ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

ĐẠI HỌC KHOA HỌC

LÊ THỊ KIM LIÊN

ĐỊNH LÝ CƠ BẢN CỦA ĐẠI SỐ

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC
Chuyên ngành: Phương pháp toán sơ cấp

Thái Nguyên, năm 2012

Mục lục

LỜI CẢM ƠN

Sau quá trình nhận đề tài và nghiên cứu dưới sự hướng dẫn khoa học của PGS.TS Lê Thị Thanh Nhàn, luận văn "Định lí cơ bản của Đại số" của tôi đã được hoàn thành. Có được kết quả này, đó là nhờ sự dạy bảo hết sức tận tình và nghiêm khắc của Cô. Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới Cô và gia đình!

Tôi cũng xin gửi lời cảm ơn chân thành đến Ban Giám hiệu, Phòng Đào tạo-Khoa học-Quan hệ quốc tế và Khoa Toán-Tin của Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên đã tạo điều kiện thuận lợi nhất trong suốt quá trình học tập tại trường cũng như thời gian tôi hoàn thành đề tài này. Sự giúp đỡ nhiệt tình và thái độ thân thiện của các cán bộ thuộc Phòng Đào tạo và Khoa Toán-Tin đã để lại trong lòng mỗi chúng tôi những ấn tượng hết sức tốt đẹp.

Tôi xin cảm ơn Phòng Giáo dục và Đào tạo huyện Thủy Nguyên - thành phố Hải Phòng và Trường trung học cơ sở Dương Quan - nơi tôi đang công tác đã tạo điều kiện cho tôi hoàn thành khóa học này.

Tôi xin cảm ơn gia đình, bạn bè đồng nghiệp và các thành viên trong lớp cao học Toán K4B (Khóa 2010-2012) đã quan tâm, tạo điều kiện, động viên cổ vũ để tôi có thể hoàn thành nhiệm vụ của mình.

LỜI NÓI ĐẦU

Định lí cơ bản của Đại số phát biểu rằng mỗi đa thức một biến khác hằng với hệ số phức có ít nhất một nghiệm phức. Đôi khi, Định lí cơ bản của Đại số được phát biểu dưới dạng: Mỗi đa thức một biến khác 0 với hệ số phức có số nghiệm phức (mỗi nghiệm tính với số bội của nó) đúng bằng bậc của đa thức đó.

Mặc dù tên của định lí là "Định lí cơ bản của Đại số" nhưng không có một chứng minh thuần túy đại số nào cho định lí này. Tất cả các chứng minh cho Định lí đều cần đến tính đầy đủ của tập các số thực, hoặc một dạng tương đương về tính đầy đủ, mà tính đầy đủ lại không là khái niệm đại số. Hơn nữa, Định lí cơ bản của Đại số không phải là nền tảng của Đại số hiện đại. Tên của định lí này được đặt ra vào thời điểm khi mà việc nghiên cứu đại số chủ yếu là để giải phương trình đa thức.

Peter Roth là người đầu tiên phát biểu gợi mở "Định lí cơ bản của Đại số" trong cuốn sách "Arithmetica Phylosophica" công bố năm 1608: "*Một đa thức bậc n với hệ số thực có không quá n nghiệm*". Tiếp đến là khẳng định của Albert Giard (1595-1632) trong cuốn sách "L'invention nouvelle en l'Algèbre" xuất bản năm 1629: "*Phương trình đa thức bậc n có n nghiệm, trừ khi phương trình bị khuyết*". Nhiều nhà toán học đã tin Định lí là đúng, và do đó họ tin rằng mọi đa thức với hệ số thực khác hằng đều viết dưới dạng tích của các đa thức với hệ số thực bậc một hoặc hai. Bên cạnh đó lại có những người (Gottfried Wilhelm Leibniz, Nikolaus II Bernoulli) cố tìm ra những đa thức bậc 4 với hệ số thực không là tích của các đa thức bậc 1 hoặc 2. Tuy nhiên, các phản ví dụ của họ đều được Leonhard Euler phản bác, điều này càng làm cho các nhà toán học thời đó tin tưởng tính đúng đắn của Định lí.

Chứng minh đầu tiên cho Định lí thuộc về D'Alembert vào năm 1746, nhưng chứng minh này không hoàn chỉnh. Euler 1749 có một chứng minh đúng cho Định lí trong trường hợp bậc của đa thức $\leqslant 6$. Các chứng minh khác được thực hiện bởi Euler 1749, De Foncenex 1759, Lagrange 1772 và Laplace 1795 đều có ít nhiều chỗ chưa chặt chẽ. Kể cả chứng minh đầu tiên của Gauss năm 1799 cũng không đầy đủ. Mãi đến năm 1816, Gauss mới đưa ra một chứng minh chính xác cho Định lí.

Mục tiêu của luận văn là giới thiệu lịch sử Định lí cơ bản của Đại số, trong đó nhấn mạnh những đóng góp quan trọng của D'Alembert, Euler và Gauss, đồng thời trình bày một số chứng minh sau này cho Định lí bằng cách sử dụng các công cụ đại số, giải tích phức và tôpô.

Các kết quả và thông tin trong luận văn được viết dựa vào bài báo [Ba] của Baltus trên "Historia Mathematica" 2004, bài báo [Ca] của J. Carrera trên "Publicions Matematiques" 1992, cuốn sách [MF] của Miller-File 2003, và đặc biệt là bài báo [Du] của Dunham 1991. Dunham đã được Hội Toán học Mỹ trao giải thưởng Polya năm 1992 vì bài báo này.

Luận văn gồm 3 chương. Chương 1 trình bày kiến thức chuẩn bị về đa thức. Chương 2 giới thiệu lịch sử Định lí cơ bản của Đại số với những đóng góp tiêu biểu của một số nhà toán học. Chương 3 đưa ra một số chứng minh cho Định lí bằng cách sử dụng các công cụ Đại số, Giải tích phức và Tôpô. Ngoài ra, luận văn còn có Phần phụ lục trình bày kiến thức về số phức, mở rộng trường, trường phân rã cũng như hình ảnh của một số nhà toán học có đóng góp quan trọng cho Định lí.

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Mục đích của chương này là nhắc lại một số khái niệm và kết quả liên quan đến đa thức trên một trường như phép chia với dư, nghiệm của đa thức để phục vụ việc trình bày các kết quả của các chương sau.

1.1 Đa thức trên một trường

1.1.1. Định nghĩa. Một tập K cùng với hai phép toán cộng và nhân được gọi là *trường* nếu:
(a) Kết hợp: $a+(b+c) = (a+b)+c$ và $(ab)c = a(bc)$ với mọi $a, b, c \in K$.
(b) Giao hoán: $a + b = b + a$ và $ab = ba$ với mọi $a, b \in K$.
(c) Phân phối: $a(b + c) = ab + ac$ với mọi $a, b, c \in K$.
(d) Tồn tại *đơn vị* $1 \in K$ sao cho $a1 = 1a = a$ với mọi $a \in K$.
(e) Tồn tại phần tử $0 \in K$ sao cho $a + 0 = 0 + a = a$ với mọi $a \in K$.
(g) Mỗi $a \in K$, tồn tại phần tử đối $-a \in K$ sao cho $a + (-a) = 0$.
(h) Mỗi $0 \neq a \in K$, tồn tại *phần tử khả nghịch* $a^{-1} \in K$ sao cho $aa^{-1} = 1 = a^{-1}a$.

Chẳng hạn, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ là các trường. Tập $\mathbb{Q}[\sqrt{7}] = \{a+b\sqrt{7} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ là một trường. $\mathbb{Q}[\sqrt{p}] = \{a + b\sqrt{p} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ là một trường nếu p là số nguyên tố.

Từ nay cho đến hết chương này, luôn giả thiết K là một trường.

1.1.2. Định nghĩa. Một biểu thức dạng $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$ trong đó $a_i \in K$ với mọi i được gọi là một *đa thức* của ẩn x (hay biến x) với hệ số trong K. Nếu $a_n \neq 0$ thì a_n được gọi là *hệ số cao nhất* của $f(x)$ và số tự nhiên n được gọi là *bậc* của $f(x)$, kí hiệu là $\deg f(x)$.

Chú ý rằng hai đa thức $f(x) = \sum a_i x^i$ và $g(x) = \sum b_i x^i$ là bằng nhau nếu và chỉ nếu $a_i = b_i$ với mọi i. Ta chỉ định nghĩa bậc cho những đa thức khác 0, còn ta quy ước đa thức 0 là không có bậc. Kí hiệu $K[x]$ là tập các đa thức ẩn x với hệ số trong K. Với $f(x) = \sum a_i x^i$ và $g(x) = \sum b_i x^i$, định nghĩa $f(x) + g(x) = \sum (a_i b_i) x^i$ và $f(x)g(x) = \sum c_k x^k$, trong đó $c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$.

Ta dễ dàng kiểm tra được tính chất sau đối với bậc của các đa thức.

1.1.3. Bổ đề. *Với $f(x), g(x) \in K[x]$ ta luôn có*

$$\deg(f(x) + g(x)) \leqslant \max\{\deg f(x), \deg g(x)\}$$
$$\deg(f(x).g(x)) = \deg f(x) + \deg g(x).$$

Định lí sau đây, gọi là Định lí phép chia với dư, đóng một vai trò rất quan trọng trong lí thuyết đa thức.

1.1.4. Định lý. *Cho $f(x), g(x) \in K[x]$, trong đó $g(x) \neq 0$. Khi đó tồn tại duy nhất một cặp đa thức $q(x), r(x) \in K[x]$ sao cho*

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x), \text{ với } r(x) = 0 \text{ hoặc } \deg r(x) < \deg g(x).$$

Chứng minh. Trước hết ta chứng minh tính duy nhất. Giả sử

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x) = g(x)q_1(x) + r_1(x),$$

trong đó $r(x), r_1(x)$ bằng 0 hoặc có bậc nhỏ hơn bậc của $g(x)$. Khi đó

$$g(x)(q(x) - q_1(x)) = r_1(x) - r(x).$$

Nếu $r(x) \neq r_1(x)$ thì

$$\deg(r - r_1) = \deg\big(g(q - q_1)\big) = \deg g + \deg(q - q_1).$$

Điều này mâu thuẫn vì

$$\deg(r - r_1) \leqslant \max\{\deg r, \deg r_1\} < \deg g \leqslant \deg g + \deg(q - q_1).$$

Do vậy, $r_1(x) = r(x)$. Suy ra $g(x)(q(x) - q_1(x)) = 0$. Vì $g(x) \neq 0$ nên $q(x) - q_1(x) = 0$, tức là $q(x) = q_1(x)$.

Bây giờ ta chứng minh sự tồn tại. Nếu $\deg f(x) < \deg g(x)$ thì ta chọn $q(x) = 0$ và $r(x) = f(x)$. Giả sử $\deg f(x) \geq \deg g(x)$. Viết $f(x) = a_m x^m + \ldots + a_0$ và $g(x) = b_n x^n + \ldots + b_0$ với $a_m, b_n \neq 0$ và $n \leqslant m$. Chọn $h(x) = \dfrac{a_m}{b_n} x^{m-n}$. Đặt $f_1(x) = f(x) - g(x)h(x)$. Khi đó $f_1(x) = 0$ hoặc $f_1(x)$ có bậc thực sự bé hơn bậc của $f(x)$. Trong trường hợp $f_1(x) = 0$, ta tìm được dư của phép chia $f(x)$ cho $g(x)$ là $r(x) = 0$ và thương là $q(x) = h(x)$. Nếu $f_1(x) \neq 0$ thì ta tiếp tục làm tương tự với $f_1(x)$ và ta được đa thức $f_2(x)$. Cứ tiếp tục quá trình trên ta được dãy đa thức $f_1(x), f_2(x), \ldots$, nếu chúng đều khác 0 thì chúng có bậc giảm dần. Vì thế sau hữu hạn bước ta được một đa thức có bậc bé hơn bậc của $g(x)$ và đó chính là đa thức dư $r(x)$. Nếu một đa thức của dãy bằng 0 thì dư $r(x) = 0$. Thế vào rồi nhóm lại ta tìm được $q(x)$. □

Trong định lý trên, $q(x)$ được gọi là *thương* và $r(x)$ được gọi là *dư* của phép chia $f(x)$ cho $g(x)$. Nếu dư của phép chia $f(x)$ cho $g(x)$ là 0 thì tồn tại $q(x) \in K[x]$ sao cho $f(x) = g(x)q(x)$. Trong trường hợp này ta nói rằng $f(x)$ *chia hết cho* $g(x)$ hay $g(x)$ là *ước* của $f(x)$.

