LƯỢNG TỬ HOÁ BIẾN DẠNG TRÊN CÁC K-QUỸ ĐẠO VÀ ĐỐI NGẪU UNITA CỦA SL(2,$\mathbb{R}$)

Đỗ Đức Hạnh

1-3-03

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi. Các kết quả nghiên cứu ở trong luận văn chưa được công bố trong bất cứ công trình nào khác trước đó mà tôi biết.

Tác giả

Mục lục

DANH MỤC CÁC KÝ HIỆU

• SL(n,$\mathbb{R}$): nhóm các ma trận có định thức bằng một,

•GL(n,$\mathbb{R}$): nhóm tuyến tính tổng quát cấp n hệ số thực,

•$\bar{A}$: hàm Hamilton ứng với$A \in \mathcal{G}$,

•$C^\infty(M)[[\nu]]$: không gian các chuỗi luỹ thừa hình thức theo ν hệ số là các hàm trên M,

•C_0^∞: không gian các hàm khả vi vô hạn giá compact,

•$F_p(f)$: biến đổi Fourier bộ phận theo biến p,

•G,$\mathfrak{g}$: nhóm Lie và đại số Lie của nhóm Lie,

•$\Omega = \Omega_F$: quỹ đạo đối phụ hợp đi qua F,

• K=CoAd: tác động đối phụ hợp,

•$\hat{l}_A$: toán tử lượng tử tương thích,

•s-grad: gradient phản đối xứng,

•(Ω, ψ): bản đồ tương thích,

•$\wedge$: ma trận symplectic ứng với dạng symplectic ω,

•ξ_A: trường véc tơ bất biến sinh bởi A.

0.1 MỞ ĐẦU

0.1.1 Xuất xứ và lịch sử của vấn đề

Lý thuyết biểu diễn là một trong những lãnh vực quan trọng mà giữ một vai trò cốt yếu trong rất nhiều hướng nghiên cứu của toán học và vật lý như: giải tích điều hoà trừu tượng, lý thuyết số, nhóm đại số, cơ học lượng tử, vật lý các hạt cơ bản, lý thuyết trường lượng tử, hình học đại số, nhóm lượng tử... Sự phát triển của nó có thể chia làm nhiều giai đoạn.

Giai đoạn đầu tiên của lý thuyết biểu diễn ra đời vào những năm 1920 cùng với những tên tuổi của G. Frobenius, Schur, Molin. Thời kỳ này, người ta chỉ quan tâm tới các nhóm hữu hạn cùng với các biểu diễn hữu hạn chiều. Giai đoạn này cũng đánh dấu sự khai sinh của các khái niệm như đặc trưng, toán tử bện và biểu diễn bất khả quy mà sau đó đã trở thành các khái niệm cơ bản của lý thuyết biểu diễn.

Giai đoạn thứ hai được đánh dấu bởi sự xuất hiện của lý thuyết biểu diễn nhóm compact. Kết quả quan trọng trong thời kỳ này là định lý Haar-Von Neumann về sự tồn tại của độ đo bất biến và định lý F. Peter-H. Weyl về sự đầy đủ của biểu diễn hữu hạn chiều. Tuy nhiên phải đến thời kỳ thứ ba, bắt đầu từ những năm 1940, lý thuyết biểu diễn mới đạt được những thành công rực rỡ với các biểu diễn unita vô hạn chiều. Có thể nói thời kỳ này được bắt đầu bởi công trình của Gelfand và Raikov về tính đầy đủ của hệ các biểu diễn unita bất khả quy của một nhóm compact địa phương bất kỳ. Cùng lúc đó, Von Neumann cũng đã hoàn thành công trình của mình về đại số toán tử. Chỉ một thời gian ngắn sau, lý thuyết đại số Von-Neumann được thống nhất với lý thuyết biểu diễn nhóm trong các bài báo của G. M. Adelson, Mautner và Godement.

Một cách tự nhiên bài toán quan trọng nhất của lý thuyết biểu diễn là bài toán phân loại biểu diễn mà người ta còn gọi là bài toán về đối ngẫu unita.

Bài toán về đối ngẫu unita: Cho trước một nhóm G. Hãy phân loại tất cả các biểu diễn unita bất khả quy của G (sai khác một phép đẳng cấu).

Định lý đầu tiên về sự phân loại nhận được vào năm 1947 bởi I. M. Gelfand và M. A. Naimark [26]. Từ đó tới nay, người ta cũng đã xây dựng được một số phương pháp nhằm thu được lời giải của bài toán đối ngẫu unita nói trên. Với nhóm G là nhóm $SL(2,\mathbb{R})$, bài toán đối ngẫu unita đã được giải quyết. Người ta chứng minh được rằng, lớp các biểu diễn unita bất khả quy của G gồm biểu diễn chuỗi chính, chuỗi rời rạc và chuỗi bổ sung, xem [33].

Một trong những cách tiếp cận hiện đại của bài toán này là nhìn nhận vấn đề theo quan điểm về tính đối xứng trong cơ học lượng tử và hình học không giao hoán.

Trong cơ học cổ điển, không gian pha là một đa tạp symplectic hay tổng quát hơn là một đa tạp Poisson. Khái niệm đa tạp Poisson là một khái niệm mới, được đặt ra vào những năm 1976 một cách độc lập bởi A. Kirillov và A. Lichnerowicz và đã trở thành trung tâm của vật lý toán hiện đại trong khoảng mười lăm năm gần đây.

Thông thường, một đối tượng toán học được xác định thông qua đại số hàm của nó. Ví dụ, một đa tạp trơn được xác định hoàn toàn bởi đại số các hàm trơn trên nó, một đa tạp đại số affine được xác định bởi vành toạ độ của nó, một không gian compact địa phương được xác định bởi đại số các hàm liên tục trên đó và một không gian lượng tử được coi như là một không gian không giao hoán ứng với một đại số không giao hoán nào đó. Một không gian lượng tử, nói riêng một hệ cơ học lượng tử, thường chỉ được biết đến nhờ đại số các phép đo trên không gian đó.

Mô hình của một hệ cơ học lượng tử là một không gian Hilbert H cùng một họ đủ tốt các toán tử unita. Các hệ cơ học lượng tử thông thường tương ứng một cách hình thức với một hệ cơ học cổ điển. Vì vậy, bằng quá trình lượng tử hóa một hệ cơ học cổ điển chấp nhận một nhóm đối xứng G cho trước, ta có thể hi vọng thu được các biểu diễn unita của nhóm G lên không gian Hilbert H của hệ lượng tử tương ứng và tiến gần tới lời giải của bài toán đối ngẫu unita nói trên.

Lượng tử hóa là quá trình xây dựng một hệ lượng tử từ một hệ cổ điển cho trước nhờ quy tắc lượng tử. Một đại lượng cổ điển F được lượng tử hóa thành đại lượng lượng tử Q(f), thoả mãn nguyên lý bất định Dirac:

$$Q(f,g) = i\hbar^{-1}[Q(f), Q(g)].$$

Nói cách khác, ánh xạ lượng tử $i\hbar^{-1}Q$ chính là một đồng cấu đại số Lie ứng với móc Poisson và giao hoán tử.

Về phương diện toán học có thể coi Herman Weyl là người khởi xướng khái niệm lượng tử khi ông xây dựng được ánh xạ Q từ các đại lượng cổ điển-các hàm trên không gian pha $\mathbb{R}^{2n}$, đến các đại lượng lượng tử tức là các toán tử trên không gian Hilbert $L^2(\mathbb{R}^n)$:

$$Q : C^\infty(\mathbb{R}^{2n}) \to B(L^2(\mathbb{R}^n)),$$
$$f \mapsto Q(f).$$

Ánh xạ ngược được xây dựng bởi E. Wigner bằng cách coi các đại lượng cổ điển như là các ký hiệu (symbol) của các toán tử.

Các công trình nghiên cứu toán học nhằm giải quyết bài toán lượng tử hoá được Simon Gutt trình bày trong các bài giảng [23]:

• Lượng tử hoá hình học(1970): B. Kostant và J. M. Souriau, một người xuất phát từ lý thuyết biểu diễn nhóm Lie, một người xuất phát từ quan diểm symplectic của cơ học cổ điển, đã trình bày về lượng tử hoá hình học.

• Lượng tử hoá thứ cấp(1970): Berezin đã xây dựng một họ các đại số kết hợp trên lớp đặc biệt các đa tạp Kahler bằng cách sử dụng các tính toán trên các ký hiệu, tức là đưa ra một quy tắc lượng tử.

• Lượng tử hoá biến dạng: Flato, Lichnerowicz và Sternheimer đưa ra năm 1976, trong [31] và trong [7]. Họ đề nghị lượng tử hoá được hiểu là sự biến dạng của cấu trúc đại số các đại lượng cổ điển (còn gọi là các quan trắc cổ điển) hơn là sự thay đổi tận gốc tính tự nhiên của các đại lượng đó.

Ngay từ những năm 70, Berezin đã đưa ra định nghĩa toán học tổng quát của khái niệm lượng tử, đó là một hàm tử từ phạm trù cơ học cổ điển sang phạm trù các đại số kết hợp. Gần như cùng thời với Berezin, các nhà toán học Bayen, Flato, Fronsdal, Lichnorewics và Sternheimer (xem[8], [9]) đã xét lượng tử hoá như là sự biến dạng của tích giao hoán thông thường các hàm thành một $\star_\hbar$-tích kết hợp, không giao hoán, được tham số hoá bởi hằng số Plank $\hbar$ và thoả mãn nguyên tắc tương thích. Trong [8] họ đã phát triển một cách hệ thống khái niệm về lượng tử hoá biến dạng, coi nó là một lý thuyết về $\star$-tích và dựa trên khái niệm này họ đã nhận được các công thức cũ và mới độc lập với cơ học lượng tử. Vào năm 1983, De Wilde và Lecomte đã chứng minh được sự tồn tại của lượng tử hoá biến dạng trên mọi đa tạp symplectic. Một chứng minh khác mang nội dung hình học hơn được thực hiện vào năm 1985 bởi Fedosov và bởi Omori, Maeda, Yoshioka vào năm 1988 bằng cách sử dụng phân thớ Weyl (xem [18]).

Bài toán lượng tử hoá được phát biểu một cách tự nhiên đối với đa tạp Poisson. Đa tạp Poisson là một đa tạp M mà sao cho với mọi u, v $\in C^\infty(M)$, ánh xạ

$$\{,\}: C^\infty(M) \times C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M),$$

là một toán tử song tuyến tính phản đối xứng, thoả mãn đồng nhất Jacobi và quy tắc Leibnitz

$$\{u,\{v,w\}\} + \{v,\{w,u\}\} + \{w,\{u,v\}\} = 0.$$

$$\{uv,w\} = \{u,w\}v + \{v,w\}u.$$

Năm 1996, Etingof và Kazhdan đã chứng minh được sự tồn tại của biến dạng khả vi hình thức đối với lớp các nhóm Lie-Poisson. Việc nghiên cứu được mở rộng hơn nhiều khi M. Kontsevich hoàn thành phép chứng minh giả thuyết của mình năm 1997, từ đó kéo theo sự tồn tại của lượng tử hoá biến dạng trên mọi đa tạp Poisson tuỳ ý (xem[29]). Cùng với kết quả đó, M. Kontsevich đã thu được công thức tường minh về $\star$-tích đối với mọi cấu trúc Poisson trên $\mathbb{R}^n$. Bên cạnh đó, gần đây các nhà toán học Reshetikhin và Takhtajan đã xây dựng thành công công thức tích phân đối với $\star$-tích hình thức trên các đa tạp K$\ddot{a}$hler (xem [37]). Việc tìm ra các $\star$-tích cụ thể trên các kiểu đa tạp khác nhau trở thành một bài toán thú vị và gặp nhiều khó khăn.

Nghiên cứu và phân loại biểu diễn của đại số Lie hay nhóm Lie cho ta những thông tin về chính nhóm đó và của các đại số nhóm tương ứng. Việc giải quyết bài toán này rất phức tạp và hiện nay đang được các nhà toán học nghiên cứu nhằm cố gắng xây dựng được và mô tả một cách tường minh. Để giải quyết bài toán này, phương pháp quỹ đạo của A. A. Kirillov, (xem [30]) đã ra đời và nhanh chóng trở thành một công cụ đắc lực đối với lý thuyết biểu diễn. Trong phương pháp đó Kirillov đã xuất phát từ phân thớ một chiều trên các đa tạp symplectic thuần nhất xây dựng từ các K-quỹ đạo trong $\mathfrak{g}^\star$ để thu được các biểu diễn của nhóm Lie G. Tiếp theo ông cùng với B. Kostant, (xem[31]) đã hình học hoá phương pháp quỹ đạo bằng cách xây dựng lý thuyết lượng tử hoá trên các đa tạp symplectic thuần nhất chặt mà ta vẫn gọi đó là lượng tử hoá hình học.

Vào những năm 79-80, Đỗ Ngọc Điệp cùng các cộng sự của mình đã đề xuất ra quy tắc lượng tử hoá hình học nhiều chiều (xem[14]). Dựa vào đó chúng ta có thể thu được khá nhiều biểu diễn của nhóm Lie G.

Chương trình nghiên cứu đối ngẫu unita thông qua lượng tử hoá biến dạng được Bayen, Flato, Fronsdal, Lichnerowicz và Sternheimer đưa ra năm 1978 trong [8]. Vào năm 1985 và sau đó năm 1990, D. Arnal và J. Cortet đã áp dụng quy tắc lượng tử hoá biến dạng vào các nhóm nilpotent và nhóm exponential và thu được các công thức lượng tử tổng quát, (xem [6]). Đây là một bài toán khó và kết quả được nhiều người quan tâm nhưng việc tính toán cụ thể còn rất nhiều khó khăn. Các tác giả không đi xây dựng trực tiếp các vi phôi từ $\mathbb{R}^{2n}$ sang các đa tạp symplectic M mà chỉ khẳng định tồn tại các vi phôi cần thiết vì thế không thể áp dụng trực tiếp các công thức đó vào nhiều trường hợp cụ thể để có thể nhận được các kết quả tường minh. Gần đây, Nguyễn Việt Hải trong luận án của mình cũng sử dụng công cụ lượng tử hoá biến dạng để nghiên cứu các lớp nhóm MD_4 và $\overline{MD}$ và cũng thu được biểu thức tường minh. Tuy nhiên, đối với SL(2,$\mathbb{R}$) là nhóm không có tính exponent thì bài toán hoàn toàn chưa được giải quyết.

0.2 Mục đích, phương pháp và kết quả nghiên cứu

Mục đích chính của luận văn:

- Mô tả bức tranh các quỹ đạo của SL(2,$\mathbb{R}$).
- Xây dựng cụ thể lượng tử hoá biến dạng của đại số các hàm khả vi vô hạn trên các K-quỹ đạo của nhóm SL(2,$\mathbb{R}$). Từ đó tìm ra tất cả các biểu diễn unita bất khả quy bằng phương pháp lượng tử hoá biến dạng
- Tìm ra các đối tượng lượng tử mới: các quỹ đạo đối phụ hợp lượng tử.

Để thực hiện được điều này chúng tôi tiến hành lượng tử hóa theo những bước sau đây:

- Xây dựng vi phôi toàn thể từ $\mathbb{R}^2$ hay C^2 sang Ω thoả mãn các điều kiện sau đây:

  • Hàm Hamilton A ứng với trường véc tơ ξ_A là hàm tuyến tính theo một biến.

  • Dạng Kirillov trên mỗi bản đồ (Ω, ψ^{-1}) là chính tắc $\omega = dp \wedge dq$.
- Chứng minh $\star$ -tích Moyal-Weyl trên mỗi K quỹ đạo là G-hiệp biến, từ đó tìm được biểu diễn của đại số Lie $\mathfrak{g}$.
- Tiếp theo, áp dụng các kết quả của Kostant và Auslander để thu được đầy đủ các biểu diễn của sl(2,$\mathbb{R}$), qua đó thu được các biểu diễn vô cùng nhỏ của SL(2,$\mathbb{R}$) trùng với kết quả đã biết. Nhờ đó, ta thu được tất cả các biểu diễn unita của SL(2,$\mathbb{R}$) và nhận được tính bất khả quy nhờ lý thuyết cổ điển.
- Cho một mô tả tầng K-quỹ đạo lượng tử hai chiều của SL(2,$\mathbb{R}$).

