là tứ diện đều cạnh a . Tính theo a thể tích của khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và SC .

Câu 6 (1,0 điểm). Cho x và y là hai số thực dương thay đổi sao cho $\log_2(x+y) = 3 + \log_2 x + \log_2 y$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{\sqrt{3^{2x} + 3^{-2y}}}{3^{x+1} + 3^{-y}}$.

II. PHẦN RIÊNG (3,0 điểm): Thí sinh chỉ được làm một trong hai phần (phần A hoặc phần B)

A. Theo chương trình Chuẩn

Câu 7a (1,0 điểm). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình thoi $ABCD$ có $BD = 2AC$, điểm $H(2; -1)$, phương trình của đường thẳng BD là $x - y = 0$. Gọi M là trung điểm của cạnh CD . Giả sử H là hình chiếu vuông góc của điểm A trên đường thẳng BM . Viết phương trình của đường thẳng AH .

Câu 8a (1,0 điểm). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - 2y + z - 7 = 0$ và hai điểm $A(0; 0; 2)$, $B(1; -1; 0)$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm thuộc mặt phẳng Oxy , đi qua hai điểm A, B và tiếp xúc với (P) .

Câu 9a (1,0 điểm). Có hai cái hộp A và B đựng các cây viết. Hộp A gồm 5 cây viết màu đỏ và 6 cây viết màu xanh. Hộp B gồm 7 cây viết màu đỏ và 8 cây viết màu xanh. Lấy ngẫu nhiên cùng một lúc từ mỗi hộp ra một cây viết. Tính xác suất sao cho hai cây viết được lấy ra có cùng màu.

A. Theo chương trình Nâng cao

Câu 7b (1,0 điểm). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình thang cân $ABCD$ có AD và BC là hai đáy, $AB = BC = 5$. Biết rằng điểm $E(2; 1)$ thuộc cạnh AB , điểm $F(-2; -5)$ thuộc cạnh AD và phương trình đường thẳng AC là $x - 3y - 3 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B .

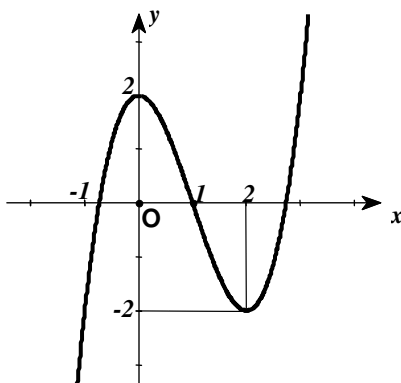
Câu 8b (1,0 điểm). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-1}$ và mặt cầu (S) có phương trình $(x-3)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 25$. Tìm tọa độ của điểm A trên đường thẳng Δ và tọa độ của điểm B trên mặt cầu (S) sao cho A và B đối xứng nhau qua trục Ox .

Câu 9b (1,0 điểm). Tìm số phức z , biết rằng $z \cdot \bar{z} = 2$ và $|\bar{z} - 1|^2 - z$ là một số thuần ảo.