1.2 Nghiệm của đa thức

1.2.1. Định nghĩa. Với mỗi $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \in K[x]$ và α là phần tử trong một trường chứa K, ta đặt $f(\alpha) = a_n\alpha^n + \ldots + a_1\alpha + a_0$. Nếu $f(\alpha) = 0$ thì ta nói α là *nghiệm* của $f(x)$.

Chẳng hạn, số $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ là nghiệm của đa thức $x^2 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$.

1.2.2. Hệ quả. *Phần tử $a \in K$ là nghiệm của đa thức $f(x) \in K[x]$ nếu và chỉ nếu tồn tại đa thức $g(x) \in K[x]$ sao cho $f(x) = (x - a)g(x)$.*

Chứng minh. Chia $f(x)$ cho $x - a$, dư hoặc bằng 0 hoặc là một đa thức bậc 0 vì bậc của $(x-a)$ bằng 1. Vì vậy, dư là một phần tử $r \in K$. Ta có $f(x) = (x-a)q(x)+r$. Thay $x = a$ vào đẳng thức ta được $r = f(a)$. □

Cho $k > 0$ là một số nguyên. Một phần tử $a \in K$ được gọi là một *nghiệm bội k* của đa thức $f(x) \in K[x]$ nếu $f(x)$ chia hết cho $(x - a)^k$ nhưng không chia hết cho $(x-a)^{k+1}$. Nếu $k = 1$ thì a được gọi là *nghiệm đơn*. Nếu $k = 2$ thì a được gọi là *nghiệm kép*.

1.2.3. Hệ quả. *Phần tử $a \in K$ là nghiệm bội k của $f(x) \in K[x]$ nếu và chỉ nếu $f(x) = (x - a)^k g(x)$ với $g(x) \in K[x]$ và $g(a) \neq 0$.*

Chứng minh. Giả sử a là nghiệm bội k của $f(x)$. Vì $f(x)$ chia hết cho $(x - a)^k$ nên $f(x) = (x - a)^k g(x)$ với $g(x) \in K[x]$. Nếu $g(a) = 0$ thì theo Hệ quả 1.2.2 ta có $g(x) = (x - a)h(x)$ với $h(x) \in K[x]$ và do đó $f(x)$ chia hết cho $(x - a)^{k+1}$, vô lí. Vậy $g(a) \neq 0$. Ngược lại, vì $f(x) = (x - a)^k g(x)$ nên $f(x)$ chia hết cho $(x - a)^k$. Nếu $f(x)$ chia hết cho $(x - a)^{k+1}$ thì $f(x) = (x - a)^{k+1}h(x)$ với $h(x) \in K[x]$. Do đó

$$(x - a)^k g(x) = (x - a)^{k+1}h(x).$$

Do K là trường nên $g(x) = (x-a)h(x)$. Suy ra $g(a) = 0$, mâu thuẫn. Vậy $f(x)$ không chia hết cho $(x - a)^{k+1}$. □

1.2.4. Hệ quả. *Cho $a_1, a_2, \ldots, a_r \in K$ là những nghiệm phân biệt của $f(x) \in K[x]$. Giả sử a_i là nghiệm bội k_i của $f(x)$ với $i = 1, 2, \ldots, r$. Khi đó $f(x) = (x - a_1)^{k_1}(x - a_2)^{k_2} \ldots (x - a_r)^{k_r} u(x)$, trong đó $u(x) \in K[x]$ và $u(a_i) \neq 0$ với mọi $i = 1, \ldots, r$.*

Chứng minh. Ta chứng minh bằng quy nạp theo r. Trường hợp $r = 1$ được suy ra từ Hệ quả 1.2.3. Cho $r > 1$. Theo giả thiết quy nạp, tồn tại $h(x) \in K[x]$ sao cho $f(x) = (x - a_1)^{k_1}(x - a_2)^{k_2} \ldots (x - a_{r-1})^{k_{r-1}} h(x)$, trong đó $h(x) \in K[x]$ và $h(a_i) \neq 0$ với mọi $i = 1, \ldots, r - 1$. Vì a_r là nghiệm của $f(x)$ nên ta có

$$0 = f(a_r) = (a_r - a_1)^{k_1}(a_r - a_2)^{k_2} \ldots (a_r - a_{r-1})^{k_{r-1}} h(a_r).$$

Do $a_r \neq a_i$ với mọi $i = 1, \ldots, r - 1$ nên $h(a_r) = 0$. Giả sử $h(x) = (x - a_r)^t u(x)$ trong đó $u(x) \in K[x]$, $u(a_r) \neq 0$ và $t > 0$ là một số nguyên. Vì $h(a_i) \neq 0$ nên $u(a_i) \neq 0$ với mọi $i = 1, \ldots, r - 1$. Do a_r là nghiệm bội k_r của $f(x)$ nên $t \leqslant k_r$. Hơn nữa, $f(x)$ có sự phân tích $f(x) = (x - a_r)^{k_r} v(x)$, trong đó $v(x) \in K[x]$ và $v(a_r) \neq 0$. Vì thế ta có

$$f(x) = (x - a_r)^{k_r} v(x) = (x - a_1)^{k_1} \ldots (x - a_{r-1})^{k_{r-1}} (x - a_r)^t u(x).$$

Chú ý rằng K là trường, vì thế giản ước cả hai vế cho $(x - a_r)^t$ ta được

$$(x - a_r)^{k_r - t} v(x) = (x - a_1)^{k_1} \ldots (x - a_{r-1})^{k_{r-1}} u(x).$$

Nếu $t < k_r$ thì khi thay $x = a_r$ vào đẳng thức trên ta có vế trái bằng 0, còn vế phải khác 0, điều này là vô lý. Vậy $t = k_r$. Vì thế f có phân tích

$$f(x) = (x - a_1)^{k_1} \ldots (x - a_{r-1})^{k_{r-1}} (x - a_r)^{k_r} u(x)$$

trong đó $u(a_i) \neq 0$ với mọi $i = 1, \ldots, r$. □

1.2.5. Hệ quả. *Cho $0 \neq f(x) \in K[x]$ là đa thức. Khi đó số nghiệm của $f(x)$, mỗi nghiệm tính với số bội của nó, không vượt quá bậc của $f(x)$.*

Chứng minh. Giả sử $a_1, \ldots, a_r$ là các nghiệm của $f(x)$ với số bội lần lượt là $k_1, \ldots, k_r$. Theo Hệ quả 1.2.4, tồn tại $g(x) \in K[x]$ sao cho

$$f(x) = (x - a_1)^{k_1}(x - a_2)^{k_2} \ldots (x - a_r)^{k_r} g(x).$$

Vì thế $\deg f(x) = \deg g(x) + \sum_{i=1}^{r} k_i \geq \sum_{i=1}^{r} k_i$, điều cần chứng minh. □

Chương 2

Lịch sử Định lí cơ bản của Đại số

Mục tiêu của chương này là trình bày sơ lược lịch sử Định lí cơ bản của Đại số, trong đó nhấn mạnh những đóng góp tiêu biểu của một số nhà toán học, đó là Jean le Rond D'Alembert (có công bố đầu tiên một chứng minh cho Định lí, nhưng không chặt chẽ), Leonhard Euler (công bố một chứng minh đúng cho Định lí trong trường hợp bậc nhỏ hơn hoặc bằng 6), Pierre Simon Laplace (công bố chứng minh cho Định lí bằng công cụ đại số, nhưng chưa đầy đủ), và Carl Friedrich Gauss (người đầu tiên công bố một chứng minh hoàn chỉnh cho Định lí).

2.1 Một số đóng góp ban đầu

Trong tiết này, chúng tôi trình bày một số mốc ban đầu trong việc phát biểu Định lí cơ bản của Đại số.

2.1.1. Đóng góp của Peter Roth. Cho đến nay, khó có thể biết được chính xác Định lí cơ bản bắt đầu từ đâu. Người ta cho rằng Peter Roth (1580-1617) là người đầu tiên phát biểu gợi mở Định lí, được viết trong cuốn sách "Arithmetica Phylosophica" công bố năm 1608: "*Một đa thức bậc n với hệ số thực có không quá n nghiệm*". Roth sống và làm việc ở Đức và mất năm 1617, nhưng không ai biết chính xác ngày mất và

nơi mất của Ông. Đóng góp của Roth cũng không mấy người biết đến. Trong lịch sử Toán học Anh, rất ít tác giả nhắc đến Roth, người ta chỉ tìm thấy một cuốn sách của David Eugene Smith trong đó có những chú thích về Roth (cuốn sách này đã không còn bản gốc). Tuy nhiên, trong cuốn Lịch sử Quốc gia ở Paris, Peter Roth được nhắc đến nhiều lần với mốc thời gian 1608-1609, có lẽ trong thời kì này Roth được coi là nhà đại số uy tín hàng đầu của Đức.

2.1.2. Đóng góp của Albert Giard. Albert Giard (1595-1632) là nhà toán học, âm nhạc học người Pháp. Ông chủ yếu làm về lượng giác và là người đầu tiên dùng kí hiệu viết tắt $\sin, \cos, \tan$. Mặc dù Francois Viète (1540-1603) đã đưa ra các phương trình bậc n với n nghiệm nhưng Albert Giard là người đầu tiên khẳng định sự tồn tại n nghiệm của đa thức bậc n. Trong cuốn sách "L'invention nouvelle en l'Algèbre" của Giard xuất bản năm 1629, Ông viết "*Phương trình đa thức bậc n có n nghiệm, trừ khi phương trình bị khuyết*". Ông giải nghĩa cụm từ "phương trình khuyết" có nghĩa là phương trình đa thức trong đó có ít nhất một hệ số bằng 0. Ông không nói đến điều kiện hệ số của đa thức là những số thực. Chắc chắn rằng trong những lập luận chi tiết về điều này, Ông đã thực sự tin tưởng khẳng định trên vẫn đúng khi phương trình bị khuyết. Chẳng hạn, Ông chỉ ra rằng mặc dù phương trình $x^4 - 4x + 3 = 0$ là khuyết (các hệ số bậc 3 và bậc 2 đều bằng 0) nhưng nó vẫn có 4 nghiệm, trong đó một nghiệm kép là 1 và hai nghiệm còn lại là $-1 + i\sqrt{2}$ và $-1 - i\sqrt{2}$.

2.1.3. Đóng góp của Rene' Descartes. Rene' Descartes (1596-1650) là một nhà khoa học, nhà toán học người Pháp. Ông là cha đẻ của Triết học hiện đại. Thời của Descartes về cơ bản đã nhận biết được Định lí cơ bản của Đại số, nhưng chưa chứng minh được. Descartes khẳng

định rằng một phương trình đa thức bậc n có n nghiệm, trong đó một số nghiệm nằm trong tập số thực, còn một số nghiệm khác chỉ tồn tại trong sự hình dung của chúng ta. Trong số những nghiệm ảo đó có bao gồm các nghiệm có dạng $a + b\sqrt{-1}$ với a, b là thực, nhưng Ông không bình luận về các nghiệm không thực này.

