

BÀI TOÁN PHỤ CỦA BÀI TOÁN KHẢO SÁT HÀM SỐ

Diễn đàn toán học Việt Nam (VMF)
Vietnam Mathematics Forum -<http://diendantoanhoc.net>

Ngày 23 tháng 4 năm 2014

Kí hiệu dùng trong sách

GTLN	:	Giá trị lớn nhất
GTNN	:	Giá trị nhỏ nhất
HSG	:	Học sinh giỏi
TXĐ	:	Tập xác định
VP	:	Vế phải
VT	:	Vế trái
■	:	Kết thúc Lời giải
△	:	Kết thúc Định nghĩa, Ví dụ
□	:	Kết thúc Định lý

Lời giải(Toc Ngan) : Lời giải được đề xuất bởi thành viên *Toc Ngan*

$$\sum_{i=1}^n u_i = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

$$\prod_{i=1}^n u_i = u_1 \cdot u_2 \dots u_n$$

Trong tài liệu này, khi cho một hàm số có hai ẩn $y = f(x, m)$, nếu không nói gì thêm thì ta hiểu x là biến số còn m là tham số.

Mục lục

1	Lý thuyết chung	4
1.1	Tam thức bậc hai	4
1.2	Đường thẳng và hệ số góc	5
1.3	Phương pháp tọa độ trong mặt phẳng	6
1.4	Bảng đạo hàm cơ bản	6
1.5	Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số	6
1.6	Đồ thị của các hàm số đã học	7
1.6.1	Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d, (a \neq 0)$	7
1.6.2	Hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c, (a \neq 0)$	7
1.6.3	Hàm số $y = \frac{ax + b}{cx + d}, (c \neq 0, ad - bc \neq 0)$	8
2	Tính đơn điệu của hàm số	9
2.1	Sự đơn điệu của hàm số	9
2.2	Áp dụng	9
2.3	Bài tập	15
3	Bài toán Cực trị	16
3.1	Cực trị của hàm số	16
3.2	Tìm điều kiện để hàm số có cực trị	17
3.3	Cực trị của hàm số bậc ba	18
3.4	Cực trị và hàm số bậc bốn trùng phương	20
3.5	Bài tập	22
4	Bài toán tương giao	23
4.1	Điều kiện về số giao điểm	23
4.2	Điều kiện về hoành độ giao điểm	25
4.3	Giao điểm và khoảng cách	28
4.4	Giao điểm và góc	29
4.5	Các phép biến đổi đồ thị	29
4.6	Bài tập	31
5	Bài toán tiếp tuyến	32
5.1	Phương trình tiếp tuyến	32
5.2	Ba dạng bài viết phương trình tiếp tuyến	32
5.3	Số lượng tiếp tuyến	33
5.4	Tiếp tuyến và khoảng cách	33
5.5	Tiếp tuyến và góc	35
5.6	Bài toán khác	35
5.7	Bài tập	36
6	Điểm đặc biệt thuộc đồ thị	37

1 Lý thuyết chung

1.1 Tam thức bậc hai

Định nghĩa 1.1.

Tam thức bậc hai là biểu thức có dạng

$$f(x) = ax^2 + bx + c, (a \neq 0) \quad (1.1)$$

Nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ cũng được gọi là **nghiệm của tam thức bậc hai**. Δ

Định lý 1.1 (Định lý về dấu của tam thức bậc hai).

Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c, (a \neq 0)$. Đặt $\Delta = b^2 - 4ac$.

Nếu $\Delta < 0$ thì $f(x)$ luôn cùng dấu với hệ số $a, \forall x \in \mathbb{R}$.

Nếu $\Delta = 0$ thì $f(x)$ luôn cùng dấu với hệ số $a, \forall x \neq -\frac{b}{2a}$.

Nếu $\Delta > 0$ thì

$$\begin{cases} f(x) \text{ trái dấu với hệ số } a, & \forall x \in (x_1; x_2); \\ f(x) \text{ cùng dấu với hệ số } a, & \forall x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty). \end{cases}$$

Trong đó $x_1 < x_2$ là hai nghiệm phân biệt của $f(x)$. □

Định lý 1.2 (Định lý Viète).

Nếu tam thức $f(x) = ax^2 + bx + c, (a \neq 0)$ có hai nghiệm $x_1; x_2$ thì:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; x_1 x_2 = \frac{c}{a}. \quad \square$$

Tính chất 1.1.

Đối với tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$, ta có các nhận xét sau:

1. $f(x)$ có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi $ac < 0$.
2. $f(x)$ có hai nghiệm dương khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} b^2 - 4ac > 0 \\ -\frac{b}{a} > 0 \\ \frac{c}{a} > 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

3. $f(x)$ có hai nghiệm âm khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} b^2 - 4ac > 0 \\ -\frac{b}{a} < 0 \\ \frac{c}{a} > 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

4. $f(x)$ có hai nghiệm phân biệt cùng lớn hơn α khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} b^2 - 4ac > 0 \\ x_1 + x_2 > 2\alpha \\ (x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha) > 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

5. $f(x)$ có hai nghiệm phân biệt cùng nhỏ hơn α khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} b^2 - 4ac > 0 \\ x_1 + x_2 < 2\alpha \\ (x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha) > 0 \end{cases} \quad (1.5)$$

6. $f(x)$ có hai nghiệm phân biệt, $x_1 < \alpha < x_2$ khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} b^2 - 4ac > 0 \\ (x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha) < 0 \end{cases} \quad (1.6)$$

□

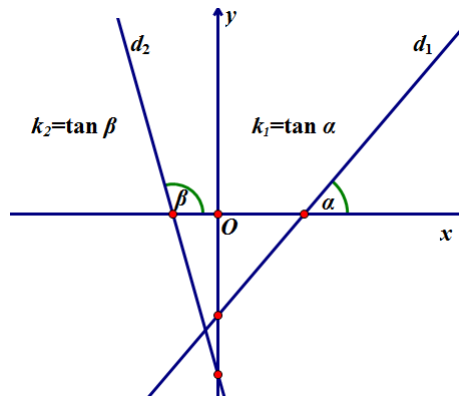
Tính chất 1.2.

Nếu $a > 0$ thì hàm số $y = ax^2 + bx + c$ đồng biến trong $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$, nghịch biến trong $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$.

Nếu $a < 0$ thì hàm số $y = ax^2 + bx + c$ nghịch biến trong $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$, đồng biến trong $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$. □

1.2 Đường thẳng và hệ số góc

- Hệ số góc của đường thẳng là tang của góc tạo bởi phần phía trên trục Ox của đường thẳng và chiều dương của trục Ox . Như hình vẽ dưới đây, k_1, k_2 lần lượt là hệ số góc của các đường thẳng d_1, d_2 .



- Đường thẳng có giá song song hoặc trùng với trục Ox thì có hệ số góc bằng 0.

3. Đường thẳng có giá song song hoặc trùng với trục Oy thì không có hệ số góc.
4. Đường thẳng $y = ax + b$ có hệ số góc là a .
5. Đường thẳng đi qua $M(x_0; y_0)$ và có hệ số góc k thì có phương trình:

$$y = k(x - x_0) + y_0. \quad (1.7)$$

6. Hai đường thẳng song song có cùng hệ số góc.
7. Hai đường thẳng vuông góc có tích hệ số góc bằng -1 .

1.3 Phương pháp tọa độ trong mặt phẳng

1. Khoảng cách giữa hai điểm $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$ là:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \quad (1.8)$$

2. Khoảng cách từ điểm $M(x_0; y_0)$ đến đường thẳng $(\Delta): ax + by + c = 0$ là:

$$d_{(M;(\Delta))} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (1.9)$$

1.4 Bảng đạo hàm cơ bản

$$c' = 0 \quad ; \quad x' = 1 \quad (1.10)$$

$$(x^n)' = nx^{n-1} \quad ; \quad (u^n)' = nx^{n-1}u' \quad (1.11)$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad ; \quad (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} \quad (1.12)$$

$$(\sin x)' = \cos x \quad ; \quad (\sin u)' = u' \cos u \quad (1.13)$$

$$(\cos x)' = -\sin x \quad ; \quad (\cos u)' = -u' \sin u \quad (1.14)$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad ; \quad (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \quad (1.15)$$

$$(u \pm v)' = u' \pm v' \quad (1.16)$$

$$(uv)' = u'v + uv' \quad ; \quad (ku)' = ku' \quad (1.17)$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad ; \quad \left(\frac{k}{v}\right)' = -\frac{kv'}{v^2} \quad (1.18)$$

1.5 Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

Định nghĩa 1.2.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D . **Giá trị lớn nhất** M , kí hiệu $\max_D f(x)$ và **giá trị nhỏ nhất** m , kí hiệu $\min_D f(x)$ của hàm số $y = f(x)$ trên D được định nghĩa như sau:

$$M = \max_D f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq M, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D : f(x_0) = M \end{cases} \quad (1.19)$$

$$m = \min_D f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq m, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D : f(x_0) = m \end{cases} \quad (1.20)$$

△

Tính chất 1.3.

$$m \leq g(x), \forall x \in [a; b] \Leftrightarrow m \leq \min_{[a; b]} g(x) \quad (1.21)$$

$$m \geq g(x), \forall x \in [a; b] \Leftrightarrow m \geq \max_{[a; b]} g(x) \quad (1.22)$$

□

Tính chất 1.4.

Điều kiện cần và đủ để phương trình:

$$f(x) = m \quad (1.23)$$

có nghiệm là

$$\min f(x) \leq m \leq \max f(x) \quad (1.24)$$

□

Quy tắc tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = f(x)$ trên $[a; b]$

B1. Tính đạo hàm y' và giải phương trình $y' = 0$ trên $[a; b]$, thu được các nghiệm:

$$x_1, x_2, \dots, x_n \in [a; b]$$

B2. Tính:

$$f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(a), f(b) \quad (1.25)$$

B3. Kết luận. Số lớn nhất trong các số ở (1.25) chính là GTLN, số bé nhất trong các số ở (1.25) là GTNN.

Khi tập cần tìm không phải là một đoạn, ta cần lập bảng biến thiên của hàm số, dựa vào bảng biến thiên và kết luận.

1.6 Đồ thị của các hàm số đã học**1.6.1 Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d, (a \neq 0)$**

Đồ thị luôn cắt trục hoành tại ít nhất một điểm.

