

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN THỊ HƯỜNG

BIẾN ĐỔI FOURIER PHÂN VÀ TÍCH CHẬP

LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC TOÁN HỌC

Thái Nguyên - Năm 2012

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN THỊ HƯỜNG

BIẾN ĐỔI FOURIER PHÂN VÀ TÍCH CHẬP

Chuyên ngành: TOÁN GIẢI TÍCH
Mã số: 60.46.01

LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học
TS. NGUYỄN VĂN NGỌC

Thái Nguyên - Năm 2012

Mục lục

Mở đầu	ii
1 BIẾN ĐỔI FOURIER PHÂN	1
1.1 Biến đổi tích phân Fourier thông thường	1
1.1.1 Định nghĩa của biến đổi Fourier	1
1.1.2 Các tính chất cơ bản	2
1.1.3 Cặp công thức thuận - ngược	5
1.1.4 Biến đổi Fourier và đa thức Hermite	5
1.2 Biến đổi Fourier phân Naminas	6
1.2.1 Định nghĩa	6
1.2.2 Các tính chất cơ bản của biến đổi Fourier phân . . .	8
1.3 Phép tính toán tử tổng quát	9
1.3.1 Phép biến đổi của tích	9
1.3.2 Phép biến đổi của vi phân	11
1.3.3 Phép biến đổi của tích hỗn tạp	12
1.3.4 Phép biến đổi của thương	12
1.3.5 Phép biến đổi của tích phân	12
1.3.6 Phép tịnh tiến	12
1.3.7 Phép mũ	13
1.4 Bảng các biến đổi Fourier phân của một số hàm đơn giản .	13
1.5 Biến đổi Hartley phân	13
1.5.1 Biến đổi Hartley thông thường	13
1.5.2 Biến đổi Hartley phân Pei	14

1.5.3	Biến đổi Hartley phân Sontakke	14
1.6	Biến đổi Fourier phân dạng lũy thừa LMT	14
1.6.1	Không gian Lizorkin	15
1.6.2	Biến đổi Fourier phân LMT	16
1.6.3	Các hệ thức toán tử của biến đổi Fourier phân . . .	17
1.7	Biến đổi Fourier phân dạng lũy thừa RCL	23
1.7.1	Dẫn luận	23
1.7.2	Biến đổi Fourier dạng lũy thừa phân RCL	23
1.7.3	Tính chất của biến đổi Fourier dạng lũy thừa phân RCL	25
2	TÍCH CHẬP CỦA CÁC BIẾN ĐỔI FOURIER PHÂN	27
2.1	Tích chập của biến đổi Fourier thông thường	27
2.2	Biến đổi Fourier phân của tích chập thông thường	28
2.3	Biến đổi Fourier phân của tích thông thường	29
2.4	Định lý về tích chập của biến đổi Fourier phân	31
2.4.1	Chuẩn bị	31
2.4.2	Định lý về tích chập của biến đổi Fourier phân . . .	32
2.5	Tích chập của biến đổi Hartley phân	34
2.5.1	Định lý tích chập	34
2.5.2	Tích chập của sự tổ hợp khác nhau giữa hàm chẵn và hàm lẻ	36
2.6	Định lý biến điệu của biến đổi Hartley phân	37
2.7	Đẳng thức Parseval của biến đổi Hartley phân:	39
2.8	Tích chập của phép biến đổi Fourier phân dạng lũy thừa RCL	41
2.9	Ứng dụng biến đổi Fourier dạng lũy thừa phân đối với tích phân Riemann-Liouville	42
	Kết luận	46
	TÀI LIỆU THAM KHẢO	47

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn luận văn

Những biến đổi Fourier, Laplace là những công cụ có tác dụng to lớn trong toán học lý thuyết và ứng dụng. Vô số các ứng dụng trong vật lý lý thuyết, kỹ thuật điện và nhiều lĩnh vực khác đã khiến cho những biến đổi này là một trong ba tiến bộ quan trọng nhất của toán học trong một phần tư cuối cùng của thế kỷ XIX. Bên cạnh những biến đổi Fourier và Laplace, các nhà Toán học và Vật lý học còn sở hữu một kho tàng các phép biến đổi tích phân khác cho từng phạm vi riêng của mình với những ứng dụng trong thực tế. Trong số các biến đổi đó, biến đổi Fourier có vai trò nổi bật nhất.

Biến đổi Fourier phân là sự khái quát của toán tử tích phân Fourier thông thường bằng cách cho nó phụ thuộc liên tục vào một tham số a (được chứa trong tổ hợp $\frac{a\pi}{2}$). Trong toán học, bậc a của biến đổi Fourier phân là lũy thừa a của toán tử trong biến đổi Fourier thông thường. Biến đổi Fourier bậc 1 chính là biến đổi Fourier thông thường. Biến đổi bậc $-a$ chính là biến đổi ngược của biến đổi bậc a .

Với sự phát triển của biến đổi Fourier phân và các khái niệm có liên quan, chúng ta thấy rằng miền tần số thông thường chỉ là trường hợp đặc biệt của sự liên tục các miền Fourier phân đoạn. Trong lý thuyết về việc thay thế tín hiệu đại diện, chúng ta cũng thấy được sự liên quan đến việc phân bố thời gian và tần số. Do đó, tất cả các tính chất của biến đổi Fourier thông thường trở thành một trường hợp đặc biệt của biến đổi Fourier phân.

Những bài viết đầu tiên về biến đổi Fourier phân được thực hiện bởi:

Wiener 1929, Condon 1937, Bargmann 1961, de Bruijn 1937. Điều quan trọng là trong suốt thập niên 80 của thế kỉ XX đã xuất hiện nhiều bài viết đi theo hai chiều hướng khác biệt: Namias 1980, McBride và Kerr 1987 và Mustard 1987, 1989, 1991, 1996. Tuy nhiên, số lượng các ấn phẩm chỉ thực sự bùng nổ sau khi phép biến đổi áp dụng trong quang học và xử lý tín hiệu được công bố. Trong đó, có các bài viết của: Lohmann 1993, Ozaktas và những người khác 1994; Alieva và những người khác 1994; Almeida 1994. Việc nghiên cứu phép biến đổi Fourier phân đóng một vai trò quan trọng xây dựng một trong những kỹ thuật thuận tiện cho việc giải quyết các lớp nhất định của phương trình vi phân thường và một phần phát sinh trong cơ học lượng tử cổ điển Hamiltonian bậc hai. Kỹ thuật mới này sau đó được mở rộng đến các vấn đề ba chiều và được áp dụng để mô tả cơ học lượng tử của các chuyển động của electron trong từ trường đều. Các kết quả nghiên cứu chỉ ra rằng phép biến đổi Fourier phân có nhiều ứng dụng trong vật lý, cơ học, kỹ thuật điện và một số ngành khoa học khác. Sự ứng dụng rộng rãi trên nhiều lĩnh vực khoa học và toán học của phép biến đổi Fourier phân và tích chập đã nói nên tầm quan trọng của vấn đề này. Vì thế, tôi lựa chọn luận văn này là muốn được tiếp cận, tìm hiểu và nghiên cứu về vấn đề này.

2. Phương pháp nghiên cứu

Sưu tầm và đọc tài liệu từ các tạp chí toán học trong nước và quốc tế liên quan đến phép biến đổi Fourier và tích chập. Qua đó, tìm hiểu và nghiên cứu về vấn đề này.

3. Mục đích của luận văn

Mục đích của luận văn này là học tập và giới thiệu các kết quả nổi bật về các biến đổi Fourier và dạng Fourier phân được quan tâm nhiều và phát triển trong khoảng hai thập niên gần đây.

4. Nội dung của Luận văn

Luận văn bao gồm phần Mở đầu, hai chương nội dung chính, Kết luận và Tài liệu tham khảo.

Chương 1. Giới thiệu tổng quan một số phép biến đổi Fourier phân.

Trước hết trong mục 1.1 tôi trình bày khái quát về biến đổi Fourier thông thường. Trong các mục tiếp theo chúng tôi giới thiệu biến đổi Fourier phân Naminas [13], biến đổi Hartley phân [10], biến đổi Fourier phân dạng lũy thừa LMT [14] (Y. Luchko, H. Martinez, J. Trujillo), biến đổi Fourier phân dạng lũy thừa RCL [9] (Luis Guillermo Romero, Ruben Alejandro Cansform and Luciano Leonardo Luque).

Chương 2. Giới thiệu về tích chập của các biến đổi Fourier phân và biến đổi Hartley phân. Tích chập của các biến đổi Fourier phân và biến đổi Hartley phân là sự mở rộng của tích chập cổ điển của các phép biến đổi tích phân thông thường tương ứng. Tích chập của các phép biến đổi tích phân này ngày càng được quan tâm vì đã tìm thấy những ứng dụng của chúng trong một số lĩnh vực, bao gồm lý thuyết tín hiệu, xử lý ảnh và quang học [3].

Luận văn này được hoàn thành dưới sự hướng dẫn và nhiệt tình chỉ bảo của Tiến sĩ Nguyễn Văn Ngọc, Viện Toán học. Em xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến Thầy. Tác giả cũng xin gửi lời cảm ơn chân thành đến Ban giám hiệu, phòng Đào tạo, khoa Toán-trường Đại học sư phạm, Đại học Thái Nguyên đã tạo điều kiện thuận lợi trong suốt quá trình học tập tại trường.

Xin chân thành cảm ơn gia đình, bạn bè đồng nghiệp và các thành viên trong lớp cao học toán K18B đã luôn quan tâm, động viên, giúp đỡ tôi trong suốt thời gian học tập và quá trình làm luận văn.

Tuy có nhiều cố gắng, song thời gian và năng lực của bản thân có hạn nên luận văn khó tránh khỏi những thiếu sót. Rất mong được sự đóng góp ý kiến của các thầy cô cùng toàn thể bạn đọc.

Thái Nguyên, tháng 04 năm 2012

Tác giả

Nguyễn Thị Hương

Chương 1

BIẾN ĐỔI FOURIER PHÂN

Trong chương này giới thiệu tổng quan một số phép biến đổi Fourier phân. Trước hết trong mục 1.1 tôi trình bày khái quát về biến đổi Fourier thông thường. Trong các mục tiếp theo chúng tôi giới thiệu biến đổi Fourier phân Naminas [13], biến đổi Hartley phân [10], biến đổi Fourier phân dạng lũy thừa LMT [14] (Y. Luchko, H. Martinez, J. Trujillo), biến đổi Fourier phân dạng lũy thừa RCL [9] (Luis Guillermo Romero, Ruben Alejandro Cansform and Luciano Leonardo Luque).

1.1 Biến đổi tích phân Fourier thông thường

Để có thể hiểu về biến đổi Fourier phân, trước hết chúng ta xét biến đổi Fourier thông thường trong $L^1(\mathbb{R})$. Các kết quả dưới đây có thể thấy trong nhiều tài liệu, thí dụ [4].

1.1.1 Định nghĩa của biến đổi Fourier

Định nghĩa 1.1. Nếu $f \in L^1(\mathbb{R})$, ta định nghĩa biến đổi Fourier của f là:

$$\hat{f}(x) = F[f](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{it \cdot x} dt, x \in \mathbb{R}. \quad (1.1)$$

Và biến đổi Fourier ngược là

$$\check{f}(x) = F^{-1}[f](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-it \cdot x} dt. \quad (1.2)$$

Từ các công thức (1.1), (1.2), suy ra

$$\check{f}(x) = \hat{f}(-x), F^{-1}[f(t)] = F[f(-t)]. \quad (1.3)$$

1.1.2 Các tính chất cơ bản

Xét một số tính chất của biến đổi Fourier

Tính chất 1 (Tính bị chặn). $F[f] = \hat{f}(x)$ là hàm bị chặn trên $\mathbb{R}$.

Chứng minh. Thật vậy, theo (1.1), ta có

$$|\hat{f}(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_{L_1}.$$

□

Tính chất 2 (Tính liên tục đều). $\hat{f}(x) = F[f]$ là hàm liên tục đều trên $\mathbb{R}$.

Chứng minh. Thật vậy, với $x, h \in \mathbb{R}$, ta có

$$\begin{aligned} |\hat{f}(x+h) - \hat{f}(x)| &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| |e^{-it(x+h)} - e^{-itx}| dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| |\cos th - 1 - i \sin th| dt \\ &\leq 2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| \left| \sin \frac{th}{2} \right| dt \\ &\leq 2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|t| > R} |f(t)| dt + R|h| \int_{|t| \leq R} |f(t)| dt. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra, với $\epsilon > 0$ có thể chọn được $R = R(\epsilon) > 0$ và $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, sao cho $|h| < \delta$, có bất đẳng thức

$$|\hat{f}(x+h) - \hat{f}(x)| < \epsilon, \forall x \in \mathbb{R},$$

nghĩa là $\hat{f}(x)$ là liên tục đều trên $\mathbb{R}$.

Từ đó suy ra điều phải chứng minh. □

Tính chất 3 (Tính liên tục của toán tử Fourier). Toán tử F liên tục theo nghĩa sau đây: Nếu $\{f_k\} \in L^1(\mathbb{R})$, $f_k \rightarrow f \in L^1(\mathbb{R})$, $k \rightarrow \infty$ trong $L^1(\mathbb{R})$, thì

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F[f_k] = F[f].$$

Chứng minh. Thật vậy, ta có

$$|F[f] - F[f_k]| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t) - f_k(t)| dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f - f_k\|_1.$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh. $\square$

Tính chất 4 (Định lý Riemann-Lebesgue). Nếu $f(t) \in L^1(\mathbb{R})$, thì $\hat{f}(x) = F[f] \rightarrow 0$, khi $|x| \rightarrow \infty$.

Tính chất 5 (Đẳng thức Parseval). Với $f_1, f_2 \in L^1(\mathbb{R})$, có đẳng thức

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}_1(y) f_2(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) \hat{f}_2(x) dx.$$

Chứng minh. Thật vậy, vì

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} |f_1(x)| |f_2(y)| dx dy &= \int_{-\infty}^{+\infty} |f_1(x)| dx \int_{-\infty}^{+\infty} |f_2(y)| dy \\ &= \|f_1\|_1 \|f_2\|_1 < \infty, \end{aligned}$$

nên theo Định lý Fubini, ta có

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} e^{ix \cdot y} f_1(x) f_2(y) dx dy &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(y) \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) e^{ix \cdot y} dx \right\} dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(y) e^{ix \cdot y} dy \right\} dx. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh. $\square$

Tính chất 6 (Biến đổi Fourier của tích chập). Nếu $f(t), g(t) \in L^1(\mathbb{R})$, thì

$$F[f * g] = F[f] \cdot F[g].$$

Chứng minh. Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} F[f * g](x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (f * g)(t) e^{itx} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(y) g(t - y) dy \right) e^{itx} dt. \end{aligned}$$

Đổi biến $t - y = z$, ta có

$$F[f * g](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{iy \cdot x} dy \int_{-\infty}^{+\infty} g(z) e^{iz'' \cdot x} dz = F[f](x) F[g](x).$$

□

Tính chất 7. Biến đổi Fourier của dịch chuyển:

$$F[f(t - a)](x) = e^{iax} F[f](x).$$

Chứng minh. Thật vậy, ta có:

$$F[f(t - a)](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(t - a) dt.$$

Đổi biến $t - a = \tau$, ta được:

$$F[f(t - a)](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{i(\tau+a)x} d\tau = e^{iax} F[f](x).$$

□

Tính chất 8. (Biến đổi Fourier của đạo hàm). Cho $f(t) \in L^1(\mathbb{R})$ với $D^\alpha f \in L^1(\mathbb{R})$ và f liên tục tuyệt đối trong mọi khoảng hữu hạn theo từng biến. Khi đó:

$$F[D^\alpha f](x) = (-ix)^\alpha F[f](x),$$

trong đó α là một đa chỉ số.