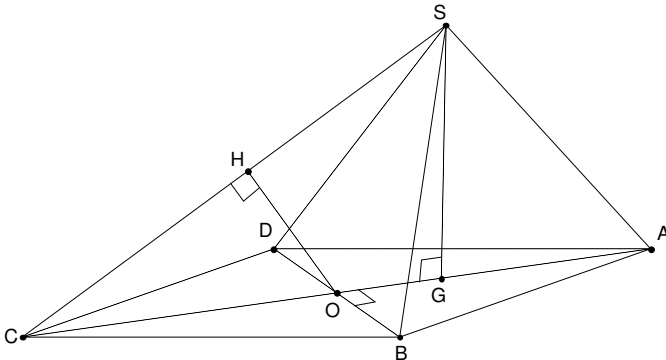
-----HẾT-----

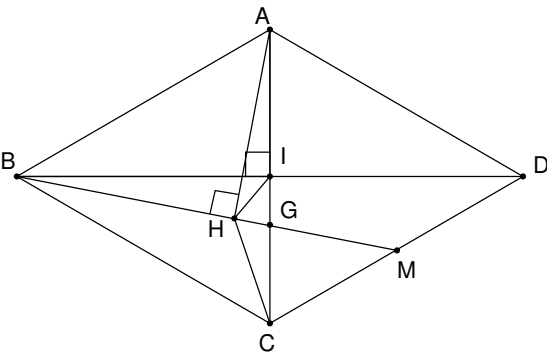
Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:.....Số báo danh:.....

Câu	Đáp án	Điểm																					
1a	- Khi $m = 1$ hàm số trở thành: $y = x^3 - 3x^2 + 2$. - Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. - Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$.	0,25																					
	Sự biến thiên: $y' = 3x^2 - 6x, y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$.	0,25																					
	- Bảng biến thiên: <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>2</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td></td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td></td></tr><tr><td>y</td><td></td><td></td><td>2</td><td></td><td>-2</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr></table> - Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$, nghịch biến trên $(0; 2)$. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0, y_{CD} = 2$; hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2, y_{CT} = -2$.	x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	y'		$+$	0	$-$	0	$+$		y			2		-2		$+\infty$	0,25
	x	$-\infty$	0	2	$+\infty$																		
y'		$+$	0	$-$	0	$+$																	
y			2		-2		$+\infty$																
Đồ thị: 	0,25																						
1b	Ta có: $y' = 3x^2 - 6mx; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2m \end{cases}$.	0,25																					
	Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m \neq 0$.																						
	Gọi $A(0; 2), B(2m; -4m^3 + 2)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số (1). Khi đó đường thẳng qua hai điểm cực trị có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{AB} = (2m; -4m^3)$ và có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (2m^2; 1)$. Trục Ox có vectơ pháp tuyến là $\vec{j} = (0; 1)$.	0,25																					
	Đường thẳng qua hai điểm cực trị tạo với trục Ox góc φ . Ta có: $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \left \cos(\vec{n}, \vec{j}) \right = \frac{1}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \frac{ \vec{n} \cdot \vec{j} }{ \vec{n} \cdot \vec{j} } = \frac{1}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{4m^4 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$	0,25																					
	$\Leftrightarrow 4m^4 + 1 = 5 \Leftrightarrow m = \pm 1$ (thỏa mãn điều kiện $m \neq 0$). Vậy $m = 1$ hoặc $m = -1$.	0,25																					
2	Ta có: $2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) = 1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) - 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} + 4x\right) = \sin 2x + \sin 4x$	0,25																					

