

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN NGỌC TÚ

KHUNG VÀ CƠ SỞ RIESZ

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - Năm 2012

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN NGỌC TÚ

KHUNG VÀ CƠ SỞ RIESZ

Chuyên ngành: TOÁN ỨNG DỤNG
Mã số : 60.46.01.12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
TS. NGUYỄN QUỲNH NGÀ

Thái Nguyên - Năm 2012

Lời cảm ơn

Lời đầu tiên của luận văn tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới TS. Nguyễn Quỳnh Nga đã hướng dẫn và chỉ bảo tận tình trong suốt quá trình làm luận văn. Tác giả cũng xin gửi lời cảm ơn chân thành đến Ban giám hiệu, phòng Đào tạo, khoa Toán - Tin Trường ĐHKH, Đại học Thái Nguyên đã tạo điều kiện thuận lợi trong suốt quá trình học tập tại trường.

Xin chân thành cảm ơn gia đình, bạn bè đồng nghiệp và các thành viên trong lớp cao học toán K4B đã luôn quan tâm, động viên, giúp đỡ tôi trong suốt thời gian học tập và quá trình làm luận văn.

Thái Nguyên, ngày 25 tháng 09 năm 2012.

Tác giả

Nguyễn Ngọc Tú

Mục lục

Lời cảm ơn	i
Mở đầu	1
Nội dung	3
1 Cơ sở	3
1.1 Một số khái niệm và kết quả chuẩn bị	3
1.2 Cơ sở trong không gian Banach	6
1.3 Dãy Bessel trong không gian Hilbert	10
1.4 Cơ sở và hệ song trực giao trong không gian Hilbert . . .	14
1.5 Cơ sở trực chuẩn	18
1.6 Cơ sở Riesz	22
1.7 Một số hạn chế của cơ sở	27
2 Khung trong không gian Hilbert	31
2.1 Khung và các tính chất	31
2.2 Khung và toán tử	38
2.3 Khung và cơ sở	41

2.4	Các đặc trưng của khung	47
2.5	Khung đối ngẫu	52
2.6	Khung và xử lý tín hiệu	57
3	Khung và cơ sở Riesz	61
3.1	Các điều kiện để khung trở thành cơ sở Riesz	61
3.2	Các khung chứa cơ sở Riesz	64
3.3	Sự tồn tại của khung không chứa cơ sở	66
	Kết luận	69
	Tài liệu tham khảo	71

Mở đầu

Cơ sở đóng vai trò thiết yếu trong nghiên cứu các không gian vector cả trong trường hợp hữu hạn chiều cũng như vô hạn chiều. Ý tưởng là giống nhau trong cả hai trường hợp, cụ thể là một họ các phần tử sao cho mọi vector trong không gian được xét có thể biểu diễn một cách duy nhất như một tổ hợp tuyến tính của các phần tử này. Trong không gian vô hạn chiều, tình huống sẽ trở nên phức tạp hơn: chúng ta buộc phải làm việc với chuỗi vô hạn. Có một số khái niệm cơ sở khác nhau trong không gian Hilbert như cơ sở trực chuẩn, cơ sở Schauder, cơ sở Riesz. Tuy nhiên cơ sở có một số hạn chế trong đó hạn chế chính là thiếu đi tính linh hoạt. Trong một số trường hợp các điều kiện để trở thành cơ sở quá mạnh đến mức dường như ta không thể xây dựng được các cơ sở với những tính chất đặc biệt và một sự thay đổi nhỏ trên cơ sở cũng làm cho nó không còn là cơ sở nữa. Một hạn chế khác của cơ sở là thiếu đi tính ổn định đối với các tác động của các toán tử. Những hạn chế vừa đưa ra là một số lý do khiến chúng ta nghiên cứu khái niệm khung mà trong nhiều trường hợp ở đó cơ sở tồn tại nhưng khung vẫn được sử dụng hữu hiệu hơn.

Khái niệm khung được đưa ra năm 1952 bởi Duffin và Schaeffer khi họ nghiên cứu chuỗi Fourier không điều hòa, tức là chuỗi thiết lập từ $\{e^{i\lambda_n x}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ trong đó $\lambda_n \in \mathbb{R}$ hoặc $\lambda_n \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{Z}$. Tuy nhiên phải đến năm 1986 sau bài báo của Daubechies, Grossmann và Meyer thì khung

mới được quan tâm rộng rãi. Khung được sử dụng nhiều trong xử lý tín hiệu, lý thuyết mật mã, lý thuyết lượng tử...

Luận văn bao gồm phần mở đầu, ba chương, kết luận và danh mục các tài liệu tham khảo.

Chương 1: Trình bày hệ thống các khái niệm cơ sở cùng các tính chất.

Chương 2: Trình bày tổng quan về lý thuyết khung trong không gian Hilbert.

Chương 3: Trình bày một số mối liên hệ giữa khung và cơ sở Riesz.

Tuy bản thân có nhiều cố gắng, song thời gian và năng lực của bản thân có hạn nên luận văn khó tránh khỏi những thiếu sót. Rất mong được sự đóng góp ý kiến của các thầy cô cùng toàn thể bạn đọc.

Thái Nguyên, ngày 25 tháng 09 năm 2012.

Tác giả

Nguyễn Ngọc Tú

Chương 1

Cơ sở

1.1 Một số khái niệm và kết quả chuẩn bị

Trong mục này chúng tôi nhắc lại một vài khái niệm và kết quả sẽ cần đến trong những phần tiếp theo. Các kết quả có thể tham khảo trong [1].

Định nghĩa 1.1.1 *Giả sử $\mathcal{H}$ là không gian Hilbert, toán tử bị chặn $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ gọi là toán tử unita nếu $UU^* = U^*U = I$. Khi đó $\langle Ux, Uy \rangle = \langle x, y \rangle, \forall x, y \in \mathcal{H}$.*

Định nghĩa 1.1.2 *Cho 1 họ các không gian Hilbert $\{\mathcal{H}_n\}_{n=1}^{\infty}$, tổng trực tiếp của chúng được ký hiệu bởi :*

$$\mathcal{H} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus \mathcal{H}_n \right)_{l^2} \quad (1.1)$$

bao gồm tất cả các dãy $g = (g_1, g_2, \dots)$, với $g_n \in \mathcal{H}_n, \forall n \in \mathbb{N}$ và $\sum_{n=1}^{\infty} \|g_n\|^2 < \infty$.

$\mathcal{H}$ là một không gian Hilbert tương ứng với tích $\langle f, g \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f_n, g_n \rangle_{\mathcal{H}_n}$, $f, g \in \mathcal{H}$, với chuẩn $\|g\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|g_n\|^2$.

Bổ đề 1.1.3 *Giả sử μ là độ đo dương trên σ - đại số $\mathcal{M}$. Giả thiết*

rằng $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$ và $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots \supseteq A_n \supseteq \dots$

Nếu $\mu(A_1) < \infty$ thì $\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$.

Định lý 1.1.4 Giả sử $U_n : X \rightarrow Y, n \in \mathbb{N}$ là một dãy của các toán tử bị chặn, U_n hội tụ từng điểm đến ánh xạ $U : X \rightarrow Y$. Khi đó U là tuyến tính, bị chặn. Ngoài ra, dãy của các chuẩn $\|U_n\|$ bị chặn và $\|U\| \leq \liminf \|U_n\|$.

Toán tử $U : X \rightarrow Y$ là khả nghịch nếu U là toàn ánh và đơn ánh.

Định lý 1.1.5 Một toán tử song ánh, bị chặn giữa các không gian Banach có nghịch đảo bị chặn.

Định lý 1.1.6 Nếu $U : X \rightarrow X$ bị chặn và $\|I - U\| < 1$ thì U là khả nghịch và $U^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (I - U)^k$. Ngoài ra, $\|U^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|I - U\|}$.

Bổ đề 1.1.7 Cho $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ là các không gian Hilbert. Giả sử $U : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{H}$ là toán tử bị chặn. Khi đó có khẳng định sau:

$$(i) \|U\| = \|U^*\| \text{ và } \|UU^*\| = \|U\|^2.$$

$$(ii) \mathcal{R}_U \text{ đóng trong } \mathcal{H} \text{ khi và chỉ khi } \mathcal{R}_{U^*} \text{ đóng trong } \mathcal{K}.$$

$$(iii) U \text{ là toàn ánh khi và chỉ khi tồn tại 1 hằng số } C > 0 \text{ sao cho } \|U^*y\| \geq C \|y\|, \forall y \in \mathcal{H}.$$

Định lý 1.1.8 Giả sử $\mathcal{H}$ là không gian Hilbert và $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ là ánh xạ tuyến tính liên tục. Khi đó tồn tại duy nhất một $y \in \mathcal{H}$ sao cho $f(x) = \langle x, y \rangle$.

Định lý 1.1.9 Giả sử U_1, U_2, U_3 là các toán tử tự liên hợp.

$$\text{Nếu } U_1 \leq U_2, U_3 \geq 0 \text{ và } U_3 \text{ giao hoán với } U_1, U_2 \text{ thì } U_1 U_3 \leq U_2 U_3.$$

Bổ đề 1.1.10 Giả sử $\mathcal{H}$ là không gian Hilbert. Mọi toán tử dương, bị chặn $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ có duy nhất căn bậc hai dương bị chặn W . Nếu U là tự liên hợp thì W là tự liên hợp. Nếu U là khả nghịch thì W cũng là

khả nghịch. W có thể biểu thị như một giới hạn của dãy các đa thức của U và giao hoán với U .

Bổ đề 1.1.11 Giả sử $\mathcal{H}$ là không gian Hilbert. Khi đó :

(i) Mọi toán tử bị chặn, khả nghịch $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ có 1 biểu diễn duy nhất $U = WP$ mà U là toán tử unita, P dương.

(ii) Giả thiết rằng $\mathcal{H}$ là phức. Khi đó mọi toán tử dương P trên $\mathcal{H}$ với $\|P\| \leq 1$ có thể viết là trung bình các toán tử unita, tức là $P = \frac{1}{2}(W + W^*)$; $W = P + i\sqrt{I - P^2}$.

Bổ đề 1.1.12 Giả sử $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ là các không gian Hilbert, giả thiết rằng $U : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{H}$ là toán tử bị chặn với miền giá trị đóng $\mathcal{R}_U$. Khi đó tồn tại 1 toán tử bị chặn $U^\dagger : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$ mà $UU^\dagger f = f, \forall f \in \mathcal{R}_U$.

Toán tử $U^\dagger$ được gọi là giả nghịch đảo của U . Ta cũng thường thấy giả nghịch đảo của một toán tử U với miền giá trị đóng được định nghĩa như toán tử duy nhất thỏa mãn :

$$\mathcal{N}_{U^\dagger} = \mathcal{R}_U^\perp, \mathcal{R}_{U^\dagger} = \mathcal{N}_U^\perp \text{ và } UU^\dagger f = f, f \in \mathcal{R}_U. \quad (1.2)$$

Bổ đề 1.1.13 Giả sử $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ là các không gian Hilbert và $U : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{H}$ là toán tử bị chặn với miền giá trị đóng. Khi đó:

- (i) Hình chiếu trực giao của $\mathcal{H}$ lên $\mathcal{R}_U$ được cho bởi $UU^\dagger$.
- (ii) Hình chiếu trực giao của $\mathcal{H}$ lên $\mathcal{R}_{U^\dagger}$ được cho bởi $U^\dagger U$.
- (iii) U^* có miền giá trị đóng và $(U^*)^\dagger = (U^\dagger)^*$.
- (iv) Trên $\mathcal{R}_U$, toán tử $U^\dagger$ được cho bởi $U^\dagger = U^*(UU^*)^{-1}$.

Định lý 1.1.14 Giả sử $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ là các không gian Hilbert và $U : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{H}$ là một toán tử toàn ánh, bị chặn. Cho $y \in \mathcal{H}$, phương trình $Ux = y$ có duy nhất một nghiệm có chuẩn nhỏ nhất là $x = U^\dagger y$.

1.2 Cơ sở trong không gian Banach

Khái niệm cơ bản nhất về cơ sở được giới thiệu bởi Schauder năm 1927, được định nghĩa trong không gian Banach X và có ý tưởng cơ bản là một họ các vector để mỗi $f \in X$ có khai triển duy nhất theo các vector đã cho. Tất cả các cơ sở được xét trong luận văn này là cơ sở Schauder.

Trước khi định nghĩa, ta chú ý là dãy $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} = \{e_1, e_2, \dots\}$ trong X là một tập có thứ tự.

Định nghĩa 1.2.1 *Giả sử X là không gian Banach. Dãy vector $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ của X là cơ sở Schauder nếu mỗi $f \in X$, tồn tại duy nhất các hệ số $\{c_k(f)\}_{k=1}^{\infty}$ sao cho :*

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f) e_k. \quad (1.3)$$

Đôi khi ta nói (1.3) là một khai triển của f trong cơ sở $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$. Phương trình (1.3) nghĩa là chuỗi $f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f) e_k$ hội tụ (theo chuẩn) theo thứ tự đã chọn của các phần tử. Nếu chuỗi (1.3) hội tụ một cách vô điều kiện với mỗi $f \in X$ (tức là chuỗi hội tụ với mọi thứ tự của các phần tử) thì ta nói $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ là một cơ sở vô điều kiện. Người ta có thể chứng minh rằng $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ là một cơ sở vô điều kiện nếu và chỉ nếu $\{e_{\sigma(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ là một cơ sở với mọi hoán vị σ trong $\mathbb{N}$. Nói cách khác, nếu $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ không là cơ sở vô điều kiện thì tồn tại một hoán vị σ mà $\{e_{\sigma(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ không là cơ sở.

Bên cạnh sự tồn tại khai triển của mỗi $f \in X$, định nghĩa 1.2.1 yêu cầu tính duy nhất. Điều này thường có được bằng cách yêu cầu $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ độc lập theo một nghĩa thích hợp. Trong không gian Banach vô hạn chiều, ta có các khái niệm khác nhau về sự độc lập.

Định nghĩa 1.2.2 Giả sử $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ là một dãy trong X . Ta nói:

- (i) $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ là độc lập tuyến tính nếu mỗi tập con hữu hạn của $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ là độc lập tuyến tính.
- (ii) $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ là w -độc lập nếu mỗi lần chuỗi $\sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k$ hội tụ và bằng 0 với một bộ hệ số $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ thì cần $c_k = 0, \forall k \in \mathbb{N}$.
- (iii) $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ là cực tiểu nếu $f_j \notin \overline{\text{span}}\{f_k\}_{k \neq j}, \forall j \in \mathbb{N}$.

Mối quan hệ giữa các định nghĩa trên như sau:

Bổ đề 1.2.3 Giả sử $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ là một dãy trong X . Ta có :

- (i) Nếu $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ cực tiểu thì $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ là w - độc lập.
- (ii) Nếu $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ w - độc lập thì $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ là độc lập tuyến tính.

Chứng minh. Để chứng minh (i), giả thiết rằng $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ không w - độc lập. Chọn hệ số $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ mà $c_j \neq 0$ với một j nào đó sao cho $\sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k = 0$, khi đó $f_j = \sum_{k \neq j} \frac{-c_k}{c_j} f_k \Rightarrow f_j \in \overline{\text{span}}\{f_k\}_{k \neq j}$.

Suy ra $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ không phải cực tiểu. (ii) là hiển nhiên. $\square$

Một không gian Banach có một cơ sở cần khả li. Hầu hết các không gian Banach khả li mà ta biết đều có một cơ sở. Ví dụ đầu tiên về không gian Banach khả li không có cơ sở được xây dựng bởi Enflo năm 1972.

Một dãy $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ được gọi là đầy đủ trong X nếu $\overline{\text{span}}\{f_k\}_{k=1}^{\infty} = X$.

Rõ ràng một cơ sở của X là đầy đủ và bao gồm những vector khác 0.

Bổ sung thêm điều kiện dẫn đến đặc trưng của cơ sở như sau:

Định lý 1.2.4 Một họ đầy đủ gồm các vector khác không $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ trong không gian X là một cơ sở của X nếu và chỉ nếu tồn tại hằng

số K sao cho $\forall m, n \in \mathbb{N}, m \leq n$

$$\left\| \sum_{k=1}^m c_k e_k \right\| \leq K \left\| \sum_{k=1}^n c_k e_k \right\| \quad (1.4)$$

với mọi dãy số $\{c_k\}_{k=1}^\infty$.

Định lý 1.2.4 thường được phát biểu thông qua việc sử dụng hằng số cơ sở, được định nghĩa cho một dãy bất kỳ $\{e_k\}_{k=1}^\infty$

$$K := \sup \left\{ \left\| \sum_{k=1}^m c_k e_k \right\| : m \leq n, \left\| \sum_{k=1}^n c_k e_k \right\| = 1 \right\}. \quad (1.5)$$

Nếu $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ là một cơ sở thì K chính là hằng số nhỏ nhất có thể sử dụng trong (1.4). Mặt khác, nếu hằng số cơ sở vô hạn thì $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ không là cơ sở. Với dãy hữu hạn $\{e_k\}_{k=1}^N$, hằng số cơ sở được định nghĩa như trên, cùng với điều kiện thêm vào là $n \leq N$.

Hằng số cơ sở K cho biết liệu dãy $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ có thể là một cơ sở tương ứng với thứ tự đã được chọn của các phần tử. Ta chú ý rằng một đặc trưng tương tự của cơ sở vô điều kiện, một dãy đầy đủ $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ gồm các phần tử khác 0 là cơ sở vô điều kiện khi và chỉ khi hằng số cơ sở vô điều kiện của nó

$$\sup \left\{ \left\| \sum \sigma_k c_k e_k \right\| : \left\| \sum c_k e_k \right\| = 1, \sigma_k = \pm 1, \forall k \right\}$$

là hữu hạn.

Cho một cơ sở $\{e_k\}_{k=1}^\infty$, rõ ràng hệ số $\{c_k(f)\}_{k=1}^\infty$ trong (1.3) phụ thuộc tuyến tính vào f . Ánh xạ $f \rightarrow c_k(f)$ được gọi là hàm hệ số. Như là một hệ quả của định lý 1.2.4, hàm hệ số là liên tục.

Hệ quả 1.2.5 *Hàm hệ số $\{c_k(f)\}_{k=1}^\infty$ tương ứng với một cơ sở $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ của X là liên tục và có thể xem như là một phần tử trong không gian*

đối ngẫu X^* . Nếu tồn tại hằng số $C > 0$ sao cho

$\|e_k\| \geq C, \forall k \in \mathbb{N}$ thì chuẩn của $\{c_k(f)\}_{k=1}^\infty$ là bị chặn đều.

Chứng minh. Ta sử dụng định lý 1.2.4

Cho $f \in X$, kí hiệu $f = \sum_{k=1}^\infty c_k(f) e_k$.

Khi đó với bất kỳ $j \in \mathbb{N}, \forall n \geq j$

$$|c_j(f)| \|e_j\| \leq K \left\| \sum_{k=1}^n c_k(f) e_k \right\|.$$

Cho $n \rightarrow \infty$, ta thu được

$$|c_j(f)| \leq \frac{K}{\|e_j\|} \cdot \|f\|.$$

□

Một dãy $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ trong X và dãy $\{g_k\}_{k=1}^\infty$ trong X^* được gọi là song trực giao nếu :

$$g_k(f_j) = \delta_{k,j} := \begin{cases} 1 & \text{nếu } k = j \\ 0 & \text{nếu } k \neq j. \end{cases} \quad (1.6)$$

Hệ quả 1.2.6 Giả sử $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ là một cơ sở của X . Khi đó $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ và hàm hệ số $\{c_k\}_{k=1}^\infty$ tạo thành một hệ song trực giao.