Tính chất 9. (Đạo hàm của biến đổi Fourier). Nếu $t^\alpha f \in L^1(\mathbb{R})$, thì

$$D_x^\alpha F[f](x) = F[(it)^\alpha f(t)](x).$$

Chứng minh. Thật vậy, theo giả thiết ta có:

$$\begin{aligned} D_x^\alpha \hat{f}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} D_x^\alpha f(t) e^{it \cdot x} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) (-it)^\alpha e^{it \cdot x} dt = F[(it)^\alpha f(t)](x). \end{aligned} \quad (1.4)$$

□

1.1.3 Cặp công thức thuận - ngược

Giả sử $f(t)$ và $\hat{f}(x)$ thuộc $L^1(\mathbb{R})$. Khi đó tích phân Fourier của $f(t)$ trùng với $\hat{f}(x)$. Trong trường hợp này các công thức (1.1) và (1.2) tương ứng là:

$$\hat{f}(x) = F[f](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{it \cdot x} dt, \quad (1.5)$$

$$f(t) = F^{-1}[\hat{f}](t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x) e^{-it \cdot x} dx, \quad (1.6)$$

trong đó công thức (1.5) được gọi là công thức biến đổi Fourier thuận, còn công thức (1.6) được gọi là biến đổi Fourier ngược. Các tích phân trên hội tụ, ví dụ đối với $f(t), \hat{f}(x) \in L^1(\mathbb{R})$. Hiện nay lý thuyết của biến đổi tích phân Fourier đã được xây dựng cho các hàm suy rộng tăng chậm. Trong luận văn này chỉ xét các biến đổi Fourier thông thường trong $L^1(\mathbb{R})$.

1.1.4 Biến đổi Fourier và đa thức Hermite

Ký hiệu $H_n(x)$ là đa thức Hermite bậc n . Hàm Hermite chuẩn hoá trong $L^2(\mathbb{R})$ bởi công thức:

$$\Phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} e^{-x^2/2} H_n(x), n = 0, 1, 2, \dots$$

Các hàm Hermite $\Phi_n(x); n = 0, 1, 2, \dots$ tạo thành hệ trực chuẩn đầy đủ trong $L^2(\mathbb{R})$. Với $f \in L^2(\mathbb{R})$ ta có:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Phi_n(x), \quad (1.7)$$

trong đó

$$a_n = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \Phi_n(x) dx. \quad (1.8)$$

Hàm Hermite $\Phi_n(x)$ là hàm riêng của toán tử Fourier với số riêng $e^{in\pi/2}$:

$$F[\Phi_n](x) = e^{in\pi/2} \Phi_n(x). \quad (1.9)$$

1.2 Biến đổi Fourier phân Naminas

1.2.1 Định nghĩa

Naminas đã xây dựng biến đổi Fourier phân (FrFT) như sau. Xét toán tử tuyến tính $\mathcal{F}_\alpha (\alpha \in \mathbb{R})$ thỏa mãn phương trình hàm riêng-trị riêng:

$$\mathcal{F}_\alpha[\Phi_n] = e^{in\alpha}\Phi_n(x). \quad (1.10)$$

Tác động toán tử $\mathcal{F}_\alpha$ vào hai vế của (1.7), sử dụng phương trình (1.10), ta có

$$\mathcal{F}_\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{in\alpha} \Phi_n(x), \quad (1.11)$$

trong đó các hệ số a_n được xác định theo công thức (1.8).

Thay (1.8) vào (1.11) ta được

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\alpha[f](x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \Phi_n(t) dt \right\} e^{in\alpha} \Phi_n(x) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} e^{in\alpha} \Phi_n(x) \Phi_n(t) \right\} dt. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Đặt

$$\begin{aligned} K_\alpha(x, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{in\alpha} \Phi_n(x) \Phi_n(t) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{in\alpha} \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} e^{-x^2/2} H_n(x) e^{-t^2/2} H_n(t). \end{aligned} \quad (1.13)$$

Sử dụng công thức Mehler được:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x) H_n(t)}{2^n n! \sqrt{\pi}} z^n = \frac{1}{\sqrt{\pi(1-z^2)}} \exp\left(\frac{2xtz - (x^2 + t^2)z^2}{1-z^2}\right), \quad (1.14)$$

và các đẳng thức

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2xte^{i\alpha}}{1 - e^{2i\alpha}} = ixt \csc \alpha = \frac{ixt}{\sin \alpha}, \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{1 - e^{2i\alpha}}} = \frac{e^{-i/2[\alpha - \pi/2 \operatorname{sgn}(\sin \alpha)]}}{\sqrt{2\pi|\sin \alpha|}}, \\ \frac{e^{2i\alpha}}{1 - e^{2i\alpha}} + \frac{1}{2} = \frac{i}{2} \cot \alpha, \end{array} \right.$$

Biến đổi về phải của (1.13) về dạng

$$\begin{aligned} K_\alpha(x, t) &= \frac{e^{-i/2[\alpha - \pi/2 \operatorname{sgn}(\sin \alpha)]}}{\sqrt{2\pi |\sin \alpha|}} \exp \left(\frac{ixt}{\sin \alpha} - \frac{i(x^2 + t^2) \cot \alpha}{2} \right) \\ &= \frac{c(\alpha)}{\sqrt{2\pi}} \exp \{ ia(\alpha)[2b(\alpha)xt - (x^2 + t^2)] \}, \end{aligned} \quad (1.15)$$

trong đó

$$\begin{cases} \alpha \neq \pm \frac{\pi}{2}, k\pi, \quad k - \text{nguyên} \\ a(\alpha) = \frac{\cot \alpha}{2}, \\ b(\alpha) = \frac{1}{\cos \alpha}, \\ c(\alpha) = \frac{e^{-i/2[\alpha - \pi/2 \operatorname{sgn}(\sin \alpha)]}}{\sqrt{|\sin \alpha|}} = \sqrt{1 + i \cot \alpha}. \end{cases} \quad (1.16)$$

Như vậy, với điều kiện (1.16), từ (1.12)-(1.15), ta có công thức

$$\hat{f}_\alpha(x) = \mathcal{F}_\alpha[f](x) = \int_{-\infty}^{\infty} K_\alpha(x, t) f(t) dt. \quad (1.17)$$

Người ta đã chứng minh được rằng, nếu α là số thực thì $\hat{f}_\alpha(x)$ và $\hat{f}_{-\alpha}(x)$ là liên hợp phức với nhau. Ngoài ra có công thức

$$\mathcal{F}_\alpha \mathcal{F}_{-\alpha} = \mathcal{F}_{-\alpha} \mathcal{F}_\alpha = I, \quad (1.18)$$

trong đó I là toán tử đồng nhất.

Chú ý rằng khi $\alpha = \frac{\pi}{2}$ và $\alpha = -\frac{\pi}{2}$, ta lại có những biến đổi Fourier thông thường là công thức (1.1) và công thức (1.2). Khi $\alpha = 0$, và biến đổi trở về ánh xạ đồng nhất. Thật vậy, khi $\alpha \rightarrow 0$ chúng ta thay $\sin \alpha$ bởi α và $\cot \alpha$ bởi $\frac{1}{\alpha}$ và sử dụng kết luận dưới đây [theo nghĩa hàm suy rộng]

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{(\pi)i\varepsilon}} e^{-x^2/i\varepsilon} = \delta(x), \quad (1.19)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - a) f(x) dx = f(a). \quad (1.20)$$

Trên cơ sở các công thức (1.20), (1.19) ta có

$$K_\alpha(x, t) = \begin{cases} (1/\sqrt{2\pi})e^{\pm ixt}, & \alpha = \pm\pi/2, \\ \delta(x - t), & \alpha = 2k\pi, \\ \delta(x + t), & \alpha = (2k + 1)\pi. \end{cases} \quad (1.21)$$

Ta đưa vào định nghĩa sau:

Định nghĩa 1.2. Giả sử $f(t) \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Biến đổi Fourier phân $\mathcal{F}_\alpha$ được xác định bởi công thức (1.17), trong đó hạch $K_\alpha(x, t)$ của phép biến đổi được xác định bởi các công thức (1.15) và (1.21). Toán tử ngược $\mathcal{F}_\alpha^{-1}$ được xác định theo công thức

$$\mathcal{F}_\alpha^{-1} = \mathcal{F}_{-\alpha}. \quad (1.22)$$

Chú ý 1.3. Trong nhiều tài liệu về biến đổi Fourier phân hạch của phép biến đổi thuận là $K_{-\alpha}(x, t)$, còn hạch của phép biến đổi ngược lại là $K_\alpha(x, t)$. Khi đó biến đổi Fourier phân thuận và ngược tương ứng được xác định theo các công thức

$$\mathcal{F}_\alpha[f](x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)K_{-\alpha}(x, t)dt, \quad (1.23)$$

$$\mathcal{F}_\alpha^{-1}[f](x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)K_\alpha(x, t)dt. \quad (1.24)$$

1.2.2 Các tính chất cơ bản của biến đổi Fourier phân

Từ định nghĩa suy ra biến đổi Fourier phân $\mathcal{F}_\alpha$ có các tính chất sau đây.

$$1. \quad \mathcal{F}_0 = I, \quad (1.25)$$

$$2. \quad \mathcal{F}_{\pi/2} = F, \quad \mathcal{F}_{-\pi/2} = F^{-1}, \quad (1.26)$$

$$3. \quad \mathcal{F}_\pi = \tilde{I}, \quad \tilde{I}[f](x) = f(-x), \quad (1.27)$$

$$4. \quad \mathcal{F}_{\alpha+\pi} = \mathcal{F}_\alpha, \quad (1.28)$$

$$5. \quad \mathcal{F}_{\alpha+\beta} = \mathcal{F}_\alpha \mathcal{F}_\beta = \mathcal{F}_\beta \mathcal{F}_\alpha. \quad (1.29)$$

Định lý 1.4. . Nếu $0 < |\alpha| < \pi$, thì $\mathcal{F}_\alpha$ là một đồng cấu của $L^2(\mathbb{R})$ với $\mathcal{F}_\alpha^{-1} = \mathcal{F}_{-\alpha}$.

Định lý 1.5. . Nếu $K_\alpha(x, t)$ là hạch của FrFT thì

$$1. \quad K_\alpha(x, t) = K_\alpha(t, x), \quad (1.30)$$

$$2. \quad K_{-\alpha}(x, t) = \overline{K_\alpha(x, t)}, \quad (1.31)$$

$$3. \quad K_\alpha(-x, t) = K_\alpha(x, -t), \quad (1.32)$$

$$4. \quad \int_{-\infty}^{\infty} K_a(\xi, t) K_b(t, x) dt = K_{a+b}(\xi, x). \quad (1.33)$$

Định lý 1.6. (Parseval). Giả sử $f, g \in L^1(\mathbb{R}^1) \cap L^2(\mathbb{R}^1)$. Khi đó có đẳng thức Parseval

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g(t)} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}_\alpha[f](x) \overline{\mathcal{F}_\alpha[g](x)} dx, \quad (1.34)$$

trong đó $\bar{g}$ là liên hợp phức của g .

1.3 Phép tính toán tử tổng quát

Cũng như trong trường hợp phép biến đổi Fourier và phép biến đổi Laplace, phép tính toán tử có thể xây dựng dựa trên phép biến đổi Fourier phân.

1.3.1 Phép biến đổi của tích

Cho $f(x)$ là một hàm bất kỳ thuộc lớp hàm $L^2(\mathbb{R})$, ta cần chỉ ra phép biến đổi Fourier phân của $t^m f(x)$. Sử dụng công thức truy hồi

$$H_{n+1}(x) + 2nH_{n-1}(x) - 2xH_n(x) = 0.$$

ta suy ra

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\alpha[xe^{-x^2/2}H_n(x)](t) &= te^{-t^2/2}e^{-i(n+1)\alpha}H_n(t) \\ &+ ne^{-t^2/2}\left(e^{-i(n-1)\alpha} - e^{-i(n+1)\alpha}\right)H_{n-1}(t). \end{aligned} \quad (1.35)$$

Mặt khác, $H'_n(t) = 2H_{n-1}(t)$, nên

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathcal{F}_\alpha[xe^{-x^2/2}H_n(x)] \\ = -te^{-in\alpha}e^{-t^2/2}H_n(t) + 2ne^{-in\alpha}e^{-t^2/2}H_{n-1}(t). \end{aligned} \quad (1.36)$$

Rút gọn $ne^{-in\alpha}e^{-t^2/2}H_{n-1}(t)$ giữa phương trình (1.35) và (1.36) ta được

$$\mathcal{F}_\alpha[xe^{-x^2/2}H_n(x)] = \left(t \cos \alpha + i \sin \alpha \frac{d}{dt}\right) \mathcal{F}_\alpha[e^{-x^2/2}H_n(x)].$$

Suy ra

$$\mathcal{F}_\alpha[xf] = \left(t \cos \alpha + i \sin \alpha \frac{d}{dt}\right) \mathcal{F}_\alpha[f]. \quad (1.37)$$

Dạng toán tử của phương trình này là:

$$\mathcal{F}_\alpha x = \left(t \cos \alpha + i \sin \alpha \frac{d}{dt}\right) \mathcal{F}_\alpha. \quad (1.38)$$

Lặp lại công thức (1.38) ta có:

$$\mathcal{F}_\alpha x^m = \left(t \cos \alpha + i \sin \alpha \frac{d}{dt}\right)^m \mathcal{F}_\alpha. \quad (1.39)$$

Từ phương trình (1.39) ta có:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\alpha[x^2 f] &= \frac{1}{2} \sin 2\alpha (i + t^2 \cot \alpha) \mathcal{F}_\alpha[f] \\ &\quad + it \sin 2\alpha \frac{d}{dt} \mathcal{F}_\alpha[f] - \sin^2 \alpha \frac{d^2}{dt^2} \mathcal{F}_\alpha[f]. \end{aligned} \quad (1.40)$$

Bây giờ ta xét hàm số $g(x)$ với giả thiết khai triển thành chuỗi Taylo $g(x) = \sum b_m x^m$. Sử dụng phương trình (1.39) ta tìm được phương trình toán tử tổng quát hơn

$$\mathcal{F}_\alpha[g(x)] = g\left(t \cos \alpha + i \sin \alpha \frac{d}{dt}\right) \mathcal{F}_\alpha. \quad (1.41)$$