Đồ thị có tâm đối xứng $I(x_I; y_I)$. Trong đó x_I là nghiệm của phương trình: $y'' = 0$. Điểm I còn được gọi là **Điểm uốn** của đồ thị.

1.6.2 Hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c, (a \neq 0)$

Đồ thị luôn nhận trục Oy làm trục đối xứng.

Nếu hàm số có ba cực trị, thì ba điểm cực trị đó luôn tạo thành một tam giác cân tại điểm cực trị nằm trên Oy .

1.6.3 Hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}, (c \neq 0, ad-bc \neq 0)$

Đồ thị hàm số có tâm đối xứng $I\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$ là giao điểm của hai đường tiệm cận.

Đồ thị là Hyperbol có hai nhánh nằm ở hai bên của đường tiệm cận đứng $x = -\frac{d}{c}$.

CHÚ Ý: do hàm số $y = \frac{ax^2+bx+c}{a'x+b'}$ chỉ học trong chương trình THPT ban Nâng cao và trong những kì thi gần đây, đã không xuất hiện trong câu khảo sát hàm số nữa nên chúng tôi đã bỏ những ví dụ đối với hàm số này đi.

2 Tính đơn điệu của hàm số

2.1 Sự đơn điệu của hàm số

Định nghĩa 2.1.

Hàm số $y = f(x)$ xác định trên D được gọi là **đồng biến** trên D nếu $\forall x_1, x_2 \in D$, ta có:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \quad (2.1)$$

Hàm số $y = f(x)$ xác định trên D được gọi là **nghịch biến** trên D nếu $\forall x_1, x_2 \in D$, ta có:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2) \quad (2.2)$$

△

Định lý 2.1.

Giả sử hàm số $y = f(x)$ xác định và có đạo hàm trên D . Khi đó:

a) Nếu $f'(x) \geq 0, \forall x \in K$ thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên K .

b) Nếu $f'(x) \leq 0, \forall x \in K$ thì hàm số $f(x)$ nghịch biến trên K .

(Dấu "=" chỉ xảy ra tại một số hữu hạn điểm)

□

2.2 Áp dụng

Bài toán 2.1. Cho hàm số $y = f(x, m)$. Tìm điều kiện của tham số m để hàm số đồng biến (nghịch biến) trên $(a; b)$. △

Phương pháp giải.

Ta giải quyết cho trường hợp đồng biến, trường hợp nghịch biến, ta làm tương tự.

B1: Tìm TXĐ.

B2: Tính đạo hàm: $y' = f'(x, m)$.

B3: Đến đây, có 3 cách chủ yếu để giải bài toán này.

Cách 1. (Phương pháp cô lập ẩn m)

Yêu cầu của bài toán tương đương với:

$$f'(x, m) \geq 0, \forall x \in [a; b] \quad (2.3)$$

Biến đổi tương đương bất phương trình (2.3) về dạng:

$$m \geq g(x), \forall x \in [a; b]$$

hoặc

$$m \leq g(x), \forall x \in [a; b]$$

Sử dụng (1.21), (1.22), ta đưa bài toán đã cho về bài toán tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = g(x)$ trên $[a; b]$

Cách 2. (Phương pháp lập bảng biến thiên)

Ta chia nhỏ các trường hợp về dấu của $f'(x; m)$ và lập bảng biến thiên của hàm số và

dựa vào bảng biến thiên, ta kết luận được vị trí của a, b so với các nghiệm $x_1, x_2, \dots$ của đạo hàm. Đến đây, ta sử dụng tính chất (1.1).

Cách 3. (Kỹ thuật Parabol)

Nếu

$$(2.3) \Leftrightarrow g(x) \geq 0$$

hoặc

$$(2.3) \Leftrightarrow g(x) \leq 0$$

với $g(x)$ là một tam thức bậc hai thì ta có thể sử dụng tính chất (1.2). ■

Ví dụ 2.1. Tìm m để hàm số: $y = x^3 - 5x^2 - (3m - 2)x + 7$.

a) Đồng biến trên $\mathbb{R}$.

b) Nghịch biến trên $(-2; 1)$.

Lời giải.

TXĐ: $\mathbb{R}$.

Ta có:

$$y' = 3x^2 - 10x - 3m + 2$$

a) **Cách 1**

Yêu cầu của bài toán được thỏa mãn khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow m \leq x^2 - \frac{10}{3}x + \frac{2}{3}, \forall x \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow m \leq \min g(x) \end{aligned}$$

Với $g(x) = x^2 - \frac{10}{3}x + \frac{2}{3}$. Ta có:

$$\min g(x) = g\left(\frac{5}{3}\right) = -\frac{19}{9}$$

Do đó yêu cầu của bài toán tương đương với:

$$m \leq -\frac{19}{9}$$

Cách 2 (wtuan159)

Dễ thấy y' là tam thức bậc hai có $\Delta' = 9m + 19$.

Yêu cầu của bài toán được thỏa mãn khi và chỉ khi

$$y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta' \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -\frac{19}{9}$$

Cách 3

Yêu cầu của bài toán được thỏa mãn khi và chỉ khi:

$$y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 3x^2 - 10x - 3m + 2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \quad (2.4)$$

Vì $h(x) = 3x^2 - 10x - 3m + 2$ là hàm số bậc hai hoành độ đỉnh là $x_0 = \frac{5}{3}$ nên

$$h(x) \geq h\left(\frac{5}{3}\right) = -3m - \frac{19}{3}$$

Do đó:

$$(2.4) \Leftrightarrow m \leq -\frac{19}{9}$$

b) **Cách 1**

Yêu cầu của bài toán được thỏa mãn khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} y' \leq 0, \forall x \in [-2; 1] &\Leftrightarrow m \geq x^2 - \frac{10}{3}x + \frac{2}{3}, \forall x \in [-2; 1] \\ &\Leftrightarrow m \geq \max_{[-2; 1]} g(x) \end{aligned}$$

Với $g(x) = x^2 - \frac{10}{3}x + \frac{2}{3}$. Ta có:

$$\max_{[-2; 1]} g(x) = g(-2) = \frac{34}{3}$$

Do đó yêu cầu của bài toán tương đương với:

$$m \geq \frac{34}{3}$$

Cách 2 (wtuan159)

Dễ thấy y' là tam thức bậc hai có $\Delta' = 9m + 19$.

* Nếu $m \leq -\frac{19}{9}$ thì $\Delta' \leq 0$. Khi đó $y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó yêu cầu bài toán không được thỏa mãn.

* Nếu $m > -\frac{19}{9}$ thì $\Delta' > 0$, khi đó phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm $x_1, x_2, (x_1 < x_2)$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số:

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$		
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$+\infty$	

Yêu cầu bài toán được thỏa mãn khi và chỉ khi:

$$\begin{aligned} x_1 \leq -2 < 1 \leq x_2 &\Leftrightarrow \begin{cases} (x_1 + 2)(x_2 + 2) \leq 0 \\ (x_1 - 1)(x_2 - 1) \leq 0 \\ x_1 + x_2 \geq -4 \\ x_1 + x_2 \leq 2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2-3m}{3} + 2 \cdot \frac{10}{3} + 4 \leq 0 \\ \frac{2-3m}{3} - \frac{10}{3} + 1 \leq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow m \geq \frac{34}{3} \text{ (thỏa mãn điều kiện } m > -\frac{19}{9}) \end{aligned}$$

Vậy $m \geq \frac{34}{3}$ là đáp án của bài toán.

Cách 3

Yêu cầu của bài toán được thỏa mãn khi và chỉ khi

$$y' \leq 0, \forall x \in [-2; 1] \Leftrightarrow 3x^2 - 10x - 3m + 2 \leq 0, \forall x \in [-2; 1] \quad (2.5)$$

Vì $h(x) = 3x^2 - 10x - 3m + 2$ là hàm số bậc hai hoành độ đỉnh là $x_0 = \frac{5}{3} > 1$ nên hàm số $y = h(x)$ luôn nghịch biến trên $[-2; 1]$. Do đó:

$$h(x) \leq h(-2) = 34 - 3m, \forall x \in [-2; 1]$$

Vậy

$$(2.5) \Leftrightarrow m \geq \frac{34}{3} \quad \blacksquare$$

Ví dụ 2.2. Tìm điều kiện của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3(2m+1)x^2 + (12m+5)x + 1$ đồng biến trên $(-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$ $\triangle$

Lời giải (E.Galois).

TXĐ: $\mathbb{R}$. Đặt $K = (-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$

Ta có:

$$y' = 3x^2 - 6(2m+1)x + 12m + 5$$

Cách 1:

Yêu cầu của bài toán được thỏa mãn khi và chỉ khi

$$y' \geq 0, \forall x \in K \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \frac{3x^2 - 6x + 5}{12(x-1)}, \forall x \in (-\infty; -1] \\ m \leq \frac{3x^2 - 6x + 5}{12(x-1)}, \forall x \in [2; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \max_{(-\infty; -1]} g(x) \\ m \leq \min_{[2; +\infty)} g(x) \end{cases} \quad (2.6)$$

Trong đó: $g(x) = \frac{3x^2 + 6x - 5}{x-1}$. Ta có:

$$g'(x) = \frac{3x^2 - 6x + 1}{12(x-1)^2}$$

Phương trình $g'(x) = 0$ vô nghiệm trên K .

$$g(-1) = -\frac{7}{12}; g(2) = \frac{5}{12}; \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty;$$

Do đó

$$\max_{(-\infty; -1]} g(x) = -\frac{7}{12}; \min_{[2; +\infty)} g(x) = \frac{5}{12}$$

Vậy:

$$(2.6) \Leftrightarrow -\frac{7}{12} \leq m \leq \frac{5}{12}$$

Cách 2:

Dễ thấy y' là tam thức bậc hai có: $\Delta' = 6(6m^2 - 1)$.

**Trường hợp 1* Nếu $-\frac{1}{\sqrt{6}} \leq m \leq \frac{1}{\sqrt{6}}$ thì $\Delta' \leq 0$. Khi đó $y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$. Yêu cầu của bài toán được thỏa mãn.