Chú ý rằng một số tác giả khác bằng phương pháp khác cũng đã xây dựng được đối ngẫu unita của SL(2,$\mathbb{R}$) bằng phương pháp giải tích, (xem [33]). Tuy nhiên, cách tiếp cận này tỏ ra rất phức tạp và yêu cầu phải biết rõ về cấu trúc của SL(2,$\mathbb{R}$), cụ thể là phân tích Iwasawa của nó. Bằng phương pháp tiếp cận hình học, chúng tôi đã thu được cùng một kết quả với các phương pháp cổ điển.

Nội dung của luận văn gồm phần mở đầu, hai chương nội dung, phần kết luận và phần phụ lục. Phần mở đầu trình bày xuất xứ, cội nguồn lịch sử và đặt bài toán. Các chương sau trình bày các chứng minh tính toán và các công thức tường minh...

Trong chương một, sau khi trình bày về biểu diễn đối phụ hợp cùng với việc phân loại các đa tạp Poisson thuần nhất, chúng tôi nhắc lại một số định nghĩa và tính chất của nhóm Lie SL(2,$\mathbb{R}$) cần thiết về sau. Tiếp theo, bằng các tính toán cụ thể, chúng tôi thu được dạng tường minh của quỹ đạo đối phụ hợp. Từ đó, chúng tôi xây dựng phân cực phức cho các quỹ đạo. Đây là sự chuẩn bị cho các tính toán phức tạp hơn trong chương sau.

Trong chương hai, sau khi nhắc lại khái niệm lượng tử hoá biến dạng, chúng tôi tiến hành lượng tử hoá biến dạng các quỹ đạo đối phụ hợp. Trước hết chúng tôi xây dựng các bản đồ tương thích và chứng minh tính hiệp biến của $\star$-tích. Sau khi thu được toán tử lượng tử tương thích ứng với các quỹ đạo, chúng tôi thu được biểu diễn của đại số Lie sl(2,$\mathbb{R}$). Tiếp theo, chúng tôi nhắc lại phân loại của Bargman và chứng minh sự tương đương của hai cách tiếp cận này.

Trong phần phụ lục, chúng tôi trình bày ngắn gọn các kết quả của luận văn này bằng tiếng Anh dưới dạng một bài báo nghiên cứu "Deformation quatization and quantum coadjoint orbits of SL(2,$\mathbb{R}$)".

Kết quả nghiên cứu Những kết quả về phân loại hình học các K-quỹ đạo ở chương I và xây dựng biểu diễn của SL(2,$\mathbb{R}$) theo phương pháp lượng tử hoá biến dạng ở chương II thu được ở đây là lần đầu tiên: hình học các K-quỹ đạo của SL(2,$\mathbb{R}$) được mô tả tường minh, các biểu diễn của đại số Lie sl(2,$\mathbb{R}$) được cho cụ thể bởi các toán tử giả vi phân, các biểu diễn tương ứng của nhóm Lie SL(2,$\mathbb{R}$) cũng thu được theo do sự trùng nhau của các biểu diễn vô cùng bé, chúng tác động lên không gian L^2 của thương của nhóm Lie G theo phân cực tương ứng.

Một hệ quả thú vị từ mô tả biểu diễn unita bất khả quy của SL(2,$\mathbb{R}$) nói ở trên là các đại số lượng tử: mặt elliptic hyperboloid lượng tử, mặt hyperbolic hyperboloid hai tầng lượng tử, mặt nón lượng tử như là biến dạng của đại số các hàm trơn trên các K-quỹ đạo. Những đối tượng lượng tử này được mô tả ở đây lần đầu tiên.

Các kết quả cơ bản được báo cáo tại seminar phòng Hình Học và Tôpô, Viện Toán Học và hội nghị khoa học sinh viên khoa Toán-Cơ-Tin học, ĐHKHTN, ĐHQGHN.

0.3 Lời cảm ơn

Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn khoa học của giáo sư tiến sĩ khoa học Đỗ Ngọc Diệp, người thầy vô cùng tận tâm và nghiêm khắc. Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn vô cùng sâu sắc đến người thầy kính yêu đã từng bước hướng dẫn tôi làm quen với giải tích điều hoà, lý thuyết biểu diễn nhóm Lie cùng với lý thuyết đại số lượng tử để tiến tới nắm vững các lý thuyết đó, tự giải quyết được bài toán của mình. Tôi xin chân thành cảm ơn Tiến sĩ Nguyễn Việt Dũng cùng các giáo sư, tiến sĩ thuộc phòng Hình học và Tôpô, Viện Toán Học, trung tâm KHTN và CNQG đã giúp đỡ tôi nâng cao trình độ chuyên môn và phương pháp làm việc có hiệu quả, đặc biệt là qua các buổi sinh hoạt chuyên môn của phòng. Tôi cũng xin chân thành cảm ơn thầy giáo chủ nhiệm Tiến sĩ Nguyễn Đức Đạt, Tiến sĩ Đặng Vũ Giang cùng các thầy giáo trong khoa-những người thầy vô cùng đáng kính đã có công ơn dìu dắt tác giả trong những năm đại học. Luận văn này cũng không thể hoàn thành nếu như thiếu sự cổ vũ, động viên về mặt tinh thần của gia đình và bạn bè cùng khoá.

Luận văn được hoàn thành tại trường ĐHKHTN
Tháng 5 năm 2003

Chương 1

Hình học các quỹ đạo đối phụ hợp của SL(2,$\mathbb{R}$)

1.1 Tổng quan về phương pháp quỹ đạo

Chúng ta sẽ bắt đầu bằng những khái niệm cơ bản của phương pháp quỹ đạo của Kirillov (xem [30]). Phương pháp này cho một mối liên hệ gần gũi giữa các biểu diễn unita vô hạn chiều và các quỹ đạo đối phụ hợp trong $\mathfrak{g}^\star$.

Một cấu trúc symplectic trên một đa tạp là một dạng vi phân cấp hai đóng, phản xứng, không suy biến. Không gian pha của một hệ cơ học cổ điển là ví dụ điển hình của một đa tạp symplectic. Người ta nhận thấy rằng quỹ đạo của một nhóm Lie cũng là các đa tạp symplectic. Vì vậy, nó đề xuất ra khả năng sử dụng các công cụ của cơ học để giải quyết các vấn đề về toán học.

Về lịch sử, phương pháp quỹ đạo được đề xuất lần đầu tiên trong [31] để miêu tả đối ngẫu unita của nhóm Lie nilpotent. Tuy nhiên sau đó người ta nhận thấy rằng, tất cả các câu hỏi chính của lý thuyết biểu diễn như cấu trúc tôpô của đối ngẫu unita, công thức đặc trưng, sự mô tả tường minh của các hàm tử cảm sinh và hạn chế đều có thể được thể hiện một cách tự nhiên dưới dạng các quỹ đạo. Hơn nữa, bằng một số thay đổi nhỏ, người ta có thể áp dụng phương pháp này cho các nhóm Lie tổng quát hơn.

1.1.1 Biểu diễn đối phụ hợp của nhóm Lie

Cho G là một nhóm Lie, tức là một đa tạp trơn cùng với một phép toán mà là một ánh xạ trơn $G \times G \to G$ thoả mãn các tiên đề của nhóm. Ví dụ quan trọng nhất của nhóm Lie là lớp nhóm ma trận, tức là các nhóm con của GL(2,$\mathbb{R}$). Xét $\mathfrak{g}$=Lie(G) là không gian tiếp xúc $T_e(G)$ tại điểm đơn vị e. Nhóm G tác động lên chính nó bởi tự đẳng cấu trong

$$i(g) : x \mapsto gxg^{-1}.$$

Điểm e là điểm bất động của tác động này do đó chúng ta nhận được tác động đạo hàm của G lên $\mathfrak{g}$

$$A_*(g) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g},$$

mà thông thường được ký hiệu là Ad(g). Biểu diễn này được gọi là biểu diễn phụ hợp của G. Đối với trường hợp nhóm Lie ma trận thì biểu diễn phụ hợp đơn giản chỉ là phép liên hợp ma trận:

$$Ad(g)X = gXg^{-1}, X \in \mathfrak{g}, g \in G.$$

Chúng ta xét không gian đối ngẫu của $\mathfrak{g}$ mà thông thường được ký hiệu bằng $\mathfrak{g}^*$. Khi đó biểu diễn đối phụ hợp (còn gọi là K-biểu diễn) mà đối ngẫu với khái niệm biểu diễn phụ hợp ở trên được định nghĩa như sau:

$$\langle K(g)F, X\rangle = \langle F, Ad(g^{-1})X\rangle,$$

trong đó ở đây $F \in \mathfrak{g}^*$. Giả sử $F \in \mathfrak{g}^*$ và Ω_F là K-quỹ đạo đi qua F trong $\mathfrak{g}^*$.

Đặt $G_F = stab(F)$ là nhóm con dừng của F và $\mathfrak{g}_F = LieG_F$. Ta có dãy khớp sau

$$0 \to \mathfrak{g}_F \to \mathfrak{g} \to T_F(\Omega_F) \to 0.$$

Trên $\mathfrak{g}$ tồn tại một dạng song tuyến tính phản đối xứng chính tắc B_F mà có nhân đúng bằng $\mathfrak{g}_F$:

$$B_F(X, Y) = \langle F, [X, Y]\rangle.$$

Vì vậy chúng ta có thể định nghĩa được dạng vi phân ω trên $G_F \setminus G$ mà giá trị ω_F của nó tại F được xác định bởi

$$\omega_F(K_*(X)F, K_*(Y)F) = B_F(X, Y).$$

Có thể chứng minh được rằng ω_F là một dạng vi phân cấp hai đóng không suy biến và G-bất biến trên G-không gian thuần nhất $G_F \setminus G$ mà đã được đồng nhất chính tắc với Ω_F. Người ta cũng biết rằng dạng vi phân ω không phụ thuộc vào việc ta chọn điểm F trên quỹ đạo (xem [30] để biết thêm chi tiết).

Vậy tổng kết lại chúng ta có định lý sau đây:

Định lý 1.1.1 *Trên mọi quỹ đạo đối phụ hợp Ω_F của nhóm Lie G, tồn tại dạng vi phân cấp 2 đóng, không suy biến, G-bất biến mà ta gọi là dạng Kirillov.*

1.1.2 Phân loại đa tạp symplectic thuần nhất phẳng

Định nghĩa 1.1.2 *Một đa tạp symplectic là một đa tạp trơn được trang bị một 2-dạng vi phân cấp 2 đóng, không suy biến ω được gọi là dạng symplectic.*

Dễ thấy rằng, mọi đa tạp symplectic đều có số chiều chẵn.

Ví dụ 1 *Mọi phân thớ đối tiếp xúc đều là một đa tạp symplectic với dạng symplectic là vi phân của dạng Liouville.*

Một đa tạp symplectic cũng như một đa tạp Riemann đều cho phép định nghĩa một đẳng cấu chính tắc giữa không gian các trường véc tơ và không gian các dạng vi phân cấp một thông qua dạng vi phân của nó:

$$Vect(M) \to \Omega^1(M)$$

$$\xi \longmapsto i(\xi)\omega.$$

Định nghĩa 1.1.3 *Một trường véc tơ ξ được gọi là trường Hamilton và được ký hiệu $\xi \in Vect(M, \omega)$ nếu như một trong hai điều kiện tương đương sau đây thoả mãn:*

1. *Đạo hàm Lie của ω dọc theo trường véc tơ ξ bằng không.*

$$\xi\omega := L_\xi\omega = Lie_\xi\omega = 0.$$

2. *$i(\xi)\omega$ là dạng vi phân đóng.*

Trường véc tơ ξ được gọi là Hamilton chặt và được ký hiệu là $\xi \in Vect_0(M)$ nếu như $i(\xi)\omega$ là dạng khớp, hay tồn tại $f_\xi \in C^\infty(M)$ sao cho

$$i(\xi)\omega + df_\xi = 0.$$

Trong trường hợp đó người ta nói rằng $\xi = \xi_f$ là trường Hamilton tương ứng với hàm f hay gradient symplectic của f. Không khó khăn, ta chứng minh được rằng $Vect(M, \omega)/Vect_0(M, \omega)$ đẳng cấu với nhóm đối đồng điều de-Rham cấp một $H^1(M, \mathbb{R})$. Với mọi f và g $\in C^\infty(M)$, ta định nghĩa móc Poisson của f và g là hàm số $\xi_f(g) = \omega(\xi_f, \xi_g) = -\xi_g(f)$, ký hiệu {f,g}. Móc Poisson có các tính chất sau:

a)$\{f, g\} = -\{g, f\}$.
b)$\{\sum \lambda_i f_i, g\} = \sum \lambda_i \{f_i, g\}$
c)$\{fg, h\} = f\{g, h\} + g\{f, h\}$
d)$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$

Ta có các mệnh đề sau:

Mệnh đề 1.1.4

$$[Vect(M,\omega), Vect(M,\omega)] \subseteq Vect_0(M,\omega).$$

Mệnh đề 1.1.5 *Ánh xạ $f \mapsto \xi_f$ là một đồng cấu đại số Lie.*

Ta có dãy khớp các đại số Lie sau

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow C^\infty(M) \longrightarrow H_(M) \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow H_0(M) \longrightarrow H(M) \longrightarrow H^1(M,\mathbb{R}) \longrightarrow 0,$$

Năm 1976, độc lập với nhau A. A. Kirillov và Lichnerowic giới thiệu khái niệm đa tạp Poisson. Chỉ mười năm sau, lý thuyết đa tạp Poisson đã trở thành một khái niệm cốt yếu của vật lý toán hiện đại.

Một đa tạp Poisson là một đa tạp trơn M mà đại số $C^\infty(M)$ được trang bị một phép toán

$$\{,\} : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M),$$

thoả mãn các tính chất a), b), c), d). Hiển nhiên rằng mọi đa tạp symplectic đều là đa tạp Poisson.

Một cách tự nhiên, lớp các đa tạp symplectic và lớp các đa tạp Poisson lập thành các phạm trù. Các cấu xạ giũa chúng là các ánh xạ trơn mà bảo toàn cấu trúc symplectic và cấu trúc Poisson tương ứng.

Cho một nhóm Lie G tác động bắc cầu lên đa tạp symplectic M mà tất cả các phép biến đổi của nhóm G đều bảo toàn dạng symplectic. Với X $\in \mathfrak{g}$, X sinh ra trên M một trường véc tơ ξ_X bất biến với tác động của G thông qua nhóm một tham số exp(tX). Nếu như tồn tại hàm Hamilton f_X ứng với ξ_X sao cho tương ứng $X \longmapsto f_X$ là một đồng cấu đại số Lie thì ta nói M là một G-đa tạp symplectic thuần nhất phẳng, (khái niệm phẳng ở đây được gọi lần đầu tiên bởi Đỗ Ngọc Diệp do sự tương tự với độ cong Ricci trong hình học Riemann).

Người ta chứng minh được rằng mọi quỹ đạo đối phụ hợp đều là các đa tạp symplectic thuần nhất phẳng. Chiều ngược lại cũng "hầu như đúng". Bằng một số hiệu chỉnh nhỏ về mặt tôpô và đại số, mọi đa tạp symplectic thuần nhât phẳng đều là các quỹ đạo đối phụ hợp. Chúng ta sẽ phát biểu điều này dưới một dạng tổng quát hơn cho các G-đa tạp Poisson.

Định nghĩa 1.1.6 *Một G-đa tạp Poisson là một cặp $(M, f^M_{(.)})$ trong đó M là một đa tạp Poisson chịu tác động bắc cầu của nhóm Lie G và $f^M_{(.)} : \mathfrak{g} \to C^\infty(M)$ là một đồng cấu đại số Lie sao cho $L(X) = s\text{-}grad(f^M_X)$.*

Với L_X là phép đạo hàm Lie theo trường véc tơ sinh bởi X và s-grad(f) là gradient thay phiên của f có dạng một trường véc tơ trên M sao cho: $s\text{-}grad(f)(g) = \{f, g\}$.