Tác động toán tử này lên hàm f ta được:

$$\mathcal{F}_\alpha[gf] = g\left(t \cos \alpha + i \sin \alpha \frac{d}{dt}\right) \mathcal{F}_\alpha[f]. \quad (1.42)$$

Đổi thứ tự của f và g , ta cũng tìm được:

$$\mathcal{F}_\alpha[gf] = f\left(t \cos \alpha + i \sin \alpha \frac{d}{dt}\right) \mathcal{F}_\alpha[g]. \quad (1.43)$$

Vậy biến đổi Fourier phân của $x^m f(x)$ trong đó $f(x)$ thuộc lớp hàm Lebesgue L^2 trong khoảng $(-\infty, +\infty)$ được cho bởi công thức

$$\mathcal{F}_\alpha[x^m f(x)] = (t \cos \alpha + i \sin \alpha \frac{d}{dt})^m \mathcal{F}_\alpha[f(x)]. \quad (1.44)$$

Đặc biệt trong trường hợp $m = 2$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_\alpha[x^2 f(x)] &= \frac{1}{2} \sin 2\alpha (i + t^2 \cot \alpha) \mathcal{F}_\alpha[f(x)] \\ &\quad + \frac{1}{2} it \sin 2\alpha \frac{d}{dt} \mathcal{F}_\alpha[f(x)] - \sin^2 \alpha \frac{d^2}{dt^2} \mathcal{F}_\alpha[f(x)].\end{aligned}\quad (1.45)$$

1.3.2 Phép biến đổi của vi phân

Quy tắc chỉ ra phép biến đổi Fourier phân của đạo hàm một số hàm số. Bằng cách sử dụng biểu diễn tích phân (1.17) và phương pháp tích phân từng phần với giả thiết hàm $f(x) \rightarrow 0$ khi $x \rightarrow \pm\infty$, ta tìm được:

$$\mathcal{F}_\alpha\left[\frac{df}{dx}\right] = -i \cot \alpha \mathcal{F}_\alpha[xf] - \left(\frac{it}{\sin \alpha}\right) \mathcal{F}_\alpha[f]. \quad (1.46)$$

Từ phương trình (1.37) ta được:

$$\mathcal{F}_\alpha\left[\frac{df}{dx}\right] = \left(it \sin \alpha + \cos \alpha \frac{d}{dt}\right) \mathcal{F}_\alpha[f]. \quad (1.47)$$

Dạng toán tử của phương trình (1.47) là:

$$\mathcal{F}_\alpha\left[\frac{d}{dx}\right] = \left[it \sin \alpha + \cos \alpha \frac{d}{dt}\right] \mathcal{F}_\alpha, \quad (1.48)$$

và có thể mở rộng đến đạo hàm cấp cao.

$$\mathcal{F}_\alpha\left[\frac{d^m}{dx^m}\right] = \left(it \sin \alpha + \cos \alpha \frac{d}{dt}\right)^m \mathcal{F}_\alpha. \quad (1.49)$$

Trong trường hợp đạo hàm cấp 2, ta có công thức

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_\alpha\left[\frac{d^2 f}{dx^2}\right] &= (-t^2 \sin \alpha + i \cos \alpha) \sin \alpha \mathcal{F}_\alpha[f] \\ &\quad + it \sin 2\alpha \frac{d}{dt} \mathcal{F}_\alpha[f] + \cos^2 \alpha \frac{d^2}{dt^2} \mathcal{F}_\alpha[f].\end{aligned}\quad (1.50)$$

Với hàm $g(t)$ khai triển được thành chuỗi Taylo, ta có:

$$\mathcal{F}_\alpha\left[g\left(\frac{d}{dx}\right)f\right] = g\left(it \sin \alpha + \cos \alpha \frac{d}{dt}\right) \mathcal{F}_\alpha[f]. \quad (1.51)$$

1.3.3 Phép biến đổi của tích hỗn tạp

Bằng cách sử dụng công thức (1.37) và (1.47) trong trường hợp $m = 1$ ta tìm được công thức phép biến đổi của tích hỗn tạp

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_\alpha\left(x\frac{df}{dx}\right) &= (-\sin\alpha + it^2\cos\alpha)\sin\alpha\mathcal{F}_\alpha(f) \\ &\quad + t\cos 2\alpha\frac{d}{dt}\mathcal{F}_\alpha(f) + \frac{i}{2}\sin 2\alpha\frac{d^2}{dt^2}\mathcal{F}_\alpha(f).\end{aligned}\quad (1.52)$$

1.3.4 Phép biến đổi của thương

Để tìm $\mathcal{F}_\alpha\left(\frac{f}{x}\right)$, ta bắt đầu từ công thức (1.17) bằng cách thay f bởi $\frac{f}{x}$. Công thức phép biến đổi của thương được cho dưới đây

$$\mathcal{F}_\alpha\left(\frac{f}{x}\right) = \frac{-i}{\sin\alpha}e^{\frac{it^2}{2}\cot\alpha}\int_{-\infty}^te^{-\frac{it^2}{2}\cot\alpha}\mathcal{F}_\alpha(f)dt. \quad (1.53)$$

1.3.5 Phép biến đổi của tích phân

Xét hàm $g(x) = \int_a^x f(x)dx$, ta suy ra $f(x) = \frac{d}{dx}g(x)$. Áp dụng công thức (1.47), ta có

$$\mathcal{F}_\alpha[f] = \mathcal{F}_\alpha\left[\frac{d}{dx}g(x)\right] = (it\sin\alpha + \cos\alpha)\frac{d}{dt}\mathcal{F}_\alpha[g]. \quad (1.54)$$

Đặt $g_\alpha = \mathcal{F}_\alpha[g]$ và $f_\alpha = \mathcal{F}_\alpha[f]$, ta thu được phương trình vi phân

$$it\sin\alpha g_\alpha(t) + \cos\alpha g'_\alpha(t) = f_\alpha(t).$$

Giải phương trình này ta thu được công thức

$$\mathcal{F}_\alpha\left(\int_a^x f(x)dx\right) = \sec\alpha e^{\frac{it^2}{2}\tan\alpha}\int_a^te^{-\frac{it^2}{2}\tan\alpha}\mathcal{F}_\alpha(f)dt. \quad (1.55)$$

1.3.6 Phép tịnh tiến

Bằng cách thay biến x trong công thức (1.17) biểu diễn tích phân của phép biến đổi Fourier phân bởi $y = x + k$ ta có kết quả:

$$\mathcal{F}_\alpha[f(x+k)] = e^{ik\sin\alpha(t+\frac{k}{2}\cos\alpha)}\mathcal{F}_\alpha[f(x)](t+k\cos\alpha). \quad (1.56)$$

1.3.7 Phép mũ

$$\mathcal{F}_\alpha[e^{ikx}f(x)] = e^{ik \cos \alpha(t + \frac{k}{2} \sin \alpha)} \mathcal{F}^\alpha[f(t)](t + k \sin \alpha). \quad (1.57)$$

1.4 Bảng các biến đổi Fourier phân của một số hàm đơn giản

(với các điều kiện thích hợp của tham số α)

Hàm $f(x)$	Biến đổi Fourier phân $\mathcal{F}_\alpha f(x)$
$\exp(-x^2/2)$	$\exp(-x^2/2)$
$H_n(x) \exp(-x^2/2)$	$e^{in\alpha} H_n(x) \exp(-x^2/2)$
$\exp(-x^2/2 + ax)$	$\exp\left(-\frac{x^2}{2} - \frac{ia^2}{2} e^{i\alpha} \sin \alpha + axe^{i\alpha}\right)$
$\delta(x)$	$\frac{\exp(i\pi/4 - i\alpha/2)}{\sqrt{2\pi \sin \alpha}} \exp\left[-\frac{ix^2}{2} \cot \alpha\right]$
$\delta(x - a)$	$\frac{\exp(i\pi/4 - i\alpha/2)}{\sqrt{2\pi \sin \alpha}} \exp\left[-\frac{ix^2}{2} \cot \alpha(x^2 + a^2) + iax \cos \alpha\right]$
1	$\frac{e^{-i\alpha/2}}{\sqrt{\cos \alpha}} \exp\left(+\frac{ix^2}{2} \tan \alpha\right)$
e^{ikx}	$\frac{e^{-i\alpha/2}}{\sqrt{\cos \alpha}} \exp\left[\frac{i}{2} \tan \alpha(k^2 + x^2) + ikx \sec \alpha\right]$

1.5 Biến đổi Hartley phân

1.5.1 Biến đổi Hartley thông thường

Phép biến đổi tích phân Hartley (thông thường) được đưa ra vào năm 1942 và được định nghĩa theo công thức:

$$\tilde{f}_\pm(x) = H_\pm[f](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \text{cas}(\pm xt) f(t) dt, \quad (1.58)$$

trong đó, ký hiệu:

$$\text{cas}(x) = \cos x + \sin x. \quad (1.59)$$

Biến đổi Hartley ngược được cho bởi công thức

$$f(x) = H_{\pm}^{-1}[\tilde{f}_{\pm}](t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \text{cas}(\pm xt) f_{\pm}(x) dx. \quad (1.60)$$

Nhận xét rằng các công thức biến đổi Hartley thuận (1.58) và ngược (1.60) là giống nhau.

1.5.2 Biến đổi Hartley phân Pei

Trong [10, 11] Pei đã đưa ra công thức cho biến đổi Hartley phân như sau:

$$H^{\alpha}\{f(t)\}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) P_{\alpha}(t, s) dt, \quad (1.61)$$

trong đó:

$$P_{\alpha}(t, s) = \sqrt{\frac{1 - i \cot \phi}{2\pi}} e^{i \frac{s^2}{2} \cot \phi} e^{i \frac{t^2}{2} \cot \phi} \times \frac{1}{2} [(1 - ie^{i\phi}) \text{cas}(\csc \phi.st) + (1 + e^{i\phi}) \text{cas}(-\csc \phi.st)], \quad (1.62)$$

trong đó $\phi = \frac{\alpha\pi}{2}$.

1.5.3 Biến đổi Hartley phân Sontakke

Một dạng đơn giản khác của biến đổi Hartley được Sontakke đưa ra trong [10,11]:

$$H^{\alpha}\{f(t)\}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) S_{\alpha}(t, s) dt, \quad (1.63)$$

trong đó

$$S_{\alpha}(t, s) = \sqrt{\frac{1 - i \cot \phi}{2\pi}} e^{i \frac{s^2}{2} \cot \phi} e^{i \frac{t^2}{2} \cot \phi} \times [\cos(\csc \phi.st) - ie^{i\phi} \sin(\csc \phi.st)], \quad \phi = \frac{\alpha\pi}{2}. \quad (1.64)$$

1.6 Biến đổi Fourier phân dạng lũy thừa LMT

Trong mục này trình bày cơ sở của biến đổi Fourier phân dạng lũy thừa do Y. Luchko, H. Martinez, J. Trujillo đưa ra trong [14], mà ta tạm gọi

là biến đổi Fourier phân dạng lũy thừa MLT. Phép biến đổi này được xét trong không gian Lizorkin.

1.6.1 Không gian Lizorkin

Không gian Lizorkin là một không gian con của không gian các hàm giảm nhanh $\mathcal{S}$, vì vậy trước hết chúng tôi trình bày khái niệm về không gian $\mathcal{S}$.

Định nghĩa 1.7. ([7]). Ký hiệu $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R})$ là tập hợp của tất cả các khả vi vô hạn trên $\mathbb{R}$, sao cho

$$|[\varphi]|_{m,n} = \sup_{n \leq m, x \in \mathbb{R}} (1+x^2)^m |D^n \varphi(x)| < \infty, D = d/dx,$$

$m, n = 0, 1, \dots$ Dãy $\{\varphi_k\}$ các hàm trong $\mathcal{S}$ được gọi hội tụ trong $\mathcal{S}$ đến hàm $\varphi_0 \in \mathcal{S}$, nếu $|[\varphi_k - \varphi_0]| \rightarrow 0$ khi $k \rightarrow +\infty$.

Định nghĩa 1.8. Biến đổi Fourier $\hat{u}(\xi)$ của hàm $u(t) \in \mathcal{S}$ được cho bởi công thức

$$\hat{u}(\xi) = \mathfrak{F}[u](\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) e^{i\xi t} dt, \quad (1.65)$$

và biến đổi Fourier ngược có thể được cho như sau

$$\mathfrak{F}^{-1}[\hat{u}](t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}(\xi) e^{-i\xi t} d\xi. \quad (1.66)$$

Định nghĩa 1.9. Ký hiệu $V(\mathbb{R})$ là tập hợp của các hàm

$$V(\mathbb{R}) = \{v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) : v^{(n)}(0) = 0, n = 1, 2, \dots\}. \quad (1.67)$$

Không gian Lizorkin được định nghĩa như sau

$$\Phi(\mathbb{R}) = \{\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) : \mathfrak{F}[\varphi] \in V(\mathbb{R})\}. \quad (1.68)$$

Ta có

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} x^n \varphi(x) dx &= \frac{1}{i^n} \int_{-\infty}^{+\infty} i^n x^n e^{ix0} \varphi(x) dx \\ &= \frac{1}{i^n} \int_{-\infty}^{+\infty} (ix)^n e^{ix0} \varphi(x) dx = \frac{1}{i^n} (\hat{\varphi})^{(n)}(0) = 0. \end{aligned} \quad (1.69)$$

Từ phương trình (1.69) ta thấy, không gian Lizorkin có thể có thể được mô tả như không gian con của không gian Schwarz gồm các hàm trong $\mathcal{S}$ trực giao với tất cả các đa thức.

Nhận xét rằng, không gian Lizorkin và không gian đối ngẫu của nó có được nhiều người quan tâm. Nói cụ thể, nó được chỉ ra rằng không gian Lizorkin là bất biến đối với tích phân phân và các toán tử vi phân (không gian S không có tính chất trên vì các tích phân phân và các đạo hàm của các hàm trong S không phải luôn thuộc S).

