

I. PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH (7,0 điểm)

Câu 1 (2,0 điểm). Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị là (C)

- Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số
- Tìm điểm M thuộc đồ thị hàm số sao cho tiếp tuyến của đồ thị (C) tại M cắt đồ thị (C) tại điểm thứ hai là N (khác M) thỏa mãn: $P = 5x_M^2 + x_N^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 2 (1,0 điểm). Giải phương trình: $\frac{\sin x + \tan x}{\tan x - \sin x} = \frac{2}{3}(1 + \cos x)$

Câu 3 (1,0 điểm). Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x(x^2 + 3) - y(y^2 + 3) = 3xy(x - y) \\ (x^2 - 2)^2 = 4(2 - y) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Câu 4 (1,0 điểm). Tính tích phân: $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^3 x}{1 + \cos^2 x} dx$

Câu 5 (1,0 điểm). Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a , SAB là tam giác cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M là điểm thuộc cạnh AD sao cho $MD = 2MA$. Tính theo a thể tích khối chóp S.BCDM và khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và CM biết mặt phẳng (SBD) tạo với mặt phẳng đáy một góc 60° .

Câu 6 (1,0 điểm). Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn: $x + y \leq z$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = (x^4 + y^4 + z^4) \left(\frac{1}{x^4} + \frac{1}{y^4} + \frac{1}{z^4} \right)$$

II. PHẦN RIÊNG (3,0 điểm). Thí sinh chỉ được làm một trong hai phần (phần A hoặc phần B)

A. Theo chương trình Chuẩn

Câu 7a (1,0 điểm). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD. Trên các cạnh AD, AB lấy hai điểm E và F sao cho $AE = AF$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên BE. Tìm tọa độ của C biết C thuộc đường thẳng d: $x - 2y + 1 = 0$ và tọa độ $F(2; 0)$, $H(1; -1)$

Câu 8a (1,0 điểm). Trong không gian với hệ trục Oxyz, cho điểm $A(1; -1; 2)$ hai đường thẳng

$d_1: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{1}$, $d_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{1}$. Tìm tọa độ điểm B thuộc d_1 , C thuộc d_2 sao cho BC nằm trong mặt phẳng chứa A và d_1 , đồng thời $AC = 2AB$ và B có hoành độ dương.

Câu 9a (1,0 điểm). Tìm số phức z biết $u = \frac{z+2+3i}{z-i}$ là một số thuần ảo và $|z+1-3i| = |z-1+i|$

B. Theo chương trình nâng cao

Câu 7b (1,0 điểm). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho elip có phương trình: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. Tìm điểm M

thuộc elip sao cho góc $\widehat{F_1MF_2} = 90^\circ$ với F_1, F_2 là hai tiêu điểm của elip.

Câu 8b (1,0 điểm). Trong không gian với hệ trục Oxyz cho điểm $A(1; 1; 2)$, $B(2; -1; 1)$ và đường thẳng d: $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{1}$. Tìm điểm M thuộc d có hoành độ dương sao cho diện tích tam giác ABM bằng $\sqrt{3}$.

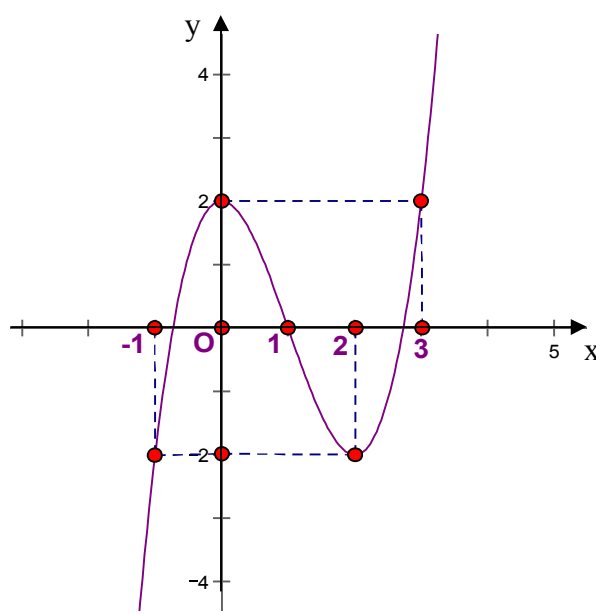
Câu 9b (1,0 điểm). Cho z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình: $z^2 - 2z + 4 = 0$. Tìm phần thực, phần ảo của số phức: $w = \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^{2013}$, biết z_1 có phần ảo dương.