Với một nhóm Lie G cho trước, lớp các G-đa tạp cũng lập thành một phạm trù P(G) mà sao cho đồng cấu $\alpha : (M, f^M_{(.)}) \to (N, f^N_{(.)})$ là một ánh xạ trơn $M \to N$, bảo toàn móc Poisson, $\{\alpha^*(\phi), \alpha^*(\psi)\} = \alpha^*(\{\phi, \psi\})$ và $\alpha^*(f^N_X) = f^M_X$.
Ví dụ quan trọng về đa tạp Poisson là $(\mathfrak{g}^*, \langle,\rangle)$. Trong đó, ánh xạ g→ $C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ xác định bởi $f^{g^*}_X(F) = \langle F, X\rangle$.

Định lý 1.1.7 $(\mathfrak{g}^*, \langle,\rangle)$ *là vật hấp dẫn phổ dụng trong phạm trù P(G).*

Ý nghĩa của định lý này là với mọi G- đa tạp Poisson $(M, f^M_{(.)})$, tồn tại ánh xạ $\mu : (M, f^M_{(.)}) \to (\mathfrak{g}^*, \langle,\rangle)$ sao cho $\langle \mu(m), X\rangle = f^M_X(m)$.

Ánh xạ μ này được gọi là ánh xạ mômen. Không khó khăn, có thể chứng minh ánh xạ này là một vi phôi địa phương. Vậy tổng kết, ta thu được:

Định lý 1.1.8 *Mọi đa tạp Poisson thuần nhất đều là không gian phủ của một quỹ đạo đối phụ hợp của G.*

1.1.3 Đại cương về lý thuyết biểu diễn

Trong mục này, chúng tôi nhắc lại ngắn gọn các khái niệm về lý thuyết biểu diễn. Chúng ta bắt đầu bằng một nhóm tôpô G. Một biểu diễn của G là một không gian véc tơ phức V cùng với một tác động liên tục

$$G \times V \longrightarrow V \qquad (g, v) \mapsto \pi(g)v$$

mà các $\pi(g)$ là các toán tử tuyến tính trên V. Chúng ta thường gọi (π, V) hay đơn giản là π là một biểu diễn. Số chiều của V gọi là số chiều của biểu diễn. Ta nói W là một không gian con bất biến của V nếu W là một không gian con đóng của V và bảo toàn tất cả các toán tử $\pi(g)$. Có hai ví dụ về không gian con bất biến là W=V và W=$\{0\}$. Ta nói V là bất khả quy nếu V chỉ có hai không gian con bất biến này. Do không gian véc tơ $\{0\}$ chỉ có một không gian con nên mọi biểu diễn bất khả quy đều khác không. Mọi biểu diễn một chiều là bất khả quy.

Khái niệm cơ sở cho phép ta phân tích một không gian véc tơ thành tổng các không gian con một chiều. Trong lý thuyết biểu diễn, người ta cũng mong muốn thực hiện được điều tương tự: phân tích một biểu diễn bất kỳ thành tổng các biểu diễn bất khả quy. Tuy nhiên, điều này không phải lúc nào cũng thực hiện được.

Giả sử (π, V) và (ρ, V) là hai biểu diễn của cùng một nhóm G. Một toán tử bện là một ánh xạ tuyến tính liên tục $T : V \to W$ thỏa mãn $T \circ \pi = \rho \circ T$.

Ký hiệu không gian các toán tử bện là $Hom_G(V, W)$. Các toán tử bện đóng vai trò của toán tử tuyến tính trong đại số tuyến tính. Hai biểu diễn (π, V) và (ρ, V) gọi là tương đương nếu toán tử T có nghịch đảo cũng là một toán tử bện.

Thông thường ta yêu cầu V là một không gian Hilbert và biểu diễn của G bảo toàn tích vô hướng hay T(g) là các toán tử unita trên V. Ta nói T là một biểu diễn unita liên tục của G.

Ký hiệu $\hat{G} = \{$lớp tương đương các biểu diễn unita bất khả quy của G$\}$

Ta gọi $\hat{G}$ là đối ngẫu unita của G.

1.2 Mô tả các quỹ đạo đối phụ hợp của SL(2,$\mathbb{R}$)

1.2.1 Các tính chất cơ bản của SL(2,$\mathbb{R}$)

SL(2,$\mathbb{R}$) là lớp các ma trận vuông cấp hai thực có định thức bằng một. Người ta biết rằng SL(2,$\mathbb{R}$) là một nhóm Lie đơn. Bằng hệ thức quen biết det(I+tX)=1+ t. tr(X)+o(t), ta thu được đại số Lie sl(2,$\mathbb{R}$) chính là lớp các ma trận vuông cấp hai có vết triệt tiêu.

$$\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Trên SL(2,$\mathbb{R}$), ta trang bị một dạng song tuyến tính đối xứng $B(X, Y) = Tr(ad(X).ad(Y))$ được gọi là dạng Killing. Lý thuyết Lie cổ điển đã nói rằng, trên các đại số Lie nửa đơn, dạng Killing là không suy biến. Do đó, đối với SL(2,$\mathbb{R}$), ta thu được một đẳng cấu không gian véc tơ từ $\mathfrak{g}$ lên $\mathfrak{g}^*$được xác định bởi dạng Killing. Cụ thể hơn, $X \mapsto \widehat{X} = \dfrac{B(X, .)}{4}$.
Đại số Lie sl(2,$\mathbb{R}$) chấp nhận một hệ cơ sở tự nhiên:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

cùng với các phép toán: [H,X]=2Y, [H,Y]=2X, [X,Y]=-2H. Xét biểu diễn chính tắc của sl(2,$\mathbb{R}$) xác định bởi: ad(A)B=[A,B]. Trong cơ sở tạo bởi $\{$X,H,Y$\}$ thì ma trận của biểu diễn ad đối với các véc tơ cơ sở sẽ là:

$$ad(X) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}, ad(H) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, ad(Y) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Trên $\mathfrak{g}^*$, ta chọn cơ sở $\{X^*, H^*, Y^*\}$ đối ngẫu với cơ sở$\{X, H, Y\}$ của $\mathfrak{g}$. Khi đó, bằng tính toán cụ thể, ta thu được dạng tường minh của đẳng cấu $X \mapsto \widehat{X}$ dưới dạng ma trận trong hệ cơ sở trên là:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Nói cách khác

$$\widehat{X} = 2X^*, \widehat{Y} = -2Y^*, \widehat{H} = 2H^*.$$

Chú ý $\mathfrak{g}$ là một G-không gian với Ad biểu diễn và $\mathfrak{g}^*$ cũng là G- không gian với K-biểu diễn. Tuy nhiên, qua đẳng cấu sinh bởi dạng Killing $X \mapsto \hat{X}$ thì hai G-không gian này tương đương nhau.

Mệnh đề 1.2.1 *:Toán tử $X \mapsto \widehat{X}$ là một ánh xạ trơn G-đẳng biến của các G-không gian hay nói cách khác ta có với mọi $g \in G$ thì*

$$\widehat{Ad(g)X} = K(g)\widehat{X}.$$

Chứng minh: Theo tính chất của vết ta có hệ thức sau:

$$tr(adY.adX.adZ) = tr(adX.adZ.adY).$$

Do đó ta có

$$tr([adX, adY].adZ) = tr(adX.[adY, adZ]),$$

hay

$$B(ad(-Y)X, Z) = B(X, ad(Y)Z).$$

Áp dụng hệ thức trên n lần, ta thu được:

$$B(ad(-Y)^nX, Z) = B(X, ad(Y)^nZ.$$

Vậy sau khi lấy tổng các hệ thức như vậy, ta suy ra:

$$B(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(ad(-Y))^n}{n!}X, Z) = B(X, \sum_{n=0}^{\infty}\frac{ad(Y)^n}{n!}Z).$$

Hay

$$B(e^{ad(-Y)}X, Z) = B(X, e^{adY}Z).$$

Trong lý thuyết nhóm Lie cổ điển ta có hệ thức $e^{ad(X)} = Ad(exp(X))$. Chi tiết xem [10]. Suy ra với mọi X, Y, Z $\in \mathfrak{g}$ thì

$$B(Ad(expY)^{-1}X, Z) = B(X, Ad(expY)Z).$$

Thác triển hệ thức này lên toàn bộ G, ta thu được:

$$B(Ad(g)X, Z) = B(X, Ad(g^{-1}Z).$$

Do Z được chọn tuỳ ý nên ta suy ra

$$\widehat{Ad(g)X} = K(g)\widehat{X}.$$

Định lý được chứng minh.

Nhận xét:Đặt $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ thì ta có $J^2 = I$, detJ=-1.

Do GL(2,$\mathbb{R}$) là tích của SL(2,$\mathbb{R}$) và $\mathbb{R}^*$ nên với mọi A $\in GL(2, \mathbb{R})$, A có thể phân tích thành tích của một phần tử thuộc SL(2,$\mathbb{R}$) và một phần tử bằng λI hoặc λJ.

1.2.2 Phân loại các quỹ đạo đối phụ hợp

Chúng ta thay vì nghiên cứu các K-biểu diễn trong $\mathfrak{g}^*$ sẽ nghiên cứu các Ad-biểu diễn trong $\mathfrak{g}$. Mệnh đề 1.2.1 khẳng định, các K-quỹ đạo và các Ad-quỹ đạo là vi phôi G-đẳng biến với nhau.

Đại số tuyến tính phát biểu rằng mọi ma trận vuông đều đồng dạng với một ma trận Jordan. Chú ý rằng ở đây ta chỉ xét các ma trận cấp hai do tính chất kém tổng quát của bài toán. Nhận xét thêm rằng toán tử $A \mapsto XAX^{-1}$ là tuyến tính cho nên biểu diễn vô cùng bé của toán tử trên đơn thuần chỉ là phép lấy liên hợp trên không gian tiếp xúc tại I và có thể được thác triển thành biểu diễn của GL(2,$\mathbb{R}$) trên sl(2,$\mathbb{R}$). Do $tr(A) = tr(XAX^{-1})$ nên mọi ma trận vuông cấp hai có định thức bằng một đều tương đương với các ma trận có dạng

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

Định lý sau cho ta sự mô tả tường minh hình học của các quỹ đạo đối phụ hợp:

Định lý 1.2.2 *Mỗi quỹ đạo đối phụ hợp của SL(2,$\mathbb{R}$) thuộc một trong các dạng sau:*

- *(a) Mặt Elliptic hyperboloid:* Ω_λ^1=$\{\, 2xX^* + 2hH^* - 2yY^* \mid x^2 + h^2 = y^2 + \lambda^2, \lambda \neq 0\}$ *đi qua* $2\lambda H^*$,
- *(b) Nửa mặt nón trên:* Ω_+^2=$\{\, 2xX^* + 2hH^* - 2yY^* \mid x^2 + h^2 = y^2, y > 0\}$ *đi qua* $X^* + Y^*$,

  Nửa mặt nón dưới: Ω_-^2=$\{\, 2xX^* + 2hH^* - 2yY^* \mid x^2 + h^2 = y^2, y < 0\}$ *đi qua* $X^* - Y^*$,

  Quỹ đạo một điểm: Ω_0^2=$\{\, 0\}$,

- *(c) Nửa trên mặt hyperboloid* $\Omega^3_{+,\lambda}$=$\{ 2xX^* + 2hH^* - 2yY^* \mid x^2 + h^2 = y^2 - \lambda^2, y > 0\}$ *đi qua* $2\lambda Y^*$, $\lambda > 0$
  Nửa dưới mặt hyperboloid $\Omega^3_{-,\lambda}$=$\{ 2xX^* + 2hH^* - 2yY^* \mid x^2 + h^2 = y^2 + \lambda^2, y < 0\}$ *đi qua* $-2\lambda Y^*$, $\lambda > 0$.

Chứng minh: Trước hết ta chứng minh nhận xét sau: trên mọi quỹ đạo phụ hợp của SL(2,$\mathbb{R}$), ta luôn có thể tìm được các điểm đặc biệt mà cho phép ta phân loại các quỹ đạo phụ hợp.

Thật vậy, với $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \in sl(2, \mathbb{R})$, ta xét đa thức đặc trưng:

$$det(A - tI) = det \begin{pmatrix} a-t & b \\ c & -a-t \end{pmatrix} = t^2 + detA = bc - a^2 + t^2,$$

a) Nếu $detA < 0$ hay A có hai giá trị riêng khác nhau $\bar{\lambda}$ và $-\bar{\lambda}$, với $\bar{\lambda} = \sqrt{-detA}$ thì A chéo hoá được ,

$$A = M \begin{pmatrix} \bar{\lambda} & 0 \\ 0 & -\bar{\lambda} \end{pmatrix} M^{-1}.$$

Theo nhận xét trong 2.1.2, ta thấy do Ad(aI)=Id và tác động

$$Ad(J) \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & z \\ y & x \end{pmatrix},$$

bảo toàn lớp các ma trận chéo nên

$$A = S \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} S^{-1},$$

với det S=1, $\lambda = \pm\bar{\lambda}$.

b) Nếu detA=0 hay tất cả các giá trị riêng của A bằng 0.

Nếu $A = 0$ thì quỹ đạo chỉ gồm mỗi điểm 0. Nếu A khác 0 thì theo đại số tuyến tính, A đồng dạng với một ma trận Jordan

$$A = T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} T^{-1}, \qquad T \in GL(2, \mathbb{R}).$$

Theo nhận xét 1 thì do lớp ma trận $\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \right\}$ giao hoán với mọi ma trận cấp hai và

$$J \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} J^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

nên trong trường hợp này, tuỳ theo dấu của detT mà quỹ đạo qua A có thể chứa một trong hai điểm : $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
c)Nếu detA >0 hay các giá trị riêng của A là thuần ảo.
Đặt $\lambda = \sqrt{-a^2 - bc} \neq 0$ ta có

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = -\lambda^2 I.$$

Chọn $X \in \mathfrak{g} \backslash \{0\}$ và đặt $Y = \dfrac{AX}{\lambda}$. Dễ thấy do $A^2X = -\lambda^2 X$ nên $Y \neq 0$
Giả sử Y=p.X, $p \in \mathbb{R}$ thì một mặt do $A^2X = -\lambda^2 X$, một mặt $A^2X = A\lambda Y = A\lambda pX = \lambda^2 pY = p^2\lambda^2 Y$ nên ta suy ra $p^2 = -1$. Mâu thuẫn.
Vậy X, Y độc lập tuyến tính và lập thành cơ sở của $\mathfrak{g}$. Trong cơ sở mới này thì A có dạng chuẩn:

$$A = T \begin{pmatrix} 0 & -\lambda \\ \lambda & 0 \end{pmatrix} T^{-1},$$

với T là ma trận đổi cơ sở $\in GL(2, \mathbb{R})$.
Đối với các trường hợp còn lại, ta cũng lập luận tương tự. Ta thu được trên mỗi quỹ đạo phụ hợp luôn chứa đúng một điểm đặc biệt thuộc một trong các dạng sau :

$$\begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -\lambda \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Áp dụng vào việc phân loại các quỹ đạo đối phụ hợp, ta có:

1. Quỹ đạo phụ hợp đi qua $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix}$.
   Với $S \in SL(2, \mathbb{R})$, ta thu được
   $\begin{pmatrix} h & x+y \\ x-y & -h \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} S^{-1} = \begin{pmatrix} u & v \\ s & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & v \\ s & t \end{pmatrix}^{-1}$
   $= \begin{pmatrix} u & v \\ s & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & -v \\ -s & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(ut+sv) & -2\lambda uv \\ 2\lambda st & -\lambda(ut+sv) \end{pmatrix}$
   hay ta thu được $\frac{h}{\lambda} = ut + sv$, $\frac{x+y}{\lambda} = -2uv$, $\frac{x-y}{\lambda} = 2st$.
   Suy ra $\frac{x^2-y^2}{\lambda^2} + \frac{h^2}{\lambda^2} = -4uvst + (ut+sv)^2 = (ut-sv)^2 = 1$.
   Hay $x^2 + h^2 - y^2 = \lambda^2$.