1.6.2 Biến đổi Fourier phân LMT

Định nghĩa 1.10. Với hàm $u \in \Phi(\mathbb{R})$, biến đổi Fourier phân bậc α ($0 < \alpha \leq 1$), $\hat{u}_\alpha$, được định nghĩa như sau

$$\hat{u}_\alpha(\omega) = (\mathcal{F}_\alpha u)(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) e_\alpha(\omega, t) dt, \quad \omega \in \mathbb{R}, \quad (1.70)$$

trong đó

$$e_\alpha(\omega, t) = \begin{cases} e^{-i|\omega|^{1/\alpha}t}, & \omega \leq 0, \\ e^{i|\omega|^{1/\alpha}t}, & \omega \geq 0. \end{cases} \quad (1.71)$$

Nếu $\alpha = 1$, hạch e_α được xác định bởi công thức (1.71) trùng khớp với hạch của biến đổi Fourier thông thường:

$$e_1(\omega, t) = \begin{cases} e^{-i|\omega|^{1/\alpha}t}, & \omega \leq 0, \\ e^{i|\omega|^{1/\alpha}t}, & \omega \geq 0. \end{cases} \equiv e^{i\omega t}, \quad \omega \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}.$$

Nghĩa là biến đổi Fourier phân bậc 1 là biến đổi Fourier thông thường $\mathcal{F}_1 \equiv \mathcal{F}$. Quan hệ giữa biến đổi Fourier phân và biến đổi Fourier thông thường được cho bởi công thức đơn giản như sau:

$$\hat{u}_\alpha(\omega) = (\mathcal{F}_\alpha u)(\omega) \equiv (\mathcal{F}u)(x) = \hat{u}(x), \quad (1.72)$$

trong đó

$$x = \begin{cases} -|\omega|^{1/\alpha}, & \omega \leq 0, \\ |\omega|^{1/\alpha}, & \omega \geq 0. \end{cases} \quad (1.73)$$

Ví dụ 1.11. *Tìm biến đổi Fourier phân của hàm*

$$u(t) = \begin{cases} A, & |t| \leq T, \\ 0, & |t| > T. \end{cases}$$

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}_\alpha u)(\omega) &= (\mathcal{F}u)(x) = \frac{A \sin(Tx)}{\pi x} = \begin{cases} \frac{A \sin(-T|\omega|^{1/\alpha})}{-\pi|\omega|^{1/\alpha}}, & \omega \leq 0, \\ \frac{A \sin(T|\omega|^{1/\alpha})}{\pi|\omega|^{1/\alpha}}, & \omega \geq 0. \end{cases} \\ &= \frac{A \sin(T|\omega|^{1/\alpha})}{\pi|\omega|^{1/\alpha}}. \end{aligned}$$

□

Ví dụ 1.12. *Giả sử*

$$(\mathcal{F}_\alpha u)(\omega) = \hat{u}_\alpha(\omega) = g(\omega).$$

Khi đó

$$(\mathcal{F}_\alpha u)(\omega) = (\mathcal{F}u)(x) = g_1(x), \quad x = \begin{cases} -|\omega|^{1/\alpha}, & \omega \leq 0, \\ |\omega|^{1/\alpha}, & \omega \geq 0. \end{cases}$$

và

$$u(t) = (\mathcal{F}_\alpha^{-1} \hat{u}_\alpha)(t) = (\mathcal{F}^{-1} g_1)(t). \quad (1.74)$$

1.6.3 Các hệ thức toán tử của biến đổi Fourier phân

Trong mục này ta sẽ xét mối quan hệ các toán tử giữa biến đổi Fourier phân và đạo hàm phân được xác định như sau:

$$(D_\beta^\alpha u)(x) = (1 - \beta)(D_+^\alpha u)(x) - \beta(D_-^\alpha u)(x), \quad 0 < \alpha \leq 1, \beta \in \mathbb{R}, \quad (1.75)$$

trong đó D_+^α và D_-^α là đạo hàm phân Riemann-Liouville trên trục thực được xác định theo công thức

$$(D_\pm^\alpha u)(x) = \left(\pm \frac{d}{dx} \right) (I_\pm^{1-\alpha} u)(x). \quad (1.76)$$

Ở đây $I_{\pm}^{\alpha}$ là toán tử tích phân phân Riemann-Liouville

$$(I_+^{\alpha}u)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^x (x-t)^{\alpha-1} u(t) dt, \quad (1.77)$$

$$(I_-^{\alpha}u)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^{+\infty} (t-x)^{\alpha-1} u(t) dt. \quad (1.78)$$

$\Gamma(\alpha)$ là hàm được xác định theo công thức

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt, \operatorname{Re}(\alpha) > 0$$

và có các tính chất

$$\Gamma(n+1) = n!, \Gamma(1) = \Gamma(2) = 1, \quad (1.79)$$

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha), \quad (1.80)$$

$$\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha) = \pi \operatorname{cosec}(\pi\alpha). \quad (1.81)$$

Nhận xét rằng đạo hàm phân D_{β}^{α} đồng nhất với đạo hàm thông thường với giá trị β bất kỳ, nếu $\alpha = 1$:

$$\begin{aligned} (D_{\beta}^1 u)(x) &= (1-\beta)(D_+^1 u)(x) - \beta(D_-^1 u)(x) \\ &= (1-\beta) \frac{du}{dx} + \beta \frac{du}{dx} = \frac{du}{dx}. \end{aligned}$$

Các trường hợp riêng cần chú ý của đạo hàm phân (1.75) như sau:

- 1) $\beta = 0 : D_0^{\alpha} \equiv D_+^{\alpha},$
- 2) $\beta = 1 : D_1^{\alpha} \equiv -D_-^{\alpha},$
- 3) $\beta = 1/2 : D_{1/2}^{\alpha} \equiv \frac{1}{2}(D_+^{\alpha} - D_-^{\alpha}).$

Cho các hàm u, v từ không gian Lizorkin $\Phi(\mathbb{R})$. Lấy tích phân từng phần ta có hệ thức:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (D_+^{\alpha} u)(x) v(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (D_-^{\alpha} v)(x) u(x) dx. \quad (1.82)$$

Bổ đề 1.13. Giả sử $\omega \in \mathbb{R}, \omega \neq 0$ và $0 < \alpha < 1$. Khi đó

$$(I_+^{\alpha} e^{i\omega t})(x) = e^{i\omega x} |\omega|^{-\alpha} (\cos(\alpha\pi/2) - i \operatorname{sign}(\omega) \sin(\alpha\pi/2)). \quad (1.83)$$

Chứng minh. Đổi biến $\tau = x - t$ thì tích phân $(I_+^\alpha e^{i\omega t})(x)$ được biểu diễn dưới dạng

$$\begin{aligned} (I_+^\alpha e^{i\omega t})(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^x (x-t)^{\alpha-1} e^{i\omega t} dt \cdot e^{i\omega x} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} \tau^{\alpha-1} e^{-i\omega \tau} d\tau \\ &= e^{i\omega x} \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} \tau^{\alpha-1} \cos(\omega \tau) d\tau - i \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} \tau^{\alpha-1} \sin(\omega \tau) d\tau \right). \end{aligned}$$

Cả hai tích phân trong biểu thức đều hội tụ dưới điều kiện $\omega \in \mathbb{R}, \omega \neq 0, 0 < \alpha < 1$ và có thể được biểu diễn ở dạng giải tích nhờ sử dụng các công thức:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} \tau^{\alpha-1} \cos(\omega \tau) d\tau &= |\omega|^{-\alpha} \cos(\alpha\pi/2), \\ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} \tau^{\alpha-1} \sin(\omega \tau) d\tau &= \text{sign}(\omega) |\omega|^{-\alpha} \sin(\alpha\pi/2). \end{aligned}$$

Công thức (1.83) được suy ra từ 3 phương trình sau đó. Bổ đề được chứng minh. $\square$

Tương tự như trên ta cũng chứng minh được bổ đề sau:

Bổ đề 1.14. Giả sử $\omega \in \mathbb{R}, \omega \neq 0$ và $0 < \alpha < 1$. Khi đó

$$(I_-^\alpha e^{i\omega t})(x) = e^{i\omega x} |\omega|^{-\alpha} (\cos(\alpha\pi/2) + i \text{sign}(\omega) \sin(\alpha\pi/2)). \quad (1.84)$$

Ta có thể tính đạo hàm phân của hàm số $e^{i\omega t}, \omega \in \mathbb{R}, \omega \neq 0$.

Bổ đề 1.15. Giả sử $\omega \in \mathbb{R}, \omega \neq 0$ và $0 < \alpha < 1$. Khi đó

$$(D_+^\alpha e^{i\omega t})(x) = e^{i\omega x} |\omega|^\alpha (\cos(\alpha\pi/2) + i \text{sign}(\omega) \sin(\alpha\pi/2)). \quad (1.85)$$

Chứng minh. Sử dụng bổ đề 1.13 ta được

$$\begin{aligned} (D_+^\alpha e^{i\omega t})(x) &= \frac{d}{dx} (I_+^{1-\alpha} e^{i\omega t})(x) = \\ &= \frac{d}{dx} e^{i\omega x} |\omega|^{-(1-\alpha)} (\cos((1-\alpha)\pi/2) - i \text{sign}(\omega) \sin((1-\alpha)\pi/2)) \\ &= e^{i\omega x} (i\omega) |\omega|^{-(1-\alpha)} (\cos((1-\alpha)\pi/2) - i \text{sign}(\omega) \sin((1-\alpha)\pi/2)) \\ &= e^{i\omega x} \text{sign}(\omega) |\omega| |\omega|^{-(1-\alpha)} i (\sin(\alpha\pi/2) - i \text{sign}(\omega) \cos(\alpha\pi/2)) \\ &= e^{i\omega x} |\omega|^\alpha (\cos(\alpha\pi/2) + i \text{sign}(\omega) \sin(\alpha\pi/2)). \end{aligned}$$

$\square$

Tương tự ta chứng minh được bổ đề

Bổ đề 1.16. *Giả sử $\omega \in \mathbb{R}, \omega \neq 0$ và $0 < \alpha < 1$. Khi đó*

$$(D_-^\alpha e^{i\omega t})(x) = e^{i\omega x} |\omega|^\alpha (\cos(\alpha\pi/2) - i \operatorname{sign}(\omega) \sin(\alpha\pi/2)). \quad (1.86)$$

Nhận xét 1.17. *Công thức (1.83)-(1.86) có thể được xem như là sự mở rộng của các công thức sau*

$$\begin{aligned} (I_+^\alpha e^{\lambda t})(x) &= \lambda^{-\alpha} e^{\lambda x}, & \operatorname{Re} \lambda > 0, \alpha > 0, \\ (I_-^\alpha e^{-\lambda t})(x) &= \lambda^{-\alpha} e^{-\lambda x}, & \operatorname{Re}(\lambda) > 0, \alpha > 0, \\ (D_+^\alpha e^{\lambda t})(x) &= \lambda^\alpha e^{\lambda x} & \operatorname{Re}(\lambda) > 0, \alpha > 0, \\ (D_-^\alpha e^{-\lambda t}) &= \lambda^\alpha e^{-\lambda x}, & \operatorname{Re}(\lambda) > 0, \alpha > 0, \end{aligned}$$

trong trường hợp $\operatorname{Re}(\lambda) = 0, \operatorname{Im}(\lambda) \neq 0, 0 < \alpha < 1$.

Dưới đây là kết quả chính của phần này.

Định lý 1.18. *Giả sử $0 < \alpha \leq 1$ và u là một hàm thuộc không gian Lizorkin $\Phi(\mathbb{R})$. Khi đó, với giá trị bất kỳ của tham số β ta có hệ thức:*

$$(\mathcal{F}_\alpha D_\beta^\alpha u)(\omega) = (-ic_\alpha \omega)(\mathcal{F}_\alpha u)(\omega), \omega \in \mathbb{R}, \quad (1.87)$$

trong đó c_α là hằng số được xác định như sau:

$$c_\alpha = \sin(\alpha\pi/2) + i \operatorname{sign}(\omega)(1 - 2\beta) \cos(\alpha\pi/2). \quad (1.88)$$

Trong trường hợp riêng, đối với đạo hàm phân

$$D_{1/2}^\alpha = 1/2(D_+^\alpha - D_-^\alpha)$$

hệ thức toán tử (1.87) có thể được biểu diễn dưới dạng

$$(\mathcal{F}_\alpha D_{1/2}^\alpha u)(\omega) = (-i \sin(\alpha\pi/2) \omega)(\mathcal{F}_\alpha u)(\omega), \omega \in \mathbb{R}. \quad (1.89)$$

Nhận xét 1.19. *Nếu $\alpha = 1$, hệ thức toán tử (1.87) được đưa về hệ thức toán tử của biến đổi Fourier thông thường với giá trị bất kỳ của β*

$$(\mathcal{F}_1 D_\beta^1 u)(\omega) = (\mathcal{F} \frac{d}{dx} u)(\omega) = (-i\omega)(\mathcal{F} u)(\omega), \omega \in \mathbb{R}. \quad (1.90)$$

Chứng minh. Ta có các trường hợp xảy ra sau:

- 1) $\alpha = 1$;
- 2) $\alpha \neq 1, \omega = 0$;
- 3) $\alpha \neq 1, \omega > 0$;
- 4) $\alpha \neq 1, \omega < 0$.

Trường hợp 1. Nếu $\alpha = 1$, khẳng định của Định lý (1.18) đúng với kết quả cổ điển của biến đổi Fourier thông thường (xem Nhận xét 1.19).

Trường hợp 2: Nếu $\omega = 0$ ta chỉ ra rằng

$$(\mathcal{F}_\alpha D_\beta^\alpha u)(0) = 0, \quad (1.91)$$

với hàm bất kỳ u từ không gian Lizorkin $\Phi(\mathbb{R})$. Thật vậy

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}_\alpha D_\beta^\alpha u)(0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (D_\beta^\alpha u)(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} [(1 - \beta) \frac{d}{dx} (I_+^{1-\alpha} u)(x) + \beta \frac{d}{dx} (I_-^{1-\alpha} u)(x)] dx \\ &= [(1 - \beta) (I_+^{1-\alpha} u)(x) + \beta (I_-^{1-\alpha} u)(x)]|_{-\infty}^{+\infty}. \end{aligned}$$

Biểu thức cuối cùng bằng 0 vì tích phân phân của hàm u trong không gian Lizorkin $\Phi(\mathbb{R})$ thuộc không gian $\Phi(\mathbb{R})$ [12].

Trường hợp 3: Ta sử dụng công thức (1.82) tích phân từng phần cho hàm $v = e^{i|\omega|^{1/\alpha}x}$ và $u \in \Phi(\mathbb{R})$. Tất nhiên, hàm v không thuộc không gian Lizorkin $\Phi(\mathbb{R})$ thậm chí L_p và vì vậy ta không có công thức này một cách tức thì. Nhưng v là một hàm bị chặn đối với các biến x và $\omega : |v| = 1 \ \forall x, \omega \in \mathbb{R}$ vì vậy công thức (1.82) có thể chứng minh trực tiếp từ định lý Fubini với hàm bất kỳ $u \in \Phi(\mathbb{R})$. Sử dụng (1.82), (1.85) và (1.86) ta có:

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}_\alpha D_\beta^\alpha u)(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i|\omega|^{1/\alpha}x} (D_\beta^\alpha u)(x) dx \\ &= (1 - \beta) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i|\omega|^{1/\alpha}x} (D_+^\alpha u)(x) dx - \beta \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i|\omega|^{1/\alpha}x} (D_-^\alpha u)(x) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (1 - \beta) \int_{-\infty}^{+\infty} (D_-^\alpha e^{i|\omega|^{1/\alpha}t})(x)u(x)dx - \beta \int_{-\infty}^{+\infty} (D_+^\alpha e^{i|\omega|^{1/\alpha}t})(x)u(x)dx \\
&= (1 - \beta) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i|\omega|^{1/\alpha}x}|\omega|(\cos(\alpha\pi/2) - i\sin(\alpha\pi/2))u(x)dx \\
&\quad - \beta \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i|\omega|^{1/\alpha}x}|\omega|(\cos(\alpha\pi/2) + i\sin(\alpha\pi/2))u(x)dx \\
&= (1 - 2\beta)(\cos(\alpha\pi/2) - i\sin(\alpha\pi/2))\omega \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i|\omega|^{1/\alpha}x}u(x)dx \\
&= (-i\omega)(\sin(\alpha\pi/2) + i(1 - 2\beta)\cos(\alpha\pi/2))(\mathcal{F}_\alpha u)(\omega).
\end{aligned}$$

Trường hợp 4: $\alpha \neq 1, \omega < 0$ tương tự trường hợp 3, nếu lấy hàm $v = e^{-i|\omega|^{1/\alpha}x}$ thay thế vai trò của $v = e^{i|\omega|^{1/\alpha}x}$, ta có

$$\begin{aligned}
(\mathcal{F}_\alpha D_\beta^\alpha u)(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i|\omega|^{1/\alpha}x} (D_\beta^\alpha u)(x)dx \\
&= (-i\omega)(\sin(\alpha\pi/2) - i(1 - 2\beta)\cos(\alpha\pi/2))(\mathcal{F}_\alpha u)(\omega).
\end{aligned}$$

□

Nhận xét 1.20. Trường hợp: $\beta = 1/2$ (xem hệ thức (1.89)). Có thể tổng quát hoá cho biến đổi Fourier thông thường từ (1.90).