	Phương trình đã cho tương đương với: $\sin x + \sin 5x = \sin 2x + \sin 4x$ $\Leftrightarrow 2 \sin 3x \cos 2x = 2 \sin 3x \cos x$ $\Leftrightarrow \cos 2x = \cos x$ hoặc $\sin 3x = 0$	0,25
	$\cos 2x = \cos x \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = x + k2\pi \\ 2x = -x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{k2\pi}{3} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$	0,25
	$\sin 3x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z}).$ Vậy phương trình có nghiệm là $x = \frac{k\pi}{3}.$ Chú ý: Nếu thí sinh không ghi $k \in \mathbb{Z}$, không gộp nghiệm thì không trừ điểm.	0,25
3	Điều kiện: $x \geq 1.$ Đặt $a = \sqrt[4]{2x-1} \quad (a \geq 0)$, ta có: $2x = a^4 + 1$. Phương trình đã cho trở thành: $a + \sqrt{a^4 + 2} = \sqrt{x-1} + \sqrt{(\sqrt{x-1})^4 + 2} \quad (1)$	0,25
	Xét hàm số $f(t) = t + \sqrt{t^4 + 2}$ với $t \geq 0$. Ta có $f'(t) = 1 + \frac{2t^3}{\sqrt{t^4 + 2}} > 0, \forall t \geq 0.$ Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[0; +\infty).$	0,25
	$(1) \Leftrightarrow f(a) = f(\sqrt{x-1}) \Leftrightarrow a = \sqrt{x-1} \Leftrightarrow \sqrt[4]{2x-1} = \sqrt{x-1}$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 4x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x = 2 \pm \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = 2 + \sqrt{2}.$	0,25
	Vậy phương trình đã cho có một nghiệm là $x = 2 + \sqrt{2}.$	
4	Tập xác định: $D = [1; +\infty).$ Phương trình hoành độ giao điểm của đường $y = (2x-1)\sqrt{\ln x}$ với $y = 0$ là: $(2x-1)\sqrt{\ln x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ \ln x = 0 \\ 2x-1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1. \text{ Do } x \geq 1 \text{ nên } y = (2x-1)\sqrt{\ln x} \geq 0.$	0,25
	Thể tích vật thể cần tính là: $V = \pi \int_1^e ((2x-1)\sqrt{\ln x})^2 dx = \pi \int_1^e (2x-1)^2 \ln x dx$	0,25
	Tính $I = \int_1^e (2x-1)^2 \ln x dx$. Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = (2x-1)^2 \end{cases}$, ta có $\begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = \frac{(2x-1)^3}{6} \end{cases}.$ $I = \frac{(2x-1)^3}{6} \ln x \Big _1^e - \int_1^e \frac{(2x-1)^3}{6x} dx = \frac{(2x-1)^3}{6} \ln x \Big _1^e - \left(\frac{4x^3}{9} - x^2 + x - \frac{\ln x}{6} \right) \Big _1^e = \frac{8e^3 - 9e^2 + 4}{9}.$	0,25
	Vậy $V = \pi \frac{8e^3 - 9e^2 + 4}{9}.$	0,25

5	 Gọi G là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$. Vì tứ diện $SABD$ đều nên G là trọng tâm của tam giác đều ABD. Ta có $S_{ABCD} = 2S_{\triangle ABD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.	0,25												
	Trong tam giác vuông SGA, ta có: $SG = \sqrt{SA^2 - GA^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Do đó: $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} . SG = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$.	0,25												
	Gọi O là tâm hình thoi. Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên SC, suy ra $OH \perp SC$. $\left. \begin{array}{l} DB \perp BC \\ DB \perp SG \end{array} \right\} \Rightarrow DB \perp (SAC) \Rightarrow DB \perp OH$. Vậy OH là đoạn vuông góc chung của SC và BD nên $d(DB, SC) = OH$, $SC = a\sqrt{2}$.	0,25												
	$\triangle CHO \sim \triangle CGS \Rightarrow \frac{HO}{GS} = \frac{CO}{CS} \Rightarrow HO = \frac{CO.GS}{CS} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3}}{\sqrt{2}a} = \frac{a}{2}$. Chú ý: Thí sinh có thể dùng phương pháp tọa độ trong không gian để giải bài này.	0,25												
6	Từ giả thiết $\log_2(x+y) = 3 + \log_2 x + \log_2 y$ suy ra $x+y = 8xy \leq 2(x+y)^2 \Rightarrow x+y \geq \frac{1}{2}$.	0,25												
	Ta có : $P = \frac{\sqrt{3^{2x} + 3^{-2y}}}{3^{x+1} + 3^{-y}} = \frac{\sqrt{3^{2x+2y} + 1}}{3 \cdot 3^{x+y} + 1}$. Đặt $t = 3^{x+y}$. Vì $x+y \geq \frac{1}{2}$ nên $t \geq \sqrt{3}$. Lúc đó $P = \frac{\sqrt{t^2 + 1}}{3t + 1} = f(t)$.	0,25												
	Xét hàm số $f(t) = \frac{\sqrt{t^2 + 1}}{3t + 1}$ trên $[\sqrt{3}; +\infty)$. Ta có $f'(t) = \frac{t-3}{(3t+1)^2 \sqrt{t^2 + 1}}$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 3$. Bảng biến thiên : <table><tr><td>t</td><td>$\sqrt{3}$</td><td>3</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f'(t)$</td><td>—</td><td>0</td><td>+</td></tr><tr><td>$f(t)$</td><td>$\frac{2}{3\sqrt{3}+1}$</td><td>$\frac{1}{\sqrt{10}}$</td><td>$\frac{1}{3}$</td></tr></table>	t	$\sqrt{3}$	3	$+\infty$	$f'(t)$	—	0	+	$f(t)$	$\frac{2}{3\sqrt{3}+1}$	$\frac{1}{\sqrt{10}}$	$\frac{1}{3}$	0,25
t	$\sqrt{3}$	3	$+\infty$											
$f'(t)$	—	0	+											
$f(t)$	$\frac{2}{3\sqrt{3}+1}$	$\frac{1}{\sqrt{10}}$	$\frac{1}{3}$											
	Vậy $P \geq \frac{1}{\sqrt{10}}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x+y=1 \\ x+y=8xy \\ x,y>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{2+\sqrt{2}}{4} \\ y=\frac{2-\sqrt{2}}{4} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=\frac{2-\sqrt{2}}{4} \\ y=\frac{2+\sqrt{2}}{4} \end{cases}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là $\frac{1}{\sqrt{10}}$.	0,25												