**Trường hợp 1* Nếu $m < -\frac{1}{\sqrt{6}}$ hoặc $m > \frac{1}{\sqrt{6}}$ thì $\Delta' > 0$. Khi đó phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$. Ta có bảng biến thiên của hàm số:

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$		
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$+\infty$	

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy yêu cầu của bài toán được thỏa mãn khi và chỉ khi:

$$\begin{aligned}
 -1 \leq x_1 < x_2 \leq 2 &\Leftrightarrow \begin{cases} (x_1 - 2)(x_2 - 2) \geq 0 \\ (x_1 + 1)(x_2 + 1) \geq 0 \\ x_1 + x_2 \geq -2 \\ x_1 + x_2 \leq 4 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{12m+5}{3} - 2 \cdot 2(2m+1) + 4 \geq 0 \\ \frac{12m+5}{3} + 2(2m+1) + 1 \geq 0 \\ 2(2m+1) \geq -2 \\ 2(2m+1) \leq 4 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow -\frac{7}{12} \leq m \leq \frac{5}{12}
 \end{aligned}$$

Kết hợp cả hai trường hợp, ta có đáp án của bài toán là:

$$-\frac{7}{12} \leq m \leq \frac{5}{12}$$

Cách 3:

Yêu cầu của bài toán được thỏa mãn khi và chỉ khi

$$3x^2 - 6(2m+1)x + 12m+5 \geq 0 \forall x \in K$$

Dễ thấy $h(x) = 3x^2 - 6(2m+1)x + 12m+5$ là tam thức bậc hai có hoành độ đỉnh: $x_0 = 2m+1$ và:

$$g(-1) = 14 + 24m; g(1) = 5 - 12m; g(2m+1) = 2(1 - 6m^2)$$

Do parabol $y = h(x)$ có bề lõm quay lên trên nên yêu cầu của bài toán tương đương với:

$$\begin{cases} g(2m+1) \geq 0 \\ \begin{cases} g(-1) \geq 0 \\ g(2) \geq 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{7}{12} \leq m \leq \frac{5}{12}$$

■

Ví dụ 2.3. Tìm điều kiện của tham số m để hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 1$ đồng biến trên $[2; +\infty)$ △

Lời giải (pigloo).TXD: $\mathbb{R}$

Ta có

$$y' = 4x^3 - 4mx = 4x(x^2 - m)$$

Yêu cầu của bài toán được thỏa mãn khi và chỉ khi:

$$y' \geq 0, \forall x \in [2, +\infty) \Leftrightarrow x^2 - m \geq 0, \forall x \in [2, +\infty) \quad (2.7)$$

Vì hàm số bậc hai $y = h(x) = x^2 - m$ đồng biến trên $[2, +\infty)$ nên

$$(2.7) \Leftrightarrow h(2) \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 4$$

Vậy $m \leq 4$ là đáp án của bài toán. ■

Bạn đọc hãy tự giải ví dụ trên bằng hai cách còn lại.

Ví dụ 2.4. *Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 + 3x^2 + mx + m$ chỉ nghịch biến trên một đoạn có độ dài bằng 1.* △

PHÂN TÍCH. Bài toán tương đương với:

Tìm m để $g(x) = 3x^2 + 6x + m$ chỉ mang dấu âm trên một đoạn có độ dài bằng 1.

Vấn đề cần phân tích là âm trên một đoạn có độ dài bằng 1. Khi xét dấu tam thức bậc hai có những khả năng nào?

- Nếu $\Delta \leq 0$ thì $g(x)$ mang dấu âm trên những khoảng nào, và khoảng ấy có độ dài như thế nào?- Tương tự nếu $\Delta > 0$ thì sao?

Khi trả lời 2 câu hỏi này, ta sẽ phát hiện ra rằng chỉ khi $\Delta \geq 0$ thì mới xuất hiện một đoạn “*Trong khoảng hai nghiệm*” có độ dài hữu hạn và độ dài của đoạn này là $|x_1 - x_2|$ (với x_1, x_2 là nghiệm của $g(x)$).

Từ đó ta có điều kiện tương đương của bài toán là:

$$\begin{cases} \Delta' = 9 - 3m > 0 \\ |x_1 - x_2| = 1 \end{cases}$$

Và đến đây một phản xạ tự nhiên là ta sẽ nghĩ đến định lý Viète.

Lời giải (leminhansp).TXD: $D = \mathbb{R}$

$$y' = g(x) = 3x^2 + 6x + m; \Delta' = 9 - 3m$$

Yêu cầu của bài toán được thỏa mãn khi và chỉ khi $y' \leq 0$ trên một đoạn có độ dài bằng 1.Nếu $\Delta' \leq 0$ thì $g(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} = (-\infty; +\infty)$ (không thỏa mãn).Nếu $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m < 3$ thì $g(x)$ có hai nghiệm $x_1 < x_2$ và $g(x) \leq 0, \forall x \in [x_1; x_2]$.

Khi đó, yêu cầu của bài toán tương đương với:

$$\begin{aligned} |x_1 - x_2| = 1 &\Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 1 \\ &\Leftrightarrow (-2)^2 - 4 \cdot \frac{m}{3} = 1 \\ &\Leftrightarrow m = \frac{9}{4}, (\text{thỏa mãn điều kiện } m < 3) \end{aligned}$$

Kết luận: $m = \frac{9}{4}$ là nghiệm của bài toán. ■

Khái quát ví dụ trên, ta có bài toán.

Bài toán 2.2. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Tìm điều kiện để hàm số chỉ đồng biến (hoặc chỉ nghịch biến) trong một khoảng có độ dài nhỏ hơn hoặc bằng k . △

Phương pháp giải (leminhansp).

Ta xét trường hợp hàm số đồng biến, trường hợp nghịch biến, ta làm tương tự.

Điều kiện của bài toán tương đương với $y' \geq 0, \forall x \in (x_1; x_2), |x_1 - x_2| \geq k$, điều đó xảy ra khi và chỉ khi $a < 0$ và phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt ($\Delta > 0$) thỏa mãn

$$|x_1 - x_2| \geq k \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 \geq k^2 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 \geq k^2$$

Đến đây ta sử dụng định lí Viète và suy ra kết quả. ■

2.3 Bài tập

1. Cho hàm số

3 Bài toán Cực trị

3.1 Cực trị của hàm số

Định nghĩa 3.1.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên D và $x_0 \in D$. Nếu tồn tại khoảng $K \subset D$ sao cho:

$$\begin{cases} x_0 \in K \\ f(x) \geq f(x_0), \forall x \in K \end{cases} \quad (3.1)$$

thì ta nói $f(x)$ đạt **cực đại** tại x_0 . Điểm $x = x_0$ được gọi là **điểm cực đại**.

Nếu tồn tại khoảng $K \subset D$ sao cho:

$$\begin{cases} x_0 \in K \\ f(x) \leq f(x_0), \forall x \in K \end{cases} \quad (3.2)$$

thì ta nói $f(x)$ đạt **cực tiểu** tại x_0 . Điểm $x = x_0$ được gọi là **điểm cực tiểu**.

Cực đại và cực tiểu được gọi chung là **cực trị**. Điểm cực đại và điểm cực tiểu gọi chung là **điểm cực trị**. $\triangle$

Cực trị chỉ mang tính chất địa phương và tránh nhầm lẫn giữa cực tiểu với GTNN, cực đại với GTLN.

Định lý 3.1.

Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trong khoảng $K = (x_0 - h; x_0 + h)$, $h > 0$ và có đạo hàm trên K hoặc $K \setminus \{x_0\}$. Ta có:

x	$x_0 - h$	x_0	$x_0 + h$	x	$x_0 - h$	x_0	$x_0 + h$		
y'		+	0	-	y'		-	0	+
y			f_{CD}		y		f_{CT}		

□

Định lý 3.2.

Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm đến cấp hai trong khoảng $K = (x_0 - h; x_0 + h)$, $h > 0$

$$\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) > 0 \end{cases} \Rightarrow x_0 \text{ là điểm cực tiểu} \quad (3.3)$$

$$\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{cases} \Rightarrow x_0 \text{ là điểm cực đại} \quad (3.4)$$

□

Chú ý, từ hai định lý trên ta có:

$$x_0 \text{ là điểm cực trị} \Rightarrow f'(x_0) = 0 \quad (3.5)$$

Điều ngược lại chưa chắc đúng. Tức là, nếu $f'(x_0) = 0$ thì chưa chắc x_0 đã là điểm cực trị.

3.2 Tìm điều kiện để hàm số có cực trị

NHẬN XÉT. Từ nhận xét (3.5), ta nhận thấy số cực trị của hàm số $y = f(x)$ có liên quan trực tiếp đến số nghiệm của phương trình:

$$f'(x) = 0 \quad (3.6)$$

Ta có các trường hợp cụ thể sau:

- Đối với hàm số bậc ba:

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d, (a \neq 0) \quad (3.7)$$

Hàm số (3.7) hoặc có 2 cực trị hoặc không có cực trị nên điều kiện cần và đủ để hàm số (3.7) có cực trị là phương trình (3.6) có hai nghiệm phân biệt.

- Đối với hàm số bậc bốn trùng phương:

$$y = ax^4 + bx^2 + c, (a \neq 0) \quad (3.8)$$

Hàm số (3.8) có thể có 1 hoặc 3 cực trị. Điều kiện và đủ để hàm số (3.8) có cực trị là phương trình (3.6) có nghiệm.

Ta xét một vài ví dụ điển hình.

Ví dụ 3.1. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + (m+1)x + m^2$. Tìm m để hàm số có cực trị. Δ

Lời giải (hoangtrong2305).

TXĐ: $\mathbb{R}$.

Ta có:

$$\begin{aligned} y' &= x^2 + x + (m+1) \\ y' = 0 &\Leftrightarrow x^2 + x + (m+1) = 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

Yêu cầu của bài toán được thỏa mãn khi và chỉ khi phương trình (3.9) có hai nghiệm phân biệt. Điều này tương đương với:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow -4m - 3 > 0 \Leftrightarrow m < -\frac{3}{4} \quad \blacksquare$$

Ví dụ 3.2. Cho hàm số: $y = -x^4 + 2mx^2 - 2m + 1$. Biện luận theo tham số m số cực trị của hàm số. Δ

Lời giải (pigloo).

TXĐ: $\mathbb{R}$.

Ta có:

$$y' = -4x^3 + 4mx = -4x(x^2 - m); y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m \end{cases} \quad \blacksquare$$

Nếu $m > 0$ thì phương trình $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt. Khi đó đồ thị hàm số có 3 cực trị.