Ngoài ra, ta xét các trường hợp đặc biệt sau

$$1) \beta = 0, D_0^\alpha \equiv D_+^\alpha :$$

$$\begin{aligned}
(\mathcal{F}_\alpha D_+^\alpha u)(\omega) &= (-ic_\alpha \omega)(\mathcal{F}_\alpha u)(\omega), \omega \in \mathbb{R}, \\
c_\alpha &= (\sin(\alpha\pi/2) + i\operatorname{sign}(\omega)\cos(\alpha\pi/2)).
\end{aligned}$$

$$2) \beta = 1, D_0^\alpha \equiv -D_-^\alpha :$$

$$\begin{aligned}
(\mathcal{F}_\alpha D_-^\alpha u)(\omega) &= (-ic_\alpha \omega)(\mathcal{F}_\alpha u)(\omega), \omega \in \mathbb{R}, \\
c_\alpha &= (\sin(\alpha\pi/2) - i\operatorname{sign}(\omega)\cos(\alpha\pi/2)).
\end{aligned}$$

1.7 Biến đổi Fourier phân dạng lũy thừa RCL

1.7.1 Dẫn luận

Trong mục trước đã xét biến đổi Fourier phân dạng lũy thừa bậc α , $0 < \alpha \leq 1$ của hàm số thuộc không gian Lizorkin do Y. Luchko, H. Martinez và J. Trujillo (LMT) đề xuất trong [14]. Luis Guillermo Romero, Ruben Alejandro Cenrutti, Luciann Leonardo Luque (RCL) trong [9] đã mở rộng các kết quả của LMT. Biến đổi Fourier phân RCL cũng vẫn được nghiên cứu trong không gian các hàm cơ bản Lizorkin đã được đưa vào các mục trước.

1.7.2 Biến đổi Fourier dạng lũy thừa phân RCL

Định nghĩa 1.21. *Biến đổi Fourier phân bậc α , $0 < \alpha \leq 0$, được định nghĩa như sau*

$$\hat{u}_\alpha(\xi) = \mathfrak{F}_\alpha[u](\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi^{1/\alpha}t} u(t) dt. \quad (1.92)$$

Nhận xét 1.22. *Nhận xét rằng, khi $\alpha = 1$ công thức (1.92) trùng với công thức (1.65) của biến đổi Fourier thông thường, còn khi $\xi > 0$ FrFT xác định theo công thức (1.92) trùng với công thức được định nghĩa bởi LMT [14]. Khi $\xi < 0$, $\xi^{1/\alpha}$ được hiểu theo nghĩa*

$$\xi^{1/\alpha} = (-|\xi|)^{1/\alpha} = \left(\cos \frac{\pi}{\alpha} + i \sin \frac{\pi}{\alpha} \right) |\xi|^{1/\alpha}.$$

Khi đó tích phân ở vế phải của (1.92) có thể đưa về dạng

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i \cos(\frac{\pi}{\alpha})t|\xi|^{1/\alpha}} e^{-\sin(\frac{\pi}{\alpha})t|\xi|^{1/\alpha}} u(t) dt. \quad (1.93)$$

Như vậy, nếu $\sin(\frac{\pi}{\alpha}) \neq 0$, thì chưa thấy rõ tích phân (1.93) hội tụ với mọi $u \in \Phi(\mathbb{R})$. Vì vậy, từ nay về sau chúng ta chỉ hạn chế xét trường hợp $\alpha = \frac{1}{m}$, trong đó m là số nguyên dương. Trong trường hợp này miền xác định của biến đổi Fourier phân RCL chỉ cần không gian $L^1(\mathbb{R})$ là đủ, cùng lắm là không gian giảm nhanh $\mathcal{S}$.

Bổ đề 1.23. Giả sử u là một hàm của không gian $\Phi(\mathbb{R})$, giả sử α là một số thực. $0 < \alpha \leq 1$, thì

$$\mathfrak{F}_\alpha[u](\xi) = \mathfrak{F}[u](x), \text{ cho } x = \xi^{1/\alpha}. \quad (1.94)$$

Chứng minh. Được suy ra từ các phương trình (1.65) và (1.92). $\square$

Ta có thể tìm công thức cho biến đổi Fourier phân ngược. Thật vậy, cho u là một hàm thuộc $\phi(\mathbb{R})$. Từ phương trình (1.92) ta có

$$\mathfrak{F}_\alpha[u](\xi) = \mathfrak{F}[u](x) = g_1(x), \text{ khi } x = \xi^{1/\alpha}.$$

Thì

$$u(t) = \mathfrak{F}_\alpha^{-1}(\mathfrak{F}_\alpha[u]) = \mathfrak{F}^{-1}(g_1(x))(t).$$

Ta có

$$\mathfrak{F}^{-1}(g_1(x))(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} g_1(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} \hat{u}(x) dx. \quad (1.95)$$

Thay $x = \xi^{1/\alpha}$, và $dx = \frac{1}{\xi} \alpha^{\frac{1}{\alpha}-1} d\xi$, vào (1.95) thì

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}^{-1}(g_1(x))(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi^{1/\alpha}t} \hat{u}_\alpha(\xi) \frac{1}{\alpha} \xi^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi^{1/\alpha}t} \hat{u}_\alpha(\xi) \xi^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} d\xi. \end{aligned} \quad (1.96)$$

Định nghĩa 1.24. Cho u là một hàm của $\phi(\mathbb{R})$, $0 < \alpha \leq 1$. Biến đổi Fourier phân ngược của bậc α được cho bởi

$$\mathfrak{F}^{-1}(\hat{u}_\alpha(\xi))(t) = \frac{1}{2\pi\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi^{1/\alpha}t} \hat{u}_\alpha(\xi) \xi^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} d\xi. \quad (1.97)$$

Chú ý rằng khi $\alpha = 1$, thì phương trình (1.95) trùng với phương trình (1.66).

Nhận xét 1.25. Khi đổi biến $x = \xi^{1/\alpha}$, và chú ý rằng dựa vào công thức được thiết lập mối liên hệ giữa đạo hàm và biến đổi Fourier phân, ta có thể dễ dàng chứng minh được:

$$\mathfrak{F}_\alpha^{-1}[\mathfrak{F}_\alpha[u]] = u, \quad (1.98)$$

tức là

$$\mathfrak{F}_\alpha^{-1}[\mathfrak{F}_\alpha] = Id. \quad (1.99)$$

Ở đây Id là toán tử đồng nhất.

1.7.3 Tính chất của biến đổi Fourier dạng lũy thừa phân RCL

Cho u là một hàm thuộc vào không gian Lizorkin $\phi(\mathbb{R})$, và $x \in \mathbb{R}$. Thì, từ (1.94) dễ dàng ta có thể chứng minh các công thức sau là đúng:

1. $\mathfrak{F}_\alpha[u(t-x)](\xi) = e^{i\xi^{1/\alpha}x} \mathfrak{F}_\alpha[u](\xi)$
2. $\mathfrak{F}_\alpha\left[\frac{d}{dt}u(t)\right](\xi) = -i\xi^{1/\alpha} \mathfrak{F}_\alpha[u(t)](\xi)$
3. $\mathfrak{F}_\alpha\left[\frac{d^n}{dt^n}u(t)\right](\xi) = (-i\xi^{1/\alpha})^n \mathfrak{F}_\alpha[u(t)](\xi)$
4. $\frac{d}{d\xi} \mathfrak{F}_\alpha[u(t)](\xi) = \frac{\xi^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} i}{\alpha} \mathfrak{F}_\alpha[tu(t)](\xi).$

Chứng minh. 1. Từ định nghĩa 1.21, ta có

$$\mathfrak{F}_\alpha[u(t-x)](\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi^{1/\alpha}t} u(t-x) dt,$$

và đổi biến $v = t - x$, ta được

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_\alpha[u(t-x)](\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi^{1/\alpha}(v+x)} u(v) dv \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi^{1/\alpha}v} e^{i\xi^{1/\alpha}x} u(v) dv = e^{i\xi^{1/\alpha}x} \mathfrak{F}_\alpha[u](\xi). \end{aligned}$$

2. Tính chất 2 là trường hợp riêng của tính chất 3 khi $n = 1$. Ta chứng minh tính chất 3.

3. Từ định nghĩa 1.21 ta có

$$\mathfrak{F}_\alpha\left[\frac{d^n}{dt^n}u(t)\right](\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi^{1/\alpha}t} \frac{d^n}{dt^n}u(t) dt.$$

Dùng phương pháp tích phân từng phần ta được

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}_\alpha \left[\frac{d^n}{dt^n} u(t) \right] (\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi^{1/\alpha} t} \frac{d^n}{dt^n} u(t) dt \\
&= \left[e^{i\xi^{1/\alpha} t} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} u(t) \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} i\xi^{1/\alpha} e^{i\xi^{1/\alpha} t} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} u(t) dt \\
&= (-i\xi^{1/\alpha}) \mathfrak{F}_\alpha \left[\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} u(t) \right] (\xi).
\end{aligned}$$

□

Nhận xét 1.26. $\left[e^{i\xi^{1/\alpha} t} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} u(t) \right]_{-\infty}^{+\infty} = 0$, vì $\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} u(t) \in \phi(\mathbb{R})$. Tích phân từng phần n lần, ta được

$$\mathfrak{F}_\alpha \left[\frac{d^n}{dt^n} u(t) \right] (\xi) = (-i\xi^{1/\alpha})^n \mathfrak{F}_\alpha [u(t)] (\xi).$$

4. Áp dụng định nghĩa 1.21 và lấy đạo hàm theo tham số dưới dấu tích phân ta được

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\xi} \mathfrak{F}_\alpha [u(t)] (\xi) &= \frac{d}{d\xi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi^{1/\alpha} t} u(t) dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{d\xi} e^{i\xi^{1/\alpha} t} u(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (it) 1/\alpha \xi^{1/\alpha-1} e^{i\xi^{1/\alpha} t} u(t) dt \\
&= \frac{\xi^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} i}{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{i\xi^{1/\alpha} t} u(t) dt = \frac{\xi^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} i}{\alpha} \mathfrak{F}_\alpha [tu(t)] (\xi).
\end{aligned}$$

Chương 2

TÍCH CHẬP CỦA CÁC BIẾN ĐỔI FOURIER PHÂN

Trong chương này giới thiệu về tích chập của các biến đổi Fourier phân và biến đổi Hartley phân. Tích chập của các biến đổi Fourier phân và biến đổi Hartley phân là sự mở rộng của tích chập cổ điển của các phép biến đổi tích phân thông thường tương ứng. Tích chập của các phép biến đổi tích phân này ngày càng được quan tâm vì đã tìm thấy những ứng dụng của chúng trong một số lĩnh vực, bao gồm lý thuyết tín hiệu, xử lý ảnh và quang học [3].

2.1 Tích chập của biến đổi Fourier thông thường

Định nghĩa 2.1. *Tích chập của các hàm số $f(x), g(x) \in L^1(\mathbb{R})$ (đối với biến đổi Fourier thông thường) được xác định theo công thức*

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy. \quad (2.1)$$

Định lý 2.2. *Nếu $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, thì $f * g \in L^1(\mathbb{R})$.*

Chứng minh. Theo Định lý Fubini, ta có

$$\int_{-\infty}^{\infty} |(f * g)(x)|dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y)g(y)|dy \right\} dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y)| dx \right\} g(y) dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx \int_{-\infty}^{\infty} |g(y)| dy = \|f\|_1 \|g\|_1.
\end{aligned}$$

□

Định lý 2.3. Nếu $f(x), g(x) \in L^1(\mathbb{R})$ thì

$$F[f * g] = \sqrt{2\pi} F[f] \cdot F[g]. \quad (2.2)$$

Chứng minh. Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned}
F[f * g](\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (f * g)(x) e^{ix \cdot \xi} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(y) g(x-y) dy \right) e^{ix \cdot \xi} dx.
\end{aligned}$$

Đổi biến $x - y = t$, ta có

$$\begin{aligned}
F[f * g](\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{iy \cdot \xi} dy \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{it'' \cdot \xi} dt \\
&= \sqrt{2\pi} F[f](\xi) \cdot F[g](\xi).
\end{aligned}$$

Định lý được chứng minh. □

Định lý 2.4. Nếu F_i là biến đổi Fourier của $f_i, i = 1, 2$ thì

$$F_1(p) F_2(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (f_1 * f_2)(x) e^{-ipx} dx.$$

Một dạng khác tương đương với phương trình trên là:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(y) f_2(y) e^{-ipy} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(x) F_2(p-x) dx. \quad (2.3)$$

2.2 Biến đổi Fourier phân của tích chập thông thường

Giả sử hai hàm f và g đều thuộc $L^1(\mathbb{R}) \cap W$ (tập hợp của các hàm trong $L^1(\mathbb{R})$ có biến đổi Fourier thuộc $L^1(\mathbb{R})$.) Tích chập thông thường của chúng được xác định theo công thức (2.1)

$$w(t) = (f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau \quad (2.4)$$

là một hàm trong $L^1(\mathbb{R})$. Biến đổi Fourier (thông thường) của w được cho bởi công thức

$$W(\omega) = \sqrt{2\pi} F(\omega) G(\omega).$$

Ở đây F, G, W là biến đổi Fourier tương ứng của các hàm f, g, w và thuộc $L^1(\mathbb{R}) \cap W$. Trong Almedia đối với biến đổi Fourier phân Naminas ở dạng:

$$\mathcal{F}_\alpha[f](x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) K_{-\alpha}(x, t) dt, \quad (2.5)$$

trong đó $K_{-\alpha}(x, t)$ được cho bởi công thức (1.13), xây dựng biến đổi Fourier phân của tích chập w ta được công thức sau:

$$\begin{aligned} W_\alpha(u) &= \mathcal{F}_\alpha[w](u) = |\sec \alpha| e^{-i(u^2/2) \tan \alpha} \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} F_\alpha(v) g[(u-v) \sec \alpha] e^{i(v^2/2) \tan \alpha} dv, \end{aligned} \quad (2.6)$$

trong đó F_α, W_α tương ứng ký hiệu biến đổi Fourier phân cấp $\alpha - \pi/2$ của các hàm số $f(t), g(t)$. Từ biểu diễn này ta sẽ tìm được một số dạng biểu diễn khác đơn giản hơn. Cách thứ nhất, đổi biến $v \rightarrow u - v$, ta được

$$\begin{aligned} W_\alpha(u) &= |\sec \alpha| e^{-i(u^2/2) \tan \alpha} \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} F_\alpha(u-v) g(v \sec \alpha) e^{i[(v^2-2uv)/2] \tan \alpha} dv. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Cách thứ hai, đổi biến $v \sec \alpha \rightarrow v$, ta được

$$W_\alpha(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_\alpha(u - v \cos \alpha) g(v) e^{i(v^2/2) \sin \alpha \cos \alpha - iuv \cos \alpha} dv. \quad (2.8)$$

Phương trình (2.6)-(2.7) là đúng nếu $\alpha - \pi/2$ không là bội của π .