2. Quỹ đạo phụ hợp đi qua $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   Với $S \in SL(2, \mathbb{R})$, ta có:

$\begin{pmatrix} h & x+y \\ x-y & -h \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} S^{-1} = \begin{pmatrix} u & v \\ s & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & -v \\ -s & u \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} vt & -v^2 \\ t^2 & -vt \end{pmatrix}$ trong đó h=vt, $x+y = -v^2$, $x-y = t^2$. Hay $x^2+h^2-y^2 = 0$. Chú ý rằng $(x,h,y) \neq (0,0,0)$ và $y < 0$. Vì vậy, ta thu được $x^2 + h^2 = y^2$, với $y < 0$.

3. Quỹ đạo phụ hợp đi qua $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, tương tự là: $x^2 + h^2 = y^2$, với $y > 0$.

4. Quỹ đạo đi qua (0, 0, 0) chỉ có duy nhất một điểm.

5. Quỹ đạo đối phụ hợp đi qua $\begin{pmatrix} 0 & -\lambda \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}$.

   Với $S \in SL(2,\mathbb{R})$, ta có:
   $\begin{pmatrix} h & x+y \\ x-y & -h \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} 0 & -\lambda \\ \lambda & 0 \end{pmatrix} S^{-1} = \begin{pmatrix} u & v \\ s & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\lambda \\ \lambda & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & -v \\ -s & u \end{pmatrix}$
   $= \begin{pmatrix} \lambda(vt-us) & -\lambda(u^2+v^2) \\ \lambda(s^2+t^2) & -\lambda(vt-us) \end{pmatrix}$.
   hay $\frac{h}{\lambda} = vt + us$, $\frac{x+y}{\lambda} = -(u^2+v^2)$, $\frac{x-y}{\lambda} = s^2 + t^2$.
   hay $\frac{x^2-y^2}{\lambda^2} + \frac{h^2}{\lambda^2} = 1$ với $0 \geq x+y$, $x-y \geq 0$.
   Vậy phương trình quỹ đạo là : $x^2 + h^2 = y^2 - \lambda^2, y < 0$.

6. Quỹ đạo phụ hợp đi qua $\begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix}$. Thực hiện hoàn toàn tương tự ta thu được $x^2 + h^2 = y^2 - \lambda^2, y > 0$.

Tóm lại bằng tính toán cụ thể ta thu được tất cả các quỹ đạo phụ hợp của SL(2,$\mathbb{R}$). Bằng cách chuyển qua đẳng cấu sinh bởi dạng Killing, ta thu được danh sách tất cả các K-quỹ đạo của SL(2,$\mathbb{R}$) trong định lý 1.2.2.

Nhận xét 1

Trong định lý trên ta đã thu được danh sách tất cả các quỹ đạo đối phụ hợp của SL(2,$\mathbb{R}$) gồm từng phần của các mặt mức sinh bởi đa thức $\{x^2 + h^2 - y^2\}$. Tuy nhiên các giá trị của đa thức này không cho một phân loại hoàn toàn các quỹ đạo đối phụ hợp. Điển hình là với các quỹ đạo ứng với $\{x^2 + h^2 - y^2 = 0\}$. Tuy vậy, đa thức này cũng cho một phân mức tương đối tốt cho các quỹ đạo.

Đối với các nhóm Lie nửa đơn khác có số chiều cao hơn, ta cũng có thể tìm được mốt lớp đa thức có tính chất tương tự như vậy. Ví dụ với SL(n,$\mathbb{R}$), ta biết rằng $det(XAX^{-1}) = detA, \quad \forall X \in SL(2,\mathbb{R})$. Vậy, ta thu được

$$det(X(A - \lambda I)X^{-1}) = det(A - \lambda I).$$

Đạo hàm cả hai vế theo λ cấp $k < n$ ta thu được: $P_k(XAX^{-1}) = P_k(A)$, trong đó P_k là các hàm của ma trận, nhận giá trị bằng số, đóng vai trò như là các hệ số của đa thức đặc trưng là các đa thức bất biến. Ví dụ $P_0(A) = detA, P_{n-1} = TrA$.

Với G=SL(2,$\mathbb{R}$), thì

$$det\begin{pmatrix} h & x+y \\ x-y & -h \end{pmatrix} = y^2 - x^2 - h^2,$$

chính là đa thức bất biến của chúng ta.

1.3 Phân cực cho SL(2,$\mathbb{R}$)

Một trong những sự phát triển tiêu biểu của phương pháp quỹ đạo là lý thuyết lượng tử hoá hình học. Trên mỗi quỹ đạo đối phụ hợp, ứng với hàm f, ta cho nó tương ứng với toán tử $\hat{f}$ mà được xây dựng nhờ một liên thông affine. Tuy nhiên, vấn đề nảy sinh lại là không gian mà các toán tử đó tác động. Một cách tổng quát, trên mỗi đa tạp symplectic, vì các nguyên nhân vật lý, người ta cần phải xây dựng một không gian L^2 theo các toạ độ có số biến bằng một nửa số chiều quỹ đạo. Quá trình xoá đi khỏi các toạ độ của một đa tạp symplectic một nửa số các toạ độ 'xung lượng' gọi là phân cực.

1.3.1 Các khái niệm cơ bản về phân cực

Cho G là một nhóm Lie. Một phân cực phức của quỹ đạo Ω_F tại $F \in \Omega_F$ là một bộ bốn $(\eta, \mathfrak{h}, U, \rho)$ thoả mãn:

1. η là đại số Lie con của đại số Lie phức $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = g \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \mathbb{C}$ và chứa $\mathfrak{g}_F$.

2. Đại số con η là bất biến dưới tác động của các toán tử $Ad_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}x$, $x \in G_F$.

3. Không gian véc tơ $\eta + \bar{\eta}$ là phức hóa của đại số Lie con thực $\mathfrak{m} = (\eta + \bar{\eta}) \cap \mathfrak{g}$.

4. Tất cả các nhóm con M_0, H_0, M, H đều đóng, trong đó, theo định nghĩa M_0 (tương ứng H_0) là nhóm con liên thông của G với Lie dại số Lie $\mathfrak{m}$ (tương ứng $\mathfrak{h} := \eta \cap \mathfrak{g}$) và M:=$G_F.M_0$, H:=$G_F.H_0$.

5. Tồn tại biểu diễn unita U của H và biểu diễn chỉnh hình một chiều ρ của η thoả mãn: $U(expX) = e^{\rho(X)}$ với X $\in \eta$, trong đó η xác định bởi $\eta(X) = 2\pi i\langle F, X\rangle$.

6. Điều kiện Pukanszky thỏa mãn: $F + \eta^{\perp} \subset \Omega_F$,

Chú ý: điều kiện 5 và 6 thường được thêm vào để ta nhận được biểu diễn bất khả quy của G.
Ký hiệu tập nghiệm của phương trình:

$$f(gh) = U(h).f(g)$$

$$(L_X - \rho(X))f = 0$$

là $C^\infty(G, \eta, H, \rho, U)$.

Ta có định lý sau: (chi tiết xem [13])

Định lý 1.3.1 *Với các điều kiện trên, $X = H \setminus G$ lập thành một đa tạp hỗn hợp kiểu (k, l) trong đó, k=dim G-dim M ; $l = \frac{1}{2}(dimM - dimH)$. Ta có thể định nghĩa một không gian phân thớ chỉnh hình từng phần $\mathfrak{E}_{U,\rho}$, sao cho biểu diễn của G lên không gian các lát cắt chỉnh hình từng phần $\mathfrak{E}_{U,\rho}$ tương đương với biểu diễn tịnh tiến của G lên $L(G, \eta, H, \rho, U)$*

Khi đó ta gọi $\mathfrak{E}_{U,\rho}$ là phân thớ cảm sinh.
Dưới đây, chúng tôi sẽ chọn phân cực phức ứng với từng quỹ đạo (η, ρ, H, U) ứng với từng quỹ đạo hai chiều. Quỹ đạo tầm thường gồm điểm 0 ứng với biểu diễn tầm thường được bỏ qua.

1.3.2 Phân cực cho quỹ đạo Ω^1_λ

Chúng ta xét $\hat{F} = 2\lambda H^* \in \Omega^1_\lambda$, đại số Lie con phức $\eta = \langle H, X+Y\rangle_{\mathbb{C}}$. Biểu diễn $U = e^{2\pi i\langle F,.\rangle}$ của $\mathfrak{h} = \eta \cap \mathfrak{g}$ có thể được thác triển lên thành biểu diễn của $H = H^0 \cup \varepsilon H^0$ thoả mãn $U(\varepsilon) = \pm 1$. Xét ρ là thác triển của dU lên η.

Mệnh đề 1.3.2 $(\eta, \mathfrak{h}, U, \rho)$ *là một phân cực của* Ω^1_λ.

Chứng minh: . Dễ thấy rằng $G_F = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1}\end{pmatrix}\right\}$ có hai thành phần liên thông ứng với $a > 0$ và $a < 0$. Hiển nhiên, đại số Lie của nó là $\mathfrak{g}_F = \langle H\rangle$. Nhận thấy Ad-quỹ đạo đi qua $F = \lambda H$ chứa hai đường thẳng $\{F + t(X \mp Y)\}$. Rõ ràng, các đường thẳng này là ảnh của hai đường thẳng $\{\hat{F} + t(X^* \pm Y^*)\}$ đi qua $\hat{F}$ nằm trong Ω^1_λ dưới đẳng cấu sinh bởi dạng Killing.

Chọn $\eta = \langle H, X+Y\rangle_{\mathbb{C}}$. Chúng ta thấy điều kiện Pulkansky được thỏa mãn. Chú ý rằng do [H, X+Y]=2(X+Y) nên η là một đại số Lie con bất biến dưới Ad-tác động của G_F. Chúng ta cũng suy ra $\mathfrak{h} = \eta \cap \mathfrak{g} = \mathfrak{m} = \langle H, X+Y\rangle, \bar{\eta} = \eta, \mathfrak{m}_{\mathbb{C}} = \eta + \bar{\eta} = \eta$. Nhận thấy $\rho(.) = 2\pi i\langle \hat{F}, .\rangle$ là biểu diễn chỉnh hình một chiều của η, mà $\rho(aH + b(X+Y)) = 4\pi i\lambda a$.

Bằng tính toán cụ thể, ta thu được

$$exp\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -a\end{pmatrix} = exp\left(a.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} e^a & b(\frac{e^a - e^{-a}}{2}) \\ 0 & e^{-a}\end{pmatrix}.$$

Vậy,
$U\left(exp\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{pmatrix}\right) = e^{4\pi i\lambda a}$ hay $U\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix} = \alpha^{4\pi i\lambda}$ với mọi $\alpha > 0$.
Do G_F có hai thành phần liên thông ứng với $\alpha > 0$ và $\alpha < 0$
$H = G_F.H^0 = \left\{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix} \mid \alpha \neq 0\right\}$,
nên ta có $H = H^0 \cup \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.H^0$.
Vậy, bằng việc thác triển U lên trên H, chúng ta thu được hai biểu diễn unita của H tương ứng với các đặc trưng của $H/H^0 = \mathbb{Z}_2$, :
$U\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix} =\mid \alpha \mid^{4\pi i\lambda}$ và $U\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix} = |\alpha|^{4\pi i\lambda}.sgn(\alpha)$.

1.3.3 Phân cực phức cho quỹ đạo Ω_+^2

Xét điểm $\hat{F} = X^* - Y^* \in \Omega_+^2$, cùng đại số Lie con phức $\eta = \langle H, X+Y\rangle_{\mathbb{C}}$. Biểu diễn $U = e^{2\pi i\langle F,.\rangle}$ có thể được mở rộng lên trên $H = H^0 \cup \varepsilon H^0$ thông qua $U(\varepsilon) = \pm 1$. Xét ρ là thác triển tự nhiên của dU lên η.

Mệnh đề 1.3.3 (η, ρ, U, ρ) *là một phân cực phức của* Ω_+^2.

Chứng minh. Dễ thấy rằng nhóm con dừng $G_F = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in \{-1, 1\}\right\}$ có đại số Lie $\mathfrak{g}_F = \langle X+Y\rangle$ gồm hai thành phần liên thông ứng với $a > 0$ và $a < 0$. Chọn $\eta = \langle H, X+Y\rangle_{\mathbb{C}}$. Do [H, X+Y]=2(X+Y), η là đại số Lie, bất biến dưới Ad-tác động của G_F. Tuy nhiên, đối với quỹ đạo này, điều kiện Pukanszky không được thỏa mãn. Không khó khăn, ta suy ra $\mathfrak{h} = \eta \cap \mathfrak{g} = \langle H, X+Y\rangle, \bar{\eta} = \eta = \mathfrak{m}_{\mathbb{C}}$ và 0 là biểu diễn chỉnh hình một chiều của η. Hiển nhiên rằng, $H = H^0 \cup \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.H^0$ và $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^2 = I$. Ta có $U\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \pm I$. Vậy, tương ứng với các đặc trưng của H/H^0, chúng ta nhận được hai biểu diễn unita của H là: $U\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix} = 1$ và $U\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix} = \text{sgn}(\alpha)$.

Tương tự, chúng ta cũng nhận được cùng một kết quả đối với quỹ đạo Ω_-^2

1.3.4 Phân cực cho quỹ đạo $\Omega^3_{\lambda,+}$

Chúng ta xét $\hat{F} = 2H^* \in \Omega^3_{\lambda,+}$, đại số Lie con phức $\eta = \langle Y, X + iH\rangle_{\mathbb{C}}$. Do ổn định tử SO(2,$\mathbb{R}$) của $\hat{F}$ không đơn liên, $U = e^{2\pi i\langle F,.\rangle}$ có thể thác triển lên H khi và chỉ khi quỹ đạo này nguyên $\Omega^3_{\lambda,+}$ (hay nói cách khác, dạng Kirillov thuộc lớp đối đồng điều nguyên).

Mệnh đề 1.3.4 *(η, ρ, U, ρ) là một phân cực của $\Omega^3_{\lambda,+}$ và quỹ đạo này là nguyên khi và chỉ khi λ có dạng $\lambda = \frac{k}{8}$.*

Proof. Hiển nhiên rằng nhóm con dừng $G_F = SO(2,\mathbb{R})$ ứng với đại số Lie $\mathfrak{g}_F = \langle Y\rangle$ là liên thông nhưng không đơn liên. Bằng việc chọn $\eta = \langle Y, X + iH\rangle_{\mathbb{C}}, \mathfrak{m}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}, \mathfrak{h} = \eta \cap \mathfrak{g}$, ta nhận thấy η là đại số Lie con phức của $\mathfrak{g}$, Ad-bất biến dưới tác động của G_F. Ta cũng thay việc xét trực tiếp quỹ đạo này bằng việc xét phức hóa của chúng. Khi đó, dễ thấy điều kiện Pukanszky được thỏa mãn.

Ta nhận thấy η có biểu diễn một chiều $\rho\begin{pmatrix} -ia & a+b \\ -a+b & ia \end{pmatrix} = -4\pi i\lambda a$, mà có hạn chế lên $\mathfrak{h}$ là $\rho\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} = -4\pi i\lambda a$.

Mặt khác,

$$exp\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos a & \sin a \\ -\sin a & \cos a \end{pmatrix}.$$

Vậy

$$U\begin{pmatrix} \cos a & \sin a \\ -\sin a & \cos a \end{pmatrix} = e^{-4\pi i\lambda a}.$$

Do SO(2,$\mathbb{R}$) không đơn liên, U có thể không xác định đơn trị trên toàn bộ H. Dễ thấy, điều kiện cần và đủ cho sự tồn tại của U là $\lambda = \frac{k}{8}$.

Đối với quỹ đạo $\Omega^3_{\lambda,-}$ ta cũng thực hiện và đạt được kết quả tương tự.

