

ĐỀ CHÍNH THỨC

I. PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH (7,0 điểm)

Câu 1 (2,0 điểm). Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3 + 1$ (1), (với m là tham số thực).

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi $m = 1$.

b) Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số (1) có cực đại, cực tiểu đồng thời khoảng cách từ gốc tọa độ đến điểm cực tiểu của đồ thị bằng 2.

Câu 2 (1,0 điểm). Giải phương trình $\sin 2x - \cos 2x + 4\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 4\cos x + 1 = 0$.

Câu 3 (1,0 điểm). Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{3x-1} + 4(2x+1) = \sqrt{y-1} + 3y \\ (x+y)(2x-y) + 4 = -6x - 3y \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Câu 4 (1,0 điểm). Tính tích phân $I = \int_1^2 \frac{x + 2 \ln x}{(x+2)^2} dx$.

Câu 5 (1,0 điểm). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Gọi M, N và P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, AD và DC . Gọi H là giao điểm của CN và DM , biết $SH \perp (ABCD), SH = a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.HDC$ và khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SBP) .

Câu 6 (1,0 điểm). Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $x^2 + y^2 \leq 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = x(y+1)^2 + y(x+1)^2.$$

II. PHẦN RIÊNG (3,0 điểm): Thí sinh chỉ được làm một trong hai phần (phần A hoặc phần B)

A. Theo chương trình Chuẩn

Câu 7.a (1,0 điểm). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình thoi $ABCD$ với $A(1;0)$, đường chéo BD có phương trình là $x - y + 1 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình thoi biết rằng diện tích hình thoi bằng 8 và đỉnh B có hoành độ dương.

Câu 8.a (1,0 điểm). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S), 2 đường thẳng d_1, d_2 có phương

trình (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y + 2z - 16 = 0$ $d_1: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-1}{1}$ $d_2: \begin{cases} x = 3+t \\ y = 2t \\ z = -1+2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$. Viết phương trình

mặt phẳng (P) song song với d_1, d_2 và khoảng cách từ tâm mặt cầu (S) đến mặt phẳng (P) bằng 3.

Câu 9.a (1,0 điểm). Tìm hệ số của x^4 trong khai triển biểu thức $\left(\frac{2}{x} - x^3\right)^n$, biết n là số tự nhiên thỏa mãn hệ thức $C_{n-4}^{n-6} + nA_n^2 = 454$.

B. Theo chương trình Nâng cao

Câu 7.b (1,0 điểm). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho điểm $A(0;2)$ và đường thẳng $d: x - 2y + 2 = 0$. Tìm trên d hai điểm M, N sao cho tam giác AMN vuông tại A và $AM = 2AN$, biết tọa độ của N là các số nguyên.

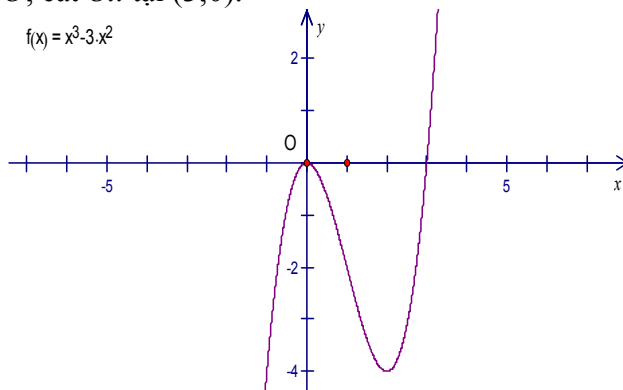
Câu 8.b (1,0 điểm). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng $d: \frac{x-3}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+1}{-1}$ và mặt phẳng $(P): x + y + z + 2 = 0$. Gọi M là giao điểm của d và (P) . Viết phương trình đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P) , vuông góc với d đồng thời thỏa mãn khoảng cách từ M tới Δ bằng $3\sqrt{42}$.