2.3 Biến đổi Fourier phân của tích thông thường

Mục này trình bày biến đổi Fourier phân của tích thông thường hai hàm số $x(t), y(t) \in L^1(\mathbb{R}) \cap W$. Xét tích hai hàm số sau đây

$$z(t) = x(t)y(t)$$

Chọn hai góc β và γ sao cho $\cot \beta + \cot \gamma = \cot \alpha$. Ta cũng sẽ sử dụng biến đổi Fourier phân (2.5). Ta có

$$\begin{aligned} Z_\alpha(u) &= \sqrt{\frac{1-i\cot\alpha}{2\pi}} e^{i(u^2/2)\cot\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{i(t^2/2)\cot\beta} \\ &\quad \times y(t) e^{i(t^2/2)\cot\gamma} e^{-itu\csc\alpha} dt. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Đặt

$$\begin{aligned} a(t) &= x(t) e^{i(t^2/2)\cot\beta}, \quad b(t) = y(t) e^{i(t^2/2)\cot\gamma}, \\ A(\omega) &= F^{-1}[a](\omega), \quad B(\omega) = F^{-1}[b](\omega). \end{aligned}$$

Khi đó công thức (2.9) được viết ở dạng

$$Z_\alpha(u) = \sqrt{\frac{1-i\cot\alpha}{2\pi}} e^{i(u^2/2)\cot\alpha} (A * B)(u\csc\alpha). \quad (2.10)$$

Tuy nhiên

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{i(t^2/2)\cot\beta - it\omega} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{i(t^2/2)\cot\beta - it(\omega\sin\beta)\csc\beta} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-i\cot\beta}} e^{-i(\omega^2/2)\sin^2\beta\cot\beta} X_\beta(\omega\sin\beta) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-i\cot\beta}} e^{-i(\omega^2/2)\sin\beta\cos\beta} X_\beta(\omega\sin\beta), \end{aligned} \quad (2.11)$$

và đối với $B(\omega)$ ta cũng có công thức tương tự:

$$B(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1-i\cot\gamma}} e^{-i(\omega^2/2)\sin\gamma\cos\gamma} X_\gamma(\omega\sin\gamma). \quad (2.12)$$

Do đó, ta có:

$$\begin{aligned} Z_\alpha(u) &= \frac{\sqrt{1-i\cot\alpha}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-i\cot\beta}\sqrt{1-i\cot\gamma}} e^{i(u^2/2)(\sin\alpha\cos\alpha - \sin\gamma\cos\gamma)} \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{+\infty} X_\beta(v\sin\beta) Y_\gamma[(u\csc\alpha - v)\sin\gamma] \end{aligned}$$

$$\times e^{-i(v^2/2)(\sin \beta \cos \beta + \sin \gamma \cos \gamma)} e^{iuv \sin \gamma \cos \gamma / \sin \alpha} dv. \quad (2.13)$$

Kết quả này là đúng nếu α, β và γ không là bội số của π . Ta xét hai trường hợp đặc biệt sau đây.

1. Trường hợp $\beta = \alpha, \gamma = \pi/2$. Ta có:

$$Z_\alpha(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i(u^2/2) \cot \alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} X_\alpha(v \sin \alpha) Y(u \csc \alpha - v) \\ \times e^{-i(v^2/2) \sin \alpha \cos \alpha} dv. \quad (2.14)$$

2. Trường hợp $\beta = \pi/2, \gamma = \alpha$. Ta có

$$Z(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} X(v) Y_\alpha(u - v \sin \alpha) \\ \times e^{-i(v^2/2) \sin \alpha \cos \alpha + iuv \cos \alpha} dv. \quad (2.15)$$

2.4 Định lý về tích chập của biến đổi Fourier phân

2.4.1 Chuẩn bị

Biến đổi Fourier phân với góc α của 1 tín hiệu (hàm) $f(t)$ được xác định như sau:

$$\mathcal{F}_\alpha[f](\omega) = \mathcal{F}_\alpha(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) K'_\alpha(t, \omega) dt, \quad (2.16)$$

trong đó hạch $K'_\alpha(t, \omega)$ được xác định theo công thức:

$$K'_\alpha(t, \omega) = \begin{cases} [c(\alpha)/\sqrt{2\pi}] \exp\{ia(\alpha)[(t^2 + \omega^2) - 2b(\alpha)t\omega]\}, & \text{nếu } \alpha \neq k\pi, \pm\pi/2, \\ \delta(t - \omega), & \text{nếu } \alpha = 0, \\ \delta(t + \omega), & \text{nếu } \alpha = \pi, \\ (1/\sqrt{2\pi})e^{-it\omega}, & \text{nếu } \alpha = \pi/2, \end{cases} \quad (2.17)$$

trong đó:

$$\begin{cases} \alpha \neq \pm \frac{\pi}{2}, k\pi, \quad k - \text{nguyên} \\ a(\alpha) = \frac{\cot \alpha}{2}, \\ b(\alpha) = \frac{1}{\cos \alpha}, \\ c(\alpha) = \frac{e^{-i/2[-\alpha + \pi/2 \operatorname{sgn}(\sin \alpha)]}}{\sqrt{|\sin \alpha|}} = \sqrt{1 - i \cot \alpha}. \end{cases} \quad (2.18)$$

Nhận xét 2.5. Nhận xét rằng $K'_\alpha(t, \omega) = K_{-\alpha}(t, \omega)$, trong đó $K_\alpha(t, \omega)$ được xác định theo công thức (1.15).

2.4.2 Định lý về tích chập của biến đổi Fourier phân

Định nghĩa 2.6. Với hàm $f(x)$ bất kỳ trong $L^1(\mathbb{R})$, ta đặt:

$$\tilde{f}(x) = f(x)e^{ia(\alpha)x^2}, \quad (2.19)$$

$$\tilde{\tilde{f}}(x) = f(x)e^{-ia(\alpha)x^2}. \quad (2.20)$$

Với hai hàm f và g trong $L^1(\mathbb{R})$, ta định nghĩa tích chập $\star$ của các hàm này như sau:

$$h(x) = (f \star g)(x) = \frac{c(\alpha)}{2\pi} e^{-ia(\alpha)x^2} (\tilde{f} * \tilde{g})(x), \quad (2.21)$$

trong đó $*$ là toán tử tích chập đối với biến đổi Fourier thông thường xác định theo công thức (2.2). Tương tự, ta định nghĩa toán tử $\otimes$ như sau:

$$r(x) = (f \otimes g)(x) = \frac{e^{ia(\alpha)x^2}}{\sqrt{2\pi}} (\tilde{\tilde{f}} + \tilde{\tilde{g}})(x). \quad (2.22)$$

Định lý 2.7. Giả sử $h(x) = (f \star g)(x)$ và F_α , G_α , H_α , là ký hiệu biến đổi Fourier phân của f , g , h tương ứng. Khi đó:

$$H_\alpha(u) = F_\alpha(u)G_\alpha(u)e^{-ia(\alpha)u^2}, \quad (2.23)$$

$$F_\alpha[f(x)g(x)e^{ia(\alpha)x^2}](u) = c(-\alpha)(F_\alpha \otimes G_\alpha)(u). \quad (2.24)$$

Chứng minh. Từ định nghĩa về biến đổi Fourier phân và các công thức (2.19)-(2.22), ta có

$$\begin{aligned}
H_\alpha(u) &= \frac{c}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{i(a(t^2+u^2)-2abut)} dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(a(t^2+u^2)-2abut)} e^{iat^2} dt \\
&\times \frac{c}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{iax^2} g(t-x) e^{ia(t-x)^2} dx \\
&= \frac{c^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) g(t-x) \\
&\quad \exp\{i[a(t^2+u^2)-2abut+2ax^2-2atx]\} dx dt.
\end{aligned}$$

Đổi biến $t-x=v$, ta được:

$$\begin{aligned}
H_\alpha(u) &= \frac{c^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) g(v) \\
&\quad \times \exp[ia(x^2+u^2+v^2)-2iabv(x+v)] dx dv \\
&= \frac{c^2 e^{-iau^2}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{(ia(x^2+u^2)-2iabux)} dx \\
&\quad \times \int_{-\infty}^{+\infty} g(v) e^{ia(v^2+u^2)-2iabuv} dv \\
&= e^{-iau^2} F_\alpha(u) G_\alpha(u).
\end{aligned}$$

Công thức (2.23) được chứng minh. Theo công thức (2.22), ta có

$$\begin{aligned}
(F_\alpha \otimes G_\alpha)(u) &= \frac{e^{ia(\alpha)u^2}}{\sqrt{2\pi}} (\tilde{F}_\alpha * \tilde{G}_\alpha)(u) \\
&= \frac{e^{ia(\alpha)u^2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ia(\alpha)x^2} F_\alpha(x) e^{-ia(\alpha)(u-x)^2} G_\alpha(u-x) dx.
\end{aligned}$$

Nhưng từ định nghĩa của biến đổi Fourier phân, ta được:

$$\begin{aligned}
 (F_\alpha \otimes G_\alpha)(u) &= \frac{e^{ia(\alpha)u^2}c(\alpha)}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(z)dz \\
 &\times \int_{-\infty}^{+\infty} G_\alpha(u-x) \exp\{-ia[(u-x)^2 - z^2 + 2bxz]\}dx \\
 &= \frac{e^{ia(\alpha)u^2}c(\alpha)}{c(-\alpha)\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2ia[z^2-bzu]} f(z)dz \frac{c(-\alpha)}{\sqrt{2\pi}} \\
 &\times \int_{-\infty}^{+\infty} G_\alpha(v) \exp\{-ia[v^2 + z^2 - 2bvz]\}dv.
 \end{aligned}$$

Theo công thức của biến đổi Fourier phân ngược, ta có

$$(F_\alpha \otimes G_\alpha)(u) = \frac{e^{ia(\alpha)u^2}c(\alpha)}{c(-\alpha)\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(z)g(z)e^{2ia[z^2-bzu]}dz.$$

Công thức trên đây tương đương với công thức (2.24). Định lý được chứng minh. $\square$

Nhận xét 2.8. *Đẳng thức (2.23) trong lý thuyết tích chập thường được gọi là đẳng thức "nhân tử hoá".*

2.5 Tích chập của biến đổi Hartley phân

2.5.1 Định lý tích chập

Ta định nghĩa loại tích chập Hartley phân như sau: Cho hàm $f(t)$ bất kỳ, xác định hàm $\bar{f}(t) = f(t)e^{i \cos \phi \frac{t^2}{2}}$. Cho hai hàm f và g ta xác định toán tử tích chập $\star$ như sau

$$h(t) = (f \star g)(t) = \sqrt{\frac{1 - i \cot \phi}{2\pi}} e^{-i \cot \phi \frac{t^2}{2}} (\bar{f} \ast \bar{g})(t).$$

Định lý 2.9. *Giả sử $h(t) = (f \star g)(t)$ và $H^\alpha\{h(t)\}$, $H^\alpha\{f(t)\}$ và $H^\alpha\{g(t)\}$ lần lượt là các biến đổi Hartley phân của $h(t)$, $f(t)$ và $g(t)$, thì*

$$\begin{aligned}
2e^{i\frac{s^2}{2}\cot\phi}H^\alpha\{h(t)\}(s) &= H^\alpha\{g(t)\}(s) \\
&\times [(H^\alpha\{f(t)\}(s) - H^\alpha\{f(-t)\}(s)) \\
&+ e^{-i\phi}\cos\phi(H^\alpha\{f(t)\}(s) + H^\alpha\{f(-t)\}(s))] \\
&+ e^{-i\phi}\sin\phi H^\alpha\{g(-t)\}(s)(H^\alpha\{f(-t)\}(s) - H^\alpha\{f(t)\}(s)).
\end{aligned}$$

Chứng minh. Từ phương trình (1.63) và (1.64) và định nghĩa của tích chập ta có:

$$\begin{aligned}
H^\alpha\{h(t)\}(s) &= \sqrt{\frac{1-i\cot\phi}{2\pi}} e^{i\frac{s^2}{2}\cot\phi} \\
&\times \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\frac{t^2}{2}\cot\phi} [\cos(\csc\phi.st) - ie^{i\phi}\sin(\csc\phi.st)] h(t) dt \\
&= \left(\sqrt{\frac{1-i\cot\phi}{2\pi}} \right)^2 e^{i\frac{s^2}{2}\cot\phi} \\
&\times \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\frac{t^2}{2}\cot\phi} [\cos(\csc\phi.st) - ie^{i\phi}\sin(\csc\phi.st)] e^{i\frac{t^2}{2}\cot\phi} \\
&\times \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{i\frac{u^2}{2}\cot\phi} g(t-u) e^{i\cot\phi\frac{(t-u)^2}{2}} du dt \\
&= \left(\sqrt{\frac{1-i\cot\phi}{2\pi}} \right)^2 e^{i\frac{s^2}{2}\cot\phi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) g(t-u) e^{i\cot\phi\frac{u^2}{2}} e^{i\cot\phi\frac{(t-u)^2}{2}} \\
&\times [\cos(\csc\phi.st) - ie^{i\phi}\sin(\csc\phi.st)] dt du.
\end{aligned}$$

Đổi biến $t - u = v$, ta được:

$$\begin{aligned}
H^\alpha\{h(t)\}(s) &= \left(\sqrt{\frac{1-i\cot\phi}{2\pi}} \right)^2 e^{i\frac{s^2}{2}\cot\phi} \\
&\times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) g(v) e^{i\cot\phi\frac{u^2}{2}} e^{i\cot\phi\frac{v^2}{2}} \\
&\times [\cos(\csc\phi.s(u+v)) - ie^{i\phi}\sin(\csc\phi.s(u+v))] dv du.
\end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}
e^{i\frac{s^2}{2}\cot\phi}H^\alpha\{h(t)\}(s) &= C^\alpha\{f(u)\}H^\alpha\{g(v)\}(s) - e^{-i(\phi-\frac{\pi}{2})}S^\alpha\{f(u)\} \\
&\times [i\cos\phi H^\alpha\{g(v)\}(s) - i\sin\phi H^\alpha\{g(-v)\}(s)].
\end{aligned}$$

Trong đó C^α và S^α tương ứng là các biến đổi Fourier-cosine phân và Fourier-sine phân. Sử dụng hệ thức của Fourier-cosine phân và Fourier-sine phân với biến đổi Fourier phân, ta có:

$$\begin{aligned} 2e^{i\frac{s^2}{2}\cot\phi}H^\alpha\{h(t)\}(s) &= H^\alpha\{g(v)\} \\ &\times[(H^\alpha\{f(u)\} - H^\alpha\{f(-u)\}) + e^{-i\phi}\cos\phi(H^\alpha\{f(u)\} + H^\alpha\{f(-u)\})] \\ &+ e^{-i\phi}\sin\phi H^\alpha\{g(-v)\}(H^\alpha\{f(-u)\} - H^\alpha\{f(u)\}), \end{aligned}$$

tức là

$$\begin{aligned} 2e^{i\frac{s^2}{2}\cot\phi}H^\alpha\{h(t)\}(s) &= H^\alpha\{g(t)\}(s)[(H^\alpha\{f(t)\}(s) - H^\alpha\{f(-t)\}(s)) \\ &+ e^{-i\phi}\cos\phi(H^\alpha\{f(t)\}(s) + H^\alpha\{f(-t)\}(s))] \\ &+ e^{-i\phi}\sin\phi H^\alpha\{g(-t)\}(s)(H^\alpha\{f(-t)\}(s) - H^\alpha\{f(t)\}(s)). \end{aligned} \quad (2.25)$$

□

2.5.2 Tích chập của sự tổ hợp khác nhau giữa hàm chẵn và hàm lẻ

Tiếp theo ta xét đến các trường hợp khác nhau của tích chập cho hàm chẵn và hàm lẻ.