7a	 Gọi I là tâm hình thoi và G là giao điểm của BM với AC thì G là trọng tâm của tam giác BCD. Trong tam giác vuông BIG, ta có: $\sin \widehat{IBG} = \frac{IG}{BG} = \frac{IG}{\sqrt{BI^2 + IG^2}} = \frac{IG}{\sqrt{(6IG)^2 + IG^2}} = \frac{1}{\sqrt{37}}$ Suy ra $\cos(BD, AH) = \sin \widehat{IBG} = \frac{1}{\sqrt{37}}$.	0,25
	Gọi $\vec{n} = (a; b)$ với $a^2 + b^2 > 0$ là vector pháp tuyến của đường thẳng AH. Ta có $\cos(BD, AH) = \frac{1}{\sqrt{37}} \Leftrightarrow \frac{ a-b }{\sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{37}} \Leftrightarrow 35a^2 - 74ab + 35b^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{7b}{5} \\ a = \frac{5b}{7} \end{cases}$.	0,25
	Với $a = \frac{7b}{5}$, chọn $a = 7; b = 5$, ta được $AH: 7(x-2) + 5(y+1) = 0 \Leftrightarrow 7x + 5y - 9 = 0$.	0,25
	Với $a = \frac{5b}{7}$, chọn $a = 5; b = 7$, ta được $AH: 5(x-2) + 7(y+1) = 0 \Leftrightarrow 5x + 7y - 3 = 0$.	0,25
8a	Gọi T là tâm mặt cầu (S). $T \in Oxy \Leftrightarrow T(a; b; 0)$. Vì (S) đi qua hai điểm $A(0; 0; 2)$, $B(1; -1; 0)$ nên $TA = TB \Leftrightarrow a^2 + b^2 + 4 = (a-1)^2 + (b+1)^2 \Leftrightarrow a - b + 1 = 0 \Leftrightarrow a = b - 1$. (S) tiếp xúc với $(P): 2x - 2y + z - 7 = 0 \Leftrightarrow d(T, (P)) = TA \Leftrightarrow \frac{ 2a - 2b - 7 }{3} = \sqrt{a^2 + b^2 + 4} \quad (*)$ Thay $a = b - 1$ vào $(*)$, ta được: $(*) \Leftrightarrow \sqrt{(b-1)^2 + b^2 + 4} = 3 \Leftrightarrow b^2 - b - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = -1 \\ b = 2 \end{cases}$. $b = -1$ thì $a = -2$ nên $T(-2; -1; 0)$ và $R = 3$ nên $(S): (x+2)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 9$. $b = 2$ thì $a = 1$ nên $T(1; 2; 0)$ và $R = 3$ nên $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 9$.	0,25
9a	Số cách lấy từ mỗi hộp ra một cây viết là: $11 \times 15 = 165$ (cách) Số cách lấy từ mỗi hộp ra một cây viết có cùng màu đỏ là: $5 \times 7 = 35$ (cách) Số cách lấy từ mỗi hộp ra một cây viết có cùng màu xanh là: $6 \times 8 = 48$ (cách) Xác suất hai cây viết được lấy ra có cùng màu là: $P = \frac{35 + 48}{165} = \frac{83}{165}$.	0,25
7b	Do $ABCD$ là hình thang cân nên nó là một tứ giác nội tiếp. Mặt khác, vì $AB = BC = CD$ nên AC là phân giác trong góc BAD. AC có vector chỉ phương là $\vec{u}_{AC} = (3; 1)$. Gọi $H(3t+3; t)$ là hình chiếu của E trên AC. Ta có $\vec{EH} = (3t+1; t-1)$. $\vec{EH} \perp \vec{u}_{AC} \Leftrightarrow 3(3t+1) + t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{5} \Rightarrow H\left(\frac{12}{5}; -\frac{1}{5}\right)$. Gọi M là điểm đối xứng với E qua AC thì M thuộc CD. Ta có $M\left(\frac{14}{5}; -\frac{7}{5}\right)$. Đường thẳng AD đi qua điểm $F(-2; -5)$ có vector chỉ phương $\vec{FM} = \left(\frac{24}{5}; \frac{18}{5}\right)$, có vector pháp	0,25