Chứng minh. Ta có $e_j = \sum_{k=1}^\infty c_k(e_j) e_k$. Do $\{e_k\}$ là cơ sở của X nên biểu diễn trên là duy nhất. Do đó $c_k(e_j) = 1$ nếu $k = j$ và $c_k(e_j) = 0$ nếu $k \neq j$. □

Định lý 1.2.7 Giả sử $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ là cơ sở của X và $\{c_k\}_{k=1}^\infty$ là hàm hệ số tương ứng với cơ sở này. Khi đó:

(i) $\{c_k\}_{k=1}^\infty$ là một cơ sở cho bao tuyến tính đóng trong X^* , và hệ song trực giao tương ứng với nó là $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ (xét như các phần tử trong

X^{**}).

(ii) Nếu X là không gian phản xạ thì $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ là một cơ sở của X^* .

1.3 Dãy Bessel trong không gian Hilbert

Phần còn lại của chương này liên quan đến dãy trong không gian Hilbert. Để thuận lợi, ta đánh số tất cả các dãy bằng các số tự nhiên trong chương này. Ta sẽ nhanh chóng nhìn thấy tất cả kết quả thực sự đúng với các tập chỉ số đếm được tùy ý.

Bổ đề 1.3.1 Giả sử $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ là dãy trong $\mathcal{H}$ và $\sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k$ là hội tụ $\forall \{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^2(\mathbb{N})$, Khi đó

$$T : l^2(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{H}, T\{c_k\}_{k=1}^{\infty} := \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k \quad (1.7)$$

xác định toán tử tuyến tính bị chặn. Toán tử liên hợp được cho bởi

$$T^* : \mathcal{H} \rightarrow l^2(\mathbb{N}), T^* f = \{\langle f, f_k \rangle\}_{k=1}^{\infty}. \quad (1.8)$$

Ngoài ra

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2 \leq \|T\|^2 \cdot \|f\|^2, \forall f \in \mathcal{H}. \quad (1.9)$$

Chứng minh. Xét dãy toán tử tuyến tính bị chặn

$$T_n : l^2(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{H}, T_n\{c_k\}_{k=1}^{\infty} := \sum_{k=1}^n c_k f_k.$$

Rõ ràng $T_n \rightarrow T$ theo từng điểm khi $n \rightarrow \infty$, vì thế T là bị chặn theo định lý 1.1.4. Để tìm thấy biểu thức cho T^* , giả sử $f \in \mathcal{H}$,

$\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^2(\mathbb{N})$. Khi đó

$$\langle f, T \{c_k\}_{k=1}^{\infty} \rangle_{\mathcal{H}} = \left\langle f, \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k \right\rangle_{\mathcal{H}} = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, f_k \rangle \overline{c_k}. \quad (1.10)$$

Ta có 2 phương pháp tìm T^* sau :

1, Chuỗi $\sum_{k=1}^{\infty} \langle f, f_k \rangle \overline{c_k}, \forall \{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^2(\mathbb{N})$ hội tụ kéo theo $\{\langle f, f_k \rangle\}_{k=1}^{\infty} \in l^2(\mathbb{N})$. Vì vậy ta có thể viết

$$\langle f, T \{c_k\}_{k=1}^{\infty} \rangle_{\mathcal{H}} = \langle \{\langle f, f_k \rangle\}, \{c_k\} \rangle_{l^2(\mathbb{N})}$$

và kết luận : $T^* f = \{\langle f, f_k \rangle\}_{k=1}^{\infty}$.

2, Cách khác, khi $T : l^2(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{H}$ là bị chặn, ta đã biết T^* là toán tử bị chặn từ $\mathcal{H}$ vào $l^2(\mathbb{N})$. Do đó, hàm tọa độ thứ k là bị chặn, đi từ $\mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$, theo định lý biểu diễn của Riesz, T^* có dạng :

$$T^* f = \{\langle f, g_k \rangle\}_{k=1}^{\infty} \text{ với } \{g_k\}_{k=1}^{\infty} \text{ trong } \mathcal{H}.$$

Theo định nghĩa của T^* , (1.10) chỉ ra :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle f, g_k \rangle \overline{c_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, f_k \rangle \overline{c_k}, \forall \{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^2(\mathbb{N}), f \in \mathcal{H}.$$

Từ đó suy ra $g_k = f_k$.

Liên hợp của toán tử bị chặn T là bị chặn và $\|T\| = \|T^*\|$. Với giả thiết trong bổ đề 1.3.1, ta có :

$$\|T^* f\|^2 \leq \|T\|^2 \cdot \|f\|^2, \forall f \in \mathcal{H}$$

dẫn đến (1.9). □

Dãy $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ để bất đẳng thức (1.9) xảy ra sẽ đóng vai trò quan trọng về sau.

Định nghĩa 1.3.2 Dãy $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ trong $\mathcal{H}$ được gọi là dãy Bessel nếu tồn tại 1 hằng số $B > 0$ sao cho

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2 \leq B \|f\|^2, \forall f \in \mathcal{H}. \quad (1.11)$$

Mọi B thỏa mãn (1.11) được gọi là cận Bessel của $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Định lý 1.3.3 Giả sử $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ là một dãy trong $\mathcal{H}$. Khi đó $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ là một dãy Bessel với cận Bessel B khi và chỉ khi

$$T : \{c_k\}_{k=1}^{\infty} \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k$$

là toán tử định nghĩa tốt, bị chặn từ $l^2(\mathbb{N})$ vào $\mathcal{H}$ và $\|T\| \leq \sqrt{B}$.

Chứng minh. Trước hết, giả thiết $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ là dãy Bessel với cận Bessel B .

Giả sử $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^2(\mathbb{N})$. Ta phải chỉ ra $T\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ là định nghĩa tốt, tức là, $\sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k$ là hội tụ. Xét $n, m \in \mathbb{N}, n > m$. Khi đó :

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^n c_k f_k - \sum_{k=1}^m c_k f_k \right\| &= \left\| \sum_{k=m+1}^n c_k f_k \right\| \\ &= \sup_{\|g\|=1} \left| \left\langle \sum_{k=m+1}^n c_k f_k, g \right\rangle \right| \\ &\leq \sup_{\|g\|=1} \sum_{k=m+1}^n |c_k \langle f_k, g \rangle| \\ &\leq \left(\sum_{k=m+1}^n |c_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \sup_{\|g\|=1} \left(\sum_{k=m+1}^n |\langle f_k, g \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sqrt{B} \left(\sum_{k=m+1}^n |c_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Do $\{c_k\}_{k=1}^\infty \in l^2(\mathbb{N})$, ta biết rằng $\left\{ \sum_{k=1}^n |c_k|^2 \right\}_{n=1}^\infty$ là dãy Cauchy trong $\mathbb{C}$. Tính toán trên chỉ ra rằng $\left\{ \sum_{k=1}^n c_k f_k \right\}_{n=1}^\infty$ là một dãy Cauchy trong $\mathcal{H}$ và do đó hội tụ. Vậy $T\{c_k\}_{k=1}^\infty$ là định nghĩa tốt. Rõ ràng T là tuyến tính. Từ $\|T\{c_k\}_{k=1}^\infty\| = \sup_{\|g\|=1} |\langle T\{c_k\}_{k=1}^\infty, g \rangle|$, tính toán như trên chỉ ra T là bị chặn và $\|T\| \leq \sqrt{B}$. Để chứng minh chiều ngược lại, giả sử T là định nghĩa tốt và $\|T\| \leq \sqrt{B}$, khi đó (1.9) chỉ ra $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ là dãy Bessel với cận Bessel B . $\square$

Bổ đề 1.3.1 chỉ ra rằng, nếu ta chỉ cần biết $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ là một dãy Bessel và giá trị của cận Bessel B không quan trọng thì ta chỉ cần kiểm tra toán tử T có phải là định nghĩa tốt.

Hệ quả 1.3.4 Nếu $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ là một dãy trong $\mathcal{H}$ và $\sum_{k=1}^\infty c_k f_k$ hội tụ $\forall \{c_k\}_{k=1}^\infty \in l^2(\mathbb{N})$ thì $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ là một dãy Bessel.

Điều kiện Bessel (1.11) vẫn giữ nguyên không phụ thuộc vào cách các phần tử $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ được đánh số thứ tự. Điều này dẫn đến hệ quả rất quan trọng của định lý 1.3.3.

Hệ quả 1.3.5 Nếu $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ là một dãy Bessel trong $\mathcal{H}$, thì $\sum_{k=1}^\infty c_k f_k$ hội tụ không điều kiện $\forall \{c_k\}_{k=1}^\infty \in l^2(\mathbb{N})$.

Vì vậy việc sắp xếp lại thứ tự của các phần tử trong $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ không làm ảnh hưởng đến chuỗi $\sum_{k=1}^\infty c_k f_k$ khi $\{c_k\}_{k=1}^\infty$ có cùng trật tự, chuỗi sẽ hội tụ về cùng phần tử như trước. Với lý do này, ta có thể chọn cách đánh chỉ số tùy ý các phần tử trong dãy Bessel. Đặc biệt sẽ không là hạn chế, nếu ta trình bày tất cả các kết quả với các số tự nhiên như là một tập chỉ số đếm được. Ta sẽ xem trong phần tiếp sau, tất cả cơ sở trực chuẩn, cơ sở Riesz và khung là dãy Bessel.

Ta chỉ cần kiểm tra điều kiện Bessel (1.11) trong một tập con trù mật của $\mathcal{H}$.

Bổ đề 1.3.6 *Giả sử $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ là một dãy các phần tử trong $\mathcal{H}$ và tồn tại một hằng số $B > 0$ sao cho*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2 \leq B \|f\|^2$$

với mọi f trong tập con trù mật V của $\mathcal{H}$. Khi đó $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ là một dãy Bessel với cận B .

Chứng minh. Ta cần chứng minh điều kiện Bessel thỏa mãn với mọi phần tử trong $\mathcal{H}$. Giả sử $g \in \mathcal{H}$, phản chứng rằng

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle g, f_k \rangle|^2 > B \|g\|^2.$$

Khi đó tồn tại tập hữu hạn $F \subset \mathbb{N}$ mà:

$$\sum_{k \in F} |\langle g, f_k \rangle|^2 > B \|g\|^2.$$

Vì V là trù mật trong $\mathcal{H}$, điều này kéo theo sự tồn tại $h \in V$ sao cho:

$$\sum_{k \in F} |\langle h, f_k \rangle|^2 > B \|h\|^2$$

(mâu thuẫn). Ta kết luận rằng

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle g, f_k \rangle|^2 \leq B \|g\|^2, \forall g \in \mathcal{H}.$$

□

1.4 Cơ sở và hệ song trực giao trong không gian Hilbert

Bây giờ ta xem lại những khái niệm được định nghĩa trong mục (1.2). Bổ đề đầu tiên thực sự đúng trong không gian Banach, nhưng mục đích

của ta là chỉ cần xét trong không gian Hilbert $\mathcal{H}$. Chú ý : $\mathcal{H}^* = \mathcal{H}$, vì vậy nếu một dãy $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ trong $\mathcal{H}$ có một dãy song trực giao $\{g_k\}_{k=1}^\infty$ thì $\{g_k\}_{k=1}^\infty$ cũng là một dãy trong $\mathcal{H}$.

Bổ đề 1.4.1 *Giả sử $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ là một dãy trong $\mathcal{H}$. Khi đó:*

(i) $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ có một dãy song trực giao $\{g_k\}_{k=1}^\infty$ khi và chỉ khi $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ là cực tiểu.

(ii) nếu một dãy song trực giao của $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ tồn tại, nó được xác định duy nhất khi và chỉ khi $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ đầy đủ trong $\mathcal{H}$.

Chứng minh. Giả sử $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ có hệ song trực giao $\{g_k\}_{k=1}^\infty$. Khi đó, với $j \in \mathbb{N}$

$$\langle f_j, g_j \rangle = 1 \text{ và } \langle f_k, g_j \rangle = 0, k \neq j.$$

Vậy thì $f_j \notin \overline{\text{span}}\{f_k\}_{k \neq j}$, tức là, $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ là cực tiểu. Để chứng minh chiều ngược lại trong (i), giả thiết $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ là cực tiểu và đặt

$$\mathcal{H}_0 := \overline{\text{span}}\{f_k\}_{k=1}^\infty.$$

Đã cho $j \in \mathbb{N}$, giả sử P_j kí hiệu phép chiếu trực giao của $\mathcal{H}$ lên $\overline{\text{span}}\{f_k\}_{k \neq j}$ và cho I_0 là toán tử đồng nhất trong $\mathcal{H}_0$. Khi đó kéo theo $(I_0 - P_j)f_j \neq 0$ và

$$\langle f_j, (I_0 - P_j)f_j \rangle = \langle P_j f_j + (I_0 - P_j)f_j, (I_0 - P_j)f_j \rangle = \|(I_0 - P_j)f_j\|^2 \neq 0$$

Vì $k \neq j$, rõ ràng $\langle f_k, (I_0 - P_j)f_j \rangle = 0$. Định nghĩa:

$$g_j := \frac{(I_0 - P_j)f_j}{\|(I_0 - P_j)f_j\|}, j \in \mathbb{N}.$$

Ta thu được $\{g_k\}_{k=1}^\infty$ là hệ song trực giao của $\{f_k\}_{k=1}^\infty$.

Chứng minh (ii), giả thiết $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ có một hệ song trực giao $\{g_k\}_{k=1}^\infty$. Nếu $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ không đầy đủ, ta có thể thay thế $\{g_k\}_{k=1}^\infty$ bởi $\{g_k + h_k\}_{k=1}^\infty$ với $h_k \in \mathcal{H}_0^\perp \setminus \{0\}$ và bằng cách này ta thu được một hệ song trực giao mới của $\{f_k\}_{k=1}^\infty$. Mặt khác, giả sử $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ đầy đủ và $\{g_k\}_{k=1}^\infty, \{g'_k\}_{k=1}^\infty$ là hai

hệ song trực giao với $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$. Khi đó $\langle f_k, g_j \rangle = \delta_{k,j} = \langle f_k, g'_j \rangle, \forall k, j$.
Ta suy ra $\langle f_k, g_j - g'_j \rangle = 0, \forall k, j$. Do $\{f_k\}$ là đầy đủ nên
 $\langle f, g_j - g'_j \rangle = 0, \forall j$. Do đó $g_j = g'_j, \forall j$. $\square$

Định lí 1.4.2 *Giả sử $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ là một cơ sở của không gian $\mathcal{H}$. Khi đó, tồn tại duy nhất một họ $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ trong $\mathcal{H}$ mà*

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, g_k \rangle e_k, \forall f \in \mathcal{H} \quad (1.12)$$

$\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ là một cơ sở của $\mathcal{H}$ và $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}, \{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ là song trực giao.

Chứng minh. Theo hệ quả 1.2.5 hàm hệ số $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ liên kết với $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ là liên tục, sử dụng Định lý biểu diễn của Riesz 1.1.8, tồn tại duy nhất một họ $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ trong $\mathcal{H}$ sao cho

$$c_k(f) = \langle f, g_k \rangle, \forall f \in \mathcal{H}.$$

$$\Rightarrow f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, g_k \rangle e_k, \forall f \in \mathcal{H}$$

Giả sử $\{g'_k\}$ là một họ khác cũng thỏa mãn (1.12). Khi đó
 $\sum_{k=1}^{\infty} (\langle f, g_k \rangle - \langle f, g'_k \rangle) e_k = 0, \forall f \in \mathcal{H}$. Do $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ là cơ sở của $\mathcal{H}$ nên
 $\langle f, g_k \rangle - \langle f, g'_k \rangle = 0, \forall f \in \mathcal{H}, \forall k$. Do đó $g_k - g'_k = 0, \forall k$ và mâu thuẫn
này chứng tỏ sự duy nhất của họ $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$. Thay $f = e_j$ vào (1.12) và do
 $\{e_k\}$ là cơ sở nên ta suy ra $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ và $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ là song trực giao. $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$
là một cơ sở của $\mathcal{H}$ suy ra từ định lý 1.2.7. $\square$

Cơ sở $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ thỏa mãn (1.12) được gọi là cơ sở đối ngẫu hoặc cơ sở song trực giao, được liên kết với $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$. Thật thú vị khi thấy rằng điều kiện Bessel cho $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ suy ra một kiểu bất đẳng thức ngược lại cho $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$. Những bất đẳng thức này đóng vai trò quan trọng khi ta định

nghĩa khung ở chương 2.

Bổ đề 1.4.3 Giả sử $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ là một cơ sở của $\mathcal{H}$ và $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ là hệ song trực giao liên kết với nó. Nếu $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ là một dãy Bessel với cận B thì

$$(i) \frac{1}{B} \|f\|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, g_k \rangle|^2, \forall f \in \mathcal{H}.$$

$$(ii) \frac{1}{B} \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \leq \left\| \sum_{k=1}^{\infty} c_k g_k \right\|^2 \text{ với mọi dãy hữu hạn } \{c_k\}_{k=1}^{\infty}.$$

Chứng minh. Giả sử $f \in \mathcal{H}$, $f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, g_k \rangle e_k$ và từ bất đẳng thức Cauchy- Schwarz, ta thu được

$$\begin{aligned} \|f\|^4 &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, g_k \rangle \langle e_k, f \rangle \right|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, g_k \rangle|^2 \sum_{k=1}^{\infty} |\langle e_k, f \rangle|^2 \\ &\leq B \|f\|^2 \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, g_k \rangle|^2 \end{aligned}$$

(i) suy ra từ đây. Để chứng minh (ii), giả sử $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ là một dãy hữu hạn.

Sử dụng hệ song trực giao $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ ta có thể viết

$$\{c_k\}_{k=1}^{\infty} = \left\{ \left\langle \sum_{j=1}^{\infty} c_j g_j, e_k \right\rangle \right\}_{k=1}^{\infty}$$

và

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left| \left\langle \sum_{j=1}^{\infty} c_j g_j, e_k \right\rangle \right|^2 \leq B \left\| \sum_{j=1}^{\infty} c_j g_j \right\|^2.$$

□

Chú ý rằng, điều kiện $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ là hữu hạn trong (ii) là thiết yếu. Đối với các dãy tổng quát $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^2(\mathbb{N})$ chuỗi $\sum_{k=1}^{\infty} c_k g_k$ có thể không hội tụ.

1.5 Cơ sở trực chuẩn

Bây giờ ta giới thiệu một trong những khái niệm chính là cơ sở trực chuẩn trong không gian Hilbert. Chúng là những phiên bản trừu tượng (vô hạn chiều) của cơ sở chính tắc trong $\mathbb{C}^n$ và có nhiều tính chất tương tự. Cơ sở trực chuẩn được sử dụng rộng rãi trong toán học, vật lý, xử lý tín hiệu và nhiều lĩnh vực khác.

Định nghĩa 1.5.1 Một dãy $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ trong $\mathcal{H}$ là một hệ trực chuẩn nếu $\langle e_k, e_j \rangle = \delta_{k,j}$.

Một hệ trực chuẩn $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ mà là cơ sở của $\mathcal{H}$ được gọi là cơ sở trực chuẩn của $\mathcal{H}$.

Chú ý rằng, một hệ trực chuẩn là một dãy Bessel. Thật vậy, nếu $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^2(\mathbb{N})$ và $m, n \in \mathbb{N}, n > m$ thì

$$\left\| \sum_{k=1}^n c_k e_k - \sum_{k=1}^m c_k e_k \right\|^2 = \left\| \sum_{k=m+1}^n c_k e_k \right\|^2 = \sum_{k=m+1}^n |c_k|^2.$$

Cũng như chứng minh định lý 1.3.3 thì $\sum_{k=1}^{\infty} c_k g_k$ hội tụ và

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2.$$

Định lý tiếp theo đưa ra điều kiện tương đương cho một hệ trực chuẩn $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ trở thành một cơ sở trực chuẩn.