.....HẾT.....

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm

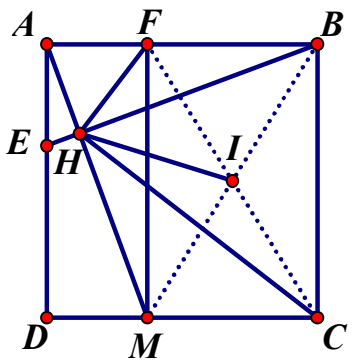
Họ và tên thí sinh:.....; Số báo danh:.....

ĐÁP ÁN VÀ THANG ĐIỂM

Câu	Đáp án	Điểm															
Câu 1 2,0 điểm	a) (1,0 điểm) * Tập xác định: $D = \mathbb{R}$ * Sự biến thiên: - Chiều biến thiên: Ta có: $y' = 3x^2 - 6x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$ Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$; nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$ - Cực trị: Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$, $y_{CD} = 2$; đạt cực tiểu tại $x = 2$, $y_{CT} = -2$ - Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$ - Bảng biến thiên: <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>2</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td><td>0</td></tr><tr><td>y</td><td>$-\infty$</td><td>2</td><td>-2</td><td>$+\infty$</td></tr></table>	x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	y'	$+$	0	$-$	0	y	$-\infty$	2	-2	$+\infty$	0,25
x	$-\infty$	0	2	$+\infty$													
y'	$+$	0	$-$	0													
y	$-\infty$	2	-2	$+\infty$													
		0,25															
		0,25															
	* Đồ thị 	0,25															
b) (1,0 điểm)	Gọi điểm M thuộc đồ thị hàm số có tọa độ $M(a; a^3 - 3a^2 + 2)$ Khi đó phương trình tiếp tuyến tại M có dạng: $y = (3a^2 - 6a)(x - a) + a^3 - 3a^2 + 2$ Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C) và tiếp tuyến là: $x^3 - 3x^2 + 2 = (3a^2 - 6a)(x - a) + a^3 - 3a^2 + 2$ $\Leftrightarrow (x - a)^2 (x + 2a - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ x = -2a + 3 \end{cases}$ Để (C) cắt tiếp tuyến tại N khác M thì: $a \neq -2a + 3 \Leftrightarrow a \neq 1$ Khi đó: $x_M = a$; $x_N = -2a + 3$ Ta có: $P = 5a^2 + (-2a + 3)^2 = 9a^2 - 12a + 9 = (3a - 2)^2 + 5$	0,25															
		0,25															
		0,25															