	tuyến $\overrightarrow{n_{CD}} = (3; -4)$ nên có phương trình: $AD : 3x - 4y - 14 = 0$. A là giao điểm của AD và AC nên suy ra $A(6; 1)$.	
	Ta có $\overrightarrow{AE} = (-4; 0) \Rightarrow AE = 4$. Vì $AB = 5$ và E thuộc cạnh AB nên $\overrightarrow{AB} = \frac{5}{4}\overrightarrow{AE} = (-5; 0)$. Vậy $B(1; 1)$.	0,25
8b	Gọi $A(1+2t; 2+t; -t)$ là điểm trên Δ và $H(1+2t; 0; 0)$ là hình chiếu của A trên Ox . Vì A và B đối xứng nhau qua trục Ox nên H là trung điểm AB , do đó $B(1+2t; -2-t; t)$.	0,25
	$B \in (S) \Leftrightarrow (2t-2)^2 + (-t-4)^2 + (t+1)^2 = 25 \Leftrightarrow 6t^2 + 2t - 4 = 0 \Leftrightarrow t = -1$ hoặc $t = \frac{2}{3}$.	0,25
	Với $t = -1$ ta có $A(-1; 1; 1)$ và $B(-1; -1; -1)$.	0,25
	Với $t = \frac{2}{3}$ ta có $A\left(\frac{7}{3}; \frac{8}{3}; -\frac{2}{3}\right)$ và $B\left(\frac{7}{3}; -\frac{8}{3}; \frac{2}{3}\right)$.	0,25
9b	Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Ta có: $z \cdot \bar{z} = 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2$ (1)	0,25
	$ \bar{z} - 1 ^2 - z = (x-1)^2 + y^2 - (x+yi) = (x-1)^2 + y^2 - x - yi$ $ \bar{z} - 1 ^2 - \bar{z}$ là một số thuần ảo $\Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 - x = 0$ (2)	0,25
	Từ (1), (2), ta có hệ: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ (x-1)^2 + y^2 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 2 - x^2 \\ -3x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \pm 1 \end{cases}$	0,25
	Vậy có 2 số phức thỏa yêu cầu bài toán là $z = 1 + i; z = 1 - i$.	0,25

HẾT