Định lý 1.5.2 Cho một hệ trực chuẩn $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, những mệnh đề sau tương đương:

- (i) $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ là một cơ sở trực chuẩn.
- (ii) $f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, e_k \rangle e_k, \forall f \in \mathcal{H}$.
- (iii) $\langle f, g \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, e_k \rangle \langle e_k, g \rangle, \forall f, g \in \mathcal{H}$.

- (iv) $\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, e_k \rangle|^2 = \|f\|^2, \forall f \in \mathcal{H}.$
 (v) $\overline{\text{span}} \{e_k\}_{k=1}^{\infty} = \mathcal{H}.$
 (vi) Nếu $\langle f, e_k \rangle = 0, \forall k \in \mathbb{N}$ thì $f = 0.$

Chứng minh. (i) $\Rightarrow$ (ii) Giả sử $f \in \mathcal{H}$. Nếu $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ là một cơ sở trực chuẩn, tồn tại hệ số $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ sao cho $f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$. Với bất kỳ $j \in \mathbb{N}$, ta có $\langle f, e_j \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \delta_{k,j} = c_j \Rightarrow$ (ii). (iii) là một hệ quả hiển nhiên của (ii), và (iv) là một trường hợp đặc biệt của (iii). Rõ ràng (iv) $\Rightarrow$ (v) $\Rightarrow$ (vi). Để chứng minh (vi) $\Rightarrow$ (i), giả sử $f \in \mathcal{H}$. Từ $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ là một dãy Bessel, ta biết $g := \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, e_k \rangle e_k$ được định nghĩa tốt. Hơn nữa $\langle f - g, e_j \rangle = 0, \forall j \in \mathbb{N}$ vì thế theo (vi) $f = g = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, e_k \rangle e_k$. Để chứng minh rằng $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ là một cơ sở ta chỉ cần chỉ ra không có tổ hợp tuyến tính nào khác của $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ có thể bằng f và điều này suy ra từ lập luận ta từng chứng minh (ii) từ (i). $\square$

Đẳng thức trong (iv) được gọi là đẳng thức Parseval. Qua hệ quả 1.3.5, ta thu được hệ quả quan trọng của định lý 1.5.2

Hệ quả 1.5.3 Nếu $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ là một cơ sở trực chuẩn thì mỗi $f \in \mathcal{H}$, có một khai triển hội tụ vô điều kiện

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, e_k \rangle e_k. \quad (1.13)$$

Đặc biệt, cơ sở đối ngẫu của $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ bằng chính cơ sở $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Định lý 1.5.4 Mọi không gian $\mathcal{H}$ khả li có một cơ sở trực chuẩn.

Chứng minh. Vì $\mathcal{H}$ khả li, ta chọn dãy $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ trong $\mathcal{H}$ sao cho $\overline{\text{span}} \{f_k\}_{k=1}^{\infty} = \mathcal{H}$. Bằng việc trích một dãy con nếu cần, ta có thể giả

thiết mỗi $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1} \notin \text{span}\{f_k\}_{k=1}^n$. Ứng dụng phương pháp Gram-Schmidt cho $\{f_k\}_{k=1}^\infty$, ta thu được một hệ trực chuẩn $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ trong $\mathcal{H}$ mà $\overline{\text{span}}\{e_k\}_{k=1}^\infty = \overline{\text{span}}\{f_k\}_{k=1}^\infty = \mathcal{H}$. $\square$

Thông thường, ta muốn có một cơ sở trực chuẩn cụ thể của không gian $\mathcal{H}$, chứ không phải tồn tại của nó. Trường hợp đơn giản nhất là $l^2(\mathbb{N})$

Ví dụ 1.5.5 Giả sử e_k là một dãy trong $l^2(\mathbb{N})$, mà phần tử thứ k là 1, và tất cả các phần tử khác là 0. Khi đó $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ là một cơ sở trực chuẩn của $l^2(\mathbb{N})$, nó được gọi là cơ sở trực chuẩn chính tắc. Ta sẽ kí hiệu cơ sở đặc biệt này bởi $\{\delta_k\}_{k=1}^\infty$.

Cơ sở trực chuẩn chính tắc là cơ sở thuận tiện nhất khi sử dụng bởi cơ sở song trực giao bằng chính cơ sở đó. Nghĩa là, việc biểu diễn (1.13) có thể có trực tiếp, trong khi biểu diễn (1.12) qua một cơ sở tổng quát, ta phải tìm dãy song trực giao $\{g_k\}_{k=1}^\infty$. Không may ta phải trả giá cho tính chất đẹp này. Những điều kiện cho $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ trở thành cơ sở trực chuẩn là mạnh và thường nó không thể xây dựng cơ sở trực chuẩn thỏa mãn các điều kiện bổ sung. Cũng chú ý rằng, không phải luôn tốt khi sử dụng phương pháp trực chuẩn hóa Gram-Schmidt, vì khi xây dựng một cơ sở trực chuẩn từ cơ sở cho trước nó có thể làm mất đi các tính chất đặc biệt của cơ sở ta đang có, ví dụ, cấu trúc đặc biệt của cơ sở Gabor và cơ sở sóng nhỏ, sẽ bị mất đi.

Dựa vào định lý 1.5.4, ta có thể chứng minh mọi $\mathcal{H}$ khả li có thể đồng nhất với $l^2(\mathbb{N})$.

Định lý 1.5.6 Mọi không gian Hilbert $\mathcal{H}$ vô hạn chiều, khả li là đẳng cấu với $l^2(\mathbb{N})$.

Chứng minh. Giả sử $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ là một cơ sở trực chuẩn của $\mathcal{H}$. Ta thấy

$\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$ là hội tụ $\forall \{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^2(\mathbb{N})$. Hơn nữa, mỗi $f \in \mathcal{H}$ có duy nhất khai triển với hệ số l^2 , cụ thể $f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, e_k \rangle e_k$. Do $\{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ là cơ sở trực chuẩn chính tắc của $l^2(\mathbb{N})$, ta có thể định nghĩa toán tử

$$U : \mathcal{H} \rightarrow l^2(\mathbb{N}), U\left(\sum c_k e_k\right) = \sum c_k \delta_k; \{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^2(\mathbb{N}).$$

Khi đó U là song ánh $\mathcal{H} \rightarrow l^2(\mathbb{N})$. Cho $f \in \mathcal{H}, f = \sum \langle f, e_k \rangle e_k$.

Ta có

$$\|Uf\|^2 = \left\| \sum \langle f, e_k \rangle \delta_k \right\|^2 = \sum |\langle f, e_k \rangle|^2 = \|f\|^2.$$

Vì vậy, U là một đẳng cự. □

Định lý tiếp theo đặc trưng tất cả cơ sở trực chuẩn của $\mathcal{H}$ từ một cơ sở trực chuẩn.

Định lý 1.5.7 *Giả sử $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ là một cơ sở trực chuẩn của $\mathcal{H}$. Khi đó, cơ sở trực chuẩn của $\mathcal{H}$ chính xác là những tập hợp $\{Ue_k\}_{k=1}^{\infty}$ mà $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ là một toán tử unita.*

Chứng minh. Giả sử $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ là một cơ sở trực chuẩn của $\mathcal{H}$. Khi đó định nghĩa toán tử

$$U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}, U\left(\sum c_k e_k\right) = \sum c_k f_k; \{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^2(\mathbb{N}).$$

U là song ánh bị chặn từ $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$. Với $f, g \in \mathcal{H}$, viết $f = \sum \langle f, e_k \rangle e_k$ và $g = \sum \langle g, e_k \rangle e_k$. Khi đó, qua định nghĩa U và định lý 1.5.2

$$\begin{aligned} \langle U^* U f, g \rangle &= \langle U f, U g \rangle = \left\langle \sum \langle f, e_k \rangle f_k, \sum \langle g, e_k \rangle f_k \right\rangle \\ &= \sum \langle f, e_k \rangle \cdot \overline{\langle g, e_k \rangle} = \langle f, g \rangle. \end{aligned}$$

Do đó $U^*U = I$. Do U là toàn ánh nên U là unita. Mặt khác, nếu cho U là toán tử unita thì:

$$\langle Ue_k, Ue_j \rangle = \langle U^*Ue_k, e_j \rangle = \langle e_k, e_j \rangle = \delta_{k,j}.$$

Tức là, $\{Ue_k\}_{k=1}^\infty$ là một hệ trực chuẩn. Đó là cơ sở do U là toàn ánh. $\square$

Điều kiện (iv) trong định lý 1.5.2 có cách giải thích theo quan điểm khung, xem định nghĩa 2.1.2. Không cần giả thiết $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ là một hệ trực chuẩn, ta suy ra rằng $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ là một cơ sở trực chuẩn nếu các vector được chuẩn hóa.

Mệnh đề 1.5.8 *Giả sử $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ là một dãy với các vector chuẩn hóa trong $\mathcal{H}$ và $\sum_{k=1}^\infty |\langle f, e_k \rangle|^2 = \|f\|^2, \forall f \in \mathcal{H}$.*

Khi đó $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ là một cơ sở trực chuẩn của $\mathcal{H}$.

Chứng minh. Theo định lý 1.5.2, ta chỉ cần chứng minh $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ là một hệ trực chuẩn.

$$\text{Mỗi } j \in \mathbb{N} \text{ ta có } 1 = \|e_j\|^2 = \sum_{k=1}^\infty |\langle e_j, e_k \rangle|^2 = 1 + \sum_{k \neq j} |\langle e_j, e_k \rangle|^2.$$

Từ đó suy ra $\langle e_j, e_k \rangle = 0, k \neq j$. $\square$

1.6 Cơ sở Riesz

Trong định lý 1.5.7, ta mô tả tất cả cơ sở trực chuẩn thông qua toán tử unita tác động lên cùng một cơ sở trực chuẩn. Về mặt hình thức, cơ sở Riesz được định nghĩa bằng cách làm yếu đi điều kiện của toán tử.

Định nghĩa 1.6.1 *Một cơ sở Riesz trong $\mathcal{H}$ là một họ có dạng $\{Ue_k\}_{k=1}^\infty$, mà $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ là một cơ sở trực chuẩn của $\mathcal{H}$ và $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$*

là một toán tử song ánh bị chặn.

Cơ sở Riesz thực sự là một cơ sở, thực tế, người ta có thể mô tả cơ sở Riesz như là cơ sở thỏa mãn các điều kiện bổ sung.

BỔ ĐỀ 1.6.2 *Dãy $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ là một cơ sở Riesz trong $\mathcal{H}$ khi và chỉ khi nó là một cơ sở vô điều kiện của $\mathcal{H}$ và*

$$0 < \inf_k \|f_k\| \leq \sup_k \|f_k\| < \infty.$$

Cơ sở đối ngẫu liên kết với một cơ sở Riesz cũng là một cơ sở Riesz.

Định lý 1.6.3 *Nếu $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ là một cơ sở Riesz của $\mathcal{H}$, tồn tại duy nhất dãy $\{g_k\}_{k=1}^\infty$ trong $\mathcal{H}$ sao cho*

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, g_k \rangle f_k, \forall f \in \mathcal{H}. \quad (1.14)$$

$\{g_k\}_{k=1}^\infty$ cũng là một cơ sở Riesz và $\{f_k\}_{k=1}^\infty, \{g_k\}_{k=1}^\infty$ là song trực giao. Hơn nữa, chuỗi (1.14) hội tụ vô điều kiện $\forall f \in \mathcal{H}$.

Chứng minh. Theo định nghĩa ta viết $\{f_k\}_{k=1}^\infty = \{Ue_k\}_{k=1}^\infty$, U là toán tử song ánh bị chặn và $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ là một cơ sở trực chuẩn. Giả sử $f \in \mathcal{H}$, khai triển $U^{-1}f$ trong cơ sở trực chuẩn $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ ta có

$$U^{-1}f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle U^{-1}f, e_k \rangle e_k = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, (U^{-1})^* e_k \rangle e_k.$$

Từ đó, đặt $g_k := (U^{-1})^* e_k$

$$f = UU^{-1}f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, (U^{-1})^* e_k \rangle Ue_k = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, g_k \rangle f_k.$$

Do $(U^{-1})^*$ là song ánh, bị chặn, $\{g_k\}_{k=1}^\infty$ là một cơ sở Riesz theo định nghĩa.

Cho $f \in \mathcal{H}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, Ue_k \rangle|^2 = \|U^*f\|^2 \leq \|U^*\|^2 \cdot \|f\|^2 = \|U\|^2 \cdot \|f\|^2. \quad (1.15)$$

Điều này chứng tỏ một cơ sở Riesz là một dãy Bessel, từ đó, chuỗi (1.14) hội tụ vô điều kiện theo hệ quả 1.3.5. Phần còn lại theo định lý 1.4.2. $\square$

Ta gọi $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ là cơ sở Riesz đối ngẫu của $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$. Ta có thể đương nhiên áp dụng định lý 1.6.3 để tìm đối ngẫu của $\{g_k\}_{k=1}^{\infty} = \{(U^{-1})^* e_k\}_{k=1}^{\infty}$. Theo chứng minh định lý 1.6.3, ta phải tìm liên hợp của toán tử nghịch đảo của $(U^{-1})^*$ và cho tác động lên $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$. Quá trình này cho lại ta $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$. Từ đó, $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ và $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ là đối ngẫu của nhau, và

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, g_k \rangle f_k = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, f_k \rangle g_k, \forall f \in \mathcal{H}. \quad (1.16)$$

Ta chú ý cơ sở Riesz là một dãy Bessel và cũng thỏa mãn một dạng bất đẳng thức đảo ngược.

Mệnh đề 1.6.4 Nếu $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} = \{Ue_k\}_{k=1}^{\infty}$ là một cơ sở Riesz của $\mathcal{H}$, tồn tại hằng số $A, B > 0$ sao cho

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2 \leq B\|f\|^2, \forall f \in \mathcal{H}. \quad (1.17)$$

Giá trị lớn nhất có thể của hằng số A là $\frac{1}{\|U^{-1}\|^2}$, và nhỏ nhất có thể của B là $\|U\|^2$.

Chứng minh. Một cơ sở Riesz $\{Ue_k\}_{k=1}^{\infty}$ là một dãy Bessel với cận trên tối ưu $\|U\|$ suy từ đánh giá trong (1.15). Kết quả về cận dưới kéo theo

từ:

$$\|f\| = \left\| (U^*)^{-1} U^* f \right\| \leq \left\| (U^*)^{-1} \right\| \cdot \|U^* f\| = \|U^{-1}\| \cdot \|U^* f\|.$$

□

Một cách thường dùng để xây dựng một toán tử là định nghĩa nó trên một cơ sở và sau đó mở rộng bởi tính tuyến tính. Bổ đề sau đây sẽ đưa ra một vài điều kiện để điều này xảy ra.

Bổ đề 1.6.5 *Giả sử $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ là các không gian Hilbert, $\{h_k\}_{k=1}^\infty$ là một dãy trong $\mathcal{H}$, $\{g_k\}_{k=1}^\infty$ là một dãy trong $\mathcal{K}$. Giả thiết rằng $\{g_k\}_{k=1}^\infty$ là một dãy Bessel với cận B , $\{h_k\}_{k=1}^\infty$ là đầy đủ trong $\mathcal{H}$, và tồn tại một hằng số $A > 0$ sao cho*

$$A \sum |c_k|^2 \leq \left\| \sum c_k h_k \right\|^2 \quad (1.18)$$

cho mọi dãy số hữu hạn $\{c_k\}$. Khi đó,

$$U \left(\sum c_k h_k \right) := \sum c_k g_k, (\{c_k\} \text{ hữu hạn})$$

định nghĩa một toán tử tuyến tính bị chặn từ $\text{span} \{h_k\}_{k=1}^\infty$ vào $\text{span} \{g_k\}_{k=1}^\infty$ và U có một thác triển duy nhất thành một toán tử bị chặn từ $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$. Chuẩn của U cũng như mở rộng của nó nhiều nhất là $\sqrt{\frac{B}{A}}$.

Chứng minh. Theo giả định (1.18), mỗi $h \in \text{span} \{h_k\}_{k=1}^\infty$ có một biểu diễn duy nhất $h = \sum c_k h_k$ với $\{c_k\}$ hữu hạn, kéo theo U là định nghĩa tốt và tuyến tính. Cho 1 dãy hữu hạn $\{c_k\}$

$$\left\| U \left(\sum c_k h_k \right) \right\|^2 = \left\| \sum c_k g_k \right\|^2 \leq B \sum |c_k|^2 \leq \frac{B}{A} \left\| \sum c_k h_k \right\|^2.$$

Từ đó U là bị chặn. Từ $\{h_k\}_{k=1}^\infty$ là đầy đủ, U có thác triển thành toán tử bị chặn trong $\mathcal{H}$. □

Định lý tiếp theo cho các điều kiện tương đương để $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ trở thành một cơ sở Riesz.

Định lý 1.6.6 Cho một dãy $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ trong $\mathcal{H}$, các điều kiện sau là tương đương:

- (i) $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ là một cơ sở Riesz của $\mathcal{H}$.
- (ii) $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ đầy đủ trong $\mathcal{H}$, tồn tại các hằng số $A, B > 0$ sao cho mỗi dãy số hữu hạn $\{c_k\}$ có:

$$A \sum |c_k|^2 \leq \left\| \sum c_k f_k \right\|^2 \leq B \sum |c_k|^2. \quad (1.19)$$

- (iii) $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ đầy đủ, ma trận Gram $\{\langle f_k, f_j \rangle\}_{j,k=1}^\infty$ xác định một toán tử bị chặn, khả nghịch trong $l^2(\mathbb{N})$.

- (iv) $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ là dãy Bessel đầy đủ, và nó có dãy song trực giao đầy đủ $\{g_k\}_{k=1}^\infty$ cũng là một dãy Bessel.

Nếu (1.19) đúng cho mọi dãy số hữu hạn $\{c_k\}$, thì nó tự động đúng cho mọi $\{c_k\}_{k=1}^\infty \in l^2(\mathbb{N})$. Nếu $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ là một cơ sở Riesz, các số $A, B > 0$ thỏa mãn (1.19) được gọi là cận Riesz dưới, cận Riesz trên. Chúng rõ ràng không duy nhất, ta định nghĩa các cận Riesz tối ưu như là giá trị lớn nhất có thể của A và nhỏ nhất có thể của B .

Nếu (1.19) đúng với $A = B = 1$, thì dãy $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ là trực chuẩn.

Mệnh đề 1.6.7 Giả thiết rằng $\overline{\text{span}} \{f_k\}_{k=1}^\infty = \mathcal{H}$ và

$$\left\| \sum c_k f_k \right\|^2 = \sum |c_k|^2$$

với mọi dãy số hữu hạn $\{c_k\}$ thì $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ là một cơ sở trực chuẩn của $\mathcal{H}$.