2.1.4. Gottfried Wilhelm Leibniz và Nikolaus (II) Bernoulli. Các thông tin trong mục này được tham khảo trong bài báo của J. Carrera [Ca] đăng trên tạp chí "Publicacions Matemàtiques" năm 1992. Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) sinh ra ở Leipziz và mất ở Hannover (nước Đức). Thời của Ông, rất nhiều người cố gắng phủ định hoặc chứng minh Định lí Cơ bản của Đại số. Leibniz đã nghĩ đến việc tìm phản ví dụ cho định lí này. Năm 1702, Leibniz cho rằng các đa thức dạng $x^4 + r^4$, trong đó r là số thực khác 0, không thể phân tích được thành tích của các đa thức bậc 1 hoặc bậc hai với hệ số thực. Lúc đó Ông không nhận ra rằng căn bậc hai của số phức i có thể biểu diễn dưới dạng $a + bi$ với a, b là các số thực. Sau đó Nikolaus Bernoulli (sinh ra ở Basel - Thụy sĩ năm 1687 và mất ở Basel năm 1759) cũng có sai lầm tương tự, Ông khẳng định rằng đa thức $x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x + 4$ không thể phân tích được thành tích các đa thức bậc nhất hoặc bậc hai. Tuy nhiên, vào năm 1742 Nikolaus (II) Bernoulli đã nhận được một bức thư của Leonhard Euler (1707-1783) - một nhà Toán học và Vật lí của Thụy sĩ, trong thư này Euler khẳng định rằng đa thức mà Bernoulli đưa ra có sự phân tích

$$\left(x^2 - (2+\alpha)x + 1 + \sqrt{7} + \alpha\right)\left(x^2 - (2-\alpha)x + 1 + \sqrt{7} - \alpha\right)$$

trong đó α là một căn bậc hai của $4 + 2\sqrt{7}$. Hơn nữa, Euler cũng chú thích rằng các đa thức do Leibniz đưa ra cũng có sự phân tích

$$x^4 + r^4 = (x^2 + \sqrt{2}\ rx + r^2)(x^2 - \sqrt{2}\ rx + r^2).$$

2.2 Đóng góp của Jean le Rond D'Alembert

Các thông tin trong tiết này được tham khảo từ các bài báo của Christopher Baltus [Ba] và của J. Carrera [Ca]. Bàn luận nghiêm túc đầu tiên về Định lí cơ bản của Đại số thuộc về Jean le Rond D'Alembert (1717-1783), một nhà Toán học, Cơ học, Vật lí học, Thiên văn học người Pháp. D'Alembert là người đầu tiên công bố chứng minh Định lí cơ bản của Đại số trong bài báo [DA] "Recherches sur le calcul integral" đăng trên "Histoire de l'Acad. Royale Berlin" 1746, và kết quả này thực sự được công bố năm 1748. Nhưng chứng minh của Ông là một chứng minh không hoàn chỉnh. Giả sử $p(x)$ là đa thức với hệ số thực. Chứng minh của D'Alembert năm 1946 (xem [DA]) về sự tồn tại nghiệm của $p(x)$ được chia làm hai bước.
Bước 1: Tồn tại một điểm x_0 để môđun $|p(x)|$ của $p(x)$ đạt cực tiểu.
Bước 2 (Bổ đề D'Alembert): Nếu $p(x_0) \neq 0$ thì bất kì một lân cận nào của x_0 đều chứa một điểm x_1 sao cho $|p(x_1)| < |p(x_0)|$.

Rõ ràng, nếu Bước 1 và Bước 2 đều đúng và x_0 là điểm làm cho $|p(x)|$ đạt cực tiểu thì $|p(x_0)| = 0$ và do đó x_0 là một nghiệm của $p(x)$.

Chứng minh của D'Alembert còn hổng ở một số chỗ. Điểm yếu thứ nhất là D'Alembert đã công nhận (không chứng minh) tính chất trong Bước 1. Thực tế, tính chất này được chấp nhận một cách tự nhiên vào Thế kỉ 18. Tuy nhiên mãi đến đầu thế kỉ 19 (năm 1821), Augustin Louis Cauchy (1789-1857) - nhà toán học người Pháp, mới đưa ra một chứng minh chặt chẽ cho tính chất này.

Vì thế, với D'Alembert, Bước 2 mới thực sự quan trọng. Tuy nhiên, điểm yếu thứ hai của D'Alembert là trong chứng minh kết quả ở Bước 2, Ông sử dụng một bổ đề mà không chứng minh. Bổ đề đó được phát biểu như sau: Với mỗi cặp số phức (x_0, y_0) sao cho $y_0 - p(x_0) = 0$ tồn tại một dãy tăng các số hữu tỷ $\{q_k\}$ để trong một lân cận của y_0 ta có

$x - x_0 = \sum_{k\geq 0} c_k[y - y_0]^{q_k}$. Tuy nhiên mãi đến năm 1851, Pusieux mới có một chứng minh chặt chẽ cho bổ đề này. Điểm yếu thứ ba là, trong các diễn giải, D'Alembert đã thiếu kiến thức để lập luận về tính com pắc nhằm chỉ ra tính hội tụ ở phần cuối của chứng minh. Mặc dù vậy, các ý tưởng trong chứng minh của Ông cho Định lí cơ bản của Đại số vẫn rất quan trọng.

Cũng trong bài báo của D'Alembert năm 1746 (xem [DA]), Ông đã phát hiện ra hai điều quan trọng. Thứ nhất, Ông chỉ ra rằng rằng nếu $z = c + d\sqrt{-1}$ là một nghiệm của $p(x)$ thì số phức $\overline{z} = c - d\sqrt{-1}$ cũng là một nghiệm của $p(x)$, và vì thế $p(x)$ luôn phân tích được thành những nhân tử bậc hai có dạng $xx + mx + n$. Điều thứ hai, được xuất hiện ở các lập luận trong bài báo chứ không được trình bày cụ thể, là: "Nếu thay x bởi số phức $z = z_1 + iz_2$ vào đa thức $p(x)$ thì ta được $p(z) = p_1(z_1) + ip_2(z_2)$, trong đó $p_1(x), p_2(x)$ là các đa thức với hệ số thực. Do đó $p(z) = 0$ nếu và chỉ nếu $p_1(z) = 0$ và $p_2(z) = 0$.

Một điều rất thú vị đối với D'Alembert và các nhà toán học đương thời là Định lí cơ bản của Đại số có một tầm quan trọng vượt ra ngoài lĩnh vực đại số. Trong bài báo năm 1746 (xem [DA]), để làm cho mọi người nhìn thấy tầm quan trọng của Định lí Cơ bản của Đại số, D'Alembert đã trích công trình của Johann Bernoulli (năm 1703) về sự liên quan giữa định lí này với một chủ đề mới "phép tính vi tích phân", đặc biệt là liên quan đến kĩ thuật lấy nguyên hàm của hàm hữu tỷ mà ngày ta ta gọi là kĩ thuật tách thương. Ta xét một ví dụ để minh họa điều này. Giả sử ta cần lấy nguyên hàm của một hàm hữu tỷ mà cả tử và mẫu là những đa thức với hệ số thực, chẳng hạn

$$\frac{28x^3 - 4x^2 + 69x - 14}{3x^4 + 5x^3 + 10x^2 + 20x - 8}.$$

D'Alembert đã khẳng định rằng mẫu số của hàm hữu tỷ có thể phân tích thành các nhân tử tuyến tính hoặc bậc hai (với hệ số thực) và từ đó những khó khăn trong việc lấy nguyên hàm có thể vượt qua. Cụ thể, với hàm hữu tỷ trên, mẫu số có phân tích $(3x-1)(x+2)(x^2+4)$. Do đó ta có thể tách hàm hữu tỷ trên thành tổng

$$\frac{a}{3x-1}+\frac{b}{x+2}+\frac{cx+d}{x^2+4}.$$

Đồng nhất các hệ số ta được $a=1$, $b=7$ và $c=2, d=-3$. Từ đó ta suy ra nguyên hàm của hàm hữu tỷ trên là

$$\frac{1}{3}\ln|3x-1|+7\ln|x+2|+\ln(x^2+4)-\frac{3}{2}\tan^{-1}(x/2)+C.$$

Như vậy, nếu Định lí cơ bản của Đại số được chứng minh thì chúng ta có thể kết luận rằng nguyên hàm của mỗi hàm hữu tỷ $\dfrac{P}{Q}$ (với P và Q là những đa thức với hệ số thực) luôn tồn tại và là một tổng của những nguyên hàm dạng $\displaystyle\int \frac{A}{(ax+b)^n}dx$ hoặc $\displaystyle\int \frac{Bx+C}{(ax^2+bx+c)^n}dx$. Từ đó ta có thể tính được nguyên hàm của các hàm hữu tỷ.

2.3 Đóng góp của Leonhard Euler

Các thông tin trong tiết này được tham khảo từ bài báo của William Dunham [Du]. Cố gắng tiếp theo để chứng minh Định lí cơ bản của Đại số thuộc về Leonhard Euler. Chứng minh của Euler được công bố trong bài báo "Recherches sur les racines imaginaires des equations" trên "Mem. Berlin" năm 1749, và thực sự được phát hành năm 1751 (xem [Eu]). Mặc dù chứng minh của Euler cũng không hoàn chỉnh theo mọi nghĩa, nhưng nó đã thiết lập được các kết quả cho trường hợp đa thức bậc thấp và gợi ý cho các nhà toán học thời đó tin rằng Định lí đúng trong trường hợp tổng quát. Trước đó, vẫn có nhiều người cho rằng Định lí cơ

bản của Đại số là không đúng. Chẳng hạn, như đã trình bày ở Tiết 2.1, Gottfried Wilhelm Leibniz và Nikolaus (II) Bernoulli đã đưa ra những đa thức cụ thể có bậc 4 với hệ số thực và khẳng định rằng chúng không thể phân tích được thành tích các nhân tử bậc nhất hoặc bậc hai với hệ số thực. Điều này cũng có nghĩa rằng G. Leibniz và N. Bernoulli đã không tin vào tính đúng đắn của Định lí Cơ bản của Đại số. Euler cũng là người chỉ ra được tầm quan trọng của Định lí đối với việc giải phương trình vi phân. Cụ thể, năm 1743 Euler đã bàn về phương trình vi phân thuần nhất bậc n

$$0 = Ay + B\frac{dy}{dx} + C\frac{d^2y}{d^2x} + \ldots + L\frac{d^ny}{d^nx}$$

với $A, B, C \ldots, L$ là các hằng số. Ông phát hiện ra rằng nghiệm tổng quát của phương trình này có dạng $y = C_1y_1 + \ldots + C_ny_n$, trong đó $y_1, \ldots, y_n$ là các nghiệm riêng và $C_1, \ldots, C_n$ là các hằng số tùy ý. Thay $y = e^{[\int rdx]}$ vào phương trình ta được một phương trình đa thức ẩn r

$$A + Br + Cr^2 + \ldots + Lr^n = 0.$$

Thực tế, nghiệm tổng quát của phương trình vi phân phụ thuộc vào sự phân tích của đa thức này và bản chất nghiệm của đa thức là thực hay phức, là nghiệm đơn hay nghiệm bội, và như vậy, nó rõ ràng phụ thuộc vào Định lí cơ bản của Đại số.

Phần tiếp theo của tiết này, chúng ta xem xét chứng minh của Euler năm 1749. Ông đã nhanh chóng chứng minh được mọi đa thức bậc n với $n \leqslant 6$, có đúng n nghiệm. Ông bắt đầu chứng minh bằng việc xét đa thức bậc 4.