	Do đó: $P \geq 5$, suy ra $P_{\min} = 5$ khi $a = \frac{2}{3}$. Đổi chiều ĐK ta được $a = \frac{2}{3}$. Vậy $M\left(\frac{2}{3}; \frac{26}{27}\right)$	0,25
Câu	Đáp án	Điểm
Câu 2 1,0 điểm	Đk: $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \tan x - \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \cos x \neq \pm 1 \end{cases}$ Khi đó phương trình đã cho tương đương với: $3\left(\sin x + \frac{\sin x}{\cos x}\right) = 2(1 + \cos x)\left(\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x\right)$	0,25
	$\Leftrightarrow \sin x(2\cos^2 x + 3\cos x + 1) = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0, (Do: \sin x \neq 0)$	0,25
	Ta có: $2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = -1 \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases}$ Vì $\cos x \neq -1$ nên ta có:	0,25
	$\cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$ Vậy nghiệm phương trình: $x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$	0,25
Câu 3 1,0 điểm	$\begin{cases} 2x(x^2 + 3) - y(y^2 + 3) = 3xy(x - y) & (1) \\ (x^2 - 2)^2 = 4(2 - y) & (2) \end{cases}$	0,25
	Ta có phương trình (1) tương đương với: $x^3 + 3x = (y - x)^3 + 3(y - x)$ (3)	
	Xét hàm số: $f(t) = t^3 + 3t, \forall t \in \mathbb{R}$ Do: $f'(t) = 3t^2 + 3 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ Suy ra: (3) $\Leftrightarrow f(x) = f(y - x) \Leftrightarrow y = 2x$	0,25
	Thay vào pt (2) ta được: $(x^2 - 2)^2 = 4(2 - 2x) \Leftrightarrow x^4 = 4(x - 1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2(x - 1) \\ x^2 = -2(x - 1) \end{cases}$ * PT: $x^2 = 2(x - 1)$ vô nghiệm	0,25
	* PT: $x^2 = -2(x - 1) \Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{3}$ Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $\begin{cases} x = -1 + \sqrt{3} \\ y = -2 + 2\sqrt{3} \end{cases}; \begin{cases} x = -1 - \sqrt{3} \\ y = -2 - 2\sqrt{3} \end{cases}$	0,25
Câu 4 1,0 điểm	Đặt $t = 2 + \tan^2 x \Rightarrow dt = \frac{2 \tan x}{\cos^2 x} dx$ Đổi cận: khi $x = 0$ ta có: $t = 2$; khi $x = \frac{\pi}{4}$ ta có: $t = 3$	0,25
	Ta có: $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^2 x}{(2 + \tan^2 x)} \cdot \frac{\tan x}{\cos^2 x} dx = \frac{1}{2} \int_2^3 \frac{t - 2}{t} dt$	0,25
	$= \frac{1}{2} \int_2^3 dt - \int_2^3 \frac{dt}{t}$	0,25
	$= \frac{1}{2} t \Big _2^3 - \ln t \Big _2^3 = \frac{1}{2} - \ln \frac{3}{2}$	0,25

Câu	Đáp án	Điểm
Câu 5 1,0 điểm	Gọi H là trung điểm cạnh AB, khi đó $SH \perp AB$, do $(SAB) \perp (ABCD)$ nên $SH \perp (ABCD)$ Gọi I là hình chiếu vuông góc của H lên BD khi đó: $BD \perp (SHI)$, (Do $BD \perp SH$) Suy ra $BD \perp SI$, do đó góc giữa (SBD) và $(ABCD)$ là: $\widehat{SIH}$, theo giả thiết: $\widehat{SIH} = 60^\circ$ Ta có: $HI = \frac{1}{4}AC = \frac{a\sqrt{2}}{4}$ Trong tam giác vuông SHI ta có: $SH = HI \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{6}}{4}$ Ta có: $S_{BCDM} = S_{ABCD} - S_{ABM} = a^2 - \frac{a^2}{6} = \frac{5a^2}{6}$ Vậy $V_{S.BCDM} = \frac{1}{3}S_{BCDM} \cdot SH = \frac{5a^3\sqrt{6}}{72}$ (ĐVTT) Dựng HN, AE song song với CM (N, E thuộc cạnh BC) Khi đó: $CM \parallel (SAE)$, E là trung điểm CN Ta có: $d(CM, SA) = d(CM, (SAE)) = d(C, (SAE)) = d(N, (SAE)) = d(H, (SAE))$ Gọi F là hình chiếu vuông góc của H lên AE, K là hình chiếu vuông góc của H lên SF, khi đó: $(SHF) \perp (SAE)$ nên $HK \perp (SAE)$, do đó: $d(H, (SAE)) = HK$ Trong tam giác vuông ABE, ta có: $\sin \widehat{BAE} = \frac{BE}{AE} = \frac{\frac{2a}{3}}{\sqrt{a^2 + \frac{4a^2}{9}}} = \frac{2}{\sqrt{13}}$ Suy ra $HF = AH \cdot \sin \widehat{BAE} = \frac{a}{\sqrt{13}}$ Trong tam giác vuông SAF ta có:	0,25 0,25 0,25 0,25