Chứng minh. Từ giả thiết kéo theo bởi định lý 1.6.6 rằng $\{f_k\}$ là một cơ sở Riesz của $\mathcal{H}$ vì thế giả sử $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ là một cơ sở trực chuẩn của $\mathcal{H}$,

ta có thể viết $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} = \{Ue_k\}_{k=1}^{\infty}$ với một toán tử khả nghịch bị chặn thích hợp U . Khi đó, với mọi $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^2(\mathbb{N})$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k \right\|^2 = \left\| U \left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k \right) \right\|^2.$$

Từ đó suy ra $\|U\| = \|U^{-1}\| = 1$, theo mệnh đề 1.6.4, ta có :

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2 = \|f\|^2, \forall f \in \mathcal{H}.$$

Do $\|f_k\| = 1, \forall k \in \mathbb{N}$. Ta được kết quả theo mệnh đề 1.5.8. $\square$

1.7 Một số hạn chế của cơ sở

Khái niệm cơ sở là rất quan trọng do nó cho phép ta biểu diễn một vector bất kỳ f trong không gian Banach thông qua một cơ sở đã chọn trước $\{e_k\}$:

$$f = \sum_k c_k e_k. \quad (1.20)$$

Nhờ đó nhiều câu hỏi liên quan đến phần tử bất kỳ trong không gian có thể đưa về các câu hỏi trên các phần tử của cơ sở. Ví dụ, tác động của toán tử tuyến tính bị chặn U trên phần tử f có thể biết nhờ biểu diễn (1.20) và tác động của U trên $\{e_k\}$

$$Uf = U \left(\sum_k c_k f_k \right) = \sum_k c_k Ue_k.$$

Trong chương tiếp theo chúng ta sẽ làm việc với một khái niệm tổng quát hơn khái niệm cơ sở. Người ta đã chứng minh rằng cơ sở tồn tại trong mọi không gian Hilbert khả ly. Trong các không gian Banach thường dùng

cũng tồn tại các cơ sở. Vậy câu hỏi đặt ra là tại sao ta lại phải đi tìm các khái niệm tổng quát hơn khái niệm này?

Một hạn chế chính của cơ sở là thiếu đi tính linh hoạt. Các điều kiện để trở thành cơ sở quá mạnh đến mức ta dường như không thể xây dựng được các cơ sở với những tính chất đặc biệt và một sự thay đổi nhỏ trên cơ sở cũng làm cho nó không còn là cơ sở nữa.

Ta xét ví dụ sau: giả sử $\{e_k\}$ là 1 cơ sở cho không gian Banach X và ϕ là 1 phần tử bất kỳ trong X . Khi đó $\{e_k\} \cup \{\phi\}$ sẽ không còn là cơ sở của X nữa mặc dù với mỗi $f \in X$ đều có biểu diễn dưới dạng

$$f = \sum_k c_k e_k + d\phi. \quad (1.21)$$

Lý do là vì $\{e_k\} \cup \{\phi\}$ không còn độc lập tuyến tính nữa. Có rất nhiều sự lựa chọn các hệ số $\{c_k\}$ và d thỏa mãn (1.21). Một lựa chọn là $d = 0$ và $\{c_k\}$ là các hệ số trong biểu diễn (1.20), một lựa chọn khác là chọn $\{c_k\}$ sao cho $f - \phi = \sum c_k e_k$ và $d = 1$. Ví dụ trên cho ta thấy tính chất cơ sở bị phá vỡ khi cho thêm một tập khác rỗng các véc tơ vào $\{e_k\}$ nhưng tính khai triển được của hệ thì được bảo toàn.

Một câu hỏi được đặt ra là tại sao chúng ta lại muốn cho thêm các phần tử vào 1 cơ sở? Lý do là ta nhận được một sự tự do lựa chọn. Các hệ số trong (1.20) là duy nhất trong khi trong (1.21) ta có thể lựa chọn nhiều khả năng. Ở mục (2.6) chúng ta sẽ thấy rằng việc có nhiều phần tử hơn cần thiết cho một cơ sở có tác dụng làm giảm tiếng ồn.

Trong không gian Hilbert cụ thể như $L^2(\mathbb{R})$, ta có thể đưa ra các cơ sở cụ thể, như cơ sở trực chuẩn Gabor

$$\{e^{2\pi i m x} \chi_{[0,1]}(x - n)\}_{m,n \in \mathbb{Z}} = \{E_m T_n \chi_{[0,1]}(x)\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$$

trong đó $\chi_{[0,1]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{nếu } x \notin [0, 1] \end{cases}$

và T_a, E_b là các toán tử xác định trên $L^2(\mathbb{R})$, $T_a : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ xác định bởi $(T_a f)(x) = f(x - a)$, $E_b : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ xác định bởi $(E_b f)(x) = e^{2\pi i b x} f(x)$ với $a, b \in \mathbb{R}$.

Tuy nhiên, chính ví dụ này đã cho ta thấy những hạn chế của cơ sở. Chú ý rằng:

$$\widehat{\chi}_{[0,1]}(\gamma) = \int_0^1 e^{-2\pi i x \gamma} dx = \frac{e^{-\pi i \gamma}}{i} \cdot \frac{\sin \pi \gamma}{\pi \gamma}.$$

Do $\chi_{[0,1]}$ là gián đoạn, và $\widehat{\chi}_{[0,1]}$ giảm về 0 chậm nên hàm đặc trưng không hấp dẫn theo quan điểm nhìn nhận của giải tích tần số thời gian. Chúng ta hi vọng kết quả thu được sẽ tốt hơn nếu thay thế hàm $\chi_{[0,1]}$ bởi một hàm trơn hơn g , tuy nhiên, định lý Balian- Low chỉ ra rằng có những hạn chế trên tính chất của g nếu ta muốn $\{E_m T_n g\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ trở thành một cơ sở Riesz.

Định lý 1.7.1 *Giả sử $g \in L^2(\mathbb{R})$. Nếu $\{E_m T_n g\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ là một cơ sở Riesz của $L^2(\mathbb{R})$, thì*

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} |xg(x)|^2 dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\gamma \widehat{g}(\gamma)|^2 d\gamma \right) = \infty.$$

Định lý Balian- Low khẳng định rằng một hàm g tạo nên một cơ sở Gabor Riesz không thể địa phương hóa tốt theo cả thời gian lẫn tần số được. Ví dụ, g và $\widehat{g}$ không thể thỏa mãn các đánh giá

$$|g(x)| \leq \frac{C}{1+x^2}, |\widehat{g}(\gamma)| \leq \frac{C}{1+\gamma^2}$$

đồng thời.

Nếu sự triệt tiêu nhanh hơn của g và $\widehat{g}$ là cần thiết, ta cần phải hỏi liệu ta có cần tất cả tính chất đặc trưng cho cơ sở Riesz hoặc liệu ta có

thể giảm nhẹ vài tính chất của chúng. Tính chất ta muốn giữ lại là mỗi $f \in L^2(\mathbb{R})$ có một khai triển hội tụ vô điều kiện của các $\{E_m T_n g\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$, cùng với Bổ đề 1.6.2 điều này chỉ ra rằng ta không nhận được lợi ích gì do yêu cầu $\{E_m T_n g\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ chỉ là một cơ sở thay vì là một cơ sở Riesz. Tuy nhiên, tính chất khai triển đó thực sự có thể kết hợp với g và $\widehat{g}$ có tốc độ triệt tiêu rất nhanh, ta chỉ phải bỏ đi tính chất duy nhất của khai triển trong định nghĩa của cơ sở. Điều này đưa chúng ta chuyển từ nghiên cứu cơ sở sang nghiên cứu khung. Định nghĩa khung một cách chính xác sẽ được đưa ra vào chương tiếp theo, và các diễn giải trên chỉ đưa ra sự khác nhau giữa khung và cơ sở hơn là đưa ra định nghĩa thực sự.

Một hạn chế khác của cơ sở là sự thiếu tính ổn định đối với tác động của các toán tử. Ví dụ, nếu $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ là một cơ sở trực chuẩn thì chỉ những toán tử Unità U sẽ làm cho $\{Ue_k\}_{k=1}^\infty$ là một cơ sở trực chuẩn. Nếu $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ là một cơ sở thì U phải là một song ánh bị chặn để $\{Ue_k\}_{k=1}^\infty$ là một cơ sở.

Những hạn chế vừa đưa ra là một số lý do khiến chúng ta nghiên cứu khái niệm khung mà trong nhiều trường hợp ở đó cơ sở tồn tại nhưng khung vẫn được sử dụng hữu hiệu hơn.

Chương 2

Khung trong không gian Hilbert

2.1 Khung và các tính chất

Khái niệm khung được đưa ra năm 1952 bởi Duffin và Schaeffer khi họ nghiên cứu chuỗi Fourier không điều hòa, tức là chuỗi thiết lập từ $\{e^{i\lambda_n x}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ trong đó $\lambda_n \in \mathbb{R}$ hoặc $\lambda_n \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{Z}$. Tuy nhiên phải đến năm 1986 sau bài báo của Daubechies, Grossmann và Meyer thì khung mới được quan tâm rộng rãi. Khung được sử dụng nhiều trong xử lý tín hiệu, lý thuyết mật mã, lý thuyết lượng tử...

Định nghĩa 2.1.1 Một dãy $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ của các phần tử trong $\mathcal{H}$ là một khung của $\mathcal{H}$ nếu tồn tại hằng số $\infty > A, B > 0$ sao cho

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2 \leq B\|f\|^2, \forall f \in \mathcal{H}. \quad (2.1)$$

Các số A, B được gọi là các cận khung. Chúng là không duy nhất. Cận khung trên tối ưu là cận dưới đúng của tất cả các cận trên của khung, và cận khung dưới tối ưu là cận trên đúng của tất cả các cận dưới của khung. Chú ý rằng các cận tối ưu thực sự là các cận của khung.

Định nghĩa 2.1.2

(i) Một khung là chặt nếu ta có thể chọn $A = B$ là các cận của khung.

(ii) Nếu một khung không còn là khung nữa khi một phần tử tùy ý bị loại bỏ thì nó được gọi là khung thực sự.

Khi ta nói về cận của khung chặt, ta muốn nói giá trị chính xác A cùng lúc là cận trên và cận dưới của khung. Chú ý rằng điều này hơi khác với thuật ngữ của khung tổng quát ở đó, ví dụ một cận khung trên chỉ là một số nào đó mà điều kiện Bessel được thỏa mãn.

Trong trường hợp không gian $\mathcal{H}$ hữu hạn chiều thì dãy $\{f_k\}_{k=1}^m$ là một khung khi và chỉ khi $\text{span}\{f_k\}_{k=1}^m = \mathcal{H}$.

Thật vậy, giả sử $\{f_k\}_{k=1}^m$ là một khung của không gian hữu hạn chiều $\mathcal{H}$. Nếu $\text{span}\{f_k\}_{k=1}^m \neq \mathcal{H}$ thì tồn tại g khác không thuộc $\mathcal{H}$ sao cho $\langle g, f_k \rangle = 0, \forall k = 1, 2, \dots, m$. Theo định nghĩa của khung thì tồn tại các hằng số $A, B > 0$ hữu hạn để (2.1) thỏa mãn. Từ bất đẳng thức vế trái của (2.1) cho $f = g$ và $\langle g, f_k \rangle = 0, \forall k = 1, 2, \dots, m$ ta có $A\|g\|^2 \leq 0$. Do đó $g = 0$, suy ra mâu thuẫn.

Bây giờ giả sử $\text{span}\{f_k\}_{k=1}^m = \mathcal{H}$. Ta có thể giả thiết không phải toàn bộ các f_k đều bằng 0. Theo bất đẳng thức Cauchy- Schwarz,

$$\sum_{k=1}^m |\langle f, f_k \rangle|^2 \leq \sum_{k=1}^m \|f\|^2 \cdot \|f_k\|^2 = \left(\sum_{k=1}^m \|f_k\|^2 \right) \cdot \|f\|^2.$$

Do đó ta có thể chọn $B = \sum_{k=1}^m \|f_k\|^2$.

Xét ánh xạ $\phi : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $\phi(f) = \sum_{k=1}^m |\langle f, f_k \rangle|^2$.

Ta thấy ngay ϕ liên tục.

Do hình cầu đơn vị trong $\mathcal{H}$ là compact nên ta có thể viết tìm $g \in \mathcal{H}$

với $\|g\| = 1$ sao cho

$$A := \sum_{k=1}^m |\langle g, f_k \rangle|^2 = \inf \left\{ \sum_{k=1}^m |\langle f, f_k \rangle|^2 : f \in W, \|f\| = 1 \right\}.$$

Rõ ràng $A > 0$. Với mỗi f khác không trong $\mathcal{H}$ ta có

$$\sum_{k=1}^m |\langle f, f_k \rangle|^2 = \sum_{k=1}^m \left| \left\langle \frac{f}{\|f\|}, f_k \right\rangle \right|^2 \cdot \|f\|^2 \geq A \|f\|^2.$$

Vì vậy $\{f_k\}_{k=1}^m$ là một khung của $\mathcal{H}$.

Trong trường hợp $\mathcal{H}$ là vô hạn chiều nếu $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ là một khung của $\mathcal{H}$ thì $\overline{\text{span}} \{f_k\}_{k=1}^\infty = \mathcal{H}$.

Ta thường cần phải xét các dãy không đầy đủ trong $\mathcal{H}$, chúng có thể không tạo nên các khung của $\mathcal{H}$, nhưng chúng có thể tạo ra các khung của bao tuyến tính đóng của các phần tử của chúng.

Định nghĩa 2.1.3 Giả sử $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ là một dãy trong $\mathcal{H}$. Ta nói rằng $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ là một dãy khung nếu nó là một khung của $\overline{\text{span}} \{f_k\}_{k=1}^\infty$.

Ví dụ 2.1.4 Giả sử $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ là một cơ sở trực chuẩn của $\mathcal{H}$.

(i) bằng cách lặp mỗi phần tử trong dãy $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ 2 lần ta thu được

$$\{f_k\}_{k=1}^\infty = \{e_1, e_1, e_2, e_2, \dots\}$$

mà $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ là khung chặt với cận khung $A = 2$. Nếu chỉ e_1 được lặp lại ta thu được

$$\{f_k\}_{k=1}^\infty = \{e_1, e_1, e_2, e_3, \dots\}$$

mà $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ là một khung với cận $A = 1, B = 2$.

(ii) Giả sử $\{f_k\}_{k=1}^\infty := \left\{ e_1, \frac{1}{\sqrt{2}}e_2, \frac{1}{\sqrt{2}}e_2, \frac{1}{\sqrt{3}}e_3, \frac{1}{\sqrt{3}}e_3, \frac{1}{\sqrt{3}}e_3, \dots \right\}$, nghĩa là $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ là dãy mà mỗi vec tơ $\frac{1}{\sqrt{k}}e_k$ được lặp lại k lần. Khi đó với mỗi

$$f \in H \text{ có } \sum_{k=1}^\infty |\langle f, f_k \rangle|^2 = \sum_{k=1}^\infty k \left| \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{k}}e_k \right\rangle \right|^2 = \|f\|^2.$$

Vì thế $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ là một khung chặt của $\mathcal{H}$ với cận khung $A = 1$.

(iii) Nếu $I \subseteq \mathbb{N}$ là một tập con thực sự thì $\{e_k\}_{k \in I}$ không đầy đủ trong $\mathcal{H}$, và không thể là một khung của $\mathcal{H}$. Tuy nhiên, $\{e_k\}_{k \in I}$ là một khung của $\overline{\text{span}}\{e_k\}_{k \in I}$, tức là, nó là một dãy khung.

Do khung $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ là dãy Bessel, toán tử

$$T : l^2(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{H}, T\{c_k\}_{k=1}^{\infty} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k \quad (2.2)$$

là toán tử bị chặn theo Định lý 1.3.3, T được gọi là toán tử tổng hợp. Theo Bổ đề 1.3.1, toán tử liên hợp được cho bởi

$$T^* : \mathcal{H} \rightarrow l^2(\mathbb{N}), T^*f = \{\langle f, f_k \rangle\}_{k=1}^{\infty}.$$

T^* được gọi là toán tử phân tích. Bằng cách lấy hợp T và T^* ta thu được toán tử khung

$$S : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}, Sf = TT^*f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, f_k \rangle f_k. \quad (2.3)$$

Chú ý rằng do $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ là một dãy Bessel, chuỗi định nghĩa S hội tụ vô điều kiện với $\forall f \in \mathcal{H}$ theo Hệ quả 1.3.5. Ta phát biểu một vài tính chất quan trọng của S .

Bổ đề 2.1.5 *Giả sử $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ là một khung với toán tử khung S và cận khung A, B . Khi đó ta có các khẳng định sau:*

(i) S bị chặn, khả nghịch, tự liên hợp và là toán tử dương.

(ii) $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty}$ là một khung với các cận B^{-1}, A^{-1} , nếu A, B là các cận tối ưu của $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ thì các cận B^{-1}, A^{-1} là tối ưu của $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Toán tử khung của $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty}$ là S^{-1} .

Chứng minh. (i) S bị chặn như một sự hợp thành của hai toán tử bị

chặn. Theo Định lý 1.3.3

$$\|S\| = \|TT^*\| = \|T\| \cdot \|T^*\| = \|T\|^2 \leq B.$$

Do $S^* = (TT^*)^* = TT^* = S$, toán tử S là tự liên hợp. Bất đẳng thức (2.1) nghĩa là $A\|f\|^2 \leq \langle Sf, f \rangle \leq B\|f\|^2, \forall f \in \mathcal{H}$. Từ đó $AI \leq S \leq BI$, do đó S dương. Ngoài ra, $0 \leq I - B^{-1}S \leq \frac{B-A}{B}I$ và vậy thì

$$\|I - B^{-1}S\| = \sup_{\|f\|=1} |\langle (I - B^{-1}S)f, f \rangle| \leq \frac{B-A}{B} < 1$$

mà theo Định lý 1.1.6 chỉ ra rằng S là khả nghịch.

(ii) Chú ý rằng với $f \in \mathcal{H}$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, S^{-1}f_k \rangle|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle S^{-1}f, f_k \rangle|^2 \leq B\|S^{-1}f\|^2 \leq B\|S^{-1}\|^2\|f\|^2.$$

Nghĩa là, $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty}$ là một dãy Bessel. Từ đó kéo theo toán tử khung của $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty}$ được định nghĩa tốt. Theo định nghĩa, nó tác động lên $f \in \mathcal{H}$ bởi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle f, S^{-1}f_k \rangle S^{-1}f_k = S^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \langle S^{-1}f, f_k \rangle f_k = S^{-1}SS^{-1}f = S^{-1}f \quad (2.4)$$

điều này chỉ ra rằng toán tử khung của $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty}$ bằng S^{-1} . Toán tử S^{-1} giao hoán với cả S và I , vì thế sử dụng Định lý 1.1.9 ta có thể “nhân bất đẳng thức” $AI \leq S \leq BI$ với S^{-1} , điều này mang lại

$$B^{-1}I \leq S^{-1} \leq A^{-1}I$$

tức là,

$$B^{-1}\|f\|^2 \leq \langle S^{-1}f, f \rangle \leq A^{-1}\|f\|^2, \forall f \in \mathcal{H}.$$

Theo (2.4) $B^{-1}\|f\|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, S^{-1}f_k \rangle|^2 \leq A^{-1}\|f\|^2, \forall f \in \mathcal{H}$, vì vậy $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty}$ là một khung với các cận khung B^{-1}, A^{-1} . Để chứng minh

tính tối ưu của các cận(trong trường hợp A, B là các cận tối ưu của $\{f_k\}_{k=1}^\infty$), giả sử A là cận dưới tối ưu của $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ và giả thiết rằng cận trên tối ưu của $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^\infty$ là $C < \frac{1}{A}$. Bằng cách áp dụng điều ta vừa chứng minh cho khung $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^\infty$ có toán tử khung S^{-1} , ta thu được $\{f_k\}_{k=1}^\infty = \{(S^{-1})^{-1}S^{-1}f_k\}_{k=1}^\infty$ có cận dưới $\frac{1}{C} > A$, nhưng đây là mâu thuẫn. Vì vậy $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^\infty$ có cận trên tối ưu $\frac{1}{A}$. Lập luận cho cận dưới tối ưu là tương tự. $\square$

Khung $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^\infty$ được gọi là đối ngẫu chính tắc của $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ bởi vì nó đóng cùng vai trò trong lý thuyết khung như đối ngẫu của một cơ sở, xem Định lý 2.1.6 và 2.3.1. Thường thường ta sẽ bỏ qua từ “chính tắc” và chỉ nói là khung đối ngẫu.