Nếu $m \leq 0$, phương trình $y' = 0$ có 1 nghiệm $x = 0$. Khi đó hàm số có 1 cực trị.

3.3 Cực trị của hàm số bậc ba

Ví dụ 3.3. Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^3$ có 2 điểm cực trị và chúng nằm về cùng một phía đối với đường thẳng $d: 3x - 2y + 8 = 0$. $\triangle$

PHÂN TÍCH. Ta nhắc lại rằng: điều kiện cần và đủ để hai điểm $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$ nằm về cùng một phía đối với đường thẳng $ax + by + c = 0$ là:

$$(ax_A + by_A + c)(ax_B + by_B + c) > 0 \quad (3.10)$$

Như vậy, ta chỉ cần tìm điều kiện để hàm số có 2 cực trị và tìm tọa độ các cực trị đó, thay vào (3.10) và giải bất phương trình ẩn m .

Lời giải (wtuan159).

TXD: $D = \mathbb{R}$

Đặt: $3x - 2y + 8 = g(x; y)$ Ta có:

$$y' = 3x^2 - 6mx; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2m \end{cases}$$

Hàm số đã cho có hai cực trị khi và chỉ khi $m \neq 0$.

Với $m \neq 0$, ta có hai điểm cực trị là: $A(0; 4m^3), B(2m; 0)$. Khi đó, yêu cầu của bài toán tương đương với:

$$\begin{aligned} &g(0; 4m^3).g(2m; 0) > 0 \\ \Leftrightarrow &-8m^3.(6m + 8) > 0 \\ \Leftrightarrow &-\frac{4}{3} < m < 1 \end{aligned}$$

Vậy $-\frac{4}{3} < m < 1, m \neq 0$. ■

Ví dụ 3.4. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 - x - m + 1$. Tìm m để khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là nhỏ nhất. $\triangle$

PHÂN TÍCH. Sau khi tìm điều kiện để hàm số có hai cực trị, ta áp dụng công thức tính (1.8) để tính khoảng cách giữa hai điểm.

Dĩ nhiên việc tìm tọa độ hai điểm cực trị khi vẫn còn tham số m là tương đối phức tạp. Ta sẽ sử dụng định lý Viète để biểu diễn khoảng cách giữa hai cực trị qua m .

Lời giải (Toc Ngan).

TXD: $\mathbb{R}$

Ta có: $y' = x^2 - 2mx - 1$.

Dễ thấy phương trình $y' = 0$ luôn có hai nghiệm phân biệt. Do đó hàm số đã cho luôn có cực đại và cực tiểu.

Áp dụng hệ thức Viète, ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 x_2 = -1 \end{cases}$$

Khoảng cách giữa hai điểm cực là:

$$\begin{aligned}
 d &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\
 &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + \left[\left(\frac{x_1^3}{3} - mx_1^2 - x_1 - m + 1 \right) - \left(\frac{x_2^3}{3} - mx_2^2 - x_2 - m + 1 \right) \right]^2} \\
 &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + \left[\frac{x_1^3 - x_2^3}{3} - m(x_1^2 - x_2^2) - (x_1 - x_2) \right]^2} \\
 &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 \left[1 + \left(\frac{x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2}{3} - m(x_1 + x_2) - 1 \right)^2 \right]} \\
 &= \sqrt{(4m^2 + 4) \left[1 + \left(\frac{2m^2 + 2}{3} \right)^2 \right]}
 \end{aligned}$$

Đặt $t = \frac{2m^2 + 2}{3} \geq \frac{2}{3}$, ta có:

$$d = \sqrt{6t(1 + t^2)} \geq \frac{2\sqrt{13}}{3}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $t = \frac{2}{3} \Leftrightarrow m = 0$ ■

Ví dụ 3.5. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 - 3mx + 4$. Tìm m để hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 phân biệt thoả mãn điều kiện:

$$\frac{x_1^2 + 2mx_2 + 9m}{m^2} + \frac{m^2}{x_2^2 + 2mx_1 + 9m} = 2 \quad (3.11)$$

△

Lời giải (Phạm Hữu Bảo Chung).

Ta có:

$$y' = x^2 - 2mx - 3m$$

Hàm số đã cho đạt cực trị tại x_1, x_2 phân biệt khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Điều này tương đương với

$$\Delta' = (-m)^2 + 3m = m^2 + 3m > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m < -3 \end{cases} \quad (3.12)$$

Theo định lý Viète, ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1x_2 = -3m \end{cases}$$

Do đó:

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{x_1^2 + 2mx_2 + 9m}{m^2} + \frac{m^2}{x_2^2 + 2mx_1 + 9m} \\
 &= \frac{x_1^2 + (x_1 + x_2)x_2 + 9m}{m^2} + \frac{m^2}{x_2^2 + (x_1 + x_2)x_1 + 9m} \\
 &= \frac{(x_1 + x_2)^2 - x_1x_2 + 9m}{m^2} + \frac{m^2}{(x_1 + x_2)^2 - x_1x_2 + 9m} \\
 &= \frac{4m^2 + 12m}{m^2} + \frac{m^2}{4m^2 + 12m} \\
 &= \frac{4m + 12}{m} + \frac{m}{4m + 12}
 \end{aligned}$$

Từ (3.12), suy ra 2 số hạng của A luôn dương. Áp dụng BDT Cauchy, ta có:

$$A \geq 2\sqrt{\frac{4m + 12}{m} \cdot \frac{m}{4m + 12m}} = 2$$

Do đó

$$(3.11) \Leftrightarrow 4m + 12 = m \Leftrightarrow -3m = 12 \Leftrightarrow m = -4, (\text{thỏa mãn điều kiện (3.12)})$$

Kết luận: $m = -4$. ■

3.4 Cực trị và hàm số bậc bốn trùng phương

NHẬN XÉT. Do đồ thị hàm số (3.8) có trục đối xứng là Oy và $x = 0$ là một nghiệm của phương trình (3.6) nên nếu hàm số (3.8) có ba cực trị thì ba điểm cực trị tạo thành một tam giác cân tại $A(0; f(0))$.

Bài toán 3.1 (Tam giác cực trị). Cho hàm số (3.8), có tham số m . Tìm điều kiện của tham số m để hàm số có 3 cực trị và các điểm cực trị của đồ thị hàm số lập thành một tam giác đặc biệt. △

Phương pháp giải.

Trước hết, ta cần tìm điều kiện để hàm số có ba cực trị.

Giả sử tam giác được nói đến là ABC . Tam giác này cân tại $A(0; f(0))$. Gọi I là trung điểm của BC . Khi đó, ta dễ dàng tính được các cạnh và góc của tam giác theo m . ■

Ví dụ 3.6. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 1$ có đồ thị (C) . Tìm m để đồ thị (C) có 3 điểm cực trị A, B, C sao cho đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có bán kính bằng 1. △

PHÂN TÍCH. Dễ thấy tam giác ABC cân. Giả sử $AB = AC$. Gọi I là trung điểm BC . Khi đó tam giác AIC vuông tại I .

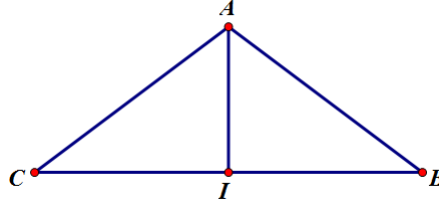
Để tính được bán kính đường tròn ngoại tiếp, ta nghĩ đến định lý sin:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

Ta có:

$$2R = \frac{AB}{\sin C} = \frac{AB}{\frac{AI}{AC}}$$

Ta chỉ cần tính AI, AC theo m là xong.



Lời giải (nucnt772).

Ta có: TXĐ: $\mathbb{R}$

$$y' = 4x^3 - 4mx = 4x(x^2 - m); y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m \end{cases}$$

Đồ thị (C) đã cho có ba điểm cực trị khi và chỉ khi:

$$m > 0 \quad (3.13)$$

Khi đó, ta có

$$A(0; 1); B(-\sqrt{m}; -m^2 + 1); C(\sqrt{m}; -m^2 + 1)$$

Dễ thấy tam giác ABC cân tại A . Gọi I là trung điểm BC , ta có $I(0; 1 - m^2)$. Xét tam giác AIC vuông tại I , ta có: $\sin C = \frac{AI}{AC}$.

Gọi R là bán kính ngoại tiếp tam giác ABC , áp dụng định lý sin cho tam giác ABC , ta có:

$$\begin{aligned} \frac{AB}{\sin C} = 2R &\Rightarrow \frac{AB \cdot AC}{AI} = 2 \\ &\Leftrightarrow AB^2 = 2AI \\ &\Leftrightarrow m + m^4 = 2m^2 \\ &\Leftrightarrow m^4 - 2m^2 + m = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\ m = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện (3.13), yêu cầu của bài toán tương đương với $m = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ hoặc $m = 1$. ■

Ví dụ 3.7. Cho hàm số $y = x^4 + 2mx^2 + m^2 + m$. Xác định m để hàm số có 3 cực trị, đồng thời các điểm cực trị của đồ thị hàm số tạo thành 1 tam giác có góc bằng 120° . $\triangle$

Lời giải (E.Galois).

Ta có:

$$y' = 4x^3 + 4mx = 4x(x^2 + m)$$

Hàm số đã cho có 3 cực trị khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có đúng 3 nghiệm phân biệt. Điều này tương đương với:

$$m < 0 \quad (3.14)$$

Với điều kiện (3.14), đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị là

$$A(0; m^2 + m), B(-\sqrt{-m}; m), C(\sqrt{-m}; m)$$

Dễ thấy tam giác ABC là tam giác cân tại A . Do đó $\widehat{A} = 120^\circ$. Từ đó suy ra $\widehat{ABC} = 30^\circ$. Yêu cầu của bài toán tương đương với:

$$\tan \widehat{ABC} = \frac{|y_A - y_B|}{|x_B|} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{m^2}{\sqrt{-m}} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{3}$$

$m = -\frac{1}{3}$ thỏa mãn (3.14) nên đó là đáp án của bài toán. ■

3.5 Bài tập

1. Cho hàm số: $y = x^4 - 2mx^2 - 3$. Tìm m để đồ thị hàm số trên có 3 điểm cực trị và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác tạo bởi các điểm cực trị đó đạt giá trị nhỏ nhất.
2. Tìm m để đồ thị hàm số: $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6m(1-2m)x$ có hai điểm cực thuộc $y = -4x$.
3. Tìm m để đồ thị hàm số $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6(m-2)x - 1$ có hai điểm cực và đường thẳng qua hai điểm cực song song $y = -4x$.
4. Tìm m để đồ thị hàm số $y = \frac{2}{3}x^3 + (m+1)x^2 + (m^2 + 4m + 2)x$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 sao cho biểu thức

$$P = |x_1x_2 - 2(x_1 + x_2)|$$

đạt giá trị lớn nhất.

5. Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m^2x + m$ có hai điểm cực A, B đối xứng qua $(\Delta) : 2y - x + 5 = 0$.
6. Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - 3m^3 + 4m - 1$ có hai điểm cực A, B sao cho ΔOAB vuông tại O .

4 Bài toán tương giao

Phần này ta sẽ giải quyết các bài toán tìm điều kiện của tham số m để hai đồ thị cắt nhau thỏa mãn một số điều kiện nhất định. Ta có tính chất sau:

Tính chất 4.1.

Hoành độ giao điểm của đồ thị hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là nghiệm của phương trình:

$$f(x) = g(x) \quad (4.1)$$

□

Từ đó suy ra, số nghiệm của phương trình (4.1) bằng số giao điểm của đồ thị hai hàm số đã cho.

NHẬN XÉT. Điều kiện cần và đủ để đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt là:

$$\begin{cases} \text{Hàm số có 2 cực trị} \\ y_{CD}y_{CT} < 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

4.1 Điều kiện về số giao điểm

Bài toán 4.1. Tìm điều kiện của tham số m để đồ thị (C_m) của hàm số $y = f(x, m)$ cắt đường thẳng $(d): y = ax + b$ tại n điểm. △

Phương pháp giải.

Hoành độ giao điểm của đồ thị (C_m) và đường thẳng (d) là nghiệm của phương trình:

$$f(x, m) = ax + b \quad (4.3)$$

Điều kiện của bài toán được thỏa mãn khi và chỉ khi phương trình (4.3) có n nghiệm. Ta có hai cách giải quyết điều kiện này.

Cách 1: Cô lập ẩn m , biến đổi phương trình (4.3) về dạng:

$$m = g(x)$$

Khảo sát hàm số $y = g(x)$, lập bảng biến thiên và dựa vào đó mà kết luận.

Cách 2: Nhẩm nghiệm, sử dụng điều kiện có nghiệm của phương trình bậc hai hoặc điều kiện (4.2), ... ■

Ví dụ 4.1. Cho hàm số: $y = x^3 - mx - m$ có đồ thị là (C_m) . Tìm m để đồ thị (C_m) của hàm số cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt. △

Ta sẽ giải bài toán này bằng cả hai cách trên.

Lời giải (E.Galois (Cách 1)).

Số giao điểm của đồ thị (C_m) và trục hoành bằng số nghiệm của phương trình:

$$x^3 - mx - m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{x^3}{x+1}, \forall x \neq -1$$

Xét hàm số: $f(x) = \frac{x^3}{x+1}$, xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Ta có:

$$f'(x) = \frac{2x^3 + 3x^2}{(x+1)^2}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{27}{4}; \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = -\infty;$$

Ta có bảng biến thiên của hàm số:

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$		$- \quad 0 \quad +$		$+ \quad +$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow \quad \frac{27}{4} \quad \nearrow +\infty$		$-\infty \nearrow 0 \nearrow +\infty$	

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy yêu cầu của bài toán được thỏa mãn khi và chỉ khi:
 $m > \frac{27}{4}$ ■

Lời giải (E.Galois (Cách 2)).

Ta có:

$$y' = 3x^2 - m$$

Yêu cầu của bài toán được thỏa mãn khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} m > 0 \\ y_{CD}y_{CT} < 0 \end{cases} \quad (4.4)$$

Với điều kiện $m > 0$, hàm số có hai điểm cực trị là:

$$A\left(\sqrt{\frac{m}{3}}; -\frac{2m}{3}\sqrt{\frac{m}{3}} - m\right); B\left(-\sqrt{\frac{m}{3}}; \frac{2m}{3}\sqrt{\frac{m}{3}} - m\right)$$

Do đó:

$$(4.4) \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m^2\left(\frac{4}{27}m - 1\right) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{4}{27} \quad \blacksquare$$

Ví dụ 4.2. Tìm tất cả đường thẳng đi qua $M(4; 4)$ và cắt đồ thị $(C) : y = x^3 - 6x^2 + 9x$ tại ba điểm phân biệt. △

Lời giải (Myams1013).

Dễ thấy các đường thẳng không có hệ số góc chỉ cắt đồ thị (C) tại đúng một điểm.

Giả sử đường thẳng d cần tìm có hệ số góc là k . Khi đó, d có phương trình dạng:

$$y = kx - 4k + 4$$

Số giao điểm của d và (C) bằng số nghiệm của phương trình

$$x^3 - 6x^2 + 9x = kx - 4k + 4 \quad (4.5)$$

$$\Leftrightarrow (x - 4)(x^2 - 2x + 4 - k) = 0 \quad (4.6)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x^2 - 2x + 4 - k = 0 \end{cases} \quad (4.7)$$

d và (C) cắt nhau tại ba điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (4.7) có hai nghiệm phân biệt khác 4. Điều này tương đương với:

$$\begin{cases} \Delta' = 1 - 4 + k > 0 \\ 4^2 - 2 \cdot 4 + 4 - k \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 12 \neq k > 3$$

Vậy tất cả các đường thẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán có dạng:

$$y = kx - 4k + 4, (12 \neq k > 3) \quad \blacksquare$$

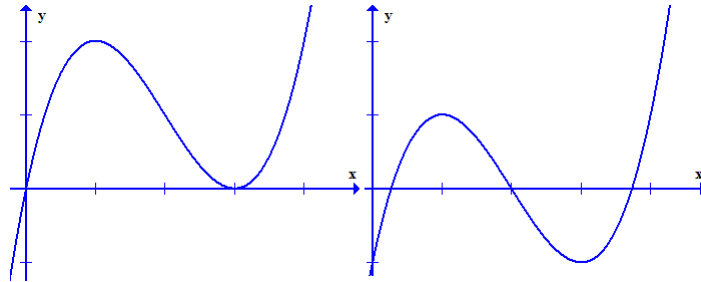
4.2 Điều kiện về hoành độ giao điểm

Ví dụ 4.3. Tìm m để đồ thị hàm số $y = f(x) = x^3 - 3(m+1)x^2 + 3mx - m + 1 = 0$ cắt Ox tại 3 điểm phân biệt trong đó có ít nhất 1 điểm có hoành độ âm. $\triangle$

Ta sẽ giải bài này bằng 2 cách.

PHÂN TÍCH. Nếu không cô lập m mà trực tiếp đi tìm điều kiện để một phương trình có ba nghiệm, trong đó có ít nhất 1 nghiệm âm là hơi khó. Ta sẽ tìm điều kiện để phương trình có 3 nghiệm không âm. Khi đó, yêu cầu của bài toán chính là phần bù của điều kiện vừa tìm.

Do hệ số của x^3 dương nên ta có 2 trường hợp sau:



Trong cả hai trường hợp trên, $f(0) \leq 0$ và f_{CD}, f_{CT} trái dấu, thêm nữa, x_{CD}, x_{CT} đều dương. Như vậy, điều kiện cần tìm là phần bù của điều kiện:

$$\begin{cases} f(0) \leq 0 \\ f_{CD} > 0 \\ f_{CT} > 0 \end{cases}$$

Lời giải (E.Galois (Cách 1)).

Hoành độ giao điểm của đồ thị và trục Ox là nghiệm của phương trình

$$x^3 - 3(m+1)x^2 + 3mx - m + 1 = 0 \quad (4.8)$$

Yêu cầu của bài toán được thỏa mãn khi và chỉ khi phương trình (4.8) có 3 nghiệm phân biệt trong đó có ít nhất 1 nghiệm âm.

Ta có:

$$\begin{aligned}f'(x) &= 3x^2 - 6(m+1)x + 3m \\f(x) &= \frac{1}{3}(x-m-1)f'(x) - 2(m^2+m+1)x + m^2+1\end{aligned}$$

$f'(x)$ là tam thức bậc hai có $\Delta = 9(m^2+m+1) > 0$. Vậy phương trình $f'(x) = 0$ luôn có hai nghiệm $x_1; x_2$. Khi đó, vì $f(x_1) = f(x_2) = 0$ nên

$$\begin{aligned}f(x_1) &= -2(m^2+m+1)x_1 + m^2+1 \\f(x_2) &= -2(m^2+m+1)x_2 + m^2+1\end{aligned}$$

Điều kiện cần và đủ để phương trình (4.8) có 3 nghiệm phân biệt là

$$f(x_1).f(x_2) < 0 \Leftrightarrow (m+1)(m^3-m^2-m-3) > 0 \quad (4.9)$$

Với điều kiện (4.9), phương trình (4.8) có 3 nghiệm không âm khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} y(0) \leq 0 \\ x_1.x_2 > 0 \\ x_1+x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m+1 \leq 0 \\ m > 0 \\ 2(m+1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 1 \\ m > 0 \\ m > -1 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 1$$

Vậy yêu cầu của bài toán được thỏa mãn khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} m < 1 \\ (m+1)(m^3-m^2-m-3) > 0 \end{cases} \quad (4.10)$$

Xét hàm số $g(x) = x^3 - x^2 - x - 3$, có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	1	$+\infty$	
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow -\frac{76}{27}$	$\searrow -4$	$\nearrow +\infty$	

Từ bảng biến thiên, ta thấy

$$g(m) < 0, \forall m < 1$$

Từ đó, ta có

$$(4.10) \Leftrightarrow -1 < m < 1 \quad \blacksquare$$

NHẬN XÉT. Lời giải trên đây tương đối dài dòng và khá khó hiểu. Ta sẽ đi tìm một lời giải khác ngắn gọn hơn. Ta quay lại phương pháp cô lập m . Ta có lời giải sau:

Lời giải (E.Galois (cách 2)).