	$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HF^2} + \frac{1}{HS^2} \Rightarrow HK = \frac{HF \cdot HS}{\sqrt{HF^2 + HS^2}} = a\sqrt{\frac{3}{47}}. \text{ Vậy } d(CM, SA) = a\sqrt{\frac{3}{47}}$	
Câu	Đáp án	Điểm
Câu 6 1,0 điểm	Ta có: $x^4 + y^4 \geq \frac{(x^2 + y^2)^2}{2} \geq \frac{(x+y)^4}{8}, \frac{1}{x^4} + \frac{1}{y^4} \geq \frac{2}{x^2 y^2} \geq \frac{32}{(x+y)^4}$	0,25
	Do đó: $P \geq \left[\frac{(x+y)^4}{8} + z^4 \right] \left[\frac{32}{(x+y)^4} + \frac{1}{z^4} \right] = \frac{1}{8} \left(\frac{x+y}{z} \right)^4 + 32 \left(\frac{z}{x+y} \right)^4 + 5$	0,25
	Đặt $t = \left(\frac{x+y}{z} \right)^4$, ta có: $0 < t \leq 1$ (Do: $x + y \leq z$) Suy ra: $P \geq f(t) = \frac{t}{8} + \frac{32}{t} + 5, \forall t \in (0; 1]$	0,25
	Ta có: $f'(t) = \frac{1}{8} - \frac{32}{t^2}, f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \pm 16$, do đó: $f'(t) < 0, \forall t \in (0; 1]$ Suy ra: $f'(t) \geq f(1) = \frac{297}{8}$ Vậy $\min P = \frac{297}{8}, \text{ khi: } \begin{cases} x = y \\ x + y = z \end{cases}$	0,25
A. Theo chương trình chuẩn		
Câu	Đáp án	Điểm
Câu 7b 1,0 điểm	 Gọi M là giao điểm của AH và CD Ta có hai tam giác ABE và ADM bằng nhau (Vì: $AB = AD, \widehat{ABE} = \widehat{DAM}$, do cùng phụ với $\widehat{AEH}$) Do đó $DM = AE = AF$, suy ra BCMF là hình chữ nhật.	0,25
	Gọi I là tâm hình chữ nhật BCMF Trong tam giác vuông MHB ta có: $HM = \frac{1}{2} BM$ Do $BM = CF$ nên $HM = \frac{1}{2} CF$, suy ra tam giác CHF vuông tại H.	0,25
	Gọi tọa độ $C(2c - 1; c)$, ta có: $\overrightarrow{HC} = (2c - 2; c + 1), \overrightarrow{HF} = (1; 1)$	0,25
	Vì $CH \perp FH$ nên $\overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{HF} = 0 \Leftrightarrow 2c - 2 + c + 1 = 0 \Leftrightarrow c = \frac{1}{3}$. Vậy tọa độ $C\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$	0,25
	Gọi (P) là mặt phẳng chứa A và d_1 , gọi $M(0; 1; 1)$ thuộc d_1 , $\vec{u} = (2; 1; 1)$ là véc tơ chỉ phương của d_1 . Khi đó véc tơ pháp tuyến của (P) là: $\vec{n} = [\overrightarrow{AM}, \vec{u}] = (3; -1; -5)$ Do đó phương trình của (P) là: $3x - y - 5z + 6 = 0$. Suy ra C là giao điểm của d_2 và (P), ta có tọa độ C là nghiệm của hệ phương trình:	0,25