Trường hợp 1. Nếu cả hai hàm f và g đều là hàm lẻ, tức là $f(-t) = -f(t)$ và $g(-t) = -g(t)$ thì

$$\begin{aligned} H^\alpha\{h(t)\}(s) &= H^\alpha\{f * g\}(s) \\ &= (1 + e^{i\phi\sin\phi})e^{-i\frac{s^2}{2}\cot\phi}H^\alpha\{f(t)\}(s)H^\alpha\{g(t)\}(s). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Trường hợp 2. Nếu cả hai hàm f và g đều là hàm chẵn, tức là : $f(-t) = f(t)$ và $g(-t) = g(t)$ thì

$$\begin{aligned} H^\alpha\{h(t)\}(s) &= H^\alpha\{f * g\}(s) \\ &= e^{-i\phi}\cos\phi.e^{-i\frac{s^2}{2}\cot\phi}.H^\alpha\{f(t)\}(s)H^\alpha\{g(t)\}(s) \\ &= e^{-i(\frac{s^2}{2}\cot\phi+\phi)}\cos\phi.H^\alpha\{f(t)\}(s)H^\alpha\{g(t)\}(s). \end{aligned}$$

Trường hợp 3. Nếu f là hàm chẵn, g là hàm lẻ thì

$$\begin{aligned} H^\alpha\{f * g\}(s) &= H^\alpha\{h(t)\}(s) \\ &= e^{-i(\frac{s^2}{2} \cot \phi + \phi)} \cos \phi H^\alpha\{f(t)\}(s) H^\alpha\{g(t)\}(s). \end{aligned}$$

Trường hợp 4. Nếu f là hàm lẻ, g là hàm chẵn thì

$$\begin{aligned} H^\alpha\{h(t)\}(s) &= H^\alpha\{f * g\}(s) \\ &= (1 - e^{-i\phi} \sin \phi) e^{-i\frac{s^2}{2} \cot \phi} H^\alpha\{g(t)\}(s) H^\alpha\{f(t)\}(s). \end{aligned}$$

Trường hợp 5. Nếu f là hàm chẵn, g là hàm bất kỳ thì

$$\begin{aligned} H^\alpha\{h(t)\}(s) &= H^\alpha\{f * g\}(s) \\ &= e^{-i(\frac{s^2}{2} \cot \phi + \phi)} \cos \phi H^\alpha\{f(t)\}(s) H^\alpha\{g(t)\}(s). \end{aligned}$$

Trường hợp 6. Nếu f là hàm lẻ, g là hàm bất kỳ thì

$$\begin{aligned} H^\alpha\{h(t)\}(s) &= H^\alpha\{f * g\}(s) \\ &= e^{-i\frac{s^2}{2} \cot \phi} H^\alpha\{f(t)\}(s) \\ &\quad \times (H^\alpha\{g(t)\}(s) - e^{-i\phi} \sin \phi H^\alpha\{g(-t)\}(s)). \end{aligned}$$

Trường hợp 7. Nếu f là hàm bất kỳ thì, g là hàm chẵn thì

$$\begin{aligned} 2e^{-i\frac{s^2}{2} \cot \phi} H^\alpha\{h(t)\}(s) &= H^\alpha\{f * g\}(s) \\ &= H^\alpha\{g(t)\}(s) [H^\alpha\{f(t)\}(s) (1 + e^{-i\phi} (\cos \phi - \sin \phi)) \\ &\quad + H^\alpha\{f(-t)\}(s) (e^{-i\phi} (\cos \phi + \sin \phi) - 1)]. \end{aligned}$$

Trường hợp 8. Nếu f là hàm bất kỳ thì, g là hàm lẻ thì

$$\begin{aligned} 2e^{i\frac{s^2}{2} \cot \phi} H^\alpha\{h(t)\}(s) &= H^\alpha\{g(t)\}(s) \\ &\quad \times [H^\alpha\{f(t)\}(s) (1 + e^{-i\phi} (\sin \phi + \cos \phi)) \\ &\quad - H^\alpha\{f(-t)\}(s) (1 + e^{-i\phi} (\sin \phi - \cos \phi))]. \end{aligned}$$

2.6 Định lý biến điệu của biến đổi Hartley phân

1. Nếu $H^\alpha\{h(t)\}(s)$ là biến đổi Hartley phân của $f(t)$ thì

$$\begin{aligned}
H^\alpha\{f(t) \cos ut\}(s) &= \frac{1}{2}e^{-i\frac{u^2}{4} \sin 2\phi} \\
&\times \{e^{-isu \cos \phi} H^\alpha\{f(t)\}(s + u \sin \phi) \\
&+ e^{isu \cos \phi} H^\alpha\{f(t)\}(s - u \sin \phi)\}.
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Chứng minh. Sử dụng định nghĩa của biến đổi Hartley phân

$$\begin{aligned}
H^\alpha\{f(t) \cos ut\}(s) &= \sqrt{\frac{1 - i \cot \phi}{2\pi}} e^{i\frac{s^2}{2} \cot \phi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\frac{t^2}{2} \cot \phi} \\
&\times [\cos(\csc \phi \cdot st) - ie^{i\phi} \sin(\csc \phi \cdot st)] f(t) \cos ut dt,
\end{aligned} \tag{2.28}$$

suy ra

$$\begin{aligned}
H^\alpha\{f(t) \cos ut\}(s) &= \frac{1}{2}e^{-i\frac{u^2}{4} \sin 2\phi} \\
&\times \{e^{-isu \cos \phi} H^\alpha\{f(t)\}(s + u \sin \phi) \\
&+ e^{isu \cos \phi} H^\alpha\{f(t)\}(s - u \sin \phi)\}.
\end{aligned} \tag{2.29}$$

□

2. Nếu $H^\alpha\{h(t)\}(s)$ là biến đổi Hartley phân của $f(t)$ thì

$$\begin{aligned}
H^\alpha\{f(t) \sin ut\}(s) &= \frac{1}{2}e^{-i\frac{u^2}{4} \sin 2\phi} \\
&\times \{[e^{-isu \cos \phi} (i \cos \phi H^\alpha\{f(t)\}(s + u \sin \phi) \\
&- \sin \phi H^\alpha\{f(-t)\}(s + u \sin \phi))] \\
&- [e^{isu \cos \phi} (i \cos \phi H^\alpha\{f(t)\}(s - u \sin \phi) \\
&- \sin \phi H^\alpha\{f(-t)\}(s - u \sin \phi))]\}.
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Chứng minh. Sử dụng định nghĩa của biến đổi Hartley phân

$$\begin{aligned}
H^\alpha\{f(t) \sin ut\}(s) &= \sqrt{\frac{1 - i \cot \phi}{2\pi}} e^{i\frac{s^2}{2} \cot \phi} \\
&\times \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\frac{t^2}{2} \cot \phi} [\cos(\csc \phi \cdot st) - ie^{i\phi} \sin(\csc \phi \cdot st)] f(t) \sin ut dt.
\end{aligned}$$

suy ra

$$\begin{aligned}
H^\alpha\{f(t) \sin ut\}(s) &= \frac{1}{2}e^{-i\frac{u^2}{4}\sin 2\phi} \\
&\times \{[e^{-isu \cos \phi}(i \cos \phi H^\alpha\{f(t)\}(s + u \sin \phi) \\
&- \sin \phi H^\alpha\{f(-t)\}(s + u \sin \phi))] \\
&- [e^{isu \cos \phi}(i \cos \phi H^\alpha\{f(t)\}(s - u \sin \phi) \\
&- \sin \phi H^\alpha\{f(-t)\}(s - u \sin \phi))]\}.
\end{aligned} \tag{2.31}$$

□

3. Nếu $H^\alpha\{h(t)\}(s)$ là biến đổi Hartley phân của $f(t)$ thì

$$\begin{aligned}
H^\alpha\{f(t)e^{iut}\}(s) &= \frac{1}{2}e^{-i\frac{u^2}{4}\sin 2\phi} \{(1 - \cot \phi)e^{-isu \cot \phi} \\
&\times H^\alpha\{f(t)\}(s + u \sin \phi) + (1 + \cot \phi)e^{isu \cot \phi} H^\alpha\{f(t)\}(s - u \sin \phi) \\
&- i \sin \phi (H^\alpha\{f(-t)\}(s + u \sin \phi) - H^\alpha\{f(-t)\}(s - u \sin \phi))\}.
\end{aligned}$$

Chứng minh. Sử dụng (2.27) và (2.30)

□

2.7 Dạng thức Parseval của biến đổi Hartley phân:

Định lý 2.10. Nếu biến đổi Hartley phân của $f(t)$ và $g(t)$ lần lượt là $H^\alpha\{f(t)\}(s)$ và $H^\alpha\{g(t)\}(s)$ thì

$$\begin{aligned}
1) \quad &\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g^*(t)dt = \cos^2 \frac{\phi}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} H^\alpha\{f(t)\}(s)H^\alpha\{g(t)\}(+s)ds \\
&+ \sin^2 \frac{\phi}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} H^\alpha\{f(t)\}(-s).H^\alpha\{g(t)\}(-s)ds \\
&- 2i \sin \phi \int_{-\infty}^{+\infty} H^\alpha\{f(t)\}(s)H^\alpha\{g(t)\}(-s)ds \\
&+ 2i \sin \phi \int_{-\infty}^{+\infty} H^\alpha\{f(t)\}(-s)H^\alpha\{g(t)\}(s)ds.
\end{aligned}$$

và

$$2) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \cos^2 \frac{\phi}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (H^\alpha\{f(t)\}(s))^2 ds$$

$$+ \sin^2 \frac{\phi}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (H^\alpha \{f(t)\}(-s))^2 ds, \quad (2.32)$$

trong đó $g^*(t)$ là một liên hợp phức của $g(t)$.

Chứng minh. Hệ thức Parseval của biến đổi Fourier phân như sau

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g^*(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} F_\alpha(s)G_\alpha^*(s)ds. \quad (2.33)$$

Sử dụng hệ thức giữa biến đổi Fourier phân và biến đổi Hatley phân như sau:

$$F_\alpha \{f(t)\}(s) = \frac{1}{2}[(1 + e^{-i\phi})H^\alpha \{f(t)\}(s) + (1 - e^{-i\phi})H^\alpha \{f(t)\}(-s)].$$

Tức là

$$\begin{aligned} F_\alpha \{f(t)\}(s) = & \frac{1}{2}[H^\alpha \{f(t)\}(s) + H^\alpha \{f(t)\}(-s) \\ & + \cos \phi (H^\alpha \{f(t)\}(s) - H^\alpha \{f(t)\}(-s)) \\ & - i \sin \phi (H^\alpha \{f(t)\}(s) - H^\alpha \{f(t)\}(-s))], \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} G_\alpha^* \{f(t)\}(s) = & \frac{1}{2}[H^\alpha \{g(t)\}(s) + H^\alpha \{g(t)\}(-s) \\ & + \cos \phi (H^\alpha \{g(t)\}(s) - H^\alpha \{g(t)\}(-s)) \\ & + i \sin \phi (H^\alpha \{g(t)\}(s) - H^\alpha \{g(t)\}(-s))]. \end{aligned}$$

Ở đây $G_\alpha^*(s)$ là một liên hợp phức của G_α , do đó phương trình (2.33) trở thành

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g^*(t)dt = & \cos^2 \frac{\phi}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} H^\alpha \{f(t)\}(s).H^\alpha \{g(t)\}(+s)ds \\ & + \sin^2 \frac{\phi}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} H^\alpha \{f(t)\}(-s).H^\alpha \{g(t)\}(-s)ds \\ & - 2i \sin \phi \int_{-\infty}^{+\infty} H^\alpha \{f(t)\}(s).H^\alpha \{g(t)\}(-s)ds \\ & + 2i \sin \phi \int_{-\infty}^{+\infty} H^\alpha \{f(t)\}(-s).H^\alpha \{g(t)\}(s)ds. \end{aligned}$$

Trong trường hợp $f = g$ thì,

$$2) \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \cos^2 \frac{\phi}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (H^\alpha \{f(t)\}(s))^2 ds$$

$$+ \sin^2 \frac{\phi}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(H^\alpha \{f(t)\}(-s) \right)^2 ds.$$

□

2.8 Tích chập của phép biến đổi Fourier phân dạng lũy thừa RCL

Trong mục này chúng ta sẽ xét các tích chập $*$ và $\circ$ được cho bởi các định nghĩa sau đây.