Ta có:

$$(4.8) \Leftrightarrow m = \frac{x^3 - 3x^2 + 1}{3x^2 - 3x + 1}$$

Xét hàm số $g(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 1}{3x^2 - 3x + 1}$ xác định trên $\mathbb{R}$. Ta có:

$$g'(x) = \frac{3(x-1)(x^3 - x^2 + 3x - 1)}{(3x^2 - 3x + 1)^2}$$

Dễ thấy hàm số $h(x) = x^3 - x^2 + 3x - 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ và $h(0)h(1) = -2 < 0$. Do đó phương trình $h(x) = 0$ có duy nhất một nghiệm $x = a$ và $a \in (0; 1)$.

Mặt khác:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty; g(1) = -1; g(0) = 1$$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)$.

x	$-\infty$	0	a	1	$+\infty$				
$g'(x)$		$+$	$+$	0	$-$	0	$+$		
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$g(a)$	$\searrow$	-1	$\searrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy yêu cầu của bài toán tương đương với:

$$-1 < m < 1$$

■

Bài toán 4.2. Cho hàm số bậc ba (hoặc bậc bốn trùng phương) $y = f(x, m)$ có đồ thị (C) . Tìm điều kiện của tham số m để đồ thị (C) cắt trục Ox tại 3 (hoặc 4) điểm có hoành độ lập thành một cấp số cộng. $\triangle$

Phương pháp giải.

Đối với hàm số bậc ba:

Dựa vào tính chất của đồ thị hàm số bậc ba, ta thấy nếu đồ thị cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt thì ba điểm đó có hoành độ lập thành một cấp số cộng khi và chỉ khi tâm đối xứng (điểm uốn) của đồ thị nằm trên trục Ox .

Đối với hàm số bậc bốn trùng phương:

Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = a_mx^4 + b_mx^2 + c_m$ và trục Ox là nghiệm của phương trình:

$$a_mx^4 + b_mx^2 + c_m = 0 \quad (4.11)$$

Do đồ thị nhận trục Oy làm trục đối xứng nên nếu phương trình (4.11) có bốn nghiệm

$$x_1, x_2, x_3, x_4, (x_1 < x_2 < 0 < x_3 < x_4)$$

theo thứ tự lập thành một cấp số cộng thì ta có:

$$\begin{cases} x_2 = -x_3 \\ x_4 - x_3 = x_3 - x_2 = d \end{cases} \Rightarrow x_4 = 3x_3.$$

Khi giải phương trình (4.11), ta đặt $t = x^2, t \geq 0$, ta được:

$$a_mt^2 + b_mt + c_m = 0 \quad (4.12)$$

Khi đó

$$x_4 = 3x_3 \Rightarrow t_1 = 9t_2$$

Như vậy, ta chỉ cần tìm điều kiện của tham số để phương trình (4.12) có hai nghiệm dương phân biệt và $t_1 = 9t_2$. Đến đây, ta cần sử dụng hệ thức Viète. ■

Ví dụ 4.4. Cho hàm số $y = -x^4 + 2mx^2 - 2m + 1$ có đồ thị (C_m) . Tìm m để (C_m) cắt Ox tại 4 điểm có hoành độ lập thành cấp số cộng. Xác định các số hạng của cấp số cộng này. $\triangle$

Lời giải (pigloo).

Hoành độ giao điểm của (C_m) và Ox là nghiệm của phương trình:

$$-x^4 + 2mx^2 - 2m + 1 = 0 \quad (4.13)$$

Đặt $t = x^2$, $t \geq 0$. Khi đó (4.13) trở thành:

$$-t^2 + 2mt - (2m - 1) = 0 \quad (4.14)$$

Đồ thị (C_m) cắt trục Ox tại bốn điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (4.14) có hai nghiệm dương phân biệt t_1, t_2 . Điều này tương đương với:

$$\begin{cases} \Delta' &= m^2 - 2m + 1 > 0 \\ t_1 t_2 &= 2m - 1 > 0 \\ t_1 + t_2 &= 2m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \neq m > \frac{1}{2} \quad (4.15)$$

Với điều kiện (4.15), phương trình (4.14) có hai nghiệm $t_1, t_2 > 0$ thỏa mãn $t_1 = 9t_2$ thì:

$$\begin{cases} t_1 - 9t_2 &= 0 \\ t_1 + t_2 &= 2m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{9m}{5} \\ t_2 = \frac{m}{5} \end{cases}$$

Thay hai nghiệm đó vào (4.14), ta được:

$$9m^2 - 50m + 25 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 5 \\ m = \frac{5}{9} \end{cases}$$

Đối chiếu với điều kiện (4.15), ta có $m = 5$ hay $m = \frac{5}{9}$ là giá trị cần tìm. $\blacksquare$

4.3 Giao điểm và khoảng cách

Ví dụ 4.5. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - \frac{1}{3}$ có đồ thị là (C) . tìm m để $(d): y = mx - \frac{1}{3}$ cắt (C) tại 3 điểm phân biệt A, B, C với A cố định và $S_{OBC} = 2S_{OAB}$. $\triangle$

Lời giải (Phạm Hữu Bảo Chung).

Hoành độ giao điểm của (C) và (d) là nghiệm của phương trình

$$\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - \frac{1}{3} = mx - \frac{1}{3} \quad (4.16)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + (3 - m)x = 0 \quad (4.17)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 6x + 3(3 - m) = 0 \end{cases} \quad (4.18)$$

Gọi $A\left(0; -\frac{1}{3}\right)$.

(d) cắt (C) tại 3 điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (4.18) có hai nghiệm phân biệt khác 0. Điều này tương đương với:

$$\begin{cases} \Delta' = 3^2 - 3(3-m) > 0 \\ 3(3-m) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m \neq 3 \end{cases} \quad (4.19)$$

Với điều kiện trên, phương trình (4.18) có hai nghiệm phân biệt: $x = 3 \pm \sqrt{3m}$.
Từ đó, ta có:

$$S_{\triangle OBC} = 2S_{\triangle OAB} \Leftrightarrow \frac{1}{2}d_{(O;(d))}.BC = 2.\frac{1}{2}d_{(O;(d))}.AB \Rightarrow BC = 2AB$$

Vì A, B, C thẳng hàng nên có hai trường hợp xảy ra:

+ Nếu A là trung điểm BC thì $x_A = \frac{x_B + x_C}{2} \Leftrightarrow 0 = \frac{6}{2}$ (Vô lí)

+ Nếu $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BA}$, ta có:

$$\begin{aligned} x_C - x_B &= 2(x_A - x_B) \\ \Leftrightarrow x_C &= 3x_B \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 3 + \sqrt{3m} = 2(3 - \sqrt{3m}) \\ 3 - \sqrt{3m} = 2(3 + \sqrt{3m}) \end{cases} \\ \Leftrightarrow m &= \frac{3}{4} \text{ (thỏa mãn (4.19))} \end{aligned}$$

Vậy $m = \frac{3}{4}$ là nghiệm của bài toán. ■

4.4 Giao điểm và góc

4.5 Các phép biến đổi đồ thị

Ví dụ 4.6. Cho hàm số $y = x^3 - 3x - 2$ có đồ thị (C).

a) Khảo sát sự biến thiên của hàm số và vẽ đồ thị (C).

b) Gọi d là đường thẳng đi qua $M(2;0)$ và có hệ số góc k. Tìm k để d cắt đồ thị (C') hàm số sau tại 4 điểm phân biệt

$$y = |x|^3 - 3|x| - 2 \quad \triangle$$

Lời giải.

a) Bạn đọc tự làm. Đồ thị (C):

b) **Cách 1 (Phạm Hữu Bảo Chung)**

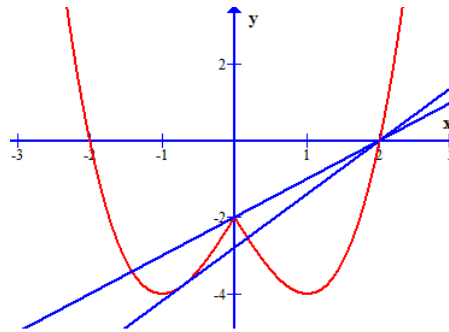
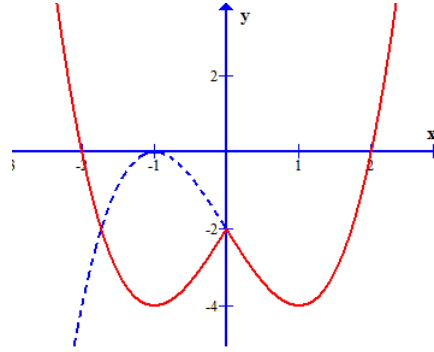
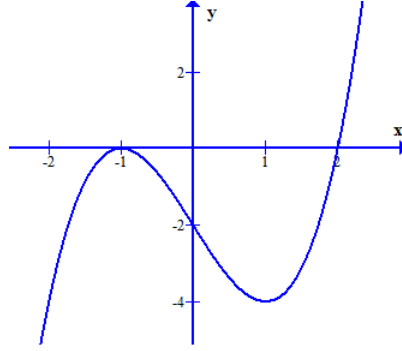
Dựa vào đồ thị (C), ta vẽ đồ thị (C'):

Đường thẳng (d) đi qua $M(2;0)$ với hệ số góc k có phương trình dạng: $y = k(x - 2)$. Dễ thấy: $M(2;0) = (d) \cap (C)$

Dựa vào đồ thị, ta thấy (d) cắt (C) tại 4 điểm phân biệt khi và chỉ khi (d) nằm giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 . Với:

* d_1 là đường thẳng đi qua $M(2;0)$ và $N(-2;0)$

* d_2 là đường thẳng đi qua M và tiếp xúc với nửa bên trái trục Oy của đồ thị (C').



Để dàng tìm được $(d_1) : y = x + 2$ có hệ số góc $k_1 = 1$.

Với $x < 0$, ta có:

$$y = |x|^3 - 3|x| - 2 = -x^3 + 3x - 2$$

Để dàng tìm được đường thẳng (d_2) có hệ số góc $k_2 = 6\sqrt{3} - 9$.

Vậy $1 < k < 6\sqrt{3} - 9$ thì (d) cắt (C') tại 4 điểm phân biệt.

Cách 2 (E.Galois)

Đường thẳng (d) đi qua $M(2; 0)$ với hệ số góc k có phương trình dạng: $y = k(x - 2)$.