Sự khai triển khung, được phát biểu ở dưới, là kết quả quan trọng nhất về khung. Nó chỉ ra rằng nếu $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ là một khung của $\mathcal{H}$, thì mỗi phần tử trong $\mathcal{H}$ có một biểu diễn như một tổ hợp tuyến tính vô hạn của các phần tử khung. Vì vậy rất tự nhiên nếu xem một khung như một kiểu “cơ sở tổng quát”.

Định lý 2.1.6 *Giả sử $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ là một khung với toán tử khung S . Khi đó*

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, S^{-1}f_k \rangle f_k, \forall f \in \mathcal{H}. \quad (2.5)$$

Chuỗi hội tụ vô điều kiện với $\forall f \in \mathcal{H}$.

Chứng minh. Giả sử $f \in \mathcal{H}$. Sử dụng các tính chất của toán tử khung trong Bổ đề 2.1.5:

$$f = SS^{-1}f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle S^{-1}f, f_k \rangle f_k = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, S^{-1}f_k \rangle f_k.$$

Do $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ là một dãy Bessel và $\{\langle f, S^{-1}f_k \rangle\}_{k=1}^\infty \in l^2(\mathbb{N})$, chuỗi hội tụ vô điều kiện được suy ra từ Hệ quả 1.3.5. $\square$

Tương tự, ta có biểu diễn

$$f = S^{-1}Sf = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, f_k \rangle S^{-1}f_k, \forall f \in \mathcal{H}. \quad (2.6)$$

Định lý 2.1.6 chỉ ra rằng mọi thông tin về $f \in \mathcal{H}$ được chứa đựng trong dãy $\{\langle f, S^{-1}f_k \rangle\}_{k=1}^\infty$. Các số $\langle f, S^{-1}f_k \rangle$ được gọi là các hệ số khung.

Bổ đề sau chỉ ra rằng chỉ cần kiểm tra điều kiện khung trong một tập trù mật.

Bổ đề 2.1.7 *Giả sử $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ là một dãy của các phần tử trong $\mathcal{H}$ và tồn tại các hằng số $A, B > 0$ sao cho*

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2 \leq B\|f\|^2 \quad (2.7)$$

với mọi f trong một tập con trù mật V của $\mathcal{H}$. Khi đó $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ là một khung của $\mathcal{H}$ với các cận A, B .

Chứng minh. Ta đã chứng minh trong Bổ đề 1.3.6 rằng $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ là một dãy Bessel với cận B nếu (2.7) được thỏa mãn. Bây giờ ta chứng minh rằng (2.7) kéo theo điều kiện khung dưới được thỏa mãn trên $\mathcal{H}$. Biểu thị dưới dạng toán tử tổng hợp T , giả thiết của ta nghĩa là

$$A\|f\|^2 \leq \|T^*f\|^2, \forall f \in V. \quad (2.8)$$

Do T^* bị chặn và V trù mật trong $\mathcal{H}$, kéo theo (2.8) thỏa mãn $\forall f \in \mathcal{H}$. $\square$

Một chú ý là: chứng minh điều kiện khung dưới mở rộng từ một tập trù mật đến $\mathcal{H}$ sử dụng giả thiết về điều kiện khung trên được thỏa mãn.

2.2 Khung và toán tử

Bổ đề 2.1.5 chỉ ra rằng nếu $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ là một khung, thì $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^\infty$ cũng là khung. Đây là trường hợp đặc biệt của nhiều kết quả tổng quát hơn : $\{Uf_k\}_{k=1}^\infty$ thực sự là một khung đối với một lớp rộng các toán tử U . Ta kí hiệu giả nghịch đảo (xem Bổ đề 1.1.12) của một toán tử U bởi $U^\dagger$.

Mệnh đề 2.2.1 *Giả sử $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ là một khung của $\mathcal{H}$ với các cận A, B và giả sử $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ là toán tử bị chặn với miền giá trị đóng. Thì $\{Uf_k\}_{k=1}^\infty$ là một dãy khung với các cận khung là $A\|U^\dagger\|^{-2}, B\|U\|^2$.*

Chứng minh. Nếu $f \in \mathcal{H}$ thì

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, Uf_k \rangle|^2 \leq B\|U^*f\|^2 \leq B\|U\|^2\|f\|^2$$

điều đó chứng minh rằng $\{Uf_k\}_{k=1}^\infty$ là một dãy Bessel. Để chứng minh điều kiện khung dưới, giả sử $g \in \text{span}\{Uf_k\}_{k=1}^\infty$, ta viết $g = Uf$ với $f \in \text{span}\{f_k\}_{k=1}^\infty$. Theo Bổ đề 1.1.13, toán tử $UU^\dagger$ là phép chiếu trực giao lên $\mathcal{R}_U$ và do đó nó tự liên hợp. Vì vậy

$$g = Uf = (UU^\dagger)^*Uf = (U^\dagger)^*U^*Uf.$$

Do đó

$$\begin{aligned} \|g\|^2 &\leq \|(U^\dagger)^*\|^2 \|U^*Uf\|^2 \leq \frac{\|(U^\dagger)^*\|^2}{A} \sum_{k=1}^{\infty} |\langle U^*Uf, f_k \rangle|^2 \\ &= \frac{\|(U)^\dagger\|^2}{A} \sum_{k=1}^{\infty} |\langle g, Uf_k \rangle|^2. \end{aligned}$$

Do đó điều kiện khung dưới được thỏa mãn với $\forall g \in \text{span}\{Uf_k\}_{k=1}^\infty$, do Bổ đề 2.1.7 nó cũng đúng trên $\overline{\text{span}}\{Uf_k\}_{k=1}^\infty$. $\square$

Hệ quả 2.2.2 Giả thiết $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ là một khung của $\mathcal{H}$ với các cận A, B và $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ là toán tử toàn ánh, bị chặn. Khi đó $\{Uf_k\}_{k=1}^{\infty}$ là một khung của $\mathcal{H}$ với các cận khung $A\|U^\dagger\|^{-2}, B\|U\|^2$.

Bổ đề 2.2.3 Nếu $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ là một dãy khung với các cận A, B và $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ là toán tử unita, khi đó $\{Uf_k\}_{k=1}^{\infty}$ là một dãy khung với các cận khung A, B .

Chú ý rằng mỗi khung ta có thể liên kết với một khung chặt chính tắc với cận khung $A = 1$.

Định lý 2.2.4 Giả sử $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ là một khung của $\mathcal{H}$ với toán tử khung S . Ký hiệu căn bậc hai dương của S^{-1} bằng $S^{-\frac{1}{2}}$. Khi đó $\{S^{-\frac{1}{2}}f_k\}_{k=1}^{\infty}$ là một khung chặt với cận khung bằng 1, và

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, S^{-\frac{1}{2}}f_k \rangle S^{-\frac{1}{2}}f_k, \forall f \in \mathcal{H}.$$

Chứng minh. Sự tồn tại duy nhất của căn bậc hai dương của S^{-1} được suy ra từ Bổ đề 1.1.10. Từ $S^{-\frac{1}{2}}$ là một giới hạn của dãy đa thức trong S^{-1} , nó giao hoán với S^{-1} và vì thế giao hoán với S . Vì vậy, mỗi $f \in \mathcal{H}$ có thể viết :

$$f = S^{-\frac{1}{2}}SS^{-\frac{1}{2}}f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle S^{-\frac{1}{2}}f, f_k \rangle S^{-\frac{1}{2}}f_k = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, S^{-\frac{1}{2}}f_k \rangle S^{-\frac{1}{2}}f_k.$$

Bằng cách lấy tích vô hướng với f ta thu được $\{S^{-\frac{1}{2}}f_k\}_{k=1}^{\infty}$ là một khung chặt với cận khung bằng 1. $\square$

Phép chiếu trực giao đóng một vai trò quan trọng trong nhiều trường hợp. Ta phát biểu vài mối quan hệ giữa khung và phép chiếu trực giao.

Mệnh đề 2.2.5 Giả sử $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ là một dãy trong không gian Hilbert

$\mathcal{H}$ và P ký hiệu phép chiếu trực giao của $\mathcal{H}$ lên một không gian con đóng V . Khi đó ta có các khẳng định sau:

(i) Nếu $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ là một khung của $\mathcal{H}$ với các cận khung A, B thì $\{Pf_k\}_{k=1}^{\infty}$ là một khung của V với các cận khung A, B .

(ii) Nếu $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ là một khung của V với toán tử khung S thì phép chiếu trực giao của $\mathcal{H}$ lên V được cho bởi

$$Pf = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, S^{-1}f_k \rangle f_k, f \in \mathcal{H}. \quad (2.9)$$

Chứng minh. Lấy $x \in P(\mathcal{H})$ bất kỳ.

Do $\sum_k |\langle x, Pf_k \rangle|^2 = \sum_k |\langle Px, f_k \rangle|^2 = \sum_k |\langle x, f_k \rangle|^2$ nên ta có (i).

Để chứng minh (ii), ta chỉ cần chứng minh rằng nếu P được định nghĩa bởi (2.9) thì $Pf = f$ với $f \in V$ và $Pf = 0$ với $f \in V^{\perp}$. Giả sử $f \in V$. Khi đó theo Định lý 2.1.6 thì

$$f = \sum_k \langle f, S^{-1}f_k \rangle f_k.$$

Do đó $Pf = f$.

Giả sử $f \in V^{\perp}$. Do $S : V \rightarrow V$ là song ánh nên $S^{-1}(V) = V$.

Từ đó $\langle f, S^{-1}f_k \rangle = 0$ với $\forall k$. Từ đó $Pf = 0$. $\square$

Mệnh đề 2.2.6 Giả sử $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ là một dãy khung trong $\mathcal{H}$. Khi đó phép chiếu trực giao Q của dãy $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^2(\mathbb{N})$ lên miền giá trị của T^* được cho bởi

$$Q\{c_k\}_{k=1}^{\infty} = \left\{ \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} c_k S^{-1}f_k, f_j \right\rangle \right\}_{j=1}^{\infty}. \quad (2.10)$$

Chứng minh. Kiểm tra theo (2.6) thì Q được xác định bởi (2.10) là toán tử đồng nhất trên $\mathcal{R}_{T^*}$ và 0 trên $\mathcal{R}_{T^*}^\perp = \mathcal{N}_T$. $\square$

2.3 Khung và cơ sở

Bây giờ chúng ta hãy đề cập đến vài mối quan hệ quan trọng giữa khung và cơ sở Riesz.

Định lý 2.3.1 *Một cơ sở Riesz $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ của $\mathcal{H}$ là một khung của $\mathcal{H}$ và các cận của cơ sở Riesz trùng với các cận khung. Cơ sở đôi ngẫu Riesz là $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^\infty$.*

Chứng minh. Theo Mệnh đề 1.6.4, một cơ sở Riesz $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ của $\mathcal{H}$ cũng là một khung của $\mathcal{H}$ và các cận của cơ sở Riesz trùng với các cận khung. Phần còn lại suy ra từ sự phân tích khung kết hợp với phần duy nhất của Định lý 1.6.3. $\square$

Một khung mà không là cơ sở Riesz được gọi là khung thừa, nếu $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ là khung nhưng không là cơ sở Riesz thì tồn tại hệ số $\{c_k\}_{k=1}^\infty \in l^2(\mathbb{N}) \setminus \{0\}$ sao cho $\sum_{k=1}^\infty c_k f_k = 0$.

Ta thấy trong Định lý 2.1.6 hệ số khung $\{\langle f, S^{-1}f_k \rangle\}_{k=1}^\infty$ dẫn tới một biểu diễn của $f \in \mathcal{H}$ đã cho. Nếu $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ là một khung thừa, có các hệ số khác $\{c_k\}_{k=1}^\infty \in l^2(\mathbb{N})$ mà $f = \sum_{k=1}^\infty c_k f_k$. Hệ số khung $\{\langle f, S^{-1}f_k \rangle\}_{k=1}^\infty$ có chuẩn l^2 cực tiểu trong tất cả các dãy biểu diễn f :

Bổ đề 2.3.2 *Giả sử $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ là một khung của $\mathcal{H}$ và $f \in \mathcal{H}$. Nếu f có biểu diễn $f = \sum_{k=1}^\infty c_k f_k$ với các hệ số $\{c_k\}_{k=1}^\infty$ nào đó thì*

$$\sum_{k=1}^\infty |c_k|^2 = \sum_{k=1}^\infty |\langle f, S^{-1}f_k \rangle|^2 + \sum_{k=1}^\infty |c_k - \langle f, S^{-1}f_k \rangle|^2.$$

Như một hệ quả của Bổ đề 2.3.2 và Định lý 1.1.14, ta thu được một công thức cho toán tử giả nghịch đảo của toán tử tổng hợp.

Định lý 2.3.3 *Giả sử $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ là một khung với toán tử tổng hợp T và toán tử khung S . Khi đó $T^\dagger f = \{\langle f, S^{-1}f_k \rangle\}_{k=1}^\infty$.*

Các cận khung tối ưu có thể được biểu thị dưới dạng các toán tử T, S và các nghịch đảo, giả nghịch đảo của chúng.

Mệnh đề 2.3.4 *Các cận tối ưu của khung $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ là A, B được cho bởi*

$$A = \|S^{-1}\|^{-1} = \|T^\dagger\|^{-2}, B = \|S\| = \|T\|^2.$$

Chứng minh. Theo định nghĩa ta có

$$B = \sup_{\|f\|=1} \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2 = \sup_{\|f\|=1} |\langle Sf, f \rangle| = \|S\|.$$

Sử dụng kết quả này cho khung đối ngẫu $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^\infty$ (có toán tử khung S^{-1} và cận trên tối ưu $\frac{1}{A}$ theo Bổ đề 2.1.5) ta thu được $\frac{1}{A} = \|S^{-1}\|$. Để chứng minh phần còn lại, từ $S = TT^*$ kéo theo $\|S\| = \|TT^*\| = \|T\|^2$. Cuối cùng, theo Định lý 2.3.3 và Bổ đề 2.1.5,

$$\|T^\dagger f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \{\langle f, S^{-1}f_k \rangle\}_{k=1}^\infty \leq \frac{1}{A} \|f\|^2$$

mà $\frac{1}{A}$ là hằng số dương nhỏ nhất có thể nên $\|T^\dagger\|^2 = \frac{1}{A}$. □

Ví dụ 2.3.5 ta xét cơ sở trực chuẩn $\{e_k\}_{k \in \mathbb{Z}} = \{e^{2\pi i k x}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ của $L^2(0, 1)$. Giả sử $I \subset [0, 1]$ là một khoảng con thực sự, $|I| < 1$. Từ

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, e_k \rangle|^2 = \|f\|^2, \forall f \in L^2(0, 1)$$

đẳng thức đặc biệt đúng cho mọi $f \in L^2(I)$. Vì thế, $\{e_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ là khung chặt của $L^2(I)$. Hơn nữa $\{e_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ là khung thừa. Tuy nhiên, $\{e_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ độc lập tuyến tính.

Ví dụ 2.3.5 chỉ ra tính chất chính của khung: chúng có thể thừa và độc lập tuyến tính cùng lúc. Lý do là vì có sự khác nhau giữa độc lập tuyến tính (tức là, độc lập của mọi tập con hữu hạn) và w - độc lập tuyến tính, như thảo luận trong phần 1.2. Đối với các khung, khái niệm đúng của độc lập tuyến tính là w - độc lập tuyến tính, ta quay lại quan điểm này trong phần 3.1.

Người ta hi vọng rằng cũng như trường hợp hữu hạn chiều nếu $\overline{\text{span}}\{f_k\}_{k=1}^\infty = \mathcal{H}$, thì mỗi $f \in \mathcal{H}$ có một khai triển $f = \sum_{k=1}^\infty c_k f_k$ với các hệ số nào đó $\{c_k\}_{k=1}^\infty$. Tuy nhiên, trong không gian Hilbert vô hạn chiều điều này không còn thỏa mãn.

Ví dụ 2.3.6 Giả sử $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ là một cơ sở trực chuẩn của $\mathcal{H}$ và định nghĩa

$$f_k := e_k + e_{k+1}, k \in \mathbb{N}.$$

(i) $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ là đầy đủ và cực tiểu, và dãy song trực giao duy nhất của nó được cho bởi $g_k = \sum_{n=1}^k (-1)^{n+1} e_n$ nếu k là lẻ, và $g_k = \sum_{n=1}^k (-1)^n e_n$ nếu k là chẵn.

(ii) $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ là dãy Bessel nhưng không là khung.

Đầu tiên, ta chứng minh rằng $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ là dãy Bessel bởi đánh giá trực tiếp. Cho $f \in \mathcal{H}$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^\infty |\langle f, e_k + e_{k+1} \rangle|^2 &= \sum_{k=1}^\infty |\langle f, e_k \rangle + \langle f, e_{k+1} \rangle|^2 \\ &\leq 2 \sum_{k=1}^\infty |\langle f, e_k \rangle|^2 + 2 \sum_{k=1}^\infty |\langle f, e_{k+1} \rangle|^2 \leq 4\|f\|^2. \end{aligned}$$

Để chứng minh rằng $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ là đầy đủ, giả thiết $f \in \mathcal{H}$ và

$$|\langle f, e_k + e_{k+1} \rangle| = 0, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Khi đó $\langle f, e_k \rangle = -\langle f, e_{k+1} \rangle, \forall k \in \mathbb{N}$, kéo theo $|\langle f, e_k \rangle|$ là hằng số. Từ $\sum_{k=1}^\infty |\langle f, e_k \rangle|^2 = \|f\|^2 < \infty$, ta kết luận $|\langle f, e_k \rangle| = 0, \forall k$ vì thế $f = 0$. Do đó, $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ là đầy đủ. Để chứng minh rằng $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ là cực tiểu, giả thiết ngược lại, tức là, với $j \in \mathbb{N}$ nào đó,

$$\begin{aligned} f_j &\in \overline{\text{span}}\{f_k\}_{k \neq j} = \text{span}\{e_1 + e_2, e_2 + e_3, \dots, e_{j-1} + e_j, e_{j+1} + e_{j+2}, \dots\} \\ &= \overline{\text{span}}\{e_1 + e_2, e_2 + e_3, \dots, e_{j-1} + e_j\} \oplus \overline{\text{span}}\{e_{j+k} + e_{j+k+1}\}_{k=1}^\infty. \end{aligned}$$

Từ $f_j = e_j + e_{j+1}$, dẫn đến

$$e_j \in \text{span}\{e_1 + e_2, e_2 + e_3, \dots, e_{j-1} + e_j\}.$$

Nhưng điều này không đúng. Do đó $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ là cực tiểu. Theo Bổ đề 1.4.1, $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ có một dãy song trực giao duy nhất $\{g_k\}_{k=1}^\infty$, được xác định bởi điều kiện

$$\langle g_k, e_k + e_{k+1} \rangle = 1, \langle g_k, e_j + e_{j+1} \rangle = 0, j \neq k. \quad (2.11)$$

Cho $k \in \mathbb{N}$, giả sử $C := \langle g_k, e_k \rangle$. Khi đó (2.11) kéo theo $\langle g_k, e_{k+1} \rangle = 1 - C$ và khái quát cho $j > k, |\langle g_k, e_j \rangle| = |1 - C|$. Sử dụng $\{e_j\}_{k=1}^\infty$ là một dãy Bessel, suy ra $C = 1$, tức là

$$\langle g_k, e_k \rangle = 1, \langle g_k, e_j \rangle = 0, j > k.$$

Sử dụng lại điều kiện 2 trong (2.11), ta được $\langle g_k, e_j \rangle = (-1)^{k-j}$ nếu $j < k$. Từ đây, biểu thức của g_k được cho ở bên trên suy ra từ $g_k = \sum_{j=1}^\infty \langle g_k, e_j \rangle e_j$.