2.3.1. Bổ đề. *Với A, B, C, D là các số thực, đa thức bậc bốn $x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ luôn phân tích được thành tích của hai đa thức bậc hai với hệ số thực.*

Chứng minh. Bước đầu tiên, Euler quan sát thấy rằng nếu thay $x = y - \dfrac{A}{4}$ vào đa thức ta sẽ được một đa thức bậc bốn của y khuyết hệ số bậc ba. Việc làm này trong nhiều trường hợp là có ích. Chẳng hạn, muốn phân tích đa thức $x^4 + 4x^3 - 9x^2 - 16x + 20$, ta thay $x = y - 4/4$, và ta được đa thức $y^4 - 15y^2 + 10y + 24$. Không khó khăn ta tìm được sự phân tích

$$y^4 - 15y^2 + 10y + 24 = (y^2 - y - 2)(y^2 + y - 12).$$

Thay lại y theo x ta được

$$x^4 + 4x^3 - 9x^2 - 16x + 20 = (x^2 + x - 2)(x^2 + 3x - 10).$$

Bước tiếp theo là phân tích đa thức $x^4 + Bx^2 + Cx + D$ với B, C, D là các số thực. Ta xét hai trường hợp.

Trường hợp $C = 0$: Nếu $B^2 - 4D \geq 0$ thì ta có phân tích

$$x^4 + Bx^2 + D = \Big(x^2 + \frac{B - \sqrt{B^2 - 4D}}{2}\Big)\Big(x^2 + \frac{B + \sqrt{B^2 - 4D}}{2}\Big).$$

Nếu $B^2 - 4D < 0$ thì $D > 0$ và $2\sqrt{D} > B$. Vì thế ta có phân tích

$$x^4 + Bx^2 + D = \Big(x^2 + \sqrt{D} - x\sqrt{2\sqrt{D} - B}\Big)\Big(x^2 + \sqrt{D} + x\sqrt{2\sqrt{D} - B}\Big).$$

Trường hợp $C \neq 0$: Euler thấy rằng nếu có phân tích thì nó có dạng

$$x^4 + Bx^2 + Cx + D = (x^2 + ux + \alpha)(x^2 - ux + \beta)$$

với u, α, β là các số thực nào đó. Viết vế phải của đẳng thức trên thành đa thức tối giản rồi đồng nhất các hệ số ta được $\alpha + \beta - u^2 = B$, $\beta u - \alpha u = C$ và $\alpha\beta = D$. Vì $C \neq 0$ nên $u \neq 0$. Do đó, từ hai đẳng thức đầu ta suy ra $\alpha + \beta = B + u^2$ và $\alpha - \beta = C/u$. Vì thế $2\beta = B + u^2 + C/u$ và $2\alpha = B + u^2 - C/u$. Do đó $2D = 4\alpha\beta = (B + u^2 + C/u)(B + u^2 - C/u)$. Nhân 2 vế với u^2 rồi chuyển vế ta được $u^6 + 2Bu^4 + (B^2 - 4D)u^2 - C^2 = 0$.

Đây là phương trình bậc 3 đối với u^2. Vì thế nó có một nghiệm u^2 là số thực, nhưng chưa có gì đảm bảo để u là số thực. Tuy nhiên Euler nhận thấy vế trái của phương trình trên là một đa thức bậc 6. Đa thức này và là một hàm chẵn nhận giá trị $-C^2 < 0$ khi $x = 0$ và nhận giá trị tiến tới vô cùng khi x đủ lớn. Do đó Euler (trực quan) thấy rằng có một số thực $u_0 > 0$ sao cho u_0 và $-u_0$ là nghiệm của đa thức bậc 6 này. Thay vào các đẳng thức trên ta tìm được α_0 và β_0 theo u_0. Do đó, trong mọi trường hợp Euler đều thiết lập được sự tồn tại các số thực u_0, α_0 và β_0 thỏa mãn $x^4 + Bx^2 + Cx + D = (x^2 + u_0x + \alpha_0)(x^2 - u_0x + \beta_0)$. □

Khi chứng minh được bổ đề trên, Euler ngay lập tức quan sát thấy đa thức bậc 5 có thể phân tích được thành tích của một đa thức bậc nhất và hai đa thức bậc hai với hệ số thực. Lí do mà Ông đưa ra đơn giản là, một đa thức bậc lẻ, và do đó một đa thức $p(x)$ bậc 5 luôn có một nghiệm thực, chẳng hạn $x = a$, khi đó $p(x) = (x - a)q(x)$ với $q(x)$ là đa thức bậc 4 với hệ số thực. Theo bổ đề trên, $q(x)$ là tích của hai đa thức bậc hai và do đó $p(x)$ có sự phân tích như yêu cầu.

Sau đó, một chiến lược tổng quát hóa lại đặt ra trong suy nghĩ của Euler. Ông nhận ra rằng nếu chứng minh được sự tồn tại phân tích cho các đa thức bậc $2, 4, 8, 16, \ldots, 2^n$ thì sẽ chứng minh được cho đa thức với bậc tùy ý. Chẳng hạn, để phân tích đa thức $x^{12} - 3x^9 + 52x^8 + 3x^3 - 2x + 17$, ta có thể nhân với x^4 để được đa thức bậc 16. Giả thiết rằng đa thức bậc 16 đã có sự phân tích như mong muốn. Khi đó ta thu được sự phân tích của đa thức bậc 12 ban đầu bằng cách bỏ đi 4 nhân tử x, x, x và x trong sự phân tích của đa thức bậc 16 đó. Và cách làm thông minh điển hình của Euler là quy trường hợp tổng quát về các trường hợp đơn giản hơn. Cụ thể, khi đã có sự phân tích của đa thức bậc 4, Ông tiếp tục khẳng định mỗi đa thức bậc 8 là tích của hai đa thức bậc 4. Rồi từ đó, Ông

chứng minh mỗi đa thức bậc 16 là tích hai đa thức bậc 8 và ... mỗi đa thức bậc 2^n là tích hai đa thức bậc 2^{n-1}. Chiến lược này của Ông dường như rất hoàn hảo. Tuy nhiên, các chứng minh lại có nhiểu lỗ hổng không mong muốn. Ngay cho trường hợp phân tích đa thức bậc 8 thành tích hai đa thức bậc 4 thì chứng minh của Ông đã không chính xác.

2.4 Joseph-Louis Lagrange và Pierre Simon Laplace

Các thông tin trong mục này được tham khảo trong bài báo của J. Carrera [Ca]. Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) là một nhà toán học người Pháp sinh tại Italia. Thời đó, Lagrange được xem là nhà khoa học lỗi lạc trong mọi lĩnh vực liên quan đến giải tích, lí thuyết số và cơ học. Năm 1772, Ông đặt vấn đề nghiên cứu chứng minh của Euler cho Định lí cơ bản của Đại số. Bằng các kiến thức về hoán vị trên tập các nghiệm, Lagrange đã hoàn chỉnh mọi chỗ hổng trong chứng minh của Euler, trừ việc Ông vẫn phải giả thiết mỗi đa thức bậc n có đúng n nghiệm trong một tập nào đó mà ông có thể làm việc với các nghiệm này giống như làm việc với các phần tử có dạng $a + bi$, trong đó a, b là các số thực.

Pierre-Simon Laplace (1749-1827) là một nhà toán học, thiên văn học người Pháp. Vào năm 1795, Laplace [La] đã đưa ra một chứng minh cho Định lí cơ bản của Đại số "Mỗi đa thức với hệ số thực có bậc dương đều chứa nhân tử bậc nhất hoặc bậc hai với hệ số thực". Đây là một chứng minh hoàn toàn đại số, khác hẳn với cách tiếp cận của Euler - Lagrange đã nêu trong tiết trước, nhưng vẫn còn chứa nhiều lập luận không chặt chẽ. Thứ nhất, Ông phải giả thiết đa thức bậc n có n nghiệm (mặc dù Ông không biết các nghiệm đó có tồn tại hay không). Thứ hai, Ông thừa nhận đa thức bậc lẻ có nghiệm thực, điều này chưa được giải thích rõ ràng trong thời kì đó.

Chứng minh của Laplace như sau: Gọi $x_1, \ldots, x_n$ là các nghiệm của đa thức với hệ số thực $p(x) = x^n - b_1 x^{n-1} + \ldots + (-1)^n b_n$ có bậc $n \geq 1$. Viết $n = 2^k q$ với q lẻ. Xét đa thức $q_t(x)$ mà các nghiệm của nó là $x_i + x_j + t x_i x_j$ với $t \in \mathbb{R}$ và $i < j$ tùy ý. Đa thức này có bậc $2^{k-1} q'$ với q' lẻ. Khi đó Laplace tiến hành chứng minh bằng quy nạp theo k. Với $k = 1$ thì $q_t(x)$ là đa thức bậc lẻ nên có một nghiệm thực $x_i + x_j + t x_i x_j \in \mathbb{R}$. Vì t chạy trong tập vô hạn $\mathbb{R}$ nên tồn tại $i < j$ và $t_1 \neq t_2$ sao cho $x_i + x_j + t_1 x_i x_j \in \mathbb{R}$ và $x_i + x_j + t_2 x_i x_j \in \mathbb{R}$. Suy ra $x_i x_j, x_i + x_j \in \mathbb{R}$, hay $x^2 - (x_i + x_j)x + x_i x_j$ là nhân tử bậc hai của $p(x)$. Cho $k > 1$. Với lí do tương tự, tồn tại $i < j$ sao cho $x_i + x_j, x_i x_j \in \mathbb{C}$. Suy ra $(x^2 - (x_i + x_j) + x_i x_j)(x^2 - (\overline{x_i + x_j}) + \overline{x_i x_j})$ là đa thức bậc 4 với hệ số thực, trong đó ta kí hiệu $\overline{z}$ là số phức liên hợp của z. Rõ ràng đa thức bậc 4 này là ước của $p(x)$. Do đó áp dụng kết quả của Euler cho đa thức bậc 4, đa thức $(x^2 - (x_i + x_j) + x_i x_j)(x^2 - (\overline{x_i + x_j}) + \overline{x_i x_j})$ có thể phân tích được thành tích của hai đa thức bậc hai với hệ số thực. Do đó $p(x)$ có nhân tử bậc hai với hệ số thực.

2.5 Đóng góp của Carl Friedrich Gauss

Carl Friedrich Gauss (1777-1855) là một nhà Toán học, nhà Vật lí học, Địa cầu học người Đức. Gauss được xem là nhà toán học thiên tài nhất trong thời đại của Ông. Người đầu tiên chứng minh Định lí Cơ bản của Đại số thuộc về D'Alembert, nhưng chứng minh hợp lí và hoàn chỉnh đầu tiên cho định lí này lại thuộc về Gauss. Trong suốt 50 năm, từ 1799 đến 1849, Ông đã đưa ra ít nhất 4 chứng minh khác nhau cho Định lí cơ bản của Đại số. Chứng minh đầu tiên được viết trong luận án tiến sĩ của Gauss vào năm 1799, khi Ông tròn 22 tuổi, trong đó có chứa đựng những phê phán về những chứng minh trước đó của D'Alembert và Euler. Ông

cho rằng các chứng minh này là chưa hợp lí bởi vì họ đã giả thiết trước rằng nghiệm của đa thức là những số phức. Tuy nhiên chứng minh năm 1799 của Gauss vẫn có những lập luận chưa rõ (mãi đến năm 1920 mới được hoàn chỉnh) và bản thân Gauss cũng không thỏa mãn. Năm 1816, Gauss công bố hai chứng minh khác của Định lí, trong đó chứng minh thứ nhất mang tính kĩ thuật và hầu như dùng công cụ đại số, chứng minh thứ hai đơn giản hơn và dùng công cụ giải tích. Năm 1849, trước khi mất vài năm, Gauss đã công bố chứng minh thứ tư cho Định lí và chứng minh này tương tự như chứng minh thứ nhất năm 1799.