Hoành độ giao điểm của đồ thị (C') và đường thẳng (d) là nghiệm của phương trình:

$$|x|^3 - 3|x| - 2 = k(x - 2) \Leftrightarrow k = \frac{|x|^3 - 3|x| - 2}{x - 2}, \forall x \neq 2 \quad (4.20)$$

Xét hàm số:

$$g(x) = \frac{|x|^3 - 3|x| - 2}{x - 2} = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x + 1}{x - 2} & \text{khi } x \geq 0 \\ \frac{-x^3 + 3x - 2}{x - 2} & \text{khi } x < 0 \end{cases}$$

Ta có:

$$g'(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{khi } 2 \neq x \geq 0 \\ \frac{-2x^3 + 6x^2 - 4}{(x-2)^2} & \text{khi } x < 0 \end{cases}; g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{3}$$

$g'(x)$ không xác định tại $x = 0$, và:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty; g(0) = 1; g(1 - \sqrt{3}) = 6\sqrt{3} - 9$$

Ta có bảng biến thiên của hàm số:

x	$-\infty$	$1 - \sqrt{3}$	0	2	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	$+$	$+$
$g(x)$	$-\infty$	$6\sqrt{3} - 9$	1	9	$+\infty$

Dễ thấy (d) và (C') cắt nhau tại M . Do đó yêu cầu của bài toán được thỏa mãn khi và chỉ khi phương trình (4.20) có 3 nghiệm phân biệt. Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy điều đó tương đương với:

$$1 < k < 6\sqrt{3} - 9$$

■

4.6 Bài tập

1. Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + (m-2)x + m + 2$ cắt Ox tại ba điểm phân biệt. **ĐA:** $m < 2$.
2. Tìm m để đồ thị hàm số $y = -2x^3 + 6x^2 + 1$ cắt đồ thị $y = mx + 1$ tại ba điểm phân biệt $A(0; 1)$, B , C sao cho B là trung điểm của AC . **ĐA:** $m = 4$.
3. Tìm m để đồ thị hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 - 1$ cắt đồ thị $y = mx - 1$ tại ba điểm phân biệt, trong đó hai điểm có hoành độ dương. **ĐA:** $-\frac{9}{8} < m < 0$.
4. Tìm m để đồ thị $y = x^3 + 2mx^2 + (m+3)x + 4$ cắt đồ thị $y = x + 4$ tại ba điểm $A(0; 4)$, B , C sao cho $K(1; 3)$ và B ; C tạo thành tam giác có diện tích $S_{\Delta BKC} = 8\sqrt{2}$. **ĐA:** $m = \frac{1 \pm \sqrt{137}}{2}$.

5 Bài toán tiếp tuyến

5.1 Phương trình tiếp tuyến

Định lý 5.1 (Ý nghĩa hình học của đạo hàm).

Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 thì $f'(x_0)$ là hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $(x_0; f(x_0))$ $\square$

Định lý 5.2.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M(x_0; y_0)$ có dạng:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0 \quad (5.1) \quad \square$$

5.2 Ba dạng bài viết phương trình tiếp tuyến

Dạng 1. Biết x_0 hoặc y_0 : Tìm y_0 hoặc x_0 và $f'(x_0)$, áp dụng công thức (5.1)

Dạng 2. Biết $f'(x_0)$. Giải phương trình $y' = f'(x_0)$ để tìm x_0 , từ đó tính y_0 và áp dụng công thức (5.1).

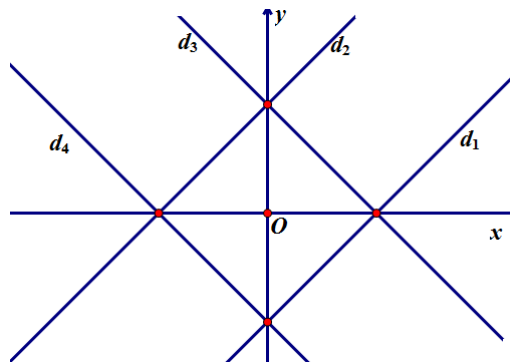
Chú ý: hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm x_0 chính là $f'(x_0)$.

Dạng 3. Tiếp tuyến đi qua 1 điểm M .

- Giả sử tiếp tuyến đi qua M là tiếp tuyến tại x_0 . Suy ra phương trình có dạng (5.1).
- Thay tọa độ của M vào phương trình (5.1), giải phương trình và tìm được x_0 . Từ đó có phương trình cần tìm.

Ví dụ 5.1. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C) : y = \frac{2x+2}{x-1}$ biết tiếp tuyến tạo với Ox, Oy một tam giác vuông cân. $\triangle$

PHÂN TÍCH. Nếu tiếp tuyến d của đồ thị cắt trục Ox, Oy lần lượt tại A, B và tam giác AOB vuông cân thì $\widehat{ABO} = \widehat{BAO} = 45^\circ$. Ta có bốn trường hợp sau:



Gọi k_i là hệ số góc của đường thẳng $d_i, (i = 1, 4)$. Ta có:

$$k_1 = k_2 = \tan 45^\circ = 1; k_3 = k_4 = \tan 135^\circ = -1;$$

Từ đó suy ra hệ số góc của d là $k = \pm 1$. Tuy nhiên:

$$y' = -\frac{4}{(x-1)^2} < 0, \forall x \neq 1$$

Do đó hệ số góc của tiếp tuyến phải là $k = -1$. Bài toán trở thành viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) , biết hệ số góc của tiếp tuyến là -1 .

Lời giải (SOYA264).

Yêu cầu của bài toán tương đương với viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) , biết hệ số góc của tiếp tuyến là -1 . Ta có:

$$y' = -1 \Leftrightarrow -\frac{4}{(x-1)^2} = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \end{cases}$$

Với $x_0 = 3$, thì $y(3) = 4$. Ta có phương trình tiếp tuyến dạng:

$$y = -x + 7$$

Với $x_0 = -1$, thì $y(-1) = 0$. Ta có phương trình tiếp tuyến dạng:

$$y = -x - 1$$

Vậy có hai tiếp tuyến thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $y = -x + 7; y = -x - 1$. ■

5.3 Số lượng tiếp tuyến

Ví dụ 5.2. Cho hàm số: $y = \frac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (C) . Tìm những điểm trên trục tung để từ đó kẻ được đúng một tiếp tuyến tới (C) . △

Lời giải (Phạm Hữu Bảo Chung).

Đặt $A(0; a)$ là một điểm bất kỳ trên trục tung, còn d là tiếp tuyến của đồ thị (C) tại $M(x_0; y_0)$. Phương trình d có dạng:

$$y = -\frac{2(x-x_0)}{(x_0-1)^2} + \frac{x_0+1}{x_0-1}$$

Đường thẳng d đi qua A khi và chỉ khi:

$$a = \frac{2x_0}{(x_0-1)^2} + \frac{x_0+1}{x_0-1} \Leftrightarrow (a-1)x_0^2 - 2(a+1)x_0 + a+1 = 0 \quad (5.2)$$

Điều kiện cần và đủ để có duy nhất một tiếp tuyến đến (C) là phương trình (5.2) (ẩn x_0) có một nghiệm duy nhất và nghiệm đó khác 1. Điều này tương đương với:

$$\begin{cases} a-1-2(a+1)+a+1 \neq 0 \\ \Delta' = (a+1)^2 - (a^2-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow a = -1$$

Vậy: $A(0; -1)$ là điểm cần tìm. ■

5.4 Tiếp tuyến và khoảng cách

Ví dụ 5.3. Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x+1}$ có đồ thị là (C) . Viết phương trình tiếp tuyến của (C) , biết khoảng cách từ tâm đối xứng của (C) đến tiếp tuyến là lớn nhất. △

Lời giải (E.Galois).

Giả sử a là hoành độ tiếp điểm. Khi đó phương trình tiếp tuyến (d) cần tìm có dạng:

$$y = -\frac{x-a}{(a+1)^2} + \frac{a+2}{a+1} \Leftrightarrow x + (a+1)^2 y - a - (a+1)(a+2) = 0$$

Tâm đối xứng $I(-1; 1)$.

$$d_{(I;(d))} = \frac{2|a+1|}{\sqrt{1+(a+1)^4}} \leq \frac{2|a+1|}{\sqrt{2\sqrt{1+(a+1)^4}}} = \sqrt{2}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi

$$(a+1)^4 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = -2 \end{cases}$$

Với $a = 0$, ta có phương trình tiếp tuyến: $y = -x + 2$

Với $a = -2$, ta có phương trình tiếp tuyến $y = -x - 2$. ■

Ví dụ 5.4. Viết phương trình tiếp tuyến của $(C) : y = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + 2$ biết khoảng cách từ $A(0; 3)$ đến tiếp tuyến là $\frac{9}{4\sqrt{5}}$. △

Lời giải (Phạm Hữu Bảo Chung).

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm. Khi đó, phương trình tiếp tuyến (d) của đồ thị (C) có dạng:

$$(x_0^3 + x_0)x - y - \frac{3x_0^4}{4} + \frac{3x_0^2}{2} + 2 = 0$$

Từ giả thiết, ta có:

$$\begin{aligned} d_{(A;d)} = \frac{9}{4\sqrt{5}} &\Leftrightarrow \frac{\left| \frac{3}{4}x_0^4 + \frac{1}{2}x_0^2 + 1 \right|}{\sqrt{x_0^2(x_0^2+1)^2+1}} = \frac{9}{4\sqrt{5}} \\ &\Leftrightarrow \frac{3x_0^4 + 2x_0^2 + 4}{\sqrt{x_0^2(x_0^2+1)^2+1}} = \frac{9}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

Đặt $x_0^2 = t \geq 0$, quy đồng và bình phương hai vế, ta có:

$$\begin{aligned} &5(3t^2 + 2t + 4)^2 = 1 + 81t(t+1)^2 \\ \Leftrightarrow &45t^4 - 21t^3 - 22t^2 - t - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow &(t-1)(45t^3 + 24t^2 + 2t + 1) \\ \Leftrightarrow &t = 1 \\ \Leftrightarrow &x = \pm 1 \end{aligned}$$

Từ đó, ta có hai tiếp tuyến thỏa mãn yêu cầu bài toán:

$$y = 2x + \frac{3}{4}; y = -2x + \frac{3}{4}. \quad \blacksquare$$

5.5 Tiếp tuyến và góc

Ví dụ 5.5. Tìm trên đồ thị (C) của hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 - 1$ hai điểm phân biệt A, B sao cho tiếp tuyến của (C) tại A, B song song với nhau và $AB = 4\sqrt{2}$. $\triangle$

Lời giải (hoangtrong2305).