Câu 9.b (1,0 điểm). Tính môđun của số phức $z - 2i$ biết $(z - 2i) \cdot (\bar{z} - 2i) + 4iz = 0$.

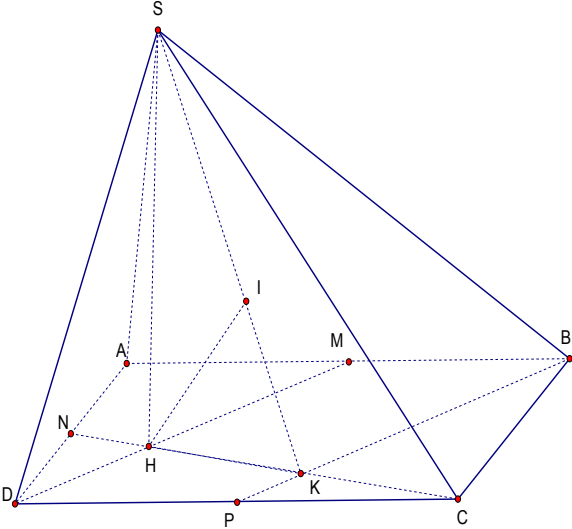
----- Hết -----

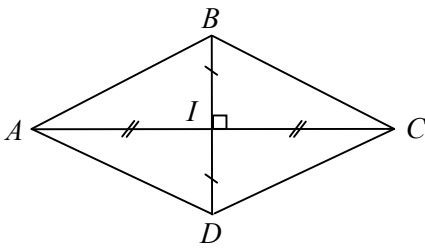
Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:.....; Số báo danh:.....

Câu	Đáp án	Điểm																
1 (2,0 điểm)	a)	1,0																
	Với $m=1$, hàm số (1) trở thành $y = x^3 - 3x^2$ TXĐ: $D = \mathbb{R}$ Sự biến thiên: Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$	0,25																
	Chiều biến thiên: $y' = 3x^2 - 6x, y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$ Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$ Cực trị: Hàm số đạt cực đại tại $x=0, y_{cd} = 0$; cực tiểu tại $x=2, y_{ct} = -4$	0,25																
	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>2</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr><tr><td>y</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>-4</td><td>$+\infty$</td></tr></table>	x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	y'	+	0	-	0	+	y	$-\infty$	0	-4	$+\infty$	0,25
	x	$-\infty$	0	2	$+\infty$													
y'	+	0	-	0	+													
y	$-\infty$	0	-4	$+\infty$														
Đồ thị: Tiếp xúc Ox tại O , cắt Ox tại $(3;0)$. $f(x) = x^3 - 3x^2$ 	0,25																	
b)		1,0																
	Trong trường hợp tổng quát, ta có $y' = 3x^2 - 6mx + 3(m^2 - 1)$, $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 = m - 1 \\ x = x_2 = m + 1 \end{cases}$	0,25																
	Vì $y' = 0$ luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m nên hàm số luôn có cực đại, cực tiểu với mọi m .	0,25																
	Dễ thấy $m - 1 < m + 1$, nên y' đổi dấu từ âm sang dương khi x đi qua $x_2 = m + 1$, do đó đồ thị hàm số có điểm cực tiểu là $A(m + 1; -1 - 3m)$	0,25																