Hai chứng minh quan trọng nhất của Gauss là chứng minh thứ nhất công bố năm 1799 và chứng minh thứ ba năm công bố năm 1816. Dưới đây, chúng ta trình bày tóm tắt hai chứng minh này.

2.5.1. Tóm tắt chứng minh thứ nhất. Năm 1799, Gauss công bố chứng minh thứ nhất cho Định lí cơ bản của Đại số, tuy nhiên chứng minh này chưa đầy đủ. Gauss xét đa thức $p(x) = x^m + Ax^{m-1} + \ldots + Lx + m$ với hệ số thực. Thay $x = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ vào đa thức rồi tách phần thực và phần ảo:

$$U = r^m \cos m\varphi + Ar^{m-1}\cos(m-1)\varphi + \ldots + Lr\cos\varphi + M$$
$$T = r^m \sin m\varphi + Ar^{m-1}\sin(m-1)\varphi + \ldots + Lr\sin\varphi.$$

Gauss đã chứng minh trực tiếp rằng U và T đồng thời bằng 0 nếu và chỉ nếu $p(x)$ là bội của $x \pm r$ hoặc $p(x)$ là bội của $x^2 - 2xr\cos\varphi + r^2$. Tiếp theo, Gauss đã coi $U = 0$ và $T = 0$ như những đường cong đại số bậc m trong hệ toạn độ cực r và φ, vẽ trong mặt phẳng với các toạ độ $(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$. Để chứng minh Định lí, Gauss muốn chỉ ra rằng tồn tại một giao điểm của hai đường cong này. Để tìm giao điểm của hai đường cong $T = 0$ và $U = 0$, Gauss đã nghiên cứu các giao điểm của hai đường cong này trong một đường tròn tâm là gốc tọa độ, bán kinh

R và chứng minh rằng khi R đủ lớn, có đúng $2m$ giao điểm của đường tròn với đường cong $T = 0$ và $2m$ giao điểm của đường tròn với đường cong $U = 0$ và mỗi giao điểm của đường tròn với $U = 0$ nằm giữa hai giao điểm của đường tròn với $T = 0$. Để chỉ ra điều này, ngày nay chúng ta thường dùng đến các đại lượng vô cùng lớn, nhưng Gauss đã đưa ra một chứng minh rất tài tình mà không cần dùng đến khái niệm giới hạn. Trong bước tiếp theo, Gauss chỉ ra rằng $4m$ điểm giao này là thay đổi rất ít khi R thay đối ít (theo ngôn ngữ ngày nay chúng ta nói chúng là những hàm liên tục theo biến R, nhưng khái niệm liên tục thời đó không được phổ biến). Đến đây, bằng một chứng minh rất trực quan hình học, Gauss kết luận rằng tồn tại giao điểm của hai đường cong nằm trong đường tròn. Từ đó Ông chỉ ra sự tồn tại giao điểm của hai đường cong $T = 0$ và $U = 0$, Định lí được chứng minh.

2.5.2. Tóm tắt chứng minh thứ ba. Năm 1816, Gauss công bố chứng minh thứ ba cho Định lí cơ bản của Đại số. Chứng minh này khá đơn giản và là một chứng minh hoàn chỉnh. Ông xét đa thức với hệ số thực $p(x) = x^m + Ax^{m-1} + \ldots + Lx + m$. Thay $x = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ vào đa thức rồi tách phần thực và phần ảo:

$$u = r^m \cos m\varphi + Ar^{m-1}\cos(m-1)\varphi + \ldots + Lr\cos\varphi + M;$$
$$t = r^m \sin m\varphi + Ar^{m-1}\sin(m-1)\varphi + \ldots + Lr\sin\varphi.$$

Coi u và t như những hàm theo φ. Ông giới thiệu đạo hàm của hai hàm (theo biến φ) này như sau:

$$t' = mr^m \cos m\varphi + (m-1)Ar^{m-1}\cos(m-1)\varphi + \ldots + Lr\cos\varphi;$$
$$u' = mr^m \sin m\varphi + (m-1)Ar^{m-1}\sin(m-1)\varphi + \ldots + Lr\sin\varphi.$$

Xét $tt' + uu'$ như một hàm theo r. Khi đó

$$tt' + uu' = mr^{2m}(\cos^2 m\varphi + \sin^2 m\varphi) + g(r) = mr^{2m} + g(r),$$

trong đó $g(r)$ là đa thức bậc thấp hơn $2m$. Do đó Gauss coi mr^{2m} là *thành phần chính* của $tt' + uu'$. Từ đó Gauss kết luận rằng khi r lớn, $tt' + uu'$ là dương. Gauss lại tiếp tục giới thiệu các đạo hàm bậc hai của t và u theo biến φ, kí hiệu là $-t''$ và u''

$$t'' = m^2 r^m \sin m\varphi + \ldots + Lr \sin \varphi;$$
$$u'' = m^2 r^m \cos m\varphi + \ldots + Lr \cos \varphi.$$

Như đã chỉ ra trong chứng minh thứ nhất, để chứng tỏ rằng $p(x)$ có nghiệm phức, ta cần chứng minh sự tồn tại giao điểm $(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ của hai đường cong $t = 0$ và $u = 0$. Giả sử không tồn tại giao điểm của hai đường cong $t = 0$ và $u = 0$. Khi đó $u^2 + t^2 > 0$ với mọi r và φ. Vì thế hàm

$$y = \frac{(t^2+u^2)(tt''+uu'') + (tu'-ut')^2 - (tt'+uu')^2}{r(t^2+u^2)^2}$$

luôn nhận giá trị hữu hạn với mọi $r \neq 0$. Tiếp theo, với $r = R$ đủ lơn (sao cho $tt' + uu'$ dương) Gauss xét tích phân kép

$$\omega = \int_0^{360^0} \int_0^R y dr d\varphi$$

Chú ý rằng tích phân kép không phụ thuộc vào thứ tự lấy tích phân. Trước hết, lấy nguyên hàm theo φ ta có $\int y d\varphi = \dfrac{tu' = ut'}{r(t^2+u^2)}$. Vì mỗi thành phần của hàm $\dfrac{tu' = ut'}{r(t^2+u^2)}$ đều chứa $\sin k\varphi$ hoặc $\cos k\varphi$ với k là số tự nhiên nên ta dễ dàng nhận thấy $\dfrac{tu' = ut'}{r(t^2+u^2)}$ có giá trị bằng nhau tại $\varphi_1 = 0$ và $\varphi_2 = 360^0$. Suy ra $\omega = 0$. Tuy nhiên, khi lấy nguyên hàm theo r ta lại có $\int y dr = \dfrac{tt' = uu'}{t^2+u^2}$. Thay $r = 0$ vào t' và u' ta được $t'(0) = 0 = u'(0)$. Nhưng theo lập luận ở trên, khi R lớn thì $tt' + uu'$ dương. Do đó lấy tích phân từ 0 đến R ta được ω là số dương, điều này

là vô lí. Vậy, luôn tồn tại giao điểm của hai đường cong $t = 0$ và $u = 0$, tức là đa thức $p(x)$ có nghiệm.

2.5.3. Kết luận. Việc đưa ra một chứng minh hoàn chỉnh cho Định lí cơ bản của Đại số đã thách thức các nhà toán học khoảng gần 100 năm. Chứng minh được công bố đầu tiên thuộc về Jean le Rond D'Alembert năm 1746. Tiếp theo là chứng minh của Leonhard Euler năm 1749, chứng minh của Pierre Simon Laplace năm 1795, chứng minh của Carl Friedrich Gauss năm 1799. Các chứng minh này dù ít hay nhiều vẫn còn những lập luận không chặt chẽ. Mãi đến năm 1816, Carl Friedrich Gauss mới đưa ra được một chứng minh tài tình và hoàn chỉnh cho Định lí (mà chúng ta đã trình bày tóm tắt trong Mục 2.5.2). Sau đó, nhiều nhà toán học vẫn tiếp tục đưa ra các chứng minh khác nhau cho Định lí này. Ngay cả Carl Friedrich Gauss, chỉ vài năm trước khi mất, năm 1849, Ông vẫn còn đưa ra một chứng minh khác cho Định lí.

Chương 3

Một số chứng minh Định lí cơ bản của Đại số

Trong chương này, chúng tôi trình bày một số chứng minh Định lí cơ bản của Đại số.

3.1 Chứng minh dùng công cụ đại số

Để chứng minh Định lí, ta cần có các kết quả sau:

3.1.1. Bổ đề. *Các phát biểu sau là đúng*

(i) Mỗi đa thức bậc lẻ với hệ số thực đều có một nghiệm thực.

(ii) Mỗi đa thức bậc hai với hệ số phức đều có hai nghiệm phức.

(iii) Nếu $p(x)$ là đa thức với hệ số thực thì tồn tại một trường E sao cho $p(x)$ phân tích được thành các nhân tử tuyến tính với hệ số trong E.

3.1.2. Chú ý. (i) Nhờ tính liên tục của hàm đa thức, ta có tính chất (i) trong bổ đề trên. Vì thế chứng minh Định lí cơ bản của Đại số mà chúng ta trình bày sau đây chủ yếu dùng công cụ đại số, nhưng không phải là một chứng minh thuần túy đại số.

(ii) Trường E cực tiểu có tính chất (iii) của bổ đề trên được gọi là trường phân rã của đa thức $p(x)$. Sự tồn tại duy nhất (sai khác một đẳng

cấu) của trường phân rã của một đa thức được trình bày trong phần phụ lục ở cuối luận văn này.

Tiếp theo chúng ta cần chuẩn bị một số kiến thức về đa thức đối xứng. Trong tiết này ta luôn giả thiết $K \subseteq \mathbb{C}$ là một trường. Một biểu thức có dạng $x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$ được gọi là một *đơn thức* của n biến $x_1, \dots, x_n$ với bậc tổng thể là $i_1 + \dots + i_n$. Một biểu thức có dạng $rx_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$ với $r \in K$ được gọi là một *từ* đồng dạng với đơn thức $x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$. Hai từ được gọi là *đồng dạng* nếu chúng cùng đồng dạng với một đơn thức. Một *đa thức* $f(x_1, \dots, x_n)$ của n biến $x_1, \dots, x_n$ với hệ số trong K là một tổng $\sum_{(i_1,\dots,i_n)\in\mathbb{N}^n} r_{i_1\dots i_n} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$ của hữu hạn từ không đồng dạng.

3.1.3. Định nghĩa. Kí hiệu S_n là tập các song ánh từ tập $\{1, 2, \dots, n\}$ đến chính nó. Ta nói $f(x_1, \dots, x_n)$ là *đa thức đối xứng* nếu

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n)})$$

với mọi $\pi \in S_n$.

Chẳng hạn, các đa thức sau đây là đối xứng, gọi là các *đa thức đối xứng sơ cấp*.

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= \sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + \dots + x_n \\
\sigma_2 &= \sum_{i<j} x_i x_j = x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{n-1}x_n \\
&\dots\dots \\
\sigma_n &= x_1x_2 \dots x_n.
\end{aligned}$$

Tiếp theo ta xét quan hệ thứ tự từ điển đối với các đơn thức: Cho $u = x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n}$ và $v = x_1^{b_1} \dots x_n^{b_n}$, ta định nghĩa $u < v$ nếu tồn tại chỉ số i sao cho $a_i < b_i$ và $a_k = b_k$ với mọi $k < i$. Với mỗi đa thức f ta kí hiệu

$\mathrm{In}(f)$ là từ lớn nhất trong các từ của f và gọi là *từ dấu* của f. Dễ thấy rằng $\mathrm{In}(fg) = \mathrm{In}(f)\,\mathrm{In}(g)$ với mọi f, g.