Định nghĩa 2.11. Giả sử f và g là các hàm số thuộc $L^1(\mathbb{R}^+)$. Lớp tích chập Laplace được cho bởi công thức:

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(x-t)g(x)dx, \quad t > 0. \quad (2.34)$$

Định nghĩa 2.12. Giả sử f và g là các hàm thuộc $L^1(\mathbb{R}^+)$. Miana giới thiệu tích chập $\circ$ bởi công thức:

$$(f \circ g)(t) = \int_t^\infty f(x-t)g(x)dx, \quad t \geq 0. \quad (2.35)$$

Ta biết rằng tích chập của biến đổi Fourier thoả mãn đẳng thức nhân tử hoá:

$$\mathfrak{F}[f * g] = \mathfrak{F}[f] \cdot \mathfrak{F}[g]. \quad (2.36)$$

Định lý 2.13. Cho f và g là các hàm số thuộc $\phi(\mathbb{R})$. Thì

$$\mathfrak{F}_\alpha[f * g] = \mathfrak{F}_\alpha[f] \cdot \mathfrak{F}_\alpha[g]. \quad (2.37)$$

Chứng minh. Từ định nghĩa ta có:

$$\mathfrak{F}_\alpha[f * g] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi^{1/\alpha}t} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(x)dxdt. \quad (2.38)$$

Áp dụng định lý của Fubini và đổi biến $u = t - x$, ta được

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_\alpha[f * g] &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi^{1/\alpha}(u+x)} f(u)dudx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)e^{i\xi^{1/\alpha}x} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi^{1/\alpha}u} f(u)dudx = \mathfrak{F}_\alpha[f] \cdot \mathfrak{F}_\alpha[g], \end{aligned}$$

Đó là điều ta phải chứng minh. $\square$

Định lý 2.14. Cho f và g là các hàm thuộc $\phi(\mathbb{R})$, $0 < \alpha \leq 1$. Thì

$$\mathfrak{F}[f \circ g](\xi) = \left(\int_0^{+\infty} e^{i(-\xi^{1/\alpha})u} f(u) du \right) (\mathfrak{F}_\alpha g)(\xi). \quad (2.39)$$

Chứng minh. Từ định nghĩa 2.12, ta có

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_\alpha[f \circ g](\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi^{1/\alpha}t} (f \circ g)(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi^{1/\alpha}t} \int_0^{+\infty} f(s-t)g(s) ds dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{i\xi^{1/\alpha}t} f(s-t)g(s) ds dt. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Áp dụng định lý Fubini, đổi biến $u = s - t$, ta có

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_\alpha[f \circ g](\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(s) \int_0^{+\infty} e^{i\xi^{1/\alpha}(s-u)} f(u) du ds \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi^{1/\alpha}s} g(s) ds \int_0^{+\infty} e^{i(-\xi^{1/\alpha})u} f(u) du \\ &= \left(\int_0^{+\infty} e^{i(-\xi^{1/\alpha})u} f(u) du \right) (\mathfrak{F}_\alpha g)(\xi), \end{aligned}$$

Định lý được chứng minh. $\square$

Trường hợp riêng. Nếu $Dom f = \mathbb{R}^+$, ta được

$$\mathfrak{F}_\alpha[f \circ g](\xi) = \mathfrak{F}[f](-\xi^{1/\alpha}) \mathfrak{F}_\alpha[g](\xi). \quad (2.41)$$

2.9 Ứng dụng biến đổi Fourier dạng lũy thừa phân đôi với tích phân phân Riemann-Liouville

Định nghĩa 2.15. Cho u là một hàm khả tích bộ phận trên (a, ∞) . Tích phân Riemann-Liouville bậc α , $0 < \alpha \leq 1$ của hàm u được cho bởi

$${}_a I_x^\alpha u(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} u(t) dt. \quad (2.42)$$

Tương tự, cho f là một hàm khả tích bộ phận trên $(-\infty, b)$, ta có

$${}_x I_b^\alpha u(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} u(t) dt. \quad (2.43)$$

Khi $a = -\infty$ trong (2.42), và $b = +\infty$ trong (2.43) và nếu u là một hàm trong không gian $S(\mathbb{R})$, ta có

$${}_{-\infty} I_x^\alpha u(x) = {}_{-\infty} W_x^\alpha u(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^x (x-t)^{\alpha-1} u(t) dt. \quad (2.44)$$

và

$${}_x I_{+\infty}^\alpha u(x) = {}_x W_{+\infty}^\alpha u(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^\infty (t-x)^{\alpha-1} u(t) dt. \quad (2.45)$$

Công thức này là tích phân phân Weyl bậc α . Ở đây, $\Gamma(\alpha)$ là hàm Euler Gamma được định nghĩa như sau:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \operatorname{Re}(z) > 0$$

Cho $\alpha > 1$, và $t > 0$, xét $i_\alpha(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$, là hạch kỳ dị của Riemann-Liouville. Thay vào (2.42), (2.43), ta có

$${}_{-\infty} I_x^\alpha u(x) = \left(\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} * u \right)(x), \quad (2.46)$$

trong đó $*$ biểu thị lớp tích chập, và

$${}_x I_{+\infty}^\alpha u(x) = \left(\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \circ u \right)(x). \quad (2.47)$$

Thông thường tích phân ${}_{-\infty} I_x^\alpha u(x)$ được kí hiệu $I_+^\alpha u(x)$, và ${}_x I_{+\infty}^\alpha u(x)$ được kí hiệu $I_-^\alpha u(x)$. Từ biểu diễn này của tích phân phân ta có thể có được biến đổi Fourier phân của nó. Thật vậy, ta có các kết quả sau.

Bổ đề 2.16. Cho u là một hàm thuộc $\phi(\mathbb{R})$, không gian Lizorkin. Khi $0 < \alpha \leq 1, 0 < \beta \leq 1$ và $\xi \neq 0$. Thì

$$\mathfrak{F}_\alpha[I_+^\beta u](\xi) = |\xi|^{-\beta/\alpha} c_\beta \mathfrak{F}_\alpha[u(t)](\xi), \quad (2.48)$$

ở đây

$$c_\beta = \cos\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) + i \operatorname{sgn}(\xi^{1/\alpha}) \sin\left(\frac{\beta\pi}{2}\right). \quad (2.49)$$

Chứng minh. Từ các công thức (1.92), ta có

$$\mathfrak{F}_\alpha[I_+^\beta u](\xi) = \mathfrak{F}_\alpha\left[\frac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} * u\right](\xi) = \mathfrak{F}_\alpha\left[\frac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\right](\xi) \cdot \mathfrak{F}_\alpha[u(t)](\xi). \quad (2.50)$$

Thì, ta có

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_\alpha\left[\frac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\right](\xi) &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi^{1/\alpha}t} t^{\beta-1} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^{+\infty} e^{i\xi^{1/\alpha}t} t^{\beta-1} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \left[\int_0^{+\infty} \cos(\xi^{1/\alpha}t) t^{\beta-1} dt + i \int_0^{+\infty} \sin(\xi^{1/\alpha}t) t^{\beta-1} dt \right]. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Ta có

$$\int_0^{+\infty} \cos(\xi^{1/\alpha}t) t^{\beta-1} dt = \Gamma(\beta) |\xi^{1/\alpha}|^{-\beta} \cos\left(\frac{\beta\pi}{2}\right), \quad (2.52)$$

Ta có

$$\int_0^{+\infty} \sin(\xi^{1/\alpha}t) t^{\beta-1} dt = \Gamma(\beta) |\xi^{1/\alpha}|^{-\beta} \sin\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) \operatorname{sgn}(\xi^{1/\alpha}). \quad (2.53)$$

Thế (2.52) và (2.53) vào (2.51), ta được

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_\alpha\left[\frac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\right](\xi) &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \left[|\xi^{1/\alpha}|^{-\beta} \cos\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) \Gamma(\beta) \right. \\ &\quad \left. + i \operatorname{sgn}(\xi^{1/\alpha}) |\xi^{1/\alpha}|^{-\beta} \sin\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) \Gamma(\beta) \right] \\ &= |\xi|^{-\beta/\alpha} \left[\cos\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) + i \operatorname{sgn}(\xi^{1/\alpha}) \sin\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Thay (2.51) vào (2.50)

$$\mathfrak{F}_\alpha[I_+^\beta u](\xi) = |\xi|^{-\beta/\alpha} \left[\cos\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) + i \operatorname{sgn}(\xi^{1/\alpha}) \sin\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) \right] \mathfrak{F}_\alpha[u(t)](\xi). \quad (2.55)$$

□

Trường hợp riêng. Nếu $\beta = \alpha$, ta được

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}_\alpha[I_+^\alpha u](\xi) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[|\xi^{1/\alpha}|^{-\alpha} \times \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \Gamma(\alpha) \right. \\ &\quad \left. + i \operatorname{sgn}(\xi^{1/\alpha}) |\xi^{1/\alpha}|^{-\alpha} \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \right] \mathfrak{F}_\alpha[u(t)](\xi) \\ &= |\xi|^{-1} \left[\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) + i \operatorname{sgn}(\xi^{1/\alpha}) \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \right] \mathfrak{F}_\alpha[u(t)](\xi).\end{aligned}\tag{2.56}$$

Nhận xét 2.17. Nếu $\xi = 0$, thay vào $I_+^\alpha u \in \phi(\mathbb{R})$, được:

$$\mathfrak{F}_\alpha[I_+^\beta u](0) = \mathfrak{F}[I_+^\beta u](0) = 0.\tag{2.57}$$

Bổ đề 2.18. Cho u là một hàm thuộc $\phi(\mathbb{R})$, không gian Lizorkin. Khi $0 < \alpha \leq 1, 0 < \beta \leq 1$ và $\xi \neq 0$. Thì

$$\mathfrak{F}_\alpha[I_-^\beta u](\xi) = |\xi|^{-\beta/\alpha} c_\beta \mathfrak{F}_\alpha[u(t)](\xi),\tag{2.58}$$

ở đây

$$c_\beta = \cos\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) - i \operatorname{sgn} \xi^{1/\alpha} \sin\left(\frac{\beta\pi}{2}\right).\tag{2.59}$$

Chứng minh. Từ các công thức (1.92) và (2.39), ta có

$$\mathfrak{F}_\alpha[I_-^\beta u](\xi) = \mathfrak{F}_\alpha\left[\frac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \circ u\right](\xi) = \mathfrak{F}\left[\frac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\right](-\xi^{1/\alpha}) \cdot \mathfrak{F}_\alpha[u(t)](\xi).\tag{2.60}$$

Biến đổi Fourier của hạch $i_\beta = \frac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}$, tại điểm $(-\xi^{1/\alpha})$. Thì

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}\left[\frac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\right](-\xi^{1/\alpha}) &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(-\xi^{1/\alpha})t} t^{\beta-1} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^{+\infty} e^{i(-\xi^{1/\alpha})t} t^{\beta-1} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \left[\int_0^{+\infty} \cos(\xi^{1/\alpha} t) t^{\beta-1} dt - i \int_0^{+\infty} \sin(\xi^{1/\alpha} t) t^{\beta-1} dt \right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \left[|\xi^{1/\alpha}|^{-\beta} \cos\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) \Gamma(\beta) - i \operatorname{sgn}(\xi^{1/\alpha}) |\xi^{1/\alpha}|^{-\beta} \sin\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) \Gamma(\beta) \right] \\ &= |\xi|^{-\beta/\alpha} \left[\cos\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) - i \operatorname{sgn}(\xi^{1/\alpha}) \sin\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) \right].\end{aligned}\tag{2.61}$$

Thay (2.61) vào (2.60), ta có

$$\mathfrak{F}_\alpha[I_-^\beta u](\xi) = |\xi|^{-\beta/\alpha} \left[\cos\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) - i \operatorname{sgn}(\xi^{1/\alpha}) \sin\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) \right] \mathfrak{F}_\alpha[u(t)](\xi). \quad (2.62)$$

□

Trường hợp riêng. Nếu $\beta = \alpha$ ta được:

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_\alpha[I_-^\alpha u](\xi) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[|\xi^{1/\alpha}|^{-\alpha} \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \Gamma(\alpha) \right. \\ &\quad \left. - i \operatorname{sgn}(\xi^{1/\alpha}) |\xi^{1/\alpha}|^{-\alpha} \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \Gamma(\alpha) \right] \mathfrak{F}_\alpha[u(t)](\xi) \\ &= |\xi|^{-1} \left[\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) - i \operatorname{sgn}(\xi^{1/\alpha}) \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \right] \mathfrak{F}_\alpha[u(t)](\xi). \end{aligned} \quad (2.63)$$

Nhận xét 2.19. Nếu $\xi = 0$, thay vào $I_-^\alpha u \in \phi(\mathbb{R})$, được:

$$\mathfrak{F}_\alpha[I_-^\beta u] = \mathfrak{F}[I_-^\beta 0] = 0. \quad (2.64)$$

KẾT LUẬN

Luận văn đã trình bày các vấn đề sau đây:

1. Biến đổi Fourier phân Naminas và các tính chất cơ bản. Đây là một trong những phép biến đổi Fourier phân được quan tâm nhiều hơn cả về lý thuyết cũng như ứng dụng. Trình bày một số nghiên cứu của các chuyên gia về tích chập của phép biến đổi này.

2. Chúng ta biết rằng các biến đổi Fourier thông thường, Fourier-cosine, Fourier-sine và biến đổi Hartley thông thường có mối quan hệ mật thiết với nhau và cùng phát triển. Trong luận văn này đã giới thiệu biến đổi Fourier phân của biến đổi Hartley thông thường, biến đổi Hartley phân và các tích chập của phép biến đổi này

3. Giới thiệu các phép biến đổi Fourier phân dạng lũy thừa LMT và RCL, các tính chất và một số ứng dụng của các phép biến đổi này trong lý thuyết tích phân phân Riemann-Liouville, tích chập Laplace và tích chập Miana.

Tài liệu tham khảo

- [1] A. Bultheel and H. Martinez, An introduction to the fractional Fourier transform and friends, *Preprint, February, 2004*.
- [2] A.C. McBride and F. H. Kerr, On Naminas's fractional Fourier transforms, *IMA J. Appl. Math.*, 39: 159-175, 1987.
- [3] Ahmed I. Zayed, A Convolution and Product Theorem for the Fractional Fourier Transform, *IEEE Signal, Processing Letters*, Vol.5, No4, 1998, 101-103.
- [4] E.C. Titchmarsh, Introduction to the e Clarendtheory of Fourer integrals, New York, 1986.
- [5] Fan Hong-Yi, Hao Ren and Lu Hai-lang, Convolution Theorem of Fractional Fourier Transformation Derived by Representation Transformation in Quantum Mechancis, *Commun.Theor.Phys.(Beijing, China)*, **50**(2008),pp.611-614.
- [6] H.M. Ozaktas, Z. Zalevsky and M.A. Kutay, The fractional Fourier transform, Wiley, Chichester, 2001.
- [7] I.M. Gelfand and G.E.Shilov, *Generalized Functions, Vol 2: Spaces of Fundamental and Generalized Functions*, Academic Press, New York and London (1968)
- [8] Luis B. Almeida, Product and Convolution Theorems for the Fractional Fourier Transform, *IEEE Signal, Processing Letters*, Vol.4, No1, 1997,15-17.

- [9] Luis Guillermo Romero, Ruben Alejandro Cansform and cerutti and Luciano Leonardo Luque, A new fractional Fourier transform and convolution products, *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, Vol. 66, No4, 2011, 397-408.
- [10] P. K. Sontakke and A.S. Guidadhe, Convolution and Rayleigh's Theorem for generalized fractional Hartley transform, *European journal of pure and applied mathematics*, **20**, No 1, 2009, 162-170.
- [11] Pei-Soo-Chang Jian-Jiun Ding, Fractional cosine , sine and Hartley transform, *IEEE, Trans.on Signal Processing*, Vol. 50, No7, July 2002.
- [12] S.G. Samko, A.A. Kilbas and O.I. Marichev, *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications*, Gordon and Breach Science Pub., New York-London (1993).
- [13] V.Naminas, The fractional order Fourier transform and its application in quanturm mechanics,*J. Inst. Math. Appl.*, 25: 241-265, 1980.
- [14] Y. Luchko, H. Martinez, J. Trujillo, Fractional Fourier transform and some of its applications, Fractional Calculus and Applied Analysis, *International Journal for Theory and Applications*, **11**, No 4 (2008).