	Theo giả thiết $OA = \sqrt{(m+1)^2 + (1+3m)^2} = 2 \Leftrightarrow 5m^2 + 4m - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{5} \\ m = -1 \end{cases}$ Vậy $m = \frac{1}{5}$ hoặc $m = -1$.	0,25
2 (1,0 điểm)	Phương trình đã cho tương đương: $\sin 2x - \cos 2x + 4(\sin x + \cos x) - 4\cos x + 1 = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow \sin x(\cos x + \sin x + 2) = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x + \sin x + 2 = 0(VN) \end{cases}$	0,25
	$\Leftrightarrow x = k\pi$ Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$	0,25
3 (1,0 điểm)	Điều kiện: $x \geq \frac{1}{3}; y \geq 1$. Phương trình thứ hai tương đương với : $(x+y)(2x-y) + 4 = -4(x+y) - (2x-y) \Leftrightarrow (x+y+1)(2x-y+4) = 0 \quad (\text{Vì } x+y+1 > 0)$ $\Leftrightarrow y = 2x + 4$	0,25
	Thay vào phương trình thứ nhất ta được: $\sqrt{3x-1} + 2x - 8 = \sqrt{2x+3} \Leftrightarrow \sqrt{3x-1} - \sqrt{2x+3} + 2x - 8 = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow \frac{3x-1-(2x+3)}{\sqrt{3x+1} + \sqrt{2x+3}} + 2(x-4) = 0 \Leftrightarrow (x-4) \left(\frac{1}{\sqrt{3x+1} + \sqrt{2x+3}} + 2 \right) = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow x = 4 \Rightarrow y = 12$	0,25
	Vậy hệ phương trình có một nghiệm là: (4;12)	
4 (1,0 điểm)	Đặt $\begin{cases} u = x + 2 \ln x \\ dv = \frac{1}{(x+2)^2} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{x+2}{x} dx \\ v = \frac{-1}{x+2} \end{cases}$	0,25
	$I = -\frac{x+2 \ln x}{x+2} \Big _1^2 + \int_1^2 \frac{dx}{x}$	0,25
	$= -\frac{1}{6} - \frac{\ln 2}{2} + \ln x \Big _1^2$	0,25
	$= \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{6}$	0,25

5 (1,0 điểm)		
	Chứng minh được CN vuông góc với $BP \Rightarrow \Delta DHC$ vuông tại H Tính được $HC = \frac{2\sqrt{5}}{5}a$, $HD = \frac{a\sqrt{5}}{5} \Rightarrow S_{HDC} = \frac{1}{2} HC \cdot HD = \frac{1}{2} \cdot \frac{2a\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{a\sqrt{5}}{5} = \frac{a^2}{5}$	0,25
	Suy ra $V_{S.HDC} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{HDC} = \frac{1}{3} a\sqrt{3} \cdot \frac{a^2}{5} = \frac{\sqrt{3}a^3}{15}$ (đvtt)	0,25
	Trong $(ABCD)$, Gọi K là giao điểm của CN và BP Ta có (SBP) cắt HC tại trung điểm K nên $d(C, (SBP)) = d(H, (SBP))$ Trong (SHK) hạ $HI \perp SK$ ($I \in SK$) Chứng minh được $(SHK) \perp (SBP)$ mà $(SHK) \cap (SBP) = SK \Rightarrow HI \perp (SBP)$ Khi đó $d(H, (SBP)) = HI$.	0,25
	Ta có $SH = a\sqrt{3}$, tính được $HK = \frac{1}{2} HC = \frac{a\sqrt{5}}{5}$. Tam giác SHK vuông tại H có HI là đường cao $\Rightarrow HI = \frac{SH \cdot HK}{\sqrt{SH^2 + HK^2}} = \frac{a\sqrt{3} \cdot \frac{a\sqrt{5}}{5}}{\sqrt{3a^2 + \frac{a^2}{5}}} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$ Vậy $d(C, (SBP)) = \frac{a\sqrt{3}}{4}$	0,25
6 (1,0 điểm)	Ta có $P = xy(x + y + 4) + x + y$ Đặt $t = x + y$ ta có $0 < t = x + y \leq \sqrt{2(x^2 + y^2)} \leq 2$ nên $t \in (0; 2]$ Mặt khác $xy \leq \frac{1}{4}(x + y)^2 = \frac{t^2}{4}$ Khi đó: $P = xy(t + 4) + t \leq \frac{t^2}{4}(t + 4) + t = \frac{t^3}{4} + t^2 + t$ Khảo sát hàm số $f(t) = \frac{t^3}{4} + t^2 + t$ trên $(0; 2]$ ta được $f(t) \leq f(2) = 8$ Vậy $P \leq 8$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = y = 1$ Do đó $Max P = 8$ khi $x = y = 1$	0,25