3.1.4. Bổ đề. *Nếu f là đa thức đối xứng thì tồn tại duy nhất đa thức φ sao cho $f(x_1, \ldots, x_n) = \varphi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$.*

Chứng minh. Giả sử $\mathrm{In}(f) = ax_1^{a_1} \ldots x_n^{a_n}$. Cho $i \geq 1$. Nếu ta thay x_i bởi x_{i+1} và thay x_{i+1} bởi x_i, còn giữ nguyên các x_k khác trong đa thức f thì từ cao nhất $\mathrm{In}(f)$ của f trở thành từ $ax_1^{a_1} \ldots x_i^{a_{i+1}} x_{i+1}^{a_i} \ldots x_n^{a_n}$. Vì f là đối xứng nên từ này cũng là một từ của f và do đó nó không thể lớn hơn $\mathrm{In}(f)$. Vì thế ta có $a_i \geq a_{i+1}$. Suy ra $a_1 \geq \ldots \geq a_n$. Dễ thấy từ dấu của đa thức $\sigma_1^{a_1-a_2}\sigma_2^{a_2-a_3} \ldots \sigma_{n-1}^{a_{n-1}-a_n}\sigma_n^{a_n}$ là $x_1^{a_1} \ldots x_n^{a_n}$. Đặt

$$f_1 = f - a\sigma_1^{a_1-a_2}\sigma_2^{a_2-a_3} \ldots \sigma_{n-1}^{a_{n-1}-a_n}\sigma_n^{a_n}.$$

Khi đó $\mathrm{In}(f_1) < \mathrm{In}(f)$. Rõ ràng $\sigma_1^{a_1-a_2}\sigma_2^{a_2-a_3} \ldots \sigma_{n-1}^{a_{n-1}-a_n}\sigma_n^{a_n}$ là đa thức đối xứng. Vì thế f_1 là đa thức đối xứng. Giả sử $\mathrm{In}(f_1) = bx_1^{b_1} \ldots x_n^{b_n}$. Tương tự như chứng minh trên ta có $b_1 \geq \ldots \geq b_n$. Hơn nữa, từ dấu của đa thức $\sigma_1^{b_1-b_2}\sigma_2^{b_2-b_3} \ldots \sigma_{n-1}^{b_{n-1}-b_n}\sigma_n^{b_n}$ chính là $x_1^{b_1} \ldots x_n^{b_n}$. Cứ tiếp tục quá trình trên, vì $\mathrm{In}(f) > \mathrm{In}(f_1) > \ldots$ nên các bộ $(b_1, \ldots, b_n), \ldots$ đều thoả mãn tính chất $b_i, \ldots \leqslant a_1$ với mọi $i = 1, \ldots, n$. Nhận xét rằng chỉ có nhiều nhất n^{a_1+1} bộ số tự nhiên $(d_1, \ldots, d_n)$ thoả mãn tính chất $d_i \leqslant a_1$ với mọi $i = 1, \ldots, n$. Do đó qúa trình này phải kết thúc sau một số hữu hạn bước. Vì vậy đến bước thứ s nào đó ta có

$$f_{s-1} - d\sigma_1^{d_1-d_2}\sigma_2^{d_2-d_3} \ldots \sigma_{n-1}^{d_{n-1}-d_n}\sigma_n^{d_n} = 0.$$

Do đó ta có

$$f = a\sigma_1^{a_1-a_2}\sigma_2^{a_2-a_3} \ldots \sigma_{n-1}^{a_{n-1}-a_n}\sigma_n^{a_n} + b\sigma_1^{b_1-b_2}\sigma_2^{b_2-b_3} \ldots \sigma_{n-1}^{b_{n-1}-b_n}\sigma_n^{b_n}$$

$$+ \ldots + d\sigma_1^{d_1-d_2}\sigma_2^{d_2-d_3} \ldots \sigma_{n-1}^{d_{n-1}-d_n}\sigma_n^{d_n},$$

tức là ta đã biểu diễn được đa thức f dưới dạng một đa thức của $\sigma_1, \dots \sigma_n$.

Giả sử có hai đa thức φ_1 và φ_2 khác nhau sao cho

$$f(X_1, \dots, X_n) = \varphi_1(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = \varphi_2(\sigma_1, \dots, \sigma_n).$$

Đặt $\varphi(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = \varphi_1(\sigma_1, \dots, \sigma_n) - \varphi_2(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$. Khi đó φ là đa thức khác không của $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ và sau khi thay $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ bởi các biểu thức của chúng qua $x_1, \dots, x_n$ vào φ ta nhận được đa thức không. Chúng ta sẽ chỉ ra điều này là vô lí. Rõ ràng nếu $a\sigma_1^{k_1} \dots, \sigma_n^{k_n}$ và $b\sigma_1^{l_1} \dots, \sigma_n^{l_n}$ là hai hạng tử của $\varphi(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ sao cho $(k_1, \dots, k_n) \neq (l_1, \dots, l_n)$ thì khi thay $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ bởi các biểu thức của chúng qua $x_1, \dots, x_n$ vào hai hạng tử này, ta sẽ nhận được hai đa thức của $x_1, \dots, x_n$ mà hai từ dấu của chúng không đồng dạng. Với mỗi hạng tử của $\varphi(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$, ta tìm từ dấu của đa thức của $x_1, \dots, x_n$ thu được từ hạng tử này bằng cách thay $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ bởi các biểu thức của chúng qua $x_1, \dots, x_n$. Khi đó từ dấu lớn nhất trong các từ dấu vừa tìm được sẽ không đồng dạng với bất cứ một từ nào khác. Vì vậy, sau khi thay $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ bởi các biểu thức của chúng qua $x_1, \dots, x_n$ vào đa thức $\varphi(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ ta sẽ nhận được đa thức khác không, mâu thuẫn. □

3.1.5. Hệ quả. *Cho $f(x) \in K[x]$ là một đa thức một biến x bậc n với hệ số cao nhất bằng* 1. *Giả sử f có n nghiệm $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ trong một mở rộng nào đó của K. Giả thiết rằng $g(x_1, \dots, x_n)$ là đa thức đối xứng. Khi đó $g(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in K$.*

Chứng minh. Theo Bổ đề 3.1.4, tồn tại đa thức $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ sao cho $g(x_1, \dots, x_n) = \varphi(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$. Vì thế

$$g(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \varphi(\sigma_1(\alpha_1, \dots, \alpha_n), \dots, \sigma_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n)).$$

Theo công thức Viet ta suy ra

$$g(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \varphi(-a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, (-1)^k a_{n-k}, \dots, (-1)^n a_0).$$

Do $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_0 \in K$ nên ta suy ra $g(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in K$. □

Bây giờ chúng ta có thể đưa ra một chứng minh cho Định lí.

3.1.6. Định lí cơ bản của Đại số. *Cho $p(x)$ là một đa thức với hệ số phức có bậc $t > 0$. Khi đó $p(x)$ có ít nhất một nghiệm phức.*

Chứng minh. Trước hết ta khẳng định rằng chỉ cần chứng minh Định lí cho trường hợp đa thức với hệ số thực là đủ.

Thật vậy, giả sử $p(x) = (a_t + b_t i)x^t + \ldots + (a_1 + b_1 i)x + (a_0 + b_0 i)$. Đặt $\overline{p(x)} = (a_t - b_t i)x^t + \ldots + (a_1 - b_1 i)x + (a_0 - b_0)$. Khi đó

$$p(x)\overline{p(x)} = (a_t x^t + \ldots + a_1 x + a_0)^2 + (b_t x^t + \ldots + b_1 x + b_0)^2$$

là một đa thức với hệ số thực và nếu $z = a + b_i$ là một nghiệm của $p(x)\overline{p(x)}$ thì hoặc z cũng là nghiệm của $p(x)$ hoặc $\overline{z} = a - b_i$ là nghiệm của $p(x)$. Bước tiếp theo là chứng minh Định lí bằng quy nạp theo n, trong đó $p(x)$ là đa thức với hệ số thực có bậc là $t = 2^n(2m+1)$. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả thiết $p(x)$ có hệ số cao nhất bằng 1. Cho $n = 0$. Khi đó $p(x)$ có bậc $2m+1$ là số lẻ. Do đó theo Bổ đề 3.1.1(i), $p(x)$ có nghiệm thực. Giả sử đã chứng minh Định lí cho trường hợp $n < N$. Ta chứng minh cho trường hợp bậc của đa thức $p(x)$ là $d = 2^N(2m+1)$. Theo Bổ đề 3.1.1(ii), tồn tại một trường E sao cho $p(x)$ có sự phân tích $p(x) = (x - r_1)\ldots(x - r_d)$ với $r_1, \ldots, r_d \in E$. Đặt $s = \dfrac{d(d-1)}{2}$. Với mỗi $k = 1, \ldots, s+1$, đặt

$$q_k(x) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant d} (x - r_i - r_j - k r_i r_j).$$

Biểu diễn đa thức $q_k(x)$ thành tổng của các từ không đồng dạng. Khi đó các hệ số của $q_k(x)$ là những đa thức đối xứng của các nghiệm r_i. Vì các hệ số của $p(x)$ là các số thực nên theo Hệ quả 3.1.5, các hệ số của $q_k(x)$ đều là số thực, tức là $q_k(x)$ là đa thức với hệ số thực.

Rõ ràng số cách chọn cặp (i,j) sao cho $1 \leqslant i < j \leqslant d$ là số cách chọn một tập con gồm 2 phần tử i,j từ tập $\{1,\ldots,d\}$. Do đó bậc của $q_k(x)$ là $s = d(d-1)/2$. Dễ thấy $s = 2^{N-1}(2m+1)(2^n(2m+1)-1)$. Vì thế, theo giả thiết quy nạp, mỗi $q_k(x)$ có một nghiệm phức. Từ công thức của $q_k(x)$, ta thấy rằng mỗi nghiệm của $q_k(x)$ phải có dạng $r_i + r_j + kr_ir_j$ với $i < j$ nào đó. Như vậy, mỗi đa thức trong số $s+1$ đa thức $q_k(x)$ đều có một nghiệm phức, mỗi nghiệm phức dược tính theo một cặp $i < j$ và chỉ có tất cả s cặp $i < j$. Theo Nguyên lí nhốt chim bồ câu, tồn tại một cặp $i < j$ sao cho có hai số nguyên $k_1 \neq k_2$ để $r_i + r_j + k_1r_ir_j$ là nghiệm phức của $q_{k_1}(x)$ và $r_i + r_j + k_2r_ir_j$ là nghiệm phức của $q_{k_2}(x)$. Đặt $u = r_i + r_j + k_1r_ir_j$ và $v = r_i + r_j + k_2r_ir_j$. Khi đó r_i, r_j là hai nghiệm của đa thức bậc hai $x^2 + bx + c$, trong đó $b = -\dfrac{k_2u + k_1v}{k_1 + k_2}$ và $c = \dfrac{u - v}{k_1 - k_2}$. Theo Bổ đề 3.1.1(ii), r_i, r_j là các số phức. □

3.2 Chứng minh dùng công cụ giải tích phức

Trước hết chúng ta nhắc lại một số khái niệm trong giải tích phức. Một hàm phức $f(z)$ được gọi là *giải tích* trên một tập con mở $M \subseteq \mathbb{C}$ nếu $f(z)$ là khả vi phức tại mọi điểm trên M. Ta nói $f(z)$ là *hàm nguyên* nếu $f(z)$ là khả vi trên toàn bộ $\mathbb{C}$. Hàm phức $f(z)$ được gọi là *bị chặn* trên miền $D \subseteq \mathbb{C}$ nếu tồn tại một số thức dương r sao cho $|f(z)| \leqslant r$ với mọi $z \in D$.

3.2.1. Chứng minh thông qua Định lí của Joseph Liouville

Ta có thể dùng Định lí Joseph Liouville (1847) để chứng minh Định lí cơ bản của Đại số (xem [MF, Trang 2]). Trước hết, chúng ta nhắc lại kết quả này.