Hệ quả Ta thu được tất cả phân cực đối với các quỹ đạo đối phụ hợp, kéo theo thu được biểu diễn của nhóm SL(2,$\mathbb{R}$) lên không gian Hilbert các lát cắt chỉnh hình từng phần, bình phương khả tích của một không gian phân thớ véc tơ. Tuy nhiên, kết quả này không ở dạng tường minh do tích thớ nói chung không tính được. Chúng ta chỉ ra một cách tiếp cận khác hiệu quả hơn trong chương sau bằng lượng tử hóa biến dạng,

Chương 2

Lượng tử hoá biến dạng

Chúng ta bắt đầu bằng khái niệm lượng tử hoá biến dạng của Bayen, Flato và những người khác, được Fedosov trình bày trong [18], các tính chất của $\star$-tích nói chung và của $\star$-tích Moyal nói riêng. Để thuận tiện chúng tôi cũng nêu ngay các khái niệm mới như $\star$- tích G-hiệp biến, bản đồ tương thích và quỹ đạo đối phụ hợp lượng tử.

2.1 Lượng Tử Hoá Biến Dạng

Như đã nói, lượng tử hoá là quá trình xây dựng một hệ lượng tử từ một hệ cổ điển nhờ quy tắc lượng tử. Thật không may, từ tương ứng ở đây không mang một ý nghĩa xác định. Cơ học cổ điển hiểu theo một nghĩa nào đó là giới hạn của cơ học lượng tử khi cho tham số Plank tiến dần tới 0, do đó không thể có được một quy tắc lượng tử duy nhất. Trong một số trường hợp đủ tốt, ta có thể hi vọng rằng kết quả cuối cùng không phụ thuộc vào phương pháp ta chọn để lượng tử hoá.

Lượng tử hoá biến dạng khác với lượng tử hoá hình học về cơ bản do hằng số Plank có thể có bậc tuỳ ý; lượng tử hoá biến dạng lại khác lượng tử hóa Weyl ở chỗ tham số Plank không phải là một số thực dương mà là một tham biến hình thức. Các đại lượng lượng tử trong lượng tử hoá biến dạng chỉ cần là một chuỗi luỹ thừa hình thức chứ không cần là một hàm khả vi vô hạn như trong lượng tử hoá Weyl. Ngoài ra, ưu điểm lớn nhất của lượng tử hoá biến dạng là có thể được định nghĩa trên một đa tạp symplectic bất kỳ chứ không nhất thiết là cho không gian symplectic chính tắc $\mathbb{R}^{2n}$ (theo kết quả của M. Kontsevich thì mọi cấu trúc Poisson đều có thể lượng tử hoá.

2.1.1 $\star$-tích khả vi hình thức

(xem[18]).

Định nghĩa 2.1.1

Giả sử (M, ω) là một đa tạp symplectic và $Z = C^\infty(M)[[\nu]]$ là không gian tuyến tính các chuỗi luỹ thừa hình thức $a(x, \nu) = \sum_{k=0}^{\infty} \nu^k a_k(x)$ với các hệ tử $a_k(x) \in C^\infty(M)$.

Lượng tử hoá biến dạng của $C^\infty(M)$ (hay còn gọi là lượng tử hoá biến dạng trên đa tạp M) là một đại số kết hợp xây dựng trên Z với một $\star$- tích kết hợp thoả mãn các tính chất sau

1. $\star$- tích có tính chất địa phương, tức là hệ tử $c_k(x)$ của tích
$$c(x, \nu) = a(x, \nu) \star a(x, \nu) = \sum_{k=0}^{\infty} \nu^k c_k(x),$$
chỉ phụ thuộc vào các hệ tử $\partial^\alpha a_i$ và $\partial^\beta b_j$ với $k \geq \mid \alpha \mid + \mid \beta \mid + i + j \geq 0$.

2. $\star$-tích là biến dạng của tích giao hoán thông thường các hàm trên M
$$c_0(x) = a_0(x).b_0(x).$$

3. $\star$- tích thoả mãn tích tương thích hay
$$a \star b - b \star a = -i\nu\{a_0, b_0\} + o(\nu),$$
trong đó $\{.,.\}$ là móc Poisson các hàm, còn dấu ba chấm thể hiện các số hạng bậc cao hơn ν. Ở đây ν là một tham biến hình thức (còn gọi là tham biến biến dạng) không có vai trò gì đặc biệt, miễn là khác không.

Nói cách khác, một $\star$- tích (khả vi) hình thức trên đa tạp symplectic(M, ω) là một ánh xạ song tuyến tính
$$C^\infty(M) \times C^\infty(M) \to C^\infty(M)[[\nu]],$$
$$(u, v) \mapsto u \star_\nu v = \sum_{r=0}^{\infty} \nu^r C_r(u, v),$$
thỏa mãn

i. $(u \star_\nu v) \star_\nu w = u \star_\nu (v \star_\nu w)$,

ii. $C_0(u, v) = u.v, C_1(u, v) - C1(v, u) = 2\{u, v\}$,

iii. $1 \star_\nu u = u \star_\nu 1 = u$,

iv. Các C_r là các toán tử song khả vi trên M (tính khả vi của $\star$- tích),

Với u, v $\in C^\infty(M)$, ta ký hiệu l_u, r_u là toán tử nhân trái và nhân phải trong đại số (Z, $\star$) sao cho $l_u(v) = u.v = r_v(u)$. Nếu $\star$- tích là khả vi thì các toán tử r_v, l_u là khả vi hình thức. Các tính chất sau của $\star$- tích được suy ra trực tiếp từ định nghĩa:

Mệnh đề 2.1.2 *xem [6],*

(1). Với mọi $t \in N, u, v, \in C^\infty(M)$, thì

$$\sum_{r+s=tr, s\geq 0} C_r(C_s(u,v),w) = \sum_{r+s=tr,s\geq 0} C_r(u, C_s(v,w)),$$

(2). $C_r(u,c) = C_r(c,u) = 0, \forall r \geq 1, u \in C^\infty(M), c \in \mathbb{R}$,

(3). $c \star u = u \star c = c.u, \forall c \in \mathbb{R}$,

(4). Tính chất kết hợp của $\star$- tích tương đương với toán tử l_u giao hoán được với r_v, với mọi u, v $\in C^\infty(M)$.

Chứng minh Ta nêu cách chứng minh tính chất thứ tư.

Với mọi u, v, $\in C^\infty(M)$, ta có $u \star (v \star w) = (u \star v) \star w \Longleftrightarrow l_u(v \star w) = r_w(u \star w) \Longleftrightarrow l_u(r_w(v)) = r_w(l_u(v)) \Longleftrightarrow l_u \circ r_w(v) = r_w \circ l_u(v)$.
Từ đó ta có điều phải chứng minh.

Chú ý

- Một $\star$- tích có thể chỉ xác định trên một tập con tuỳ ý của $C^\infty(M)$ miễn là nó ổn định dưới $\star$- tích và móc Poisson.

- Một $\star$- tích có thể không khả vi, nói cách khác, khả vi chỉ là một tính chất của $\star$- tích hình thức. Tuy nhiên, vì phần tiếp theo của luận văn ta chỉ dùng đến $\star$- tích khả vi nên chúng tôi dùng định nghĩa trên của Fedosov.

- Nguyên tắc tương thích trong định nghĩa, hay ii. ở trên kéo theo giao hoán tử xác định bởi $[u,v]_\star = u \star v - v \star u$ mà hiển nhiên chuyển Z thành một đại số Lie, có dạng:

$$[u,v]_\star = -i\nu\{u,v\} + \cdots$$

Từ đó ta có thể ký hiệu $\star$- biểu diễn phụ hợp là $ad_\star u(v) = [u,v]_\star$. Như thế $\star$- tích làm biến dạng hai cấu trúc cổ điển trên $C^\infty(M)$:cấu trúc đại số giao hoán đối với phép nhân các hàm và cấu trúc đại số Lie cho bởi móc Poisson.

Sự tồn tại của lượng tử hoá biến dạng trên đa tạp symplectic có thể nói ngắn gọn như sau: (chi tiết chứng minh xem [18]).
Giả sử (M,ω) là một đa tạp symplectic 2n chiều. Dạng ω định nghĩa trên mỗi

T_xM một cấu trúc của một không gian symplectic. Người ta định nghĩa đại số Weyl hình thức W_x ứng với mỗi không gian tiếp xúc T_xM là một đại số kết hợp trên $\mathbb{C}$, có đơn vị, các phần tử của nó là các chuỗi luỹ thừa hình thức

$$a(y,\hbar) = \sum_{k,|\alpha|\geq 0} \hbar^k a_{k,\alpha} y^\alpha. \tag{2.1}$$

trong đó $\hbar$ là tham biến hình thức, $y = (y^1, y^2, ...y^{2n}) \in T_xM$ là véc tơ tiếp xúc; $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{2n})$ là đa chỉ số sao cho $y^\alpha = (y^1)^{\alpha_1} \cdots (y^{2n})^{\alpha_{2n}}$.

Tích các phần tử a, b $\in W_x$ được cho bởi quy tắc Moyal-Weyl

$$a \circ b = exp(-\frac{i\hbar}{2}\omega^{ij}\frac{\partial}{\partial y^i}\frac{\partial}{\partial z^j})a(y,\hbar)b(z,\hbar) \mid_{z=y} . \tag{2.2}$$

Công thức này chính là công thức tích của hai ký hiệu (symbol) a(y), b(y) trong lượng tử hoá Weyl khai triển thành chuỗi luỹ thừa hình thức theo $\hbar$. Vì vậy ta có thể khẳng định tích này có tính kết hợp và không phụ thuộc vào việc chọn cơ sở trong T_xM. Điểm khác nhau ở đây là thay vì xét các hàm trơn, ta xét các chuỗi luỹ thừa hình thức. Tham biến ν thường được lấy là $\frac{-i\hbar}{2}$ để thể hiện ý nghĩa vật lý của khái niệm.

Lấy hợp các đại số $W_x, x \in M$ ta thu được một không gian phân thớ của đại số Weyl hình thức. Các lát cắt của phân thớ này tại địa phương là các "hàm":

$$a = a(x,y,\hbar) = \sum_{k,|\alpha|\geq 0} \hbar^k a_{k,\alpha}(x).y^\alpha.$$

Xét không gian các dạng vi phân trên M, nhận giá trị trong phân thớ Weyl $\Omega \otimes W$. Chi tiết khái niệm xem thêm trong [1]. Không gian này chấp nhận một sự phân bậc tự nhiên:

$$C^\infty(W \otimes \Omega) = \bigoplus_{k=0}^{2n} C^\infty(W \otimes \Omega^k).$$

Xây dựng một phép vi phân hiệp biến D trên không gian các dạng vi phân nhận giá trị trong phân thớ Weyl sao cho $D^2 = 0$. Khi đó ta thu được dãy khớp sau, tương tự như dãy khớp trong đối đồng điều De-Rham:

$$0 \longrightarrow C^\infty(W) \longrightarrow C^\infty(W \otimes \Omega^1) \longrightarrow C^\infty(W \otimes \Omega^2) \longrightarrow \cdots$$

Đặt $H_p(W) = \dfrac{KerD_p}{ImD_{p+1}}$ và phép chiếu

$$\sigma : C^\infty(W \otimes \Omega) \longrightarrow C^\infty(M)[[\hbar]],$$
$$a(x,y,\hbar,dx) \mapsto a(x,0,\hbar,0).$$

Khi đó ta có định lý sau:

Định lý 2.1.3 *:Ta có*
1) $H_p(W) = 0$ với mọi $p > 0$ và $W_D = KerD^0 = H_0(W)$.
2) Với mọi $a_0 \in C^\infty(M)[[\hbar]]$ luôn tồn tại duy nhất a $\in W_D$ để $\sigma(a) = a_0$

Định lý trên phát biểu rằng $\sigma : C^\infty(M)[[\hbar]] \to W_D$ là một đẳng cấu. Ký hiệu ánh xạ ngược là Q. Do W_D ổn định dưới $\circ$-tích do đó Q mang cấu trúc $\circ$- tích lên Z để trở thành một $\star$- tích.

Cụ thể hơn

$$a \star b = \sigma(Q(a) \circ Q(b))$$

$\star$- tích này được gọi là $\star$- tích Fedosov, ký hiệu là $\star_F$-tích. Hiển nhiên rằng $\star$-tích này thoả mãn các tính chất trong định nghĩa 3.1.1. Như vậy ta dã chứng minh được $\star$- tích Fedosov tồn tại trên mọi đa tạp symplectic tuỳ ý. Hơn nữa vào năm 1995, Nest, Tsygan, Deligne và Berteson đều chứng minh được trên mọi đa tạp symplectic (M, ω), mọi $\star$- tích đều đẳng cấu với $\star_F-$ tích(Hai $\star$-tích $\star_1$ và $\star_2$ được gọi là tương đương nếu tồn tại đẳng cấu $T_\nu = \sum_{r=1}^{\infty} \nu^r T_r, T_r$ là các toán tử song khả vi trên M, sao cho $T_\nu(u \star_1 v) = (T_\nu \star_1 T_\nu v))$.

2.1.2 $\star$-tích Moyal trên $\mathbb{R}^{2n}$

Quá trình lượng tử hoá biến dạng đòi hỏi những tính toán mà trong đa số trường hợp đều cho ra những công thức không đẹp đẽ. Tuy nhiên trong một số trường hợp ta có thể tính toán được $\star$- tích một cách tường minh. Ví dụ điển hình là không gian $\mathbb{R}^{2n}$ cùng dạng symplectic chính tắc.

Giả sử trên không gian $\mathbb{R}^{2n}$ ta trang bị một hệ toạ độ chính tắc $(p, q) = (p_1, p_2, \cdots, p_n, q_1, q_2, \cdots, q_n)$ nghĩa là $\mathbb{R}^{2n}$là không gian symplectic với dạng song tuyến tính $\omega = \sum_i dp_i \wedge dq_j$. Gọi Λ là ma trận symplectic ứng với dạng song tuyến tính ω nói trên, ta ký hiệu

$$P^r(u, v) = \Lambda^{i_1 j_1} \Lambda^{i_2 j_2} \cdots \Lambda^{i_r j_r} \partial_{i_1 i_2 \cdots i_n} u \partial_{j_1 j_2 \cdots j_n} v, \qquad \forall r \geq 2, \forall u, v \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}).$$

Trong đó, $\partial_{i_1 i_2 \cdots i_r} = \dfrac{\partial^r}{\partial x^{i_1} \cdots \partial x^{i_r}}$; $\Lambda^{i_k j_k}$ là các phần tử của ma trận Λ^{-1}, x=(p, q)=$(p_1, \cdots, p_n, q^1, \cdots, q^n)$.

Định nghĩa 2.1.4

(xem [6]). Các công thức

$$u \star v = u.v + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r!} (\frac{\hbar}{2i})^r P^r(u, v), \tag{2.3}$$

$$i(u \star v - v \star u) = P^1(u,v) + \sum_{r=1}^{\infty} (\frac{\hbar}{2i})^{2r} \frac{1}{(2r+1)!} P^{2r+1}(u,v), \qquad (2.4)$$

xác định một biến dạng hình thức của tích giao hoán và tích Poisson của $C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, lần lượt được gọi là $\star$- tích Moyal của hai hàm u và v.

Thực ra sử dụng sơ đồ tính toán của Fedosov vào hai hàm u, v $\in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, ta cũng nhận được các công thức 2.3 và 2.4 hoặc có thể chứng minh trực tiếp $\star$- tích Moyal thỏa mãn các tính chất trong định nghĩa 3.1.1. Thông thường ta chọn hằng số $\hbar = 1$ để thuận tiện cho tính toán. Từ đây về sau ta quy ước $\star$-tích được nói đến là $\star$- tích Moyal. $\star$- tích có một số tính chất rất quan trọng sau đây:

Mệnh đề 2.1.5 *[6]Nếu $u, v \in S(\mathbb{R}^{2n})$ (không gian các hàm Schwartz) thì*

1. $\bar{u} \star \bar{v} = \overline{v \star u}$.
2. $\int (u \star v)(\xi) \frac{d\xi}{(2\pi)^n} = \int (u.v)(\xi) \frac{d\xi}{(2\pi)^n}$,
3. *Toán tử $l_u : S \to S, v \mapsto u \star v$ liên tục theo chuẩn trong $L^2(\mathbb{R}^{2n}, \frac{d\xi}{(2\pi)^n})$ nên có thể thác triển lên $L^2(\mathbb{R}^{2n}, \frac{d\xi}{(2\pi)^n})$.*
4. $l_u^* = l_{\bar{u}}; \qquad l_u \circ l_v = l_{u \star v}$.