7.a (1,0 điểm)	Ta có $AC \perp BD \Rightarrow$ phương trình $AC: x + y - 1 = 0$ Gọi $I = AC \cap BD \Rightarrow I(0;1) \Rightarrow C(-1;2)$ 	0,25
	Suy ra $AC = 2\sqrt{2}$. Mà $S_{ABCD} = \frac{AC \cdot BD}{2} \Rightarrow BD = \frac{2S_{ABCD}}{AC} = \frac{16}{2\sqrt{2}} = 4\sqrt{2} \Rightarrow IB = 2\sqrt{2}$	0,25
	Vì $B \in BD \Rightarrow B(b; b+1)$. Nên $IB = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow b^2 + b^2 = 8 \Leftrightarrow b = \pm 2$	0,25
	Với $b = -2 \Rightarrow B(-2; -1)$ (loại) Với $b = 2 \Rightarrow B(2; 3) \Rightarrow D(-2; -1)$ Vậy $C(-1; 2), B(2; 3), D(-2; -1)$	0,25
8.a (1,0 điểm)	(S) có tâm $I(2; 2; -1)$ bán kính $R=5$ d_1 đi qua điểm $M_1(1; -1; 1)$ có véc tơ chỉ phương là $\vec{u}_1 = (-1; 4; 1)$ d_2 đi qua điểm $M_2(3; 0; -1)$ có véc tơ chỉ phương là $\vec{u}_2 = (1; 2; 2)$ $[\vec{u}_1, \vec{u}_2] = \left(\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right) = (6; 3; -6) = 3(2; 1; -2)$	0,25
	Gọi (P) là mặt phẳng song song với $d_1, d_2 \Rightarrow (P)$ nhận $\frac{1}{3}[\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (2; 1; -2)$ làm véc tơ pháp tuyến $\Rightarrow$ phương trình của (P): $2x + y - 2z + D = 0$. $d(I, (P)) = 3 \Leftrightarrow \frac{ 2 \cdot 2 + 1 \cdot 2 - 2(-1) + D }{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} = 3$ $\Leftrightarrow D + 8 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} D = 1 \\ D = -17 \end{cases}$	0,25
	Với $D = 1 \Rightarrow$ phương trình của (P): $2x + y - 2z + 1 = 0$ (loại vì (P) chứa M_1)	0,25
	Với $D = -17 \Rightarrow$ phương trình của (P): $2x + y - 2z - 17 = 0$. Vậy (P): $2x + y - 2z - 17 = 0$	0,25
9.a (1,0 điểm)	Từ hệ thức đã cho suy ra $n \geq 6, n \in \mathbb{N}$. $C_{n-4}^{n-6} + nA_n^2 = 454 \Leftrightarrow \frac{(n-4)!}{2!(n-6)!} + n \frac{n!}{(n-2)!} = 454$ $2n^3 - n^2 - 9n - 888 = 0 \Leftrightarrow n = 8$. Với $n = 8, \left(\frac{2}{x} - x^3 \right)^8 = \sum_{k=0}^8 C_8^k (2x^{-1})^k (-x^3)^{8-k} = \sum_{k=0}^8 C_8^k 2^k (-1)^{8-k} x^{24-4k}$ Hệ số của x^4 tương ứng với $24 - 4k = 4 \Leftrightarrow k = 5$. Vậy hệ số của x^4 là $C_8^5 2^5 (-1)^{8-5} = -1792$.	0,25
7.b (1,0 điểm)	Gọi H là hình chiếu của A lên d ta có $AH = d(A, d) = \frac{ 0 - 2 \cdot 2 + 2 }{\sqrt{1+2^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ Tam giác AMN vuông tại A nên $\frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2} = \frac{1}{AH^2} \Leftrightarrow \frac{1}{4AN^2} + \frac{1}{AN^2} = \frac{5}{4} \Rightarrow AN = 1$	0,25