3.2.1.1. Định lí (Liouville). *Nếu $f(z)$ là giải tích và bị chặn trên mặt*

phẳng phức thì $f(z)$ là hàm hằng.

Bây giờ ta chứng minh Định lí cơ bản của Đại số.

3.2.1.2. Định lí *Cho $p(z)$ là một đa thức với hệ số phức có bậc $n > 0$. Khi đó $p(z)$ có n nghiệm phức.*

Chứng minh. Ta chỉ cần chứng minh $p(z)$ có một nghiệm phức là đủ. Thật vậy, giả sử z_1 là một nghiệm của $p(z)$. Nếu $n = 1$ thì $p(z)$ có 1 nghiệm, kết quả đúng với $n = 1$. Giả sử kết quả đã đúng cho trường hợp bậc của đa thức là $n - 1$. Ta chứng minh cho trường hợp $p(z)$ có bậc n. Bằng phép chia $p(z)$ cho $(z - z_0)$ ta viết được $p(z) = (z - z_0)g(z)$, trong đó $g(z)$ có bậc $n-1$. Theo giả thiết quy nạp, $g(z)$ có $n-1$ nghiệm phức $z_2, \ldots, z_n$. Do đó $p(z)$ có n nghiệm phức $z_1, \ldots, z_n$.

Giả sử $p(z)$ không có nghiệm phức. Khi đó $p(z) \neq 0$ với mọi $z \in \mathbb{C}$. Ta chứng minh $p(z)$ bị chặn trên $\mathbb{C}$. Viết

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0.$$

Trước hết, ta khẳng định khi $|z| \to \infty$ thì $|p(z)| \to \infty$. Thật vậy, ta có

$$p(z) = z^n \Big(a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \ldots + \frac{a_0}{z^n} \Big).$$

Do đó

$$|p(z) = |z^n||a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \ldots + \frac{a_0}{z^n}|$$

Vì $a_n \neq 0$ nên $|z^n||a_n| \to \infty$ khi $|z| \to \infty$. Do đó $|p(z)| \to \infty$ khi $|z| \to \infty$, khẳng định được chứng minh. Theo khẳng định trên, lấy $0 < r \in \mathbb{R}$, r đủ lớn cố định, rõ ràng $1/p(z)$ bị chặn với mọi $z \in \mathbb{C}$ thỏa mãn $|z| > r$. Vì thế $1/p(z)$ liên tục nên $|z| \leqslant r$. Vì thế $1/p(z)$ bị chặn trong miền $|z| \leqslant r$. Vậy, $1/p(z)$ bị chặn trên toàn bộ mặt phẳng phức.

Vì $p(z) \neq 0$ với mọi $z \in \mathbb{C}$ nên $1/p(z)$ xác định trên $\mathbb{C}$. Do đó $1/p(z)$ khả vi trên $\mathbb{C}$, tức là nó giải tích trên $\mathbb{C}$. Theo Định lí Liouville, $p(z)$ là

hàm hằng, điều này là vô lí với giả thiết bậc của $p(z) = n > 0$. Vậy $p(z)$ có ít nhất một nghiệm trong $\mathbb{C}$. □

3.2.2. Chứng minh thông qua Định lí Eugene Rouche

Để chứng minh Định lí cơ bản của Đại số, ta có thể sử dụng Định lí của E. Rouche (xem [MF, Trang 3). Trước hết ta nhắc lại Định lí của Rouche.

3.2.2.1. Định lí (Rouche) *Cho miền $M \subseteq \mathbb{C}$ với biên của M là $B(M)$. Nếu $f(z)$ và $h(z)$ là các hàm giải tích trong và trên miền M sao cho $|h(z)| < |f(z)|$ trên biên $B(M)$ thì $f(z)$ và $f(z) + h(z)$ có cùng số nghiệm trên miền M.*

Bây giờ ta chứng minh Định lí cơ bản của Đại số.

3.2.2.2. Định lí. *Cho $p(z)$ là một đa thức với hệ số phức có bậc $n > 0$. Khi đó $p(z)$ có n nghiệm phức.*

Chứng minh. Cho $p(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$ là một đa thức với hệ số phức bậc $n > 0$. Ta cần chứng minh $p(z)$ có nghiệm phức. Đặt $f(z) = a_n z^n$ và

$$h(z) = p(z) - f(z) = a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0.$$

Lấy số thực $r > 0$. Trên đường tròn $|z| = r$ ta có

$$|f(z)| = |a_n z^n| = |a_n||z|^n = |a_n| r^n; \text{ và}$$

$|h(z)| = |a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0| \leqslant |a_{n-1}| r^{n-1} + \ldots + |a_1| r + |a_0|$. Vì $|a_n| \neq 0$ nên ta có thể đặt

$$K = \frac{|a_{n-1}| + \ldots + |a_1| + |a_0|}{|a_n|}.$$

Chọn $r > \max\{1, K\}$. Khi đó

$$\begin{aligned} |h(z)| &\leqslant |a_{n-1}|r^{n-1} + \ldots + |a_1|r + |a_0| \\ &\leqslant \Big(|a_{n-1}| + \ldots + |a_1| + |a_0|\Big)r^{n-1} \\ &< (r|a_n|)r^{n-1} = |a_n|r^n = |f(z)|. \end{aligned}$$

Vì thế $|h(z)| < |f(z)|$ với mọi z nằm trên đường tròn tâm là gốc tọa độ, bán kính r. Chú ý rằng đường tròn $|z| = r$ chính là biên của miền $M := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant r\}$. Rõ ràng $f(z) = a_n z^n$ có n nghiệm phức (thực ra $f(z)$ có một nghiệm $z = 0$ với bội n). Do đó theo Định lí Rouche, $p(z) = f(z) + h(z)$ có n nghiệm phức. □

3.2.3. Chứng minh thông qua bán kính hội tụ

Cho $p(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$ là đa thức với hệ số phức có bậc n dương. Nếu $a + 0 = 0$ thì $p(z)$ có nghiệm $z = 0$. Do đó ta có thể giả thiết $a_0 \neq 0$. Đặt $f(z) = 1/p(z)$. Giả sử $p(z) \neq 0$ với mọi $z \in \mathbb{C}$. Khi đó luôn tồn tại khai triển tại mọi điểm của $f(z)$ thành chuỗi

$$f(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots$$

Trước hết, ta khẳng định luôn tồn tại hai số phức $c, r \in \mathbb{R}$ sao cho $|b_k| > cr^k$ với nhiều vô hạn k. Thật vậy, rõ ràng $1 = p(z)f(z)$. Đồng nhất hệ số tự do của hai vế ta được $a_0 b_0 = 1$. Suy ra $|b_0| = 1/|a_0|$. Do đó luôn tồn tại $c < 1/|a_0|$ ta có kết quả với $k_0 = 0$. Giả sử kết quả đã đúng cho một số k, tức là $|b_k| > cr^k$. Ta cần chứng minh tồn tại một số k' tiếp theo để $|b_{k'}| > cr^{k'}$. Giả sử điều này không đúng, tức là k là số lớn nhất có tính chất $|b_k| > cr^k$. Khi đó hệ số của z^{n+k} trong $p(z)f(z)$ là $a_0 b_{n+k} + a_1 b_{n+k-1} + \ldots + a_n b_k$, vì thế đồng nhất hệ số của z^{n+k} trong đẳng thức $1 = p(z)f(z)$ ta có

$$a_0 b_{n+k} + a_1 b_{n+k-1} + \ldots + a_n b_k = 0.$$

Suy ra $a_0b_{n+k} + a_1b_{n+k-1} + \ldots = -a_nb_k$. Vì môđun của tổng các số phức không vượt quá tổng các mô đun của các số phức đó và với mọi $i = 0, \ldots, n-1$ ta có

$$|a_ib_{k+n-i}| = |a_i||b_{k+n-i}| \leqslant |a_i|cr^{k+n-i}.$$

Từ đó ta dễ dàng suy ra

$$|a_0|r^n + |a_1|r^{n-1} + \ldots + |a_{n-1}|r \leqslant |a_n|.$$

Nếu $r \leqslant \min\left\{1, \dfrac{|a_n|}{|a_0 + \ldots + |a_{n-1}|}\right\}$ thì ta có

$$|b_k| = \frac{|a_0b_{k+n} + \ldots + a_{n-1}b_{k+1}|}{|a_n|} \leqslant \frac{|a_0b_{k+n}| + \ldots + |a_{n-1}b_{k+1}|}{|a_n|} \leqslant cr^k$$

với r đủ nhỏ. Điều này là vô lí. Đặt $z = 1/r$. Ta có

$$|b_kz^k| = \frac{|b_k|}{r^k} > c$$

với vô hạn số tự nhiên k. Do đó chuỗi $b_0 + b_1z + b_2z^2 + \ldots$ không hội tụ, điều này là vô lí. Vậy, tồn tại $z \in \mathbb{C}$ để $p(z) = 0$.

3.3 Chứng minh dùng công cụ tôpô

Để chứng minh Định lí cơ bản của Đại số, ta có thể sử dụng công cụ tôpô và Định lí của Charles E. Picard (xem [MF, Trang 3,4). Trước hết ta nhắc lại Nguyên lí Bolzano - Weierstrasss về dãy số trong một miền bị chặn (đây là một tính chất tôpô).

3.3.1. Bổ đề. (Nguyên lí Bolzano - Weierstrasss). *Mỗi dãy $\{z_n\}$ các số phức trong một miền bị chặn của mặt phẳng phức đều trích ra được một dãy con hội tụ.*

Tiếp theo, ta nhắc lại Định lí của Picard.

3.3.2. Bổ đề. (Định lí Picard). *Cho $f(z)$ là một hàm nguyên (tức là $f(z)$ khả vi trên toàn bộ mặt phẳng phức). Giả sử tồn tại $z_1 \neq z_2$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ sao cho $f(z) \neq z_1, f(z) \neq z_2$ với mọi $z \in \mathbb{C}$ thì $f(z)$ là hàm hằng.*

Bây giờ ta chứng minh Định lí cơ bản của Đại số.

3.3.3. Định lý. *Cho $p(z)$ là một đa thức với hệ số phức có bậc $n > 0$. Khi đó $p(z)$ có ít nhất một nghiệm phức.*

Chứng minh. Rõ ràng $p(z)$ là khả vi trên $\mathbb{C}$. Giả sử $p(z)$ không có nghiệm phức. Khi đó $p(z) \neq 0$ với mọi $z \in \mathbb{C}$. Đặt $z_1 = 0$. Ta có $p(z) \neq z_1$ với mọi $z \in \mathbb{C}$. Ta sẽ chứng minh tồn tại điểm $z_2 \neq z_1$ sao cho $p(z) \neq z_2$ với mọi $z \in \mathbb{C}$. Giả sử với mỗi $k \in \mathbb{N}$ cho trước, tồn tại $z_k \in \mathbb{C}$ sao cho $p(z_k) = 1/k$. Chú ý rằng $|p(z)| \to \infty$ khi $|z| \to \infty$ (xem chứng minh Định lí ở Tiết 3.1). Do đó tồn tại số thực r dương đủ lớn sao cho $|p(z)| > 1$ với mọi $z \notin M$, trong đó M là hình tròn tâm là gốc tọa độ, bán kính r. Vì $|p(z_k)| = 1/k \leqslant 1$ với mọi $0 < k \in \mathbb{N}$. Do đó $z_k \in M$ với mọi $k \in \mathbb{N}$. Theo Nguyên lí Bolzano - Weierstrasss, mỗi dãy số phức trong một miền bị chặn đều trích ra được một dãy con hội tụ. Do dãy $\{z_k\} \subseteq M$ và M là miền bị chặn nên tồn tại dãy con $\{z_{n_i}\} \subseteq \{z_k\}$ sao cho $z_{n_i} \to z' \in \mathbb{C}$. Do $p(z)$ là hàm liên tục nên

$$p(z') = \lim_{n_i \to \infty} p(z_{n_i}) = \lim_{n_i \to \infty} 1/n_i = 0.$$

Điều này là mâu thuẫn với giả sử $p(z)$ không có nghiệm phức. Do đó tồn tại $0 < k \in \mathbb{N}$ sao cho $p(z) \neq 1/k$ với mọi $z \in \mathbb{C}$. Chọn $z_2 = 1/k$. Rõ ràng $z_1 = 0 \neq 1/k = z_2$ và $p(z) \neq z_1$, $p(z) \neq z_2$ với mọi $z \in \mathbb{C}$. Theo Định lí Picard, $p(z)$ là hàm hằng, vô lí với giả thiết bậc của $p(z) = n > 0$. Vậy $p(z)$ có ít nhất một nghiệm phức. □

PHẦN PHỤ LỤC

Kiến thức của phần này không phải là mục tiêu chính của luận văn. Tuy nhiên, để người đọc tiện theo dõi, chúng tôi trình bày những khái niệm và kết quả đã nhắc đến trong Chương 2 như số phức và các phép toán, mở rộng trường, trường phân rã, trường đóng đại số. Ngoài ra, chúng tôi cũng đưa vào mục này những thông tin của một số nhà toán học có đóng góp cho Định lí cơ bản của Đại số.