Tiếp theo ta nhắc lại một số khái niệm liên quan đến quỹ đạo đối phụ hợp và $\star$-tích G-hiệp biến.

2.1.3 $\star$-tích G-hiệp biến trên các quỹ đạo đối phụ hợp

Chúng ta đã biết trong chương 2, các quỹ đạo đối phụ hợp chính là các đa tạp symplectic thuần nhất phẳng. Nói cách khác tương ứng $A \mapsto \widetilde{A}$ là một đồng cấu đại số Lie.

Khi ta trang bị một $\star$-tích trên (Ω, ω) ta có khái niệm $\star$-tích G-hiệp biến:

Định nghĩa 2.1.6 *Giả sử Ω là một K-quỹ đạo của nhóm Lie G trong $\mathfrak{g}^*$với tác động Hamilton chặt của G. Một $\star$-tích trên Ω được gọi là G-hiệp biến (hay hiệp biến dưới tác động của G) nếu như:*

$$i\tilde{A} \star \tilde{B} - i\tilde{B} \star i\tilde{A} = i\widetilde{[A,B]}, \qquad \forall A, B \in \mathfrak{g}.$$

Khi $\star$-tích là G-hiệp biến thì tương ứng

$$A \mapsto i\tilde{A} \star . = l_A(.).$$

là một biểu diễn, mà ta sẽ ký hiệu bởi l của $\mathfrak{g}$ trong Z=$C^\infty(\Omega)[[\frac{i}{2}]]$. Lượng tử hoá biến dạng áp dụng vào đại số Poisson $(C^\infty(\Omega), \{.,.\})$, một mặt cho ta các quỹ đạo đối phụ hợp lượng tử, mặt khác là nhằm mục đích tìm biểu diễn của các đại số con của $C^\infty(\Omega)$ bởi những toán tử trong không gian Hilbert $\mathbb{R}$ nào đó. Trong các phần tiếp theo, đối với nhóm Lie SL(2,$\mathbb{R}$), sau khi lượng tử hoá hệ (Ω, ω), ta sẽ có biến dạng của đại số Poisson các hàm trơn trên các K-quỹ đạo của nhóm Lie G là không gian $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ các toán tử trên không gian Hilbert $\mathcal{H}$. Nếu như G liên thông và đơn liên thì ta nhận được biểu diễn unita T của nhóm Lie G xác định bởi:

$$T(exp(A)) = e^{l_A},$$

tức là biểu đồ sau là giao hoán.

Từ một đại số Lie cho trước có thể tìm được nhiều nhóm Lie chưa chắc liên thông hay đơn liên nhận đại số Lie đó là đại số Lie của mình. Ví dụ các nhóm SU(2) và SO(3) có cùng một đại số Lie là so(3), xem [10]. Nhưng người ta chứng minh được rằng (nhờ định lý thứ ba của Lie) tương ứng với một đại số Lie cho trước luôn tồn tại một nhóm Lie đơn liên, liên thông " lớn nhất " $\widetilde{G}$ gọi là nhóm phủ phổ dụng. Do tính chất đơn liên nên nhóm phủ phổ dụng chỉ có các biểu diễn đơn trị, xem [31]. Trước khi đi vào tính toán chúng tôi đưa ra một số khái niệm được dùng đến cho các phần sau.

2.2 Bản đồ tương thích, hàm Hamilton và các quỹ đạo đối phụ hợp lượng tử. Các khái niệm cơ bản

Để xây dựng lượng tử hóa biến dạng trên các K-quỹ đạo với tích Moyal, chúng tôi đề xuất khái niệm bản đồ tương thích. Các toán tử lượng tử có dạng rất cồng kềnh cho nên chúng ta phải sử dụng phép biến đổi toạ độ sao cho hàm Hamilton và dạng Kirillov là đơn giản nhất. Sự tồn tại của bản đồ tương thích trên mọi đa tạp symplectic tổng quát đã cho chúng tôi một ý tưởng về việc tìm một bản đồ thỏa mãn những yêu cầu đó. Việc này còn có ý nghĩa ở chỗ nó xây dựng các phủ phổ dụng của quỹ đạo và do đó nó cho phép mang $\star$-tích Moyal trên $\mathbb{R}^{2n}$ sang các K-quỹ đạo Ω qua đó kéo theo sự xuất hiện của các đại số lượng tử ứng với các quỹ đạo đối phụ hợp lượng tử. Vì vậy, đây là một trong những khái niệm đóng vai trò vô cùng cốt yếu trong quá trình lượng tử hoá.

Định nghĩa 2.2.1

Cho Ω là một K- quỹ đạo 2n-chiều của nhóm Lie G. Nếu có một vi phôi $\psi : \mathbb{R}^{2n} \to \Omega; (p, q) \mapsto \xi = \psi(p, q)$ thì cặp (Ω, ψ^{-1}) được gọi là một bản đồ tương thích nếu:

1. Với A $\in \mathfrak{g}$, hàm Hamilton trên Ω có dạng bậc nhất theo biến p
$$\tilde{A} \circ \psi(p, q) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i(q).p_i + \mu_0(q).$$
trong đó, $\mu_i(q), (i \geq 0)$ là các hàm khả vi vô hạn theo biến q.

2. Trên bản đồ đó, dạng Kirillov là
$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq_i.$$

Từ đây cho đến hết, ta sẽ dùng ký hiệu $\tilde{A}$ thay cho ký hiệu $\tilde{A} \circ \psi(p, q)$ để chỉ hàm Hamilton trong hệ tọa độ chính tắc (p, q).
Với mỗi $A \in \mathfrak{g}$, ký hiệu toán tử $\star$-tích trái của iA với hàm f, xác định trên không gian con trù mật gồm các hàm trơn của $L^2(\mathbb{R}^{2n}, dpdq/(2\pi)^{2n})$ là $l_A(f) = i\tilde{A} \star f$. Khi đó, theo mệnh đề 2.1.5 thì l_A được thác triển duy nhất trở thành một toán tử tuyến tính liên tục trên $L^2(\mathbb{R}^{2n}, dpdq/(2\pi)^{2n})$.
Tiếp theo, ta nhắc lại khái niệm biến đổi Fourier bộ phận $\mathcal{F}_p$ từ biến p sang biến x của hàm f, xác định trên không gian các hàm Schwartz trên $\mathbb{R}^{2n}$ hoặc $\mathbb{C}^{2n}$:
$$\mathcal{F}_p(f)(x, q) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ip.x} f(p, q) dp,$$
và phép biến đổi Fourier ngược tương ứng
$$\mathcal{F}_p^{-1}(f)(p, q) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ip.x} f(p, q) dp.$$
Các tính chất của biến đổi Fourier được coi là đã biết.

Định nghĩa 2.2.2 *(K-quỹ đạo lượng tử)*

Cho Ω^{2n} là một K-quỹ đạo 2n-chiều của nhóm Lie G. Với $A \in G$,

1. Toán tử $\hat{l}_A = \mathcal{F}_p \circ l_A \circ \mathcal{F}_p^{-1}$ xác định hầu khắp trên $L^2(\mathbb{R}^{2n}, dpdq/(2\pi)^{2n})$ là toán tử lượng tử tương thích

2. $(\Omega^{2n}, \hat{l}_A)$ là K-quỹ đạo lượng tử ứng với nhóm Lie G.

3. Hợp của các Ω^{2n}cùng các toán tử $l_A = \mathcal{F}_p \circ l_A \circ \mathcal{F}_p^{-1}, A \in \mathfrak{g}$ được gọi là tầng K-quỹ đạo lượng tử của G bậc 2n, (quantum strata of K-orbit).

2.3 Bản đồ tương thích và hàm Hamilton trên các quỹ đạo

2.3.1 Quỹ đạo Ω_λ^1

Nhắc lại rằng $\Omega_\lambda^1 = \{2xX^* + 2hH^* - 2yY^* \mid x^2 + h^2 = y^2 - \lambda^2\}$ Theo các kết quả về phân cực phức cho quỹ đạo này, đi qua $2\lambda H^* \in \Omega$ có một không gian con affine có đối chiều 1, nằm trong quỹ đạo (điều kiện L.Pukanszky) là

$$\hat{F} + \eta^\perp = \{2pX^* + 2\lambda H^* - 2pY^* \mid p \in \mathbb{R}\} \subset \Omega.$$

Hơn nữa, nếu điều kiện L.Pukanszky được thỏa mãn tại một điểm thì sẽ được thỏa mãn tại mọi điểm trong quỹ đạo (xem [31]). Vì vậy, khi ta cho điểm $\hat{F}$ chạy trên khắp đường tròn $\{x^2 + h^2 = \lambda^2, y = 0\}$ thì không gian con affine $K(g)\hat{F} + (Ad(g)(\eta))^\perp$ sẽ quét hết toàn bộ quỹ đạo. Nói cách khác, quỹ đạo này được tham số hóa bởi p và góc quay q:

$$\begin{cases} x = M(p,q) = p\cos(q) - \lambda\sin(q), \\ h = N(p,q) = p\sin(q) + \lambda\cos(q), \\ y = P(p,q) = p. \end{cases}$$

Các M, N, P thỏa mãn các hệ thức sau:

$$M_q = -N; N_q = M; M_p = \cos(q); N_p = \sin(q); M.\cos(q) + N.\sin(q) = p; \tag{2.5}$$

Hay nếu đặt $\psi(p,q) = (2M(p,q), 2N(p,q), -2P(p,q))$ thì ta có thể chứng minh được rằng, ψ là một phép vi phôi địa phương và do $\mathbb{R}^2$ là đơn liên nên $(\mathbb{R}^2, \Omega_\lambda^1, \psi)$ là không gian phủ phổ dụng. Chú ý rằng, $(\mathbb{R}^2, dp \wedge dq)$ và Ω_λ^1 với dạng Kirillov đều là các đa tạp symplectic. Mệnh đề sau đây chứng tỏ rằng ψ không chỉ là một vi phôi địa phương mà còn là một cấu xạ symplectic.

Mệnh đề 2.3.1 *ψ là một cấu xạ symplectic và hàm Hamilton $\tilde{A}$ ứng với A=$a_1X + b_1H + c_1Y$ có dạng*

$$\tilde{A}(\hat{F}) = \langle \hat{F}, A\rangle = (2a_1\cos q + 2b_1\sin q - 2c_1)p + (-2a_1\sin q + 2b_1\cos q)\lambda$$

Chứng minh: Theo tính chất của quỹ đạo đối phụ hợp thì với A=$a_1X + b_1H + c_1Y$ thì hàm Hamilton ứng với trường véc tơ bất biến sinh bởi A lại chính là hạn chế của A lên trên Ω_λ^1. Suy ra với $\hat{F} = 2MX^* + 2NH^* - 2PY^*$ thì

$$\begin{aligned} \tilde{A}(\hat{F}) &= \langle a_1X + b_1H + c_1Y, 2MX^* + 2NH^* - 2PY^*\rangle \\ &= 2a_1M + 2b_1N - 2c_1P \\ &= 2a_1(p\cos q - \lambda\sin q) + 2b_1(p\sin q + \lambda\cos q) - 2c_1p \end{aligned}$$

Trên $\mathbb{R}^2$ có hai cấu trúc symplectic, cấu trúc thứ nhất là dạng Kirillov cảm sinh bởi ánh xạ ψ và cấu trúc thứ hai là dạng symplectic chính tắc $dp \wedge dq$. Chúng ta chứng minh sự trùng nhau của chúng bằng cách nhận thấy giá trị tại các trường véc tơ bất biến là trùng nhau.
Trên Ω^1_λ, dạng Kirillov xác định bởi $\omega_F(\xi_A, \xi_B) = \langle \hat{F}, [A, B] \rangle$. Nhận thấy rằng:

$$\begin{aligned}\{\tilde{A}(p,q), \tilde{B}(p,q)\} &= \omega_F(\xi_A, \xi_B) = \langle \hat{F}, [A, B] \rangle \\ &= \langle 2MX^* + 2NH^* - 2PY^*, 2(b_1c_2 - b_2c_1)X + \\ &+ 2(c_1a_2 - c_2a_1)H - 2(a_1b_2 - a_2b_1)Y \rangle \\ &= 4M(b_1c_2 - b_2c_1) + 4N(c_1a_2 - c_2a_1) + 4P(a_1b_2 - a_2b_1).\end{aligned}$$

Mặt khác:

$$\begin{aligned}dp \wedge dq(\xi_A, \xi_B) = \{\tilde{A}, \tilde{B}\} &= \frac{\partial \tilde{A}}{\partial p}\frac{\partial \tilde{B}}{\partial q} - \frac{\partial \tilde{A}}{\partial q}\frac{\partial \tilde{B}}{\partial p} \\ &= (2a_1M + 2b_1N - 2c_1P)(2a_2M_q + 2b_2N_q) - \\ &- (2a_2M + 2b_2N - 2c_2P)(2a_1M_q + 2b_1N_q) \\ &= 4(b_1c_2 - b_2c_1)N_q + 4(c_1a_2 - c_2a_1)(-M_q) + \\ &+ 4(a_1b_2 - a_2b_1)(M_pN_q - N_pM_q) \\ &= \{\tilde{A}, \tilde{B}\}_K.\end{aligned}$$

Định lý được chứng minh.

2.3.2 Quỹ đạo Ω^2_+ và Ω^2_-

Nhắc lại rằng $\Omega^2_+ = \{2xX^* + 2hH^* - 2yY^* \mid x^2 + h^2 = y^2, y > 0\}$

Theo các kết quả về phân cực phức cho quỹ đạo này, đi qua $\hat{F} = X^* - Y^* \in \Omega$ có một không gian con affine có đối chiều 1, mà nằm trong quỹ đạo

$$F + \eta^\perp = \{pX^* - pY^* \mid p \in \mathbb{R}\}$$

Ta cũng giải quyết trường hợp này tương tự như Ω^1_λ.
Với $p > 0$ đặt :

$$\begin{cases} x = M(p,q) = p\cos q, \\ h = N(p,q) = p\sin q, \\ y = P = p. \end{cases}$$

Nói cách khác $\psi(p,q) = 2M(p,q)X^* + 2N(p.q)H^* - 2P(p,q)Y^*$ là phép vi phôi địa phương từ nửa mặt phẳng phải $H^+ = \{(p,q) \mid p > 0\}$ lên quỹ đạo Ω^1_λ.

Chứng minh hoàn toàn tương tự như 1.3.1, ta cũng thu được $(H^+, \Omega^1_\lambda, \psi)$ là một phủ symplectic phổ dụng. Hàm Hamilton ứng với A $\in \mathfrak{g}$ là
$\tilde{A} = 2a_1.p\cos q + 2b_1.p\sin q - 2c_1p$.
Quỹ đạo Ω^2_- cũng được giải quyết hoàn toàn tương tự, với sự thay đổi nhỏ:H^- thay cho H^+; $p < 0$ thay cho $p > 0$.

2.3.3 Quỹ đạo Ω^3_λ

Như đã biết, đối với quỹ đạo $\Omega^3_\lambda = \{2xX^* + 2hH^* - 2yY^* \mid x^2 + h^2 = y^2 - \lambda^2\}$ qua một điểm bất kỳ trong quỹ đạo, ta không thể nào tìm được một không gian con affine có số chiều 1 nằm trong quỹ đạo, dù chỉ là địa phương. Do đó ta không thể tìm được một bản đồ tương thích sao cho hàm Hamilton ứng với các trường vectơ bất biến.