Để chứng minh rằng $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ không là khung, ta áp dụng điều kiện khung cho phần tử $\{g_j\}_{j=1}^{\infty}$ trong hệ song trực giao. Chú ý rằng $\|g_j\| = \sqrt{j}$, vì vậy

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle g_j, f_k \rangle|^2 = 1 = \frac{1}{j} \|g_j\|^2.$$

Do điều này đúng với $\forall j \in \mathbb{N}$ ta thấy rằng $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ không thỏa mãn điều kiện khung dưới.

Ví dụ trên cho ta thấy rằng hợp của các cơ sở của các không gian con có thể không là cơ sở hoặc là khung. Thật vậy, $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} (e_{2k-1} + e_{2k}) \right\}_{k=1}^{\infty}$ là một cơ sở trực chuẩn của $\overline{\text{span}} \{e_{2k-1} + e_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$ và $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} (e_{2k} + e_{2k+1}) \right\}_{k=1}^{\infty}$ là một cơ sở trực chuẩn của $\overline{\text{span}} \{e_{2k} + e_{2k+1}\}_{k=1}^{\infty}$, nhưng hợp là hệ $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} (e_k + e_{k+1}) \right\}_{k=1}^{\infty}$ không là cơ sở hay khung của

$$\overline{\text{span}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} (e_k + e_{k+1}) \right\}_{k=1}^{\infty} = \mathcal{H}.$$

Thậm chí nó không có tính chất khai triển: mặc dù $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ là đầy đủ, tồn tại $f \in \mathcal{H}$ mà không thể viết $f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k$ cho bất kỳ lựa chọn hệ số $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$. Ví dụ, lấy $f = e_1$.

Không tồn tại một cơ sở nào của $\mathcal{H}$ chứa $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ như là một tập con. Hơn nữa, ta có thể chứng minh rằng $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ không thể mở rộng thành một khung của $\mathcal{H}$ bằng cách thêm 1 số hữu hạn các phần tử. Nhưng từ (ii) suy ra nếu dãy $\{h_k\}$ là khung thì $\{h_k\} \cup \{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ cũng là khung.

Định lý 2.3.7 *Loại bỏ một vec tơ f_j từ một khung $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ của $\mathcal{H}$ sẽ tạo ra một khung khác hoặc một tập không đầy đủ. Chính xác hơn:*

Nếu $\langle f_j, S^{-1} f_j \rangle \neq 1$ thì $\{f_k\}_{k \neq j}$ là một khung của $\mathcal{H}$.

Nếu $\langle f_j, S^{-1} f_j \rangle = 1$ thì $\{f_k\}_{k \neq j}$ là không đầy đủ.

Chứng minh. Chọn bất kỳ $j \in \mathbb{N}$. Bởi sự phân tích khung,

$$f_j = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f_j, S^{-1}f_k \rangle f_k.$$

Đặt $a_k = \langle f_j, S^{-1}f_k \rangle$ vì thế $f_j = \sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k$. Rõ ràng, ta cũng có $f_j = \sum_{k \neq j}^{\infty} \delta_{j,k} f_k$ vì thế Mệnh đề 2.3.2 mang lại quan hệ sau giữa $\delta_{j,k}$ và a_k :

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{k=1}^{\infty} |\delta_{j,k}|^2 \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |a_k - \delta_{j,k}|^2 = |a_j|^2 + \sum_{k \neq j} |a_k|^2 + |a_j - 1|^2 + \sum_{k \neq j} |a_k|^2. \end{aligned}$$

Ta xét từng trường hợp $a_j = 1$ và $a_j \neq 1$. Đầu tiên, cho $a_j = 1$, từ công thức trên $\sum_{k \neq j} |a_k|^2 = 0$, vì vậy mà

$$a_k = \langle S^{-1}f_j, f_k \rangle = 0, \forall k \neq j.$$

Từ $a_j = \langle S^{-1}f_j, f_j \rangle = 1$, ta biết $S^{-1}f_j \neq 0$. Vì vậy, ta tìm được phần tử khác không $S^{-1}f_j$ mà trực giao với $\{f_k\}_{k \neq j}$, vì thế $\{f_k\}_{k \neq j}$ là không đầy đủ.

Bây giờ cho $a_j \neq 1$, thì $f_j = \frac{1}{1-a_j} \sum_{k \neq j} a_k f_k$. Với bất kỳ $f \in \mathcal{H}$, bất đẳng thức Cauchy-Schwarz cho ta:

$$\begin{aligned} |\langle f, f_j \rangle|^2 &= \left| \frac{1}{1-a_j} \sum_{k \neq j} a_k \langle f, f_k \rangle \right|^2 \leq \frac{1}{|1-a_j|^2} \sum_{k \neq j} |a_k|^2 \sum_{k \neq j} |\langle f, f_k \rangle|^2 \\ &= C \sum_{k \neq j} |\langle f, f_k \rangle|^2 \end{aligned}$$

trong đó $C = \frac{1}{|1-a_j|^2} \sum_{k \neq j} |a_k|^2$. Giả sử A ký hiệu cận khung dưới của $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$. Thì:

$A\|f\|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2 = \sum_{k \neq j} |\langle f, f_k \rangle|^2 + |\langle f, f_j \rangle|^2 \leq (1+C) \sum_{k \neq j} |\langle f, f_k \rangle|^2$
suy ra rằng $\{f_k\}_{k \neq j}$ thỏa mãn điều kiện khung dưới với cận dưới $\frac{A}{1+C}$, rõ ràng $\{f_k\}_{k \neq j}$ cũng thỏa mãn điều kiện khung trên. $\square$

Chứng minh của Định lý 2.3.7 chỉ ra một tính chất thú vị của $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ và khung đôi ngẫu $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Mệnh đề 2.3.8 Nếu $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ là khung chính xác, thì $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ và $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty}$ là song trực giao và $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ là cơ sở của $\mathcal{H}$.

Chứng minh. Giả thiết $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ là khung chính xác và cố định $j \in \mathbb{N}$. Khi đó $\{f_k\}_{k \neq j}$ không là khung. Từ Định lý 2.3.7 suy ra rằng $\langle f_j, S^{-1}f_j \rangle = 1$. Chứng minh của Định lý 2.3.7 chỉ ra rằng $\langle f_j, S^{-1}f_k \rangle = \delta_{j,k}$, tức là, $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ và $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty}$ là song trực giao. Theo khai triển khung, ta có mỗi $f \in \mathcal{H}$ có thể được biểu thị như $f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, S^{-1}f_k \rangle f_k$. Để chỉ ra rằng $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ là cơ sở, chỉ cần chỉ ra rằng biểu diễn này là duy nhất. Nhưng nếu $f = \sum_{k=1}^{\infty} b_k f_k$ với các hệ số b_k nào đó, thì

$$\langle f, S^{-1}f_k \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{\infty} b_j f_j, S^{-1}f_k \right\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} b_j \langle f_j, S^{-1}f_k \rangle = b_k.$$

$\square$

Trong Định lý 3.1.1 ta sẽ chứng minh khung chính xác thực sự là một cơ sở Riesz.

2.4 Các đặc trưng của khung

Bây giờ ta quay lại định nghĩa khung. Để kiểm tra dãy $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ là khung, ta phải xác minh sự tồn tại của cận khung dưới dương A và cận

khung trên hữu hạn B. Điều kiện khung dưới là tiêu chuẩn quan trọng nhất để xác minh: ước lượng trên cho $\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2$ không tốt sẽ buộc ta cần lấy một giá trị lớn hơn của B so với yêu cầu, nhưng ước lượng dưới xấu có thể dễ dàng làm cho không thể tìm một giá trị của A mà có thể sử dụng cho mọi $f \in \mathcal{H}$.

Bây giờ ta cho một đặc trưng của các khung qua toán tử tổng hợp. Nó không cho bất kỳ thông tin nào về các cận khung.

Định lý 2.4.1 Một dãy $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ trong $\mathcal{H}$ là khung của $\mathcal{H}$ khi và chỉ khi

$$T : \{c_k\}_{k=1}^{\infty} \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k$$

là ánh xạ được định nghĩa tốt từ $l^2(\mathbb{N})$ lên $\mathcal{H}$.

Chứng minh. Đầu tiên, giả sử $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ là một khung. Theo Định lý 1.3.3, T là toán tử bị chặn được định nghĩa tốt từ $l^2(\mathbb{N})$ vào $\mathcal{H}$, và theo Bổ đề 2.1.5(i), toán tử khung $S = TT^*$ là toàn ánh. Do đó T là toàn ánh. Để chứng minh điều ngược lại, giả sử T là toán tử được định nghĩa tốt từ $l^2(\mathbb{N})$ lên $\mathcal{H}$. Khi đó Bổ đề 1.3.1 chỉ ra rằng T bị chặn và $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ là dãy Bessel. Ký hiệu $T^\dagger : \mathcal{H} \rightarrow l^2(\mathbb{N})$ là giả nghịch đảo của T . Cho $f \in \mathcal{H}$, ta có :

$$f = TT^\dagger f = \sum_{k=1}^{\infty} (T^\dagger f)_k f_k$$

mà $(T^\dagger f)_k$ kí hiệu tọa độ thứ k của $T^\dagger f$. Do đó :

$$\begin{aligned} \|f\|^4 = |\langle f, f \rangle|^2 &= \left| \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} (T^\dagger f)_k f_k, f \right\rangle \right|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |(T^\dagger f)_k|^2 \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2 \\ &\leq \|T^\dagger\|^2 \|f\|^2 \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2 \end{aligned}$$

ta kết luận rằng

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2 \geq \frac{1}{\|T^\dagger\|^2} \|f\|^2.$$

□

Cho một dãy tùy ý $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ trong không gian Hilbert. Khi đó $\overline{\text{span}} \{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ là một không gian Hilbert.

Hệ quả 2.4.2 Một dãy $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ trong $\mathcal{H}$ là dãy khung khi và chỉ khi toán tử tổng hợp được định nghĩa tốt trên $l^2(\mathbb{N})$ và có miền giá trị đóng.

Hệ quả 2.4.3 Đối với một dãy $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ trong $\mathcal{H}$, điều sau đây xảy ra:

(i) $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ là một dãy khung khi và chỉ khi

$$f \rightarrow \{\langle f, f_k \rangle\}_{k=1}^{\infty} \quad (2.12)$$

là ánh xạ được định nghĩa tốt từ $\mathcal{H}$ lên một không gian con đóng của $l^2(\mathbb{N})$.

(ii) Nếu $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ là một dãy khung, nó là một khung của $\mathcal{H}$ khi và chỉ khi ánh xạ (2.12) là đơn ánh.

Chứng minh. Chứng minh (i) sử dụng toán tử bị chặn có miền giá trị đóng khi và chỉ khi toán tử liên hợp của nó có miền giá trị đóng. Đầu tiên, giả thiết rằng $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ là một dãy khung. Khi đó toán tử tổng hợp T được định nghĩa tốt và bị chặn, và có miền giá trị đóng. Vì vậy T^* được định nghĩa tốt và có miền giá trị đóng. Để chứng minh điều ngược lại, nếu (2.12) ánh xạ $\mathcal{H}$ vào $l^2(\mathbb{N})$, thì $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ là một dãy Bessel. Do đó toán tử tổng hợp T được định nghĩa tốt và bị chặn, ngoài ra, nếu miền giá trị của ánh xạ (2.12) là đóng, thì điều này cũng đúng cho T . Do Hệ quả 2.4.2 thì $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ là một dãy khung.

Để chứng minh (ii) ta chú ý rằng $\overline{\mathcal{R}_T} = (\mathcal{N}_{T^*})^\perp$. Vì vậy, nếu $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ là một khung của $\mathcal{H}$ thì T^* là đơn ánh. Mặt khác, nếu (2.12) xác định một đơn ánh, thì $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ là đầy đủ trong $\mathcal{H}$, do đó nếu $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ là một dãy khung thì nó là một khung của $\mathcal{H}$. $\square$

Theo Định lý 2.4.1 câu hỏi về sự tồn tại của cận khung trên, dưới được thay thế bởi sự nghiên cứu về chuỗi vô hạn: ta cần kiểm tra $\sum_{k=1}^\infty c_k f_k$ hội tụ $\forall \{c_k\}_{k=1}^\infty \in l^2(\mathbb{N})$ và mỗi $f \in \mathcal{H}$ có thể biểu diễn theo chuỗi vô hạn. Các kết quả khác được đề cập ở đây cũng không bao gồm cận khung. Bây giờ ta phát biểu một đặc trưng của khung cho thông tin về cận khung.

Bổ đề 2.4.4 *Một dãy $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ trong $\mathcal{H}$ là một khung của $\mathcal{H}$ với các cận A, B khi và chỉ khi các điều kiện sau thoả mãn:*

(i) $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ là đầy đủ trong $\mathcal{H}$.

(ii) Toán tử tổng hợp T được định nghĩa tốt trên $l^2(\mathbb{N})$ và

$$A \sum_{k=1}^\infty |c_k|^2 \leq \|T \{c_k\}_{k=1}^\infty\|^2 \leq B \sum_{k=1}^\infty |c_k|^2, \forall \{c_k\}_{k=1}^\infty \in \mathcal{N}_T^\perp. \quad (2.13)$$

Chứng minh. Định lý 1.3.3 cho phần đầu tiên: điều kiện khung trên với cận B tương đương bất đẳng thức vế phải trong (2.13) (ta chỉ cần kiểm tra điều kiện cho $\{c_k\}_{k=1}^\infty \in \mathcal{N}_T^\perp$). Do đó giả thiết $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ là một dãy Bessel và chứng minh sự tương đương của điều kiện khung dưới và bất đẳng thức vế trái trong (2.13) cùng với tính đầy đủ.

Đầu tiên, giả thiết $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ thoả mãn điều kiện khung dưới với cận A . Khi đó (i) được thoả mãn. Chú ý rằng $\mathcal{R}_{T^*}$ đóng bởi $\mathcal{R}_T$ đóng ($\mathcal{R}_T = \mathcal{H}$ bởi vì $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ là khung). Vì vậy

$$\mathcal{N}_T^\perp = \overline{\mathcal{R}_{T^*}} = \mathcal{R}_{T^*}.$$

Tức là, $\mathcal{N}_T^\perp$ gồm tất cả dãy có dạng $\{\langle f, f_k \rangle\}_{k=1}^\infty$, $f \in \mathcal{H}$. Bây giờ cho $f \in \mathcal{H}$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2 \right)^2 = |\langle Sf, f \rangle|^2 \leq \|Sf\|^2 \cdot \|f\|^2 \leq \|Sf\|^2 \frac{1}{A} \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2.$$

Điều này kéo theo

$$A \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2 \leq \|Sf\|^2 = \|T \{ \langle f, f_k \rangle \}_{k=1}^\infty\|^2$$

như mong muốn. Để chứng minh điều ngược lại, giả thiết $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ là đầy đủ và bất đẳng thức về trái trong (2.13) được thoả mãn. Đầu tiên ta chứng minh $\mathcal{R}_T = \mathcal{H}$. Do $\text{span} \{f_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathcal{R}_T$, chỉ cần chứng minh rằng $\mathcal{R}_T$ đóng. Nếu $\{y_n\}$ là một dãy trong $\mathcal{R}_T$, ta có thể tìm một dãy $\{x_n\}$ trong $\mathcal{N}_T^\perp$ sao cho $y_n = Tx_n$, nếu y_n hội tụ tới $y \in \mathcal{H}$ nào đó, thì (2.13) kéo theo $\{x_n\}$ là một dãy Cauchy. Vì vậy $\{x_n\}$ hội tụ tới x nào đó. Do sự liên tục của T suy ra $Tx = y$. Vì vậy $\mathcal{R}_T$ đóng và do đó $\mathcal{R}_T = \mathcal{H}$. Ký hiệu toán tử $T^\dagger$ là toán tử giả nghịch đảo của T , theo Bổ đề 1.1.13 và (1.2), ta biết toán tử $T^\dagger T$ là phép chiếu trực giao lên $\mathcal{N}_T^\perp$, và $TT^\dagger$ là phép chiếu trực giao lên $\mathcal{R}_T = \mathcal{H}$. Vì vậy, với bất kỳ $\{c_k\}_{k=1}^\infty \in l^2(\mathbb{N})$ bất đẳng thức (2.13) kéo theo

$$A \left\| T^\dagger T \{c_k\}_{k=1}^\infty \right\|^2 \leq \left\| TT^\dagger T \{c_k\}_{k=1}^\infty \right\|^2 = \left\| T \{c_k\}_{k=1}^\infty \right\|^2. \quad (2.14)$$

Lại theo (1.2), ta có $\mathcal{N}_{T^\dagger} = \mathcal{R}_T^\perp$, vì thế (2.14) cho $\left\| T^\dagger \right\|^2 \leq \frac{1}{A}$. Sử dụng Bổ đề 1.1.13, ta cũng có $\left\| (T^*)^\dagger \right\|^2 \leq \frac{1}{A}$. Nhưng $(T^*)^\dagger T^*$ là phép chiếu trực giao lên

$$\mathcal{R}_{(T^*)^\dagger} = \mathcal{R}_{(T^\dagger)^*} = \mathcal{N}_{T^\dagger}^\perp = \mathcal{R}_T = \mathcal{H}.$$

Vì thế $\forall f \in \mathcal{H}$

$$\|f\|^2 = \left\| (T^*)^\dagger T^* f \right\|^2 \leq \frac{1}{A} \|T^* f\|^2 = \frac{1}{A} \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2.$$

Điều này chỉ ra $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ thoả mãn điều kiện khung dưới như ta muốn. $\square$

Nhắc lại cơ sở Riesz của $\mathcal{H}$ được đặc trưng bởi họ $\{Ue_k\}_{k=1}^{\infty}$, mà $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ là cơ sở trực chuẩn của $\mathcal{H}$, và $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ bị chặn, khả nghịch. Ta có thể cho đặc trưng tương tự của khung:

Định lý 2.4.5 *Giả sử $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ là cơ sở trực chuẩn tùy ý của $\mathcal{H}$. Khung của $\mathcal{H}$ chính xác là họ $\{Ue_k\}_{k=1}^{\infty}$, mà $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ là toán tử bị chặn và là toàn ánh.*

Chứng minh. Giả sử $\{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ là cơ sở chính tắc của $l^2(\mathbb{N})$ và $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ là một cơ sở trực chuẩn của $\mathcal{H}$. Giả sử $\Phi : \mathcal{H} \rightarrow l^2(\mathbb{N})$ là phép đẳng cự được định nghĩa bởi $\Phi e_k = \delta_k$. Nếu $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ là một khung, thì toán tử tổng hợp T bị chặn và là toàn ánh và $T\delta_k = f_k$. Với $U := T\Phi$, ta có $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} = \{Ue_k\}_{k=1}^{\infty}$ và U bị chặn và là toàn ánh. Mỗi họ $\{Ue_k\}_{k=1}^{\infty}$ như trên là khung được suy ra từ Định lý 2.4.1, một cách chứng minh khác, ta có thể chú ý rằng

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, Ue_k \rangle|^2 = \|U^* f\|^2$$

và sử dụng Bổ đề 1.1.7. $\square$

2.5 Khung đối ngẫu

Trong Bổ đề 2.3.2 ta thấy hệ số khung có chuẩn l^2 cực tiểu trong tất cả các dãy biểu diễn một phần tử $f \in \mathcal{H}$ qua khung $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ đã cho. Tuy

nhiên, tính cực tiểu của chuẩn l^2 của các hệ số $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ trong khai triển

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k$$

không phải luôn là một vấn đề quan trọng, có các trường hợp tiêu chuẩn khác thích hợp hơn. Vì lý do này, thật tự nhiên nếu ta tận dụng sự tự do trong việc lựa chọn các hệ số $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ và tìm kiếm các khả năng khác thay cho sử dụng các hệ số khung $\{\langle f, S^{-1}f_k \rangle\}_{k=1}^{\infty}$ như truyền thống.