	$\begin{cases} \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{1} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow C(-1; 3; 0) \\ 3x - y - 5z + 6 = 0 \end{cases}$	
	Gọi tọa độ B thuộc d_1 là: $B(2b; b+1; b+1)$	
	Ta có: $AB = \sqrt{(2b-1)^2 + (b+2)^2 + (b-1)^2} = \sqrt{6b^2 - 2b + 6}$, $AC = 2\sqrt{6}$	0,25
	Do $AC = 2AB$ nên: $2\sqrt{6b^2 - 2b + 6} = 2\sqrt{6} \Leftrightarrow 6b^2 - 2b = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ b = \frac{1}{3} \end{cases}$ Vì B có hoành độ dương nên $B\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}; \frac{4}{3}\right)$	0,25
Câu 9a 1,0 điểm	Đặt $z = x + yi$, ($x, y \in R$), khi đó: $u = \frac{(x+2) + (y+3)i}{x + (y-1)i} = \frac{[(x+2) + (y+3)i][x - (y-1)i]}{x^2 + (y-1)^2}$ $= \frac{(x^2 + y^2 + 2x + 2y - 3) + 2(2x - y + 1)i}{x^2 + (y-1)^2}$ u là số thuần ảo khi và chỉ khi $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x + 2y - 3 = 0 \\ x^2 + (y-1)^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2 + (y+1)^2 = 5 \\ (x; y) \neq (0; 1) \end{cases} \quad (1)$	0,5
	Ta có: $ z+1-3i = z-1+i \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2} \Leftrightarrow x - 2y + 2 = 0 \quad (2)$	0,25
	Từ (1) và (2) ta có: $(x; y) = \left(-\frac{3}{5}; -\frac{16}{5}\right)$. Vậy số phức cần tìm: $z = -\frac{3}{5} - \frac{16}{5}i$	0,25
B. Theo chương trình Nâng cao		
Câu	Đáp án	Điểm
Câu 7b 1,0 điểm	Ta có: $a = 5$, $b = 3$, suy ra $c = 4$ Gọi $M(a; b)$ thuộc elip ta có: $MF_1 = 5 + \frac{4}{5}a$, $MF_2 = 5 - \frac{4}{5}a$	0,25
	Vì tam giác F_1MF_2 vuông tại M nên: $MF_1^2 + MF_2^2 = F_1F_2^2$ $\Leftrightarrow \left(5 + \frac{4}{5}a\right)^2 + \left(5 - \frac{4}{5}a\right)^2 = 64 \Leftrightarrow a^2 = \frac{175}{8}$	0,25
	Do M thuộc elip nên: $\frac{a^2}{25} + \frac{b^2}{9} = 1 \Leftrightarrow b^2 = \frac{9}{8}$	0,25
	Vậy tọa độ cần tìm: $M\left(\frac{5\sqrt{14}}{4}; \frac{3\sqrt{2}}{4}\right), M\left(\frac{5\sqrt{14}}{4}; -\frac{3\sqrt{2}}{4}\right), M\left(-\frac{5\sqrt{14}}{4}; \frac{3\sqrt{2}}{4}\right), M\left(-\frac{5\sqrt{14}}{4}; -\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)$	0,25
Câu 8b 1,0 điểm	Vì M thuộc d nên tọa độ M có dạng: $M(a; 1-2a; a+1)$ Ta có: $\overrightarrow{AM} = (a-1; -2a; a-1)$, $\overrightarrow{AB} = (1; -2; -1)$ Suy ra: $[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}] = (4a-2; 2a-2; 2)$	0,25
	Ta có: $S_{\Delta AMB} = \frac{1}{2} \left [\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}] \right = \frac{1}{2} \sqrt{(4a-2)^2 + (2a-2)^2 + 4} = \sqrt{5a^2 - 6a + 3}$	0,25

	Theo giả thiết ta có phương trình: $\sqrt{5a^2 - 6a + 3} = \sqrt{3} \Leftrightarrow 5a^2 - 6a = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = \frac{6}{5} \end{cases}$ Vì M có hoành độ dương nên tọa độ cần tìm: $M\left(\frac{6}{5}; -\frac{7}{5}; \frac{11}{5}\right)$	0,5
Câu 9b 1,0 điểm	Vì $\Delta = -3$, nên phương trình có hai nghiệm phức: $z_1 = 1 + \sqrt{3}i, z_2 = 1 - \sqrt{3}i$, (Do z_1 có phần ảo dương)	0,25
	Ta có: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - \sqrt{3}i} = \frac{(1 + \sqrt{3}i)^2}{4} = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 = \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)^2$	0,25
	Do đó: $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2013} = \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)^{4026} = \cos 1342\pi + i \sin 1342\pi = 1$	0,25
	Vậy phần thực bằng 1, phần ảo bằng 0.	0,25

.....**Hết**.....