Tuy nhiên, vấn đề được giải quyết hoàn toàn bằng cách mở rộng quỹ đạo lên trường phức. Ký hiệu $\mathfrak{g}^*_\mathbb{C} = (\mathfrak{g} \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \mathbb{C})^*$ và $\Omega^3_{\lambda,\mathbb{C}} = SL(2,\mathbb{C}).\hat{F}$. Trong đó, biểu diễn của SL(2,$\mathbb{R}$) lên trên $\mathfrak{g}^*$ được mở rộng thành biểu diễn của SL(2,$\mathbb{C}$) lên trên phức hoá $\mathfrak{g}^*$.

Chú ý rằng, tất cả các khái niệm, kết quả liên quan, đều được suy tương tự cho các đa tạp phức.

Ta xét phép tham số hoá sau đây của quỹ đạo

$$\begin{cases} x = M(z,w) = z\cos w - i\sin w, \\ h = N(z,w) = z\sin w + i\sin w, \\ y = P(z,w) = z. \end{cases}$$

Đặt $\psi(z,w) = 2M(z,w)X^* + 2N(z,w)H^* - 2P(z,w)Y^*)$. Nhận thấy rằng ψ là một ánh xạ chỉnh hình nhiều biến từ $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ lên trên quỹ đạo Ω^3_λ. Với các tính toán cơ bản về hàm phức, ta có thể chứng minh $(\mathbb{C} \times \mathbb{C}, \Omega^3_{\lambda,\mathbb{C}}, \psi)$ là một không gian phủ chỉnh hình phổ dụng.

Mệnh đề 2.3.2 *Hàm Hamilton ứng với trường vectơ bất biến sinh là tuyến tính theo z và $\psi : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \Omega^3_{\mathbb{C},\lambda}$ bảo toàn dạng symplectic.*

Chứng minh:Mỗi F $\in \Omega^3_{\lambda,+}$ có dạng $2MX^* + 2NH^* - 2yY^*$.
Với $A = a_1X + b_1H + c_1Y, B = a_2X + b_2H + c_2Y \in \mathfrak{g}$ thì hàm Hamilton xác định bởi A có dạng chính là hạn chế của A lên quỹ đạo:

$$\tilde{A}(F) = \langle F, A\rangle = \langle a_1X + b_1H + c_1Y, 2MX^* + 2NH^* - 2PY^*\rangle = 2a_1M + 2b_1N - 2c_1P.$$

Vì vậy ta có $\tilde{A}(F) = 2a_1(z\cos w - \lambda\sin w) + 2b_1(z\sin w + \lambda\cos w) - 2c_1z$, với các tính chất:

$$\frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} = 2(a_1 \cos w + b_1 \sin w - c_1); \frac{\partial \tilde{A}}{\partial w} = -2a_1 N + 2b_1 M; \frac{\partial \tilde{A}}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial \tilde{A}}{\partial \bar{w}} = 0.; \tag{2.6}$$

Trên $\mathbb{C}^2$ có hai cấu trúc symplectic, cấu trúc thứ nhất là dạng Kirillov cảm sinh bởi ánh xạ ψ và cấu trúc thứ hai là dạng symplectic chính tắc $dz \wedge dw + d\bar{z} \wedge d\bar{w}$. Chúng ta chứng minh sự trùng nhau của chúng bằng cách nhận thấy giá trị tại các trường véc tơ bất biến là trùng nhau.
Ma trận của dạng symplectic chính tắc $dz \wedge dw + d\bar{z} \wedge d\bar{w}$ trong cơ sở $(\partial z, \partial w, \partial \bar{z}, \partial \bar{w})$ và ma trận nghịch đảo là:

$$\wedge = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \wedge^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Do đó $C^\infty(\mathbb{C} \times \mathbb{C})$ là một đại số Poisson với móc Poisson xác định bởi

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial w} - \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial g}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\frac{\partial g}{\partial \bar{w}} - \frac{\partial f}{\partial \bar{w}}\frac{\partial g}{\partial \bar{z}}.$$

Cụ thể hơn, với các hàm Hamilton ứng với A và B:

$$\begin{aligned} \{\tilde{A}, \tilde{B}\}_{\omega_0} &= 2(a_1 \cos w + b_1 \sin w - c_1)2.(-a_2 N + b_2 M) - \\ &- 2(a_2 \cos w + b_2 \sin w - c_1)2.(-a_1 N + b_1 M) \\ &= 4(b_1 c_2 - b_2 c_1)M + 4(c_1 a_2 - c_2 a_1)N + 4(a_1 b_2 - a_2 b_1)(M \cos w + N \sin w) \\ &= 4(b_1 c_2 - b_2 c_1)M + 4(c_1 a_2 - c_2 a_1)N + 4(a_1 b_2 - a_2 b_1)P. \end{aligned}$$

Tuy nhiên, móc Poisson của $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ ứng với dạng symplectic ảnh của dạng Kirillov qua vi phôi địa phương ψ là

$$\begin{aligned} &\{\tilde{A}, \tilde{B}\}_{\psi(\omega_K)} = \langle F, [A, B] \rangle \\ &= \langle 2MX^* + 2NH^* - 2PY^*, 2(b_1 c_2 - b_2 c_1)X + 2(c_1 a_2 - c_2 a_1)H - 2(a_1 b_2 - a_2 b_1)Y \rangle \\ &= 4(b_1 c_2 - b_2 c_1)M + 4(c_1 a_2 - c_2 a_1)N + 4(a_1 b_2 - a_2 b_1)P = \{\tilde{A}, \tilde{B}\}_{\omega_0} \end{aligned}$$

Định lý được chứng minh.

2.4 Tính hiệp biến của $\star$-tích Moyal-Weyl

Chúng ta tổng quan những gì đã thực hiện được. Trong chương1, ta đã mô tả các quỹ đạo đối phụ hợp của SL(2,$\mathbb{R}$). Nói cách khác, ta đã phân loại tất cả các hệ cơ học cổ điển phẳng nhận SL(2,$\mathbb{R}$) làm nhóm đối xứng. Tiếp theo, bằng quá trình xây dựng phân cực phức, chúng ta đã phân tách được các toạ độ p và q, qua đó có thể xây dựng được không gian Hilbert trên các toạ độ 'không xung lượng' làm không gian biểu diễn cho quá trình lượng tử hoá hình học. Thông qua việc xây dựng phủ phổ dụng của các quỹ đạo đối phụ hợp dưới dạng bản đồ tương thích, ta thu được hệ cơ học cổ điển phẳng tối đại, thuần nhất, với nhóm đối xứng SL(2,$\mathbb{R}$).

Chúng tôi sẽ thay việc nghiên cứu các quỹ đạo đối phụ hợp bằng việc xét đại số $C^\infty(\Omega)$ các hàm trơn trên đó. Phép chiếu ψ từ các không gian phủ phổ dụng cho phép nhúng đại số $C^\infty(\Omega)$ vào trong $C^\infty(\mathbb{R}^2), C^\infty(H^+), C^\infty(H^-), C^\infty(\mathbb{C}^2)$ như là đại số con gồm các hàm tuần toàn theo p (hay z) chu kỳ 2π.

Xét một trong các đại số $C^\infty(\mathbb{R}^2)$, $C^\infty(\mathbb{C}^2), C^\infty(H^+), ...$ Bằng cách xác định $\star$-tích Moyal-Weyl trên các không gian symplectic chính tắc $\mathbb{R}^2, \mathbb{C}^2$, do tính đóng kín của các đại số hàm này đối với $\star$-tích Moyal-Weyl nên các đại số này bị biến dạng trở thành các đại số lượng tử. Mặt khác, do $\star$-tích của hai hàm tuần hoàn theo p (hay z) chu kỳ 2π cũng là tuần hoàn chu kỳ 2π nên kéo theo sự lượng tử hoá biến dạng trên các K-quỹ đạo. Nói cách khác, $(C^\infty(\Omega), \star)$ được biến dạng trở thành các đại số lượng tử.

Chúng ta sẽ thấy rằng biểu diễn vô cùng bé của G lên các quỹ đạo có thể được nâng lên trở thành biểu diễn vô cùng bé của G lên trên các đại số hàm kết hợp với $\star$-tích thông qua định lý sau:

Định lý 2.4.1 *Trong các bản đồ tương thích chúng ta xây dựng được, thì $\star$-Moyal là hiệp biến hay $i\tilde{A} \star i\tilde{B} - i\tilde{B} \star i\tilde{A} = i\widetilde{[A, B]}$.*

Chứng minh:

Với $A = a_1X + b_1H + c_1Y, B = a_2X + b_2H + c_2Y \in \mathfrak{g}$, ta sẽ chứng minh $i\tilde{A} \star i\tilde{B} - i\tilde{B} \star \tilde{A} = i\tilde{[A, B]}$ cho từng lớp quỹ đạo.

a) Quỹ đạo (Ω^1_λ, ψ). Ta có, theo công thức Moyal-Weyl,

$$i\tilde{A} \star i\tilde{B} = \sum_{k=0}^{\infty} P^k(i\tilde{A}, i\tilde{B}).\frac{1}{k!}(\frac{1}{2i})^k.$$

với $P^k(i\tilde{A}, i\tilde{B}) = - \wedge^{i_1j_1} \wedge^{i_2j_2} \cdots \wedge^{i_kj_k} \partial_{i_1i_2\cdots i_k}\tilde{A}\partial_{j_1j_2\cdots j_k}\tilde{B}$.
Bằng tích toán cụ thể ta thu được:
$P^0(i\tilde{A}, i\tilde{B}) = -\tilde{A}.\tilde{B}$,
$P^1(i\tilde{A}, i\tilde{B}) = -(\wedge^{12}\frac{\partial\tilde{A}}{\partial p}.\frac{\partial\tilde{B}}{\partial q} + \wedge^{21}\frac{\partial\tilde{A}}{\partial q}.\frac{\partial\tilde{B}}{\partial p}) = -\{\tilde{A}, \tilde{B}\}$,
Theo mệnh đề 2.3.1 thì $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ là tuyến tính theo p. Do đó, với $k \geq 2$ thì

$$\begin{aligned}P^2(i\tilde{A}, i\tilde{B}) &= -(\wedge^{12}\wedge^{12}\tilde{A}_{pp}\tilde{B}_{qq} + \wedge^{21}\wedge^{21}\tilde{A}_{qq}\tilde{B}_{pp}\\ &+ \wedge^{12}\wedge^{21}\tilde{A}_{pq}\tilde{B}_{qp} + \wedge^{21}\wedge^{12}\tilde{A}_{qp}\tilde{B}_{pq}\\ &= -2\tilde{A}_{pq}\tilde{B}_{qp}.\end{aligned}$$

Hay $P^2(i\tilde{A}, i\tilde{B}) = P^2(i\tilde{B}, i\tilde{A})$,

$$P^k(i\tilde{A}, i\tilde{B}) = -\wedge^{i_1j_1}\wedge^{i_2j_2}\cdots\wedge^{i_kj_k}\partial_{i_1i_2\cdots i_k}\tilde{A}\partial_{j_1j_2\cdots j_k}\tilde{B} = 0 \qquad \forall k \geq 3.$$

Do đó ta thu được

$$\begin{aligned}i\tilde{A}\star i\tilde{B} - i\tilde{B}\star i\tilde{A} &= (P^1(i\tilde{A}, i\tilde{B}) - P^1(i\tilde{B}, i\tilde{A}))\frac{1}{2i}\\ &+ (P^2(i\tilde{A}, i\tilde{B}) - P^2(i\tilde{B}, i\tilde{A}))(\frac{1}{2i})^2.\frac{1}{2!}\\ &= i\{\tilde{A}, \tilde{B}\}.\end{aligned}$$

Tuy nhiên do tính phẳng của các K-quỹ đạo, ta suy ra $i\tilde{A}\star i\tilde{B} - i\tilde{B}\star i\tilde{A} = i\widetilde{[A, B]}$. Bằng lập luận tương tự ta chứng minh được tính hiệp biến của $\star$-tích trên Ω^2_+ và Ω^2_-.

b) Đối với phức hoá của quỹ đạo $(\Omega^3_{\lambda,\mathbb{C}}, \psi)$ ta có hàm Hamilton ứng với trường véctơ bất biến là chỉnh hình nên đạo hàm riêng của $\tilde{A}$ theo các thành phần phản chỉnh hình là triệt tiêu. Chứng minh tương tự như trường hợp trên, ta dễ dàng có được:
$P^0(i\tilde{A}, i\tilde{B}) = -\tilde{A}.\tilde{B}$, $P^1(i\tilde{A}, i\tilde{B}) = -(\wedge^{12}\frac{\partial\tilde{A}}{\partial z}.\frac{\partial\tilde{B}}{\partial w} + \wedge^{21}\frac{\partial\tilde{A}}{\partial w}.\frac{\partial\tilde{B}}{\partial z}) = -\{\tilde{A}, \tilde{B}\}$,
$P^2(i\tilde{A}, i\tilde{B}) = P^2(i\tilde{B}, i\tilde{A})$,
$P^k(i\tilde{A}, i\tilde{B}) = -\wedge^{i_1j_1}\wedge^{i_2j_2}\cdots\wedge^{i_kj_k}\partial_{i_1i_2\cdots i_k}\tilde{A}\partial_{j_1j_2\cdots j_k} = 0 \qquad \forall k \geq 3$,

$$\begin{aligned}i\tilde{A}\star i\tilde{B} - i\tilde{B}\star i\tilde{A} &= (P^1(i\tilde{A}, i\tilde{B}) - P^1(i\tilde{B}, i\tilde{A}))\frac{1}{2i}+\\ &+ (P^2(i\tilde{A}, i\tilde{B}) - P^2(i\tilde{B}, i\tilde{A}))(\frac{1}{2i})^2.\frac{1}{2!}\\ &= i\{\tilde{A}, \tilde{B}\} = i\widetilde{[A, B]}.\end{aligned}$$

Tổng kết lại ta thu được $\star$-tích Moyal là hiệp biến trên tất cả các quỹ đạo. (đ.p.c.m).

2.5 Toán tử lượng tử tương thích $\hat{l}_A$

Xét biểu diễn chính tắc của đại số lượng tử $C^\infty(\Omega)$ lên chính nó mà vốn là một đại số Fréchet-Poisson bởi phép nhân $\star$-trái xác định bởi:

$$l_f : C^\infty(\Omega) \to C^\infty(\Omega).$$

$$g \mapsto f \star g.$$

Vậy ta có thể xem đại số lượng tử $C^\infty(\Omega)$ như là một đại số các toán tử giả vi phân trên không gian Fréchet $C^\infty(\Omega)$. Mặt khác theo định lý 2.4.1 thì tương ứng $A \mapsto l_A = i\tilde{A}\star$. là một đồng cấu đại số Lie. Vì vậy, chúng ta có thể xét biểu diễn của đại số Lie lên không gian con trù mật $L^2(\mathbb{R} \times [0, 2\pi))^\infty$ (tương ứng $L^2(\mathbb{R}^\pm \times [0, 2\pi))^\infty$, $L^2(\mathbb{C} \times [0, 2\pi) \times i.\mathbb{R})^\infty$) các hàm trơn bằng phép nhân trái với $i\tilde{A}\star$.. Biểu diễn này được mở rộng lên toàn không gian $L^2(\mathbb{R} \times SO(2, \mathbb{R}))$ (tương ứng $L^2(\mathbb{R}^\pm \times SO(2, \mathbb{R}))$, $L^2(\mathbb{C} \times SO(2, \mathbb{R}) \times i\mathbb{R})$) theo mệnh đề 2.1.5 của Arnal và Cortet. Tuy nhiên, sự lượng tử hoá chúng ta vừa thực hiện chỉ là hình thức. Vấn đề về sự hội tụ của các toán tử lượng tử là không rõ ràng.
Chúng ta sẽ khảo sát ở đây tính hội tụ của các chuỗi luỹ thừa hình thức. Để thực hiện được điều này, chúng ta nhìn vào $\star$-tích của $i\tilde{A}$ như là $\star$-tích của các ký hiệu và xác định một lớp các toán tử giả vi phân ứng với $i\tilde{A}$, đó là các toán tử giả vi phân G-bất biến trên các quỹ đạo. Điều này cho ta kết quả tương ứng là biểu diễn của $\mathfrak{g}$ bởi các toán tử giả vi phân cùng với một sự miêu tả của các quỹ đạo đối phụ hợp lượng tử.