A. Số phức và các phép toán trên trường số phức

4.1.1. Định nghĩa số phức. Số phức là biểu thức có dạng $z = a + bi$ trong đó $a, b \in \mathbb{R}$ và $i^2 = -1$. Ta gọi a là *phần thực* và b là *phần ảo* của z. Số i được gọi là *đơn vị ảo* Kí hiệu tập hợp các số phức là $\mathbb{C}$. Nếu $a = 0$ thì $z = bi$ được gọi là số *thuần ảo*, nếu $b = 0$ thì $z = a$ là số thực. Hai số phức được gọi là *bằng nhau* nếu phần thực và phần ảo của chúng tương ứng bằng nhau, tức là $a + bi = c + di$ khi và chỉ khi $a = c$ và $b = d$. Số phức $z = a - bi$ được gọi là số phức *liên hợp* của $z = a + bi$ và được kí hiệu là $\overline{z}$.

Dễ thấy $z\,\overline{z} = a^2 + b^2$ là một số thực. Chú ý rằng liên hợp của tổng (hiệu, tích, thương) bằng tổng (hiệu, tích, thương) của các liên hợp, tức là $\overline{z \pm z'} = \overline{z} \pm \overline{z'}$, $\overline{z\ z'} = \overline{z}\ \overline{z'}$ và nếu $z' \neq 0$ thì $\overline{\dfrac{z}{z'}} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$.

4.1.2. Phép toán trên số phức. Biểu diễn số phức $z = a + bi$ được gọi là biểu diễn đại số của số phức z. Phép cộng, trừ, nhân và chia các số

phức được thực hiện như sau:

$$(a+bi) \pm (c+di) = (a+c) \pm (b+d)i;$$
$$(a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (bc+ad)i;$$
$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

Tập $\mathbb{C}$ các số phức với phép cộng và phép nhân lập thành một trường chứa trường số thực $\mathbb{R}$, trong đó mỗi số thực a được đồng nhất với một số phức $a + 0i$.

4.1.3. Biểu diễn hình học của số phức. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ vuông góc xOy, mỗi số phức $z = a + bi$ được đồng nhất với điểm $Z(a, b)$. Khi đó tập số phức lấp đầy mặt phẳng và ta gọi đó là *mặt phẳng phức*. Xét góc α tạo bởi chiều dương trục hoành với véc tơ $\overrightarrow{OZ}$ và gọi r là độ dài của véc tơ $\overrightarrow{OZ}$, khi đó

$$z = a + bi = r(\cos\alpha + i\sin\alpha).$$

Ta gọi r là *môđun* của số phức z và ký hiệu là $|z|$. Góc α được gọi là *argument* của z và kí hiệu là $\arg(z)$. Rõ ràng $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$. Biểu diễn $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ được gọi là *biểu diễn lượng giác* của z. Chú ý rằng môđun của một số phức là xác định duy nhất và argument của một số phức là xác định sai khác một bội nguyên lần của 2π, tức là $r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = r'(\cos\alpha' + i\sin\alpha')$ nếu và chỉ nếu $r = r'$ và $\alpha = \alpha' + 2k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

Sau đây là một vài tính chất của môđun: $|z|=|\overline{z}|$; $|z_1|.|z_2| = |z_1|.|z_2|$ và do đó $|z^n| = |z|^n$; $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$.

4.1.4. Lũy thừa và khai căn số phức. Cho hai số phức dưới dạng lượng giác: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $z' = r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi')$. Khi đó $z.z' = r.r'\big(\cos(\varphi+\varphi') + i\sin(\varphi+\varphi')\big)$ và $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{r}{r'}\big(\cos(\varphi-\varphi') + i\sin(\varphi-\varphi')\big)$.

Từ đây ta dễ dàng nâng lên lũy thừa bằng công thức sau (gọi là công thức Moirve):

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

Chú ý rằng mỗi số phức $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ khác 0 đều có đúng n căn bậc n, đó là

$$\omega_k = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi + k2\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + k2\pi}{n})$$

với $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

B. Mở rộng trường, trường phân rã

4.2.1. Định nghĩa. Cho T là một trường. Giả sử K là một trường chứa T. Khi đó ta nói $T \subseteq K$ là một *mở rộng trường*.

4.2.2. Ví dụ. (i) Trường $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ là mở rộng của trường $\mathbb{Q}$.

(ii) Với $T \subseteq \mathbb{C}$ là một trường và $\alpha \in \mathbb{C}$, đặt

$$T(\alpha) = \Big\{\frac{f(\alpha)}{g(\alpha)} \mid f(x), g(x) \in T[x], g(\alpha) \neq 0\Big\}.$$

Khi đó $T(\alpha)$ là trường nhỏ nhất chứa T và α. Ta gọi $T(\alpha)$ là *trường mở rộng của T bằng cách ghép thêm phần tử α*.

(iii) Với $T \subseteq \mathbb{C}$ là một trường và $A \subseteq \mathbb{C}$, kí hiệu $T(A)$ là tập các số nhận được từ T và A bởi các phép toán cộng, trừ, nhân và chia cho các phần tử khác 0. Khi đó $T(A)$ là trường nhỏ nhất chứa T và A. Ta gọi $T(A)$ là *trường mở rộng của T bằng cách ghép thêm tập A*.

4.2.3. Định nghĩa. Cho $T \subseteq K$ là một mở rộng trường. Khi đó K có cấu trúc là T-không gian vectơ. Số chiều của T-không gian vectơ K được gọi là *bậc của mở rộng trường $T \subseteq K$* và được ký hiệu là $[K : T]$.

Chú ý rằng nếu $T \subseteq K \subseteq L$ là một dãy các mở rộng trường thì

$$[L : T] = [L : K][K : T].$$

4.2.4. Định nghĩa. Cho $T \subseteq K$ là một mở rộng trường và $\alpha \in K$. Ta nói α là *đại số trên* T nếu có một đa thức $0 \neq f(x) \in T[x]$ nhận α làm nghiệm. Nếu α không đại số trên T thì ta nói α là *siêu việt* trên T.

Đặt $T[\alpha] = \{f(\alpha) \mid f(x) \in T[x]\}$. Nếu α là đại số trên T thì $T[\alpha]$ là một trường và vì thế $T[\alpha] = T(\alpha)$. Khi α là siêu việt trên T thì $T[\alpha]$ không là trường, trong khi đó $T(\alpha)$ luôn là trường.

4.2.5. Định nghĩa. Cho T là một trường. Đa thức $f(x) \in T[x]$ là *bất khả quy* trên T nếu $\deg f(x) > 0$ và $f(x)$ không là tích của hai đa thức có bậc bé hơn.

Dưới đây là công thức tính bậc của các mở rộng bằng cách ghép thêm một phần tử đại số.

4.2.6. Bổ đề. *Cho $T \subseteq K$ là một mở rộng trường và $\alpha \in K$. Giả sử $L = T(\alpha)$, trong đó α là đại số trên T. Khi đó tồn tại duy nhất một đa thức $p(x) \in T[x]$ bất khả quy nhận α làm nghiệm và có hệ số cao nhất bằng* 1. *Giả sử* $\deg p = m$. *Khi đó* $[L : T] = m$.

4.2.7. Định nghĩa. Cho T là trường.

(i) Cho $f(x) \in T[x]$ là đa thức bậc n. Một trường K cực tiểu chứa T và chứa n nghiệm của $f(x)$ được gọi là *trường phân rã* của $f(x)$ trên T.

(ii) T là *đóng đại số* nếu mỗi đa thức một biến bậc $n > 0$ trên T đều có đúng n nghiệm trong T, mỗi nghiệm tính với số bội của nó.

4.2.8. Mệnh đề. *Cho T là trường. Khi đó*

(i) Mỗi đa thức $f(x) \in T[x]$ đều có một trường phân rã và trường phân rã của $f(x)$ trên T là xác định duy nhất sai khác một đẳng cấu.

(ii) Mỗi trường đều chứa trong một trường đóng đại số.

Theo Định lí cơ bản của Đại số, trường $\mathbb{C}$ là đóng đại số và mỗi đa thức với hệ số hữu tỷ (thực, phức) đều có một trường phân rã trong $\mathbb{C}$.

KẾT LUẬN

Luận văn trình bày lịch sử và một số chứng minh Định lí cơ bản của Đại số. Nội dung chính của luận văn là:

• Trình bày kiến thức chuẩn bị về đa thức với hệ số trên một trường, nghiệm của đa thức phục vụ các diễn giải liên quan trong Chương 2 và Chương 3 của luận văn.

• Trình bày sơ lược lịch sử Định lí cơ bản của Đại số, đặc biệt là các đóng góp quan trọng của một số nhà toán học: Jean le Rond D'Alembert, Leonhard Euler, Pierre Simon Laplace và Carl Friedrich Gauss.

• Đưa ra một số chứng minh quan trọng của Định lí cơ bản của Đại số (dùng công cụ đại số, công cụ giải tích phức, công cụ tô pô).

• Phần phụ lục chứa đựng một số khái niệm về mở rộng trường, trường phân rã của một đa thức, số phức và các phép toán trên trường số phức, đồng thời có hình ảnh một số nhà toán học liên quan đến Định lí cơ bản của Đại số.

Tài liệu tham khảo

[Ba] Christopher Baltus, D'Alembert's proof of the fundamental theorem of algebra, Historia Mathematica, **31** (2004), 414-428.

[Ca] Josep Carrera, The fundamental theorem of algebra before Carl Friedrich Gauss, Publicacions Matemàtiques, **36** (1992), 879-911.

[C] Nguyễn Tự Cường, *Đại số hiện đại, tập 1*, NXB ĐHQGHN, 2001.

[DA] Jean Le Rond D'Alembert, *Recherches sur le calcul integral*, Histoire de l'Acadmie Royale des Sciences et Belles Lettres, anne'e MDCCXLVI, 182-224. Berlin (1746).

[Du] William Dunham, *Euler and the Funcdamental Theorem of Algebra*, The College Mathematics Journal, **22(4)** (1991), 282-293.

[Eu] Leonhard Euler, *Recherches sur les racines imaginaires des équations*, Memoires de l'académie des sciences de Berlin, **5** (1949), 1752, 222-228.

[La] Pierre Simon Laplace, *Lesons de mathématiques donés à l'Ecole normale*, Oeuvres complètes, **14** (1795), 10-177.

[MF] Steven Miller and Dan File, *Fundamental theorem of algebra*, Lecture notes from the Reading Classics, Autumn 2003.