Thường thường ta muốn làm việc với các hệ số phụ thuộc liên tục và tuyến tính vào f , theo biểu diễn Riesz trong Định lý 1.1.8, điều này kéo theo hệ số thứ k trong khai triển của f sẽ có dạng $c_k(f) = \langle f, g_k \rangle$ với $g_k \in \mathcal{H}$ nào đó. Nếu $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ là một khung thừa thì tồn tại các lựa chọn của $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Bổ đề 2.5.1 *Giả thiết $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ là một khung thừa. Khi đó tồn tại các khung $\{g_k\}_{k=1}^{\infty} \neq \{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty}$ mà*

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, g_k \rangle f_k, \forall f \in \mathcal{H}. \quad (2.15)$$

Chứng minh. Ta chia ra 2 trường hợp, và trước hết giả thiết rằng $f_l = 0$ với $l \in \mathbb{N}$ nào đó. Trong trường hợp này $S^{-1}f_l = 0$. Giả sử $g_k := S^{-1}f_k, k \neq l$ và chọn véc tơ khác 0 tùy ý g_l , sự khai triển khung chỉ ra rằng (2.15) đúng, và $\{g_k\}_{k=1}^{\infty} \neq \{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Bây giờ ta xét trường hợp $f_k \neq 0, \forall k \in \mathbb{N}$. Ta sẽ sử dụng một kết quả đã chứng minh sau: từ $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ là thừa, tồn tại một dãy

$$\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^2(\mathbb{N}) \setminus \{0\} \text{ sao cho } 0 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k.$$

Với một l nào đó $l \in \mathbb{N}$ mà $c_l \neq 0$ ta có thể viết $f_l = \sum_{k \neq l} \frac{-c_k}{c_l} f_k$.

Khi đó $\{f_k\}_{k \neq l}$ là đầy đủ trong $\mathcal{H}$, và vì vậy là một khung theo Định lý 2.3.6. Kí hiệu khung đối ngẫu chính tắc của nó bởi $\{g_k\}_{k \neq l}$ và định nghĩa $g_l = 0$, ta tìm được một khung $\{g_k\}_{k=1}^\infty$ mà (2.15) đúng, nó khác với đối ngẫu chính tắc của $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ vì $S^{-1}f_l \neq 0$. $\square$

Một khung $\{g_k\}_{k=1}^\infty$ thỏa mãn (2.15) được gọi là khung đối ngẫu của $\{f_k\}_{k=1}^\infty$. Để tránh sự nhầm lẫn về sau, ta chú ý hầu hết các kết quả trong luận văn liên quan đến đối ngẫu chính tắc, trong các trường hợp không có sự nhầm lẫn xuất hiện ta sẽ chỉ gọi nó là đối ngẫu, mặc dù các đối ngẫu khác có thể tồn tại.

Bây giờ ta tập trung vào một đặc trưng của mọi khung đối ngẫu $\{g_k\}_{k=1}^\infty$ liên kết với khung $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ đã cho. Từ $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ và $\{g_k\}_{k=1}^\infty$ được giả thiết là dãy Bessel ta có thể xét toán tử tổng hợp, như thường lệ ta kí hiệu toán tử tổng hợp của $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ bởi T , và kí hiệu toán tử tổng hợp của $\{g_k\}_{k=1}^\infty$ bởi U . (2.15) nghĩa là $TU^* = I$.

Ta bắt đầu với một bổ đề, cho thấy rằng vai trò của $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ và $\{g_k\}_{k=1}^\infty$ có thể thay thế nhau và điều kiện khung dưới tự động thỏa mãn với các dãy Bessel $\{f_k\}_{k=1}^\infty, \{g_k\}_{k=1}^\infty$ nếu (2.15) đúng.

Bổ đề 2.5.2 *Giả thiết $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ và $\{g_k\}_{k=1}^\infty$ là dãy các Bessel trong $\mathcal{H}$.*

Khi đó các khẳng định sau tương đương:

- (i) $f = \sum_{k=1}^\infty \langle f, g_k \rangle f_k, \forall f \in \mathcal{H}$.
- (ii) $f = \sum_{k=1}^\infty \langle f, f_k \rangle g_k, \forall f \in \mathcal{H}$.
- (iii) $\langle f, g \rangle = \sum_{k=1}^\infty \langle f, f_k \rangle \langle g_k, g \rangle, \forall f, g \in \mathcal{H}$.

Trong trường hợp các điều kiện tương đương thỏa mãn, $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ và $\{g_k\}_{k=1}^\infty$ là các khung đối ngẫu của $\mathcal{H}$.

Chứng minh. Dưới dạng toán tử tổng hợp (i) có nghĩa là $TU^* = I$, điều

này tương đương với

$$UT^* = I \quad (2.16)$$

cũng chính là sự phát biểu trong (ii). Rõ ràng rằng (ii) kéo theo (iii). Để chứng minh (iii) kéo theo (ii) ta cố định $f \in \mathcal{H}$. Và nhớ rằng $\sum_{k=1}^{\infty} \langle f, f_k \rangle g_k$ được định nghĩa tốt như phần tử trong $\mathcal{H}$ bởi $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ và $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ là các dãy Bessel trong $\mathcal{H}$. Bây giờ giả định trong (iii) chỉ ra rằng

$$\left\langle f - \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, f_k \rangle g_k, g \right\rangle = 0, \forall g \in \mathcal{H}.$$

Từ đó suy ra (ii).

Trong trường hợp các điều kiện tương đương thỏa mãn, ta có thể viết

$$\|f\|^2 = \langle f, f \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, g_k \rangle \langle f_k, f \rangle, \forall f \in \mathcal{H}.$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy- Schwarz và một trong hai họ $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ và $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ là một dãy Bessel, ta thu được họ kia thỏa mãn điều kiện khung dưới. $\square$

Khi (2.16) thỏa mãn, ta nói U là nghịch đảo trái của T^* .

Bổ đề 2.5.3 *Giả sử $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ là một khung của $\mathcal{H}$ và $\{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ là cơ sở trực chuẩn chính tắc của $l^2(\mathbb{N})$. Các khung đối ngẫu của $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ chính xác là họ $\{g_k\}_{k=1}^{\infty} = \{V\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$, mà $V : l^2(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{H}$ là nghịch đảo trái bị chặn của T^* .*

Chứng minh. Nếu V là một nghịch đảo trái bị chặn của T^* , thì V là toàn ánh. Định lý 2.4.1 kéo theo $\{g_k\}_{k=1}^{\infty} := \{V\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ là một khung. Ghi nhớ rằng dưới dạng của $\{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$,

$$T^*f = \{\langle f, f_k \rangle\}_{k=1}^{\infty} = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, f_k \rangle \delta_k$$

vì vậy, $\forall f \in \mathcal{H}$

$$f = VT^*f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, f_k \rangle g_k$$

tức là, $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ là một đối ngẫu của $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$. Để chứng minh điều ngược lại, giả thiết rằng $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ là một khung đối ngẫu của $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$. Khi đó toán tử tổng hợp U của $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ thỏa mãn các điều kiện: thật vậy, $\{g_k\}_{k=1}^{\infty} = \{U\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ và theo Bổ đề 2.5.2, $UT^* = I$. $\square$

Bổ đề 2.5.4 *Giả sử $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ là khung với toán tử tổng hợp T . Toán tử nghịch đảo trái, bị chặn của T^* chính xác là các toán tử có dạng $S^{-1}T + W(I - T^*S^{-1}T)$, mà $W : l^2(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{H}$ là một toán tử bị chặn, I kí hiệu toán tử đồng nhất trên $l^2(\mathbb{N})$.*

Chứng minh. Bằng tính toán trực tiếp ta có thể kiểm tra rằng một toán tử ở dạng đã cho là một nghịch đảo trái của T^* . Mặt khác, nếu U là một nghịch đảo trái của T^* , thì bằng cách cho $W = U$, ta có

$$S^{-1}T + W(I - T^*S^{-1}T) = S^{-1}T + U - UT^*S^{-1}T = U.$$

$\square$

Bây giờ ta sẵn sàng cho việc đặc trưng tất cả khung đối ngẫu liên kết với khung đã cho.

Định lý 2.5.5 *Giả sử $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ là một khung của $\mathcal{H}$. Các khung đối ngẫu của $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ chính xác là họ*

$$\{g_k\}_{k=1}^{\infty} = \left\{ S^{-1}f_k + h_k - \sum_{j=1}^{\infty} \langle S^{-1}f_k, f_j \rangle h_j \right\}_{k=1}^{\infty} \quad (2.17)$$

trong đó $\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$ là một dãy Bessel trong $\mathcal{H}$.

Chứng minh. Theo Bổ đề 2.5.3 và Bổ đề 2.5.4 ta có thể đặc trưng hóa các khung đối ngẫu như mọi họ có dạng

$$\{g_k\}_{k=1}^{\infty} = \{S^{-1}T\delta_k + W(I - T^*S^{-1}T)\delta_k\}_{k=1}^{\infty} \quad (2.18)$$

trong đó $W : l^2(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{H}$ là toán tử bị chặn, hoặc tương đương một toán tử có dạng $W\{c_j\}_{j=1}^{\infty} = \sum_{j=1}^{\infty} c_j h_j$ mà $\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$ là một dãy Bessel. Bằng cách thay khai triển này vào W trong (2.18) ta có

$$\begin{aligned} \{g_k\}_{k=1}^{\infty} &= \{S^{-1}f_k + W\delta_k - WT^*S^{-1}T\delta_k\}_{k=1}^{\infty} \\ &= \left\{ S^{-1}f_k + h_k - \sum_{j=1}^{\infty} \langle S^{-1}f_k, f_j \rangle h_j \right\}_{k=1}^{\infty}. \end{aligned}$$

□

Ghi nhớ rằng nếu $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ là một cơ sở Riesz, thì $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ và $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty}$ là song trực giao theo Định lý 2.3.1. Vì vậy, độc lập chọn $\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$, ta có $\sum_{j=1}^{\infty} \langle S^{-1}f_k, f_j \rangle h_j = h_k$, nghĩa là, Định lý 2.5.5 khẳng định đối ngẫu duy nhất là $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty}$, tương tự như Định lý 1.6.3.

2.6 Khung và xử lý tín hiệu

Các kết quả về khung đã được trình bày cho đến lúc này diễn ra là các kết quả trừu tượng. Trong mục nhỏ này ta mô tả vài bước phải làm để áp dụng những kết quả trừu tượng vào trong thực hành.

Khi thực hành trên máy tính, mỗi số thực phải được thay thế bởi một số với hữu hạn chữ số thập phân trước khi xử lý. Điều này nghĩa là trong thực hành ta biểu diễn tất cả các số trên một khoảng (ví dụ $[1, 1 + 10^{-8}]$) bằng cùng một số (trong trường hợp này là số 1). Điều này dẫn đến sự

không chính xác, được gọi là sai số lượng tử hóa.

Hạn chế cơ bản trong ứng dụng của các kết quả khung là bất kỳ kiểu xử lý tín hiệu nào phải được thực hiện trên dãy số hữu hạn. Điều này kéo theo biểu diễn (2.5) của khung phải bị cắt bớt, ta chỉ có thể tính toán một số hữu hạn các hệ số khung, ví dụ, $\{\langle f, S^{-1}f_k \rangle\}_{k=1}^N$ và biểu diễn chính xác (2.5) phải được thay thế bởi

$$f \sim \sum_{k=1}^N \langle f, S^{-1}f_k \rangle f_k.$$

Thậm chí tính toán các hệ số khung $\langle f, S^{-1}f_k \rangle$ có thể nói chung chỉ được làm với sự chính xác hữu hạn. Nghĩa là, kết quả của một tính toán sẽ là

$$\langle f, S^{-1}f_k \rangle + \omega_k \quad (2.19)$$

với một lỗi ω_k nào đó (hi vọng nhỏ). Tất cả các kiểu truyền hay xử lý sẽ sinh ra thêm các lỗi. Ta nói rằng các hệ số khung $\langle f, S^{-1}f_k \rangle$ đã bị nhiễu bởi tiếng ồn ω_k .

Tính thừa của khung có thể giảm bớt ảnh hưởng của tiếng ồn, so sánh với sử dụng một cơ sở trực chuẩn.

Ta giả thiết rằng muốn truyền tín hiệu f từ $\mathcal{A}$ đến $\mathcal{R}$ bằng cách gửi các hệ số khung $\{\langle f, S^{-1}f_k \rangle\}_{k=1}^\infty$. Vì sự lượng tử hóa, các hệ số sẽ bị nhiễu bởi một tiếng ồn $\{\omega_k\}_{k=1}^\infty$ nào đó, và $\mathcal{R}$ sẽ nhận được $\{\langle f, S^{-1}f_k \rangle + \omega_k\}_{k=1}^\infty$, ta giả thiết $\{\omega_k\}_{k=1}^\infty \in l^2(\mathbb{N})$. Đầu thu $\mathcal{R}$ sẽ coi rằng hàm được truyền là

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\langle f, S^{-1}f_k \rangle + \omega_k) f_k = f + \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k f_k$$

hơn là f .

Chú ý rằng $\mathcal{R}$ thực sự cho rằng dãy được truyền là một dãy của các

hệ số khung, tức là, một dãy dạng $\{\langle g, f_k \rangle\}_{k=1}^{\infty}$ với $g \in \mathcal{H}$ nào đó (cụ thể là $g = S^{-1}f$). Điều này có thể không xảy ra với các hệ số trong (2.19), vì vậy 1 cách tự nhiên để bù lại điều này bằng việc chiếu chuỗi $\{\langle f, S^{-1}f_k \rangle + \omega_k\}_{k=1}^{\infty}$ lên miền giá trị của toán tử T^* bởi toán tử Q trong Mệnh đề 2.2.5. Kết quả là

$$Q \{ \langle f, S^{-1}f_k \rangle + \omega_k \}_{k=1}^{\infty} = \{ \langle f, S^{-1}f_k \rangle \}_{k=1}^{\infty} + Q\omega$$

với $\omega = \{\omega_k\}_{k=1}^{\infty}$. Dựa trên sự thay đổi này, $\mathcal{R}$ sẽ khôi phục lại tín hiệu được truyền như

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\langle f, S^{-1}f_k \rangle + (Q\omega)_k) f_k = f + \sum_{k=1}^{\infty} (Q\omega)_k f_k.$$

Giả thiết rằng sai số lượng tử hóa là nhiễu trắng (là hiện thực), năng lượng của nó được đo bởi giá trị trung bình của biến ngẫu nhiên $|\omega|^2$, được kí hiệu bởi $E|\omega|^2$. Nếu ta tăng sự dư thừa của khung, được đo bởi cận khung dưới lớn hơn thì sẽ làm giảm năng lượng của các hệ số trong tiếng ồn.

Mệnh đề 2.6.1 *Giả thiết rằng khung $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ gồm các véc tơ có chuẩn bằng 1. Xét sai số ω_k trong (2.19) như nhiễu trắng, và giả thiết rằng $\omega = \{\omega_k\}_{k=1}^{\infty}$ có trung bình là 0, $E\omega = 0$. Khi đó*

$$E|Q\omega|^2 \leq \frac{1}{A} E|\omega|^2.$$

Kết quả này cho thấy làm tăng sự dư thừa của khung dễ hơn làm tăng độ chính xác của lượng tử hóa.

Các sai số lượng tử hóa và tiếng ồn trong quá trình truyền chỉ là một vài trở ngại làm cho khung bước vào cuộc sống thực (xem [4],[5]). Phụ thuộc vào không gian Hilbert $\mathcal{H}$ có thể có những phức tạp bổ sung. Trong

nhiều trường hợp $\mathcal{H}$ sẽ là một không gian hàm như $L^2(\mathbb{R})$, và thậm chí không gian con hữu hạn chiều không thể xử lý một cách trực tiếp : cần một bước rời rạc hóa để chuyển sang một không gian dãy hữu hạn chiều như $\mathbb{C}^n$. Điều này cho thấy sự quan trọng của ma trận Gram một cách rõ ràng hơn: trong khi toán tử khung $S = TT^*$ là ánh xạ từ $\mathcal{H}$ vào chính nó, ma trận Gram T^*T là một toán tử trên không gian dãy $l^2(\mathbb{N})$, tức là, bước duy nhất cần làm là cắt bớt. Với lý do này, việc tạo ra những thuật toán liên quan đến khung thông qua ma trận Gram có ưu thế hơn là toán tử khung, nếu khả dĩ.

Chương 3

Khung và cơ sở Riesz

3.1 Các điều kiện để khung trở thành cơ sở Riesz

Nhắc lại từ Bổ đề 1.2.3 về w - độc lập và cực tiểu là hai khái niệm khác nhau. Bây giờ ta cho vài điều kiện tương đương để một khung trở thành một cơ sở Riesz, đặc biệt, ta chứng minh rằng một khung w - độc lập tương đương với cực tiểu.

Định lý 3.1.1 *Giả sử $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ là khung của $\mathcal{H}$. Khi đó các khẳng định sau là tương đương:*

- (i) $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ là cơ sở Riesz của $\mathcal{H}$.
- (ii) $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ là khung chính xác.
- (iii) $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ là cực tiểu.
- (iv) $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ có một dãy song trực giao.
- (v) $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ và $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty}$ là song trực giao.
- (vi) $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ là w - độc lập.
- (vii) Nếu $\sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k = 0$ với $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^2(\mathbb{N})$ nào đó thì

$$c_k = 0, \forall k \in \mathbb{N}.$$

- (viii) $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ là một cơ sở.

Chứng minh. (i) $\Rightarrow$ (ii) một cơ sở Riesz $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ là một khung chính xác: nếu phần tử tùy ý bị loại bỏ, còn lại họ không đầy đủ, và vì vậy không là một khung.

(ii) $\Rightarrow$ (v) Đây là Mệnh đề 2.3.7.

(v) $\Rightarrow$ (iv) là rõ ràng, và (iv) $\Rightarrow$ (iii) được chứng minh trong Bổ đề 1.4.1 (i).

(iii) $\Rightarrow$ (ii) Giả thiết rằng $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ là cực tiểu. Khi đó, cho tùy ý $j \in \mathbb{N}$, họ $\{f_k\}_{k \neq j}$ là không đầy đủ trong $\mathcal{H}$, và do đó không là một khung trong $\mathcal{H}$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Nếu $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ là một khung chính xác, nó là một cơ sở theo Mệnh đề 2.3.7. Giả sử như thường lệ $\{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ là cơ sở chính tắc của $l^2(\mathbb{N})$. Toán tử tổng hợp $T : l^2(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{H}$ liên kết với $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ là bị chặn và toàn ánh bởi Định lý 2.4.1, và $T\delta_k = f_k$, để chỉ ra rằng $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ là cơ sở Riesz, chỉ cần chứng minh rằng T là khả nghịch, và điều này suy ra từ $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ là một cơ sở.

(i) $\Rightarrow$ (vi) Giả thiết rằng $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ là một cơ sở Riesz và $\sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k = 0$ với dãy số $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ đã cho. Khi đó $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^2(\mathbb{N})$. Kí hiệu cận Riesz dưới bởi A thì

$$A \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \leq \left\| \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k \right\|^2 = 0.$$

Khi đó $c_k = 0, \forall k$.