	Gọi $N(2y-2; y) \in d$ Ta có $AN = 1 \Leftrightarrow (2y-2)^2 + (y-2)^2 = 1 \Leftrightarrow 5y^2 - 12y + 7 = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \Rightarrow N(0; 1) \\ y = \frac{7}{5} \Rightarrow N\left(\frac{4}{5}; \frac{7}{5}\right) \text{ (loại)} \end{cases}$	0,25
	Với $N(0; 1)$, Đường thẳng AM qua $A(0; 2)$ có vector pháp tuyến $\overrightarrow{AN} = (0; -1)$ $\Rightarrow$ Phương trình là $AM: y - 2 = 0$ Ta có $M = d \cap AM \Rightarrow$ Toạ độ M là nghiệm của hệ $\begin{cases} x - 2y + 2 = 0 \\ y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow M(2; 2)$ Vậy $M(2; 2), N(0; 1)$	0,25
8.b (1,0 điểm)	Ta có phương trình tham số của d là: $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -2 + t \\ z = -1 - t \end{cases} \Rightarrow \text{toạ độ điểm } M \text{ là nghiệm của hệ } \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -2 + t \\ z = -1 - t \\ x + y + z + 2 = 0 \end{cases} \quad (\text{tham số } t) \Rightarrow M(1; -3; 0)$	0,25
	Lại có vector pháp tuyến của (P) là $\overrightarrow{n_p} = (1; 1; 1)$, vector chỉ phương của d là $\overrightarrow{u_d} = (2; 1; -1)$. Vì Δ nằm trong (P) và vuông góc với d nên: Δ có vector chỉ phương $\overrightarrow{u_\Delta} = [\overrightarrow{u_d}, \overrightarrow{n_p}] = (2; -3; 1)$ Gọi $N(x; y; z)$ là hình chiếu vuông góc của M lên Δ, khi đó $\overrightarrow{MN} = (x-1; y+3; z)$. Ta có $\overrightarrow{MN}$ vuông góc với $\overrightarrow{u_\Delta}$ nên ta có phương trình: $2x - 3y + z - 11 = 0$	0,25
	Lại có $N \in (P)$ và $MN = 3\sqrt{42}$ ta có hệ: $\begin{cases} x + y + z + 2 = 0 \\ 2x - 3y + z - 11 = 0 \\ (x-1)^2 + (y+3)^2 + z^2 = 378 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4y + 13 \\ z = -5y - 15 \\ y^2 + 6y = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 13 \\ y = 0 \\ z = -15 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -11 \\ y = -6 \\ z = 15 \end{cases}$ Ta được hai điểm $N(13; 0; -15)$ và $N(-11; -6; 15)$	0,25
	Nếu $N(13; 0; -15)$ ta có phương trình $\Delta: \frac{x-13}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z+15}{1}$ Nếu $N(-11; -6; 15)$ ta có phương trình $\Delta: \frac{x+11}{2} = \frac{y+6}{-3} = \frac{z-15}{1}$	0,25
9.b (1,0 điểm)	Đặt $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbf{R}$). Khi đó:	0,25
	$(z - 2i) \cdot (\overline{z} - 2i) + 4iz = 0 \Leftrightarrow (a + (b-2)i) \cdot (a - (b+2)i) + 4i(a + bi) = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow (a^2 + b^2 - 4 - 4b) + [a(b-2) - a(b+2) + 4a]i = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 4b - 4 = 0$	0,25
	Ta lại có: $z - 2i = a + (b-2)i = \sqrt{a^2 + b^2 - 4b + 4}$	0,25
	$= \sqrt{a^2 + b^2 - 4b - 4 + 8} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$ Vậy môđun của $z - 2i$ bằng $2\sqrt{2}$.	0,25