Giả sử $A(a; a^3 - 3a^2 - 1), B(b; b^3 - 3b^2 - 1)$ với $a \neq b$.

Do tiếp tuyến của (C) tại A, B song song với nhau nên:

$$f'(a) = f'(b) \Leftrightarrow 3a^2 - 6a = 3b^2 - 6b \Rightarrow a = 2 - b$$

Mặt khác:

$$\begin{aligned} AB &= 4\sqrt{2} \\ \Leftrightarrow 4(b-1)^2 + 4(b^3 - 3b^2 + 2)^2 &= 32 \\ \Leftrightarrow (b-1)^2 + (b-1)^2[(b-1)^2 - 3]^2 &= 8 \end{aligned}$$

Đặt $t = b - 1$, ta có:

$$t + t(t-3)^2 = 8 \Leftrightarrow t^3 - 6t^2 + 10t - 8 = 0 \Leftrightarrow t = 4$$

Từ đó, ta có hai điểm $A(-3; -55), B(5; 49)$ ■

5.6 Bài toán khác

Ví dụ 5.6. Cho hàm số: $y = x^4 - 5x^2 + 4$ có đồ thị (C) . Tìm tất cả các điểm M trên đồ thị (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại M cắt (C) tại hai điểm phân biệt khác M . $\triangle$

Lời giải (haisupham).

Giả sử $M(m; m^4 - 5m^2 + 4)$ là điểm cần tìm. Phương trình tiếp tuyến d của đồ thị (C) tại M có dạng:

$$y = (4m^3 - 10m)x - 3m^4 + 5m^2 + 4$$

Số nghiệm của đường thẳng d và đồ thị (C) bằng số nghiệm của phương trình:

$$x^4 - 5x^2 + 4 = (4m^3 - 10m)x - 3m^4 + 5m^2 + 4 \quad (5.3)$$

$$\Leftrightarrow (x-m)^2(x^2 + 2mx + 3m^2 - 5) = 0 \quad (5.4)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x^2 + 2mx + 3m^2 - 5 = 0 \end{cases} \quad (5.5)$$

d cắt (C) tại hai điểm phân biệt khác M khi và chỉ khi phương trình (5.5) có hai nghiệm phân biệt khác m . Điều này tương đương với:

$$\begin{cases} \Delta' = m^2 - 3m^2 + 5 > 0 \\ m^2 + 2m^2 + 3m^2 - 5 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\sqrt{10}}{2} < m < \frac{\sqrt{10}}{2} \\ m \neq \pm \frac{\sqrt{30}}{6} \end{cases} \quad \blacksquare$$

5.7 Bài tập

1. Cho hàm số: $y = \frac{x+1}{x-1}$. Tìm tất cả các điểm trên trục tung để từ điểm đó kẻ được 2 tiếp tuyến đến đồ thị sao cho 2 tiếp điểm tương ứng có hoành độ dương. **ĐA:** $M(0; a), a > 1$.
2. Viết phương trình tiếp tuyến của $(C) : y = \frac{3-x}{x+2}$ biết tiếp tuyến cách đều $A(-1; -2), B(1; 0)$. **ĐA:** $y = -5x + 9$.

6 Điểm đặc biệt thuộc đồ thị

Ví dụ 6.1. Cho hàm số: $y = \frac{x-2}{x+2}$ có đồ thị (C)

- a) Chứng minh rằng đồ thị hàm số nhận đường thẳng $(d) : y = x + 3$ làm trục đối xứng.
b) Tìm điểm M thuộc đồ thị sao cho tổng các khoảng cách từ M đến 2 trục tọa độ là nhỏ nhất. $\triangle$

Lời giải.

a) **(E.Galois)**

Dễ thấy (d) có vectơ chỉ phương $\vec{n} = (1; 1)$.

Lấy điểm bất kì $M(x_M; y_M) \in (C)$. Khi đó:

$$y_M = 1 - \frac{4}{x_M + 2} \Leftrightarrow x_M = \frac{4}{1 - y_M} - 2 \quad (6.1)$$

Gọi $N(x_N; y_N)$ là điểm đối xứng của M qua (d) . Gọi I là trung điểm MN . Khi đó:
 $I\left(\frac{x_M + x_N}{2}; \frac{y_M + y_N}{2}\right)$. Ta có:

$$\begin{cases} I \in d \\ \overrightarrow{MN} \cdot \vec{n} = 0 \end{cases} \quad (6.2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_N + x_M + 6 = y_N + y_M \\ x_N + y_N = x_M + y_M \end{cases} \quad (6.3)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_M = x_N + 3 \\ y_N = x_M + 3 \end{cases} \quad (6.4)$$

Kết hợp (6.1) và (6.4) ta có:

$$y_N = \frac{4}{1 - y_M} + 1 = \frac{x_N - 2}{x_N + 2}$$

Vậy $N \in (C)$, hay (d) là trục đối xứng của (C) .

b) **(Phạm Hữu Bảo Chung)**

Gọi $M\left(x_o; \frac{x_o - 2}{x_o + 2}\right)$ là một điểm bất kỳ thuộc (C) . Khi đó:

$$\begin{aligned} P &= d_{(M; Ox)} + d_{(M; Oy)} \\ &= |x_o| + \left| \frac{x_o - 2}{x_o + 2} \right| \\ &= |x_o| + \left| \frac{4}{x_o + 2} - 1 \right| \geq \left| x_o + \frac{4}{x_o + 2} - 1 \right| \end{aligned}$$

- Nếu $x_o < -2$ thì:

$$\left| x_o + \frac{4}{x_o + 2} - 1 \right| > |-2 - 1| = 3$$

- Nếu $x_o > -2 \Leftrightarrow x_o + 2 > 0$ thì:

$$\left| x_o + \frac{4}{x_o + 2} - 1 \right| = \left| x_o + 2 + \frac{4}{x_o + 2} - 3 \right| \geq |4 - 3| = 1$$

Vậy

$$\min P = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_o \cdot \left(\frac{4}{x_o + 2} - 1 \right) \geq 0 \\ x_o > -2 \\ x_o + 2 = \frac{4}{x_o + 2} \end{cases} \Leftrightarrow x_o = 0$$

Vậy $M(0; -1)$ là điểm cần tìm. ■

Ví dụ 6.2. Cho hàm số: $y = x^3 - 4x - 1(C)$. Tìm những cặp điểm nguyên trên (C) đối xứng nhau qua đường thẳng $(d) : y = x$ và không nằm trên đường thẳng đó. △

Lời giải (Phạm Hữu Bảo Chung).

Gọi $A(a; a^3 - 4a - 1), B(b; b^3 - 4b - 1)$ là những điểm thỏa mãn đề bài. Khi đó: $a, b \in \mathbb{Z}$ và $a \neq b$.

Hệ số góc của đường thẳng AB là:

$$k_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{b^3 - a^3 - 4(b - a)}{b - a} = b^2 + ab + a^2 - 4$$

Hai điểm A và B đối xứng với nhau qua đường thẳng (d) khi và chỉ khi d là trung trực của đoạn thẳng AB . Tức là: $AB \perp d$ và A, B cách đều d . Khi đó:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} k_{AB} \cdot k_d = -1 \\ d_{A;d} = d_{B;d} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} a^2 + ab + b^2 - 4 = -1 \\ |a - (a^3 - 4a - 1)| = |b - (b^3 - 4b - 1)| \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} a^2 + ab + b^2 = 3 \\ |a^3 - 5a - 1| = |b^3 - 5b - 1| \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} a^2 + ab + b^2 = 3 \\ \begin{cases} a^3 - 5a - 1 = b^3 - 5b - 1 \\ a^3 - 5a - 1 = -b^3 + 5b + 1 \end{cases} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} a^2 + ab + b^2 = 3 \\ \begin{cases} (a - b)(a^2 + ab + b^2 - 5) = 0 \\ a^3 + b^3 - 5(a + b) - 2 = 0 \end{cases} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} a^2 + ab + b^2 = 3 \\ \begin{cases} a = b \\ a^2 + ab + b^2 = 5 \\ a^3 + b^3 - 5(a + b) - 2 = 0 \end{cases} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} a^2 + ab + b^2 = 3 \\ a^3 + b^3 - 5(a + b) - 2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Đặt $S = a + b, P = ab, (S^2 \geq 4P)$, ta được:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} S^2 - P = 3 \\ S^3 - 3PS - 5S - 2 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} P = S^2 - 3 \\ S^3 - 2S + 1 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} P = S^2 - 3 \\ (S - 1)(S^2 + S - 1) = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} P = S^2 - 3 \\ \left[\begin{array}{l} S = 1 \\ S = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{array} \right] \end{cases} \end{aligned}$$

Do $a, b \in \mathbb{Z}$ nên

$$S \in \mathbb{Z} \Rightarrow S = 1 \Rightarrow P = -2 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \\ a = -1 \\ b = 2 \end{cases}$$

Thử lại, ta thấy $(-1; 2)$ và $(2; -1)$ là các điểm cần tìm. ■

Ví dụ 6.3. Giả sử M là điểm bất kì trên đồ thị hàm số $(C) = \frac{x+m}{x-1}, m \neq 1$ gọi H, K là hình chiếu của M lên các đường tiệm cận đồ thị hàm số (C) và I là giao điểm của hai tiệm cận. Tìm m để $S_{MHIK} = 1$ △

Lời giải (hoangtrong2305).

Giả sử $M(x; \frac{x+m}{x-1})$

TCD: $x = 1$

TCN: $y = 1$

Ta có $I(1; 1)$

Giả sử H là hình chiếu của M lên $Ox \Rightarrow H(1; \frac{x+m}{x-1})$

Giả sử K là hình chiếu của M lên $Oy \Rightarrow K(x; 1)$

$$\overrightarrow{MH} = (1 - x; 0) \Rightarrow MH = \sqrt{(1 - x)^2}$$

$$\overrightarrow{HI} = (0; \frac{x+m}{x-1} - 1) \Rightarrow HI = \sqrt{(\frac{1+m}{1-x})^2}$$

Ta có $MHIK$ là hình chữ nhật

$$\Rightarrow S_{MHIK} = MH \cdot HI = (1 + m)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} m = 0 \\ m = -2 \end{bmatrix} \quad \blacksquare$$