(vi) $\Rightarrow$ (vii) là hiển nhiên.

(vii) $\Rightarrow$ (i) Giả thiết (vii) đảm bảo rằng toán tử tổng hợp T là đơn ánh, và T cũng là toàn ánh vì $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ là khung. Từ $T\delta_k = f_k, \forall k$ kết quả kéo từ định nghĩa về cơ sở Riesz.

(i) $\Rightarrow$ (viii) $\Rightarrow$ (iv) là hiển nhiên. □

Chú ý sự khác nhau nhẹ giữa điều kiện (vi) và (vii) trong Định lý 3.1.1. Một sự khác nhau giữa khung và cơ sở Riesz là với một cơ sở Riesz $\{f_k\}_{k=1}^\infty$, chuỗi $\sum_{k=1}^\infty c_k f_k$ chỉ hội tụ với $\{c_k\}_{k=1}^\infty \in l^2(\mathbb{N})$, với khung tổng quát chuỗi có thể hội tụ với hệ số $\{c_k\}_{k=1}^\infty \notin l^2(\mathbb{N})$. Tuy nhiên, để kiểm tra một khung là w - độc lập, ta chỉ cần dãy l^2 .

w - độc lập là điều kiện mạnh hơn độc lập tuyến tính. Để minh họa cho quan điểm này, ta chứng minh một đặc trưng nữa của các cơ sở Riesz. Kết quả sẽ so sánh sự tương đương của (i) và (vi) trong Định lý 3.1.1.

Mệnh đề 3.1.2 *Giả sử $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ là khung của $\mathcal{H}$, $n \in \mathbb{N}$, giả sử A_n kí hiệu cận khung dưới tối ưu cho dãy khung $\{f_k\}_{k=1}^n$. Khi đó các khẳng định sau tương đương:*

- (i) $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ là một cơ sở Riesz của $\mathcal{H}$.
- (ii) $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ là độc lập tuyến tính và $\inf_{n \in \mathbb{N}} A_n > 0$.
- (iii) $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ là độc lập tuyến tính và tồn tại $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n > 0$.

Chứng minh. Để chứng minh (i) $\Rightarrow$ (ii) ta chú ý rằng cơ sở bất kỳ là độc lập tuyến tính. Giả thiết $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ là một cơ sở Riesz, với cận Riesz dưới là A . Khi đó mỗi họ con $\{f_k\}_{k=1}^n$ là một dãy Riesz, và A_n cũng là cận Riesz tối ưu bởi Định lý 2.3.1, khi đó $A \leq A_n, \forall n \in \mathbb{N}$ và ta có (ii). Để chứng minh (ii) $\Rightarrow$ (i), giả thiết rằng (ii) thỏa mãn. Khi đó, với mỗi $n \in \mathbb{N}$, $\{f_k\}_{k=1}^n$ là một cơ sở (Riesz) cho bao tuyến tính của nó với cận khung dưới $A := \inf_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Giả sử B kí hiệu là một cận khung trên $\{f_k\}_{k=1}^\infty$, Định lý 1.3.3 chỉ ra rằng

$$A \sum_{k=1}^n |c_k|^2 \leq \left\| \sum_{k=1}^n c_k f_k \right\|^2 \leq B \sum_{k=1}^n |c_k|^2 \quad (3.1)$$

với mọi dãy số $\{c_k\}_{k=1}^n$. Theo Định lý 1.6.6 ta kết luận $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ là một cơ

sở Riesz của $\mathcal{H}$. (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) kéo theo từ sự kiện là khi $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ độc lập tuyến tính, dãy của các cận khung tối ưu $A_n, n \in \mathbb{N}$ là bằng với dãy của cận dưới tối ưu của cơ sở (Riesz) là dãy giảm bởi định nghĩa. $\square$

3.2 Các khung chứa cơ sở Riesz

Một cách trực giác, ta nghĩ về một khung như dạng “cơ sở thừa”, vì thế một câu hỏi tự nhiên là: cho khung $\{f_k\}_{k=1}^\infty$, liệu có thể lấy ra một cơ sở $\{f_k\}_{k \in J}, J \subseteq \mathbb{N}$ từ $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ không, tức là $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ có bao hàm một cơ sở như một tập con không?

Rõ ràng, câu trả lời phụ thuộc vào loại cơ sở ta quan tâm. Trong phần này, ta sẽ tìm điều kiện đủ để một khung bao hàm cơ sở Riesz. Trong phần tiếp theo ta xây dựng một khung bao gồm các véc tơ có chuẩn bằng 1 mà thậm chí không bao hàm cơ sở Schauder.

Bổ đề 3.2.1 *Giả sử $\{c_k\}_{k=1}^\infty$ là một dãy các số không âm mà $\sum_{k=1}^\infty c_k < \infty$. Giả thiết rằng $\{J_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ là một họ của các tập con của $\mathbb{N}$ sao cho*

$$(i) \quad J_1 \supseteq J_2 \supseteq J_3 \supseteq \dots$$

$$(ii) \quad \text{Tồn tại } c > 0 \text{ sao cho } c \leq \sum_{k \in J_n} c_k, \forall n \in \mathbb{N}. \text{ Khi đó } c \leq \sum_{k \in \cap J_n} c_k.$$

Chứng minh. Định nghĩa một độ đo dương μ trên σ -đại số của các tập con của $\mathbb{N}$ bởi $\mu(S) = \sum_{k \in S} c_k$.

Theo Bổ đề 1.1.3

$$\mu(J_n) = \sum_{k \in J_n} c_k \rightarrow \mu(\cap J_n) = \sum_{k \in \cap J_n} c_k \text{ khi } n \rightarrow \infty$$

và kết quả kéo theo. $\square$

Định nghĩa 3.2.2 Giả sử $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ là một khung cho $\mathcal{H}$. Ta nói rằng $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ là một khung Riesz nếu mọi họ con của $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ là một khung cho bao tuyến tính đóng của nó với các cận khung đều A, B .

Mục đích của ta chỉ ra rằng mỗi khung Riesz chứa cơ sở Riesz. Chứng minh dựa trên Bổ đề của Zorn:

Bổ đề 3.2.3 Giả sử $\mathcal{M}$ là một tập có thứ tự. Nếu mỗi tập con có thứ tự toàn phần của $\mathcal{M}$ có cận trên trong $\mathcal{M}$, thì $\mathcal{M}$ có ít nhất một phần tử cực đại.

Định lý 3.2.4 Mỗi khung Riesz chứa một cơ sở Riesz.

Chứng minh. Để thuận tiện ta sử dụng tập chỉ số $\mathbb{N}$. Giả sử $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ là một khung Riesz, và giả sử A là cận dưới chung của mọi khung con. Xét tập hợp

$$\mathcal{M} := \left\{ \{f_k\}_{k \in J} \mid J \subseteq \mathbb{N}, \text{ và } A\|f\|^2 \leq \sum_{k \in J} |\langle f, f_k \rangle|^2, \forall f \in \mathcal{H} \right\}. \quad (3.2)$$

$\mathcal{M}$ không rỗng. Định nghĩa một thứ tự trên $\mathcal{M}$:

$$\{f_k\}_{k \in J} \prec \{f_k\}_{k \in K} \Leftrightarrow K \subseteq J.$$

Bây giờ xét một họ sắp thứ tự toàn phần của các phần tử $\{f_k\}_{k \in J_n} \in \mathcal{M}$, n trong tập chỉ số I nào đó. Họ như thế có cận trên $\{f_k\}_{k \in \bigcup J_n}$, mà vẫn là một phần tử của $\mathcal{M}$. Để nhìn thấy điều này ta cần chứng minh

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{k \in J_n} |\langle f, f_k \rangle|^2, \forall f \in H. \quad (3.3)$$

Trong trường hợp tập chỉ số I là đếm được, (3.3) kéo theo từ Bổ đề 3.2.1. Với một tập chỉ số không đếm được thì kết quả vẫn đúng. Vì thế theo Bổ đề 3.2.3 của Zorn, $\mathcal{M}$ có một phần tử cực đại $\{f_k\}_{k \in J}$. Bây giờ

ta chỉ ra rằng $\{f_k\}_{k \in J}$ là một cơ sở Riesz. Rõ ràng $\{f_k\}_{k \in J}$ là một khung, vì thế theo Định lý 3.1.1 chỉ cần chỉ ra rằng $\{f_k\}_{k \in J}$ là w - độc lập. Nhưng nếu không, ta có thể tìm một phần tử $f_n, n \in J$ sao cho $\{f_k\}_{k \in J - \{n\}}$ vẫn đầy đủ, và vì vậy là một khung của $\mathcal{H}$ theo Định lý 2.3.7. Nghĩa là, $\{f_k\}_{k \in J - \{n\}} \in \mathcal{M}$ mâu thuẫn với sự cực đại của $\{f_k\}_{k \in J}$. $\square$

Qua việc áp dụng lặp lại Định lý 3.2.4 có thể chỉ ra rằng mỗi khung Riesz là hợp của số hữu hạn các dãy Riesz.

3.3 Sự tồn tại của khung không chứa cơ sở

Thậm chí nếu $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ không là một khung Riesz, chứng minh của Định lý 3.2.4 chỉ ra rằng tập $\mathcal{M}$ trong (3.2) sẽ chứa phần tử cực đại với mỗi cận khung dưới A . Tuy nhiên, phần tử này không nhất thiết là một cơ sở Riesz. Ví dụ, giả sử $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ là cơ sở trực chuẩn và xét khung từ Ví dụ 2.1.4

$$\{f_k\}_{k=1}^\infty := \left\{ e_1, \frac{1}{\sqrt{2}}e_2, \frac{1}{\sqrt{2}}e_2, \frac{1}{\sqrt{3}}e_3, \frac{1}{\sqrt{3}}e_3, \frac{1}{\sqrt{3}}e_3, \dots \right\}. \quad (3.4)$$

Không quan trọng A được chọn nhỏ mức nào, tập $\mathcal{M}$ không chứa cơ sở Riesz với khung này. Thật vậy, với bất kỳ $\varepsilon > 0$ và $\{f_k\}_{k \in J} \in \mathcal{M}$, điều kiện

$$\varepsilon \|f\|^2 \leq \sum_{k \in J} |\langle f, f_k \rangle|^2, \forall f \in \mathcal{H}$$

suy ra $\frac{1}{\sqrt{n}}e_n$ xuất hiện nhiều hơn một lần trong $\{f_k\}_{k \in J}$ với những giá trị n lớn. Vì vậy $\mathcal{M}$ không chứa một tập con w - độc lập. Thực ra $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ không chứa cơ sở Riesz nào cả. Ứng cử viên duy nhất sẽ là $\left\{ \frac{1}{\sqrt{k}}e_k \right\}_{k=1}^\infty$

đây là một cơ sở Schauder nhưng không là cơ sở Riesz.

Bây giờ ta chỉ ra rằng thậm chí có thể xây dựng một khung bao gồm các véc tơ có chuẩn bị chặn dưới, nhưng không chứa một cơ sở Schauder, đặc biệt, nó không chứa cơ sở Riesz. Nó phức tạp hơn (3.4) và ta cần một vài chuẩn bị trước khi chứng minh.

Bổ đề 3.3.1 *Giả sử $\{e_k\}_{k=1}^n$ là một cơ sở trực chuẩn của không gian Hilbert hữu hạn chiều $\mathcal{H}_n$. Định nghĩa*

$$f_k = e_k - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n e_j, k = 1, 2, \dots, n$$

$$\text{và } f_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n e_j.$$

Khi đó :

(i) $\{f_k\}_{k=1}^{n+1}$ là khung chặt chẽ của $\mathcal{H}_n$ với cận khung $A = 1$.

(ii) Giả thiết rằng $n > 2$ và $\{f_{k_i}\}_{i \in I}$ là tập con bất kỳ của $\{f_k\}_{k=1}^{n+1}$ mà $\text{span}\{f_{k_i}\}_{i \in I} = \mathcal{H}_n$. Khi đó, với 1 thứ tự tùy ý của các phần tử, $\{f_{k_i}\}_{i \in I}$ có hằng số cơ sở lớn hơn hoặc bằng $\frac{1}{4}\sqrt{n-2}$.

Bây giờ ta chứng minh sự tồn tại của khung chặt mà chuẩn bị chặn dưới và không họ con nào là một cơ sở Schauder. Ý nghĩa chính xác của điều này là không phụ thuộc vào cách một tập con của khung được sắp thứ tự thì nó vẫn không là một cơ sở.

Định lý 3.3.2 *Trong mỗi không gian Hilbert vô hạn chiều khả li $\mathcal{H}$, tồn tại một khung chặt mà chuẩn bị chặn dưới và không chứa một cơ sở Schauder của $\mathcal{H}$.*

Chứng minh. Do mọi không gian Hilbert vô hạn chiều khả li là đẳng cự với nhau, chỉ cần xây dựng một ví dụ trong một không gian Hilbert đặc biệt. Giả sử $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ là một cơ sở trực chuẩn của một không gian Hilbert

$\mathcal{K}$ và định nghĩa một tập vô hạn các không gian véc tơ hữu hạn chiều bởi $\mathcal{H}_1 = \text{span}\{e_1\}$, $\mathcal{H}_2 = \text{span}\{e_2, e_3\}$ và tổng quát

$$\mathcal{H}_n := \text{span}\left\{e_{\frac{(n-1)n}{2}+1}, e_{\frac{(n-1)n}{2}+2}, \dots, e_{\frac{(n-1)n}{2}+n}\right\}.$$

Xét tổng trực tiếp $\mathcal{H} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus \mathcal{H}_n\right)_{l^2}$ như định nghĩa trong (1.1). Trong mỗi không gian $\mathcal{H}_n$ ta xây dựng dãy $\{f_k^n\}_{k=1}^{n+1}$ như trong Bổ đề 3.3.1, bắt đầu với cơ sở trực chuẩn

$$\left\{e_{\frac{(n-1)n}{2}+1}, e_{\frac{(n-1)n}{2}+2}, \dots, e_{\frac{(n-1)n}{2}+n}\right\} = \left\{e_{\frac{(n-1)n}{2}+k}\right\}_{k=1}^n.$$

Đặc biệt, cho $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} f_k^n &= e_{\frac{(n-1)n}{2}+k} - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n e_{\frac{(n-1)n}{2}+j}, 1 \leq k \leq n \\ f_{n+1}^n &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n e_{\frac{(n-1)n}{2}+j}. \end{aligned}$$

Bây giờ ta chỉ ra rằng $\{f_k^n\}_{k=1, n=1}^{n+1, \infty}$ là một khung chặt của $\mathcal{H}$ với cận khung $A = 1$. Viết $g \in \mathcal{H}$ như $g = (g_1, g_2, \dots)$, $g_n \in \mathcal{H}_n$.

Ta đồng nhất các phần tử trong không gian $\mathcal{H}_n$ với bản sao của chúng trong $\mathcal{H}$, tức là, ta không phân biệt giữa $f \in \mathcal{H}_n$ và dãy trong $\mathcal{H}$ có f ở vị trí thứ n và 0 ở các vị trí khác. Cho $n \in \mathbb{N}$ rõ ràng là

$$\langle g, f_k^n \rangle_{\mathcal{H}} = \langle g_n, f_k^n \rangle_{\mathcal{H}_n}, k = 1, \dots, n+1.$$

Bây giờ từ Bổ đề 3.3.1 suy ra

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n+1} |\langle g, f_k^n \rangle_{\mathcal{H}}|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n+1} |\langle g_n, f_k^n \rangle_{\mathcal{H}_n}|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|g_n\|_{\mathcal{H}_n}^2 = \|g\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Nghĩa là, $\{f_k^n\}_{k=1,n=1}^{n+1,\infty}$ là một khung chặt của $\mathcal{H}$ như đã khẳng định. Chú ý rằng $n \geq 2, 1 \leq k \leq n$

$$\begin{aligned}\|f_k^n\| &= \left\| \left(1 - \frac{1}{n}\right) e^{\frac{(n-1)n}{2}+k} - \frac{1}{n} \sum_{j \neq k} e^{\frac{(n-1)n}{2}+j} \right\| \\ &= \sqrt{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 + \frac{n-1}{n^2}} \geq \frac{1}{4}\end{aligned}$$

trong khi $f_1^1 = 0$ và $\|f_n^{n+1}\| = 1, \forall n \in \mathbb{N}$. Loại bỏ f_1^1 ta thu được một khung chặt với chuẩn bị chặn dưới.

Bây giờ giả sử $\{h_k\}_{k=1}^\infty$ là tập con sinh bất kỳ của khung $\{f_k^n\}_{k=1,n=1}^{n+1,\infty}$, được sắp thứ tự theo một cách tùy ý. Hằng số cơ sở của $\{h_k\}_{k=1}^\infty$ bởi định nghĩa lớn hơn hoặc bằng hằng số cơ sở của dãy con bất kỳ của $\{h_k\}_{k=1}^\infty$. Bây giờ, cho $n > 2$ bất kỳ, tồn tại $N \in \mathbb{N}$ sao cho $\{h_k\}_{k=1}^N$ chứa một dãy con mà bao tuyến tính bằng $\mathcal{H}_n$, điều này kéo theo từ xây dựng đặc biệt của $\mathcal{H}$ như một tổng trực giao của các không gian $\mathcal{H}_n$, và sự lựa chọn của khung $\{f_k^n\}_{k=1,n=1}^{n+1,\infty}$. Theo Bổ đề 3.3.1 (ii) điều này kéo theo hằng số cơ sở của $\{h_k\}_{k=1}^N$ ít ra là bằng $\frac{1}{4}\sqrt{n-2}$, từ $n > 2$ là tùy ý kéo theo hằng số cơ sở của $\{h_k\}_{k=1}^\infty$ là vô hạn. Vì vậy, theo Định lý 1.2.4, $\{h_k\}_{k=1}^\infty$ không là một cơ sở Schauder của $\mathcal{H}$. $\square$

Ta chú ý một khung có chặn bị chặn dưới thỏa mãn bất đẳng thức

$$0 < \inf_k \|f_k\| \leq \sup_k \|f_k\| < \infty.$$

Do đó ta có sự thay đổi nhỏ của Định lý 3.3.2.

Hệ quả 3.3.3 *Trong mỗi không gian Hilbert vô hạn chiều khả li tồn tại một khung chuẩn không chứa cơ sở Schauder.*

Kết luận

Luận văn đã trình bày một cách có hệ thống các khái niệm cơ sở trong không gian Banach tổng quát, cơ sở trực chuẩn và cơ sở Riesz trong không gian Hilbert cùng các tính chất của chúng, đồng thời cũng phân tích một vài hạn chế của cơ sở.

Luận văn đã trình bày tổng quan về lý thuyết khung trong không gian Hilbert, đồng thời nêu ứng dụng của khung trong xử lý tín hiệu.

Luận văn đã trình bày một số mối liên hệ giữa khung và cơ sở Riesz.

Tài liệu tham khảo

- [1] O.Christensen(2003), *An introduction to frames and Riesz bases*, Birkhauser Boston, USA.
- [2] I.Daubechies(1992), *Ten lectures on wavelet(1992)*, SIAM, Philadelphia, USA.
- [3] D.Han and D.Larson (2000), "Frames, bases and group representations", *Memoirs AMS* Vol.147, No.697, 1- 94.
- [4] J.Kovacevic and A.Chebira (2007), "Life beyond bases : The Advent of frames (Part 1)", *IEEE Signal Processing*, 86-104.
- [5] J.Kovacevic and A.Chebira (2007), "Life beyond bases : The Advent of frames (Part 2)", *IEEE Signal Processing*, 115-125.
- [6] I.Singer (1970), *Bases in Banach space*, Springer, New York.