2.5.1 Toán tử lượng tử $\hat{l}_A$ trên Ω^1_λ

Đối với quỹ đạo $\Omega_1^\lambda = \{2xX^* + 2hH^* - 2yY^* \mid x^2 + h^2 = y^2 + \lambda^2\}$ chúng ta có bổ đề sau:

Bổ đề 2.5.1 $P^k(\tilde{A}, \mathcal{F}_p^{-1}(f)) = k(-1)^{k-1}\tilde{A}_{q\cdots qp}\partial_{p\cdots pq}\mathcal{F}_p^{-1}(f)$
$+(-1)^k\tilde{A}_{q\cdots q}\partial_{p\cdots}\mathcal{F}_p^{-1}(f)$

Chứng minh: Với $k \geq 2$ thì theo 2.3.1 ta có $\tilde{A}$ là tuyến tính theo p nên nếu như trong các chỉ số $i_1, i_{,2}, \cdots, i_k$, có hai chỉ số bằng 1 thì $\partial_{i_1, i_{,2}, \cdots, i_k}\tilde{A} = 0$. Do đó, với $k \geq 2$:

$$\begin{aligned} P^k(\tilde{A}, \mathcal{F}_p^{-1}(f)) &= \wedge^{i_1,j_1} \wedge^{i_2 j_2} \cdots \wedge^{i_k j_k} \tilde{A}_{i_1\cdots i_n}\partial_{j_1\cdots j_n}\mathcal{F}_p^{-1}(f) \\ &= \sum \wedge^{21} \cdots \wedge^{12} \cdots \wedge^{21} \tilde{A}_{q\cdots p\cdots q}\partial_{p\cdots q\cdots p}\mathcal{F}_p^{-1}(f) + \\ &+ \wedge^{21} \cdots \wedge^{21} \tilde{A}_{q\cdots q}\partial_{p\cdots p}\mathcal{F}_p^{-1}(f). \end{aligned}$$

Do $\wedge^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ nên ta có $\wedge^{12} = 1, \wedge^{21} = -1$. Suy ra
$P^k(\tilde{A}, \mathcal{F}_p^{-1}(f)) = k(-1)^{k-1}\tilde{A}_{q\cdots p\cdots q}\partial_{p\cdots q\cdots p}\mathcal{F}_p^{-1}(f) + (-1)^{k-1}\tilde{A}_{q\cdots q}\partial_{p\cdots p}\mathcal{F}_p^{-1}(f)$,
Với k=0 hay k=1, thì ta thấy bổ đề được thoả mãn. Do đó, bổ đề 2.5.1 trên đúng với mọi k.

Áp dụng bổ đề trên, ta thu được định lý sau:

Định lý 2.5.2 *Nếu đặt s=$q - \frac{x}{2}$, ta có toán tử lượng tử tương thích $\hat{l}_A$*
$\hat{l}_A = \mathcal{F}_p \circ l_A \circ \mathcal{F}_p^{-1} = (a_1 \cos s + b_1 \sin s - c_1)\partial_s + (-a_1 \sin s + b_1 \cos s)(2\lambda i + 1)$.

Chứng minh:
Ta có

$$\hat{l}_A(f) = \mathcal{F}_p \circ l_A \circ \mathcal{F}_p^{-1}(f) = i\mathcal{F}_p(\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{2i})^k.\frac{1}{k!}P^k(\tilde{A}, \mathcal{F}_p^{-1}(f)).$$

theo bổ đề 2.5.1 ta thu được:

$$\begin{aligned}\hat{l}_A(f) = i\mathcal{F}_p\Big(&\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{2i})^k\frac{1}{k!}.(-1)^{k-1}.k.\tilde{A}_{q\cdots p\cdots q}\partial_{p\cdots q\cdots p}\mathcal{F}_p^{-1}(f) \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{2i})^k\frac{1}{k!}.(-1)^k.\tilde{A}_{q\cdots q}\partial_{p\cdots p}\mathcal{F}_p^{-1}(f)\Big) = I + J.\end{aligned}$$

Chú ý rằng, theo mệnh đề 2.3.1 thì $\tilde{A}$ là hàm bậc nhất theo p. Do đó $\tilde{A}_{q\cdots p\cdots q}$ là hàm chỉ theo biến p. Do đó theo tính chất của biến đổi Fourier ta thu được

$$\begin{aligned}I &= i\mathcal{F}_p(\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{2i})^k\frac{1}{k!}.(-1)^{k-1}.k.\tilde{A}_{q\cdots p\cdots q}\partial_{p\cdots q\cdots p}\mathcal{F}_p^{-1}(f)) \\ &= i\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{2i})^k\frac{1}{k!}.(-1)^{k-1}.k.\mathcal{F}_p(\tilde{A}_{q\cdots p\cdots q}\partial_{p\cdots q\cdots p}\mathcal{F}_p^{-1}(f)) \\ &= i\sum_{i=1}^{\infty}(\frac{1}{2i})^k\frac{1}{(k-1)!}.(-1)^{k-1}.(ix)^{k-1}\tilde{A}_{q\cdots p\cdots q}\partial_p f \\ &= \frac{1}{2}\partial_p\tilde{A}(q - \frac{x}{2})\partial_q(f).\end{aligned} \tag{2.7}$$

Đặt $\tilde{A}$ =p.M+N trong đó M, N là hàm theo q. Khi đó ta thu được:

$$\begin{aligned}
J &= i\sum_{k=0} A^{\infty}(\frac{1}{2i})^k\frac{1}{k!}.(-1)^k.\mathcal{F}_p((p.M_{q\cdots q}+N_{q\cdots q}).\mathcal{F}_p^{-1}(f))\\
&= i\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{i}{2})^k\frac{1}{k!}((i.\partial_x M^{(k)}+N^{(k)}).(ix)^k.f)\\
&= i\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{i}{2})^k\frac{1}{k!}.i\partial_x.M^{(k)}(q).(ix)^k.f+i\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{i}{2})^k\frac{1}{k!}N^{(k)}(q)(ix)^k.f\\
&= -\sum_{k=0}^{\infty}(-\frac{x}{2})^k.\frac{M^{(k)}}{k!}\partial_x f-\sum_{k=0}^{\infty}(-\frac{1}{2})k.\frac{M^{(k)}}{k!}.k.x^{k-1}\partial_x f+i\sum_{k=0}^{\infty}(-\frac{x}{2})^k.\frac{N^{(k)}}{k!}\partial_x f\\
&= J_1+J_2+J_3.
\end{aligned}$$

Ta tính tổng từng thành phần

$$\begin{aligned}
J_1 &= -\sum_{k=1}^{\infty}(-\frac{1}{2})^k.\frac{M^{(k)}}{(k-1)!}.x^{k-1}.f\\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-\frac{x}{2})^k.\frac{M^{(k+1)}(q)}{k!}.f\\
&= \frac{1}{2}.M'(q-\frac{x}{2}).f.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_2 &= -\sum_{k=0}^{\infty}(-\frac{x}{2})^k.\frac{M^{(k)}}{k!}\partial_x f\\
&= -M(q-\frac{x}{2}).\partial_x f.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_3 &= i\sum_{k=0}^{\infty}(-\frac{x}{2})^k.\frac{N^{(k)}}{k!}.f\\
&= iN(q-\frac{x}{2}).f.
\end{aligned}$$

Do đó ta thu được dạng tường minh của toán tử lượng tử tương thích:

$$\begin{aligned}
\hat{l}_A(f) &= I+J_1+J_2+J_3 \qquad (2.8)\\
&= \frac{1}{2}\partial_p\tilde{A}(q-\frac{x}{2})\partial_q(f)+\frac{1}{2}.M'(q-\frac{x}{2}).f+-M(q-\frac{x}{2}).\partial_x f+iN(q-\frac{x}{2}).f\\
&= M(q-\frac{x}{2})(\frac{1}{2}\partial_q-\partial_x)f+\frac{1}{2}.M'(q-\frac{x}{2}).f+iN(q-\frac{x}{2}).f.
\end{aligned}$$

Đổi biến $q - \frac{x}{2} = s; q + \frac{x}{2} = t$. Ta có $\partial_s = \frac{1}{2}\partial_q - \partial_x$. Ngoài ra, do

$$\tilde{A}(F) = 2a_1(p\cos q - \lambda \sin q) + 2b_1(p\sin q + \lambda\cos q) - 2c_1 p,$$

nên $M(q) = 2a_1(p\cos q - \lambda\sin q) + 2b_1(p\sin q + \lambda\cos q) - 2c_1$,
$N(q) = -2\lambda a_1 \sin q + 2\lambda b_1 \cos q$,
$M'(q) = \dfrac{N(q)}{\lambda}$,
Vậy ta thu được
$\hat{l}_A(f) = M(s).\partial_s f + 2.(\dfrac{N(s)}{2.\lambda} + iNs)f$.
Hay $\hat{l}_A = 2(a_1\cos s + b_1 \sin s - c_1)\partial_s + 2(-a_1\sin s + b_1\cos s)(\lambda i + \frac{1}{2})$.
Định lý được chứng minh.

2.5.2 Toán tử lượng tử $\hat{l}_A$ trên $\Omega^3_{\lambda,\mathbb{C}}$

Đối với quỹ đạo phức hoá $\Omega^3_{\lambda,\mathbb{C}} = \{2xX^* + 2hH^* - 2yY^* \mid x^2 + h^2 = y^2 - \lambda^2; x, y, h \in \mathbb{C}\}$
chúng ta có bổ đề sau:

Bổ đề 2.5.3 $P^k(\tilde{A}, \mathcal{F}_z^{-1}(f)) = k(-1)^{k-1}\tilde{A}_{w\cdots wz}\partial_{z\cdots zw}\mathcal{F}_z^{-1}(f) + (-1)^k \tilde{A}_{w\cdots w}\partial_{z\cdots w}\mathcal{F}_z^{-1}(f)$.

Chứng minh: Với $k \geq 2$ thì theo 2.3.2 ta có $\tilde{A}$ là tuyến tính theo z và là hàm chỉnh hình theo z và w nên nếu như trong các chỉ số $i_1, i_{,2}, \cdots, i_k$, có hai chỉ số bằng 1 thì $\partial_{i_1,i_2,\cdots,i_k}\tilde{A} = 0$. Do đó, với $k \geq 2$:

$$\begin{aligned} P^k(\tilde{A}, \mathcal{F}_z^{-1}(f)) &= \wedge^{i_1,j_1}\wedge^{i_2 j_2}\cdots\wedge^{i_k j_k}\tilde{A}_{i_1\cdots i_n}\partial_{j_1\cdots j_n}\mathcal{F}_z^{-1}(f) \\ &= \sum \wedge^{21}\cdots\wedge^{12}\cdots\wedge^{21}\tilde{A}_{w\cdots z\cdots w}\partial_{z\cdots w\cdots z}\mathcal{F}_z^{-1}(f) + \\ &+ \wedge^{21}\cdots\wedge^{21}\tilde{A}_{w\cdots w}\partial_{z\cdots z}\mathcal{F}_z^{-1}(f). \end{aligned}$$

Do

$$\wedge^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

nên ta có $\wedge^{12} = 1, \wedge^{21} = -1$. Suy ra,
$P^k(\tilde{A}, \mathcal{F}_z^{-1}(f)) = k(-1)^{k-1}\tilde{A}_{w\cdot z\cdot w}\partial_{z\cdots w\cdots z}\mathcal{F}_z^{-1}(f) + (-1)^{k-1}\tilde{A}_{w\cdots w}\partial_{z\cdots z}\mathcal{F}_z^{-1}(f)$.
Với k=0 hay k=1, thì ta thấy được thoả mãn. Do đó, bổ đề 2.5.3 trên đúng với mọi k.

Định lý 2.5.4 *Nếu đặt s=$w - \frac{x}{2}$, ta có toán tử lượng tử tương thích:*
$\hat{l}_A = \mathcal{F}_z \circ l_A \circ \mathcal{F}_z^{-1} = (a_1\cos s + b_1\sin s - c_1)\partial_s + (-a_1\sin s + b_1\cos s)(2\lambda i + 1)$

Chứng minh: Ta có

$$\hat{l}_A(f) = \mathcal{F}_z \circ l_A \circ \mathcal{F}_z^{-1}(f) = i\mathcal{F}_z(\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{2i})^k.\frac{1}{k!}P^k(\tilde{A}, \mathcal{F}_z^{-1}(f)).$$

Theo bổ đề 2.5.3 ta thu được:

$$\hat{l}_A(f) = i\mathcal{F}_z(\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{2i})^k\frac{1}{k!}.(-1)^{k-1}.k.\tilde{A}_{w\cdot z\cdot w}\partial_{z\cdots w\cdots z}\mathcal{F}_z^{-1}(f) \quad (2.9)$$
$$+\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{2i})^k\frac{1}{k!}.(-1)^k.\tilde{A}_{w\cdots w}\partial_{z\cdots z}\mathcal{F}_z^{-1}(f)) = I + J.$$

Chú ý rằng, theo mệnh đề 2.3.2 thì $\tilde{A}$ là hàm bậc nhất theo z. Do đó $\tilde{A}_{w\cdot z\cdot w}$ là hàm chỉ theo biến z. Do đó theo tính chất của biến đổi Fourier ta thu được:

$$I = i\mathcal{F}_z(\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{2i})^k\frac{1}{k!}.(-1)^{k-1}.k.\tilde{A}_{w\cdot z\cdot w}\partial_{z\cdots w\cdots z}\mathcal{F}_z^{-1}(f)) \quad (2.10)$$
$$= i\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{2i})^k\frac{1}{k!}.(-1)^{k-1}.k.\mathcal{F}_z(\tilde{A}_{w\cdot z\cdot w}\partial_{z\cdots w\cdots z}\mathcal{F}_z^{-1}(f))$$
$$= i\sum_{i=1}^{\infty}(\frac{1}{2i})^k\frac{1}{(k-1)!}.(-1)^{k-1}.(i\xi)^{k-1}\tilde{A}_{w\cdot z\cdot w}\partial_z f$$
$$= \frac{1}{2}\partial_z\tilde{A}(w-\frac{\xi}{2})\partial_w(f).$$

Đặt $\tilde{A}$ =z.M+N trong đó M, N là hàm theo w. Khi đó ta thu được:

$$J = i\sum_{k=0} A^{\infty}(\frac{1}{2i})^k\frac{1}{k!}.(-1)^k.\mathcal{F}_z((z.M_{w\cdots w} + N_{w\cdots w}).\mathcal{F}_z^{-1}(f)) \quad (2.11)$$
$$= i\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{i}{2})^k\frac{1}{k!}((i.\partial_x M^{(k)} + N^{(k)}).(i\xi)^k.f)$$
$$= i\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{i}{2})^k\frac{1}{k!}.i\partial_x.M^{(k)}(w).(i\xi)^k.f + i\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{i}{2})^k\frac{1}{k!}N^{(k)}(w)(i\xi)^k.f$$
$$= -\sum_{k=0}^{\infty}(-\frac{\xi}{2})^k.\frac{M^{(k)}}{k!}\partial_x f - \sum_{k=0}^{\infty}(-\frac{1}{2})k.\frac{M^{(k)}}{k!}.k.\xi^{k-1}\partial_\xi f + i\sum_{k=0}^{\infty}(-\frac{\xi}{2})^k.\frac{N^{(k)}}{k!}\partial_x f$$
$$= J_1 + J_2 + J_3.$$

Trong đó,

$$J_1 = -\sum_{k=1}^{\infty}(-\frac{1}{2})^k.\frac{M^{(k)}}{(k-1)!}.\xi^{k-1}.f \tag{2.12}$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-\frac{\xi}{2})^k.\frac{M^{(k+1)}(w)}{k!}.f$$
$$= \frac{1}{2}.M'(w-\frac{\xi}{2}).f$$

$$J_2 = -\sum_{k=0}^{\infty}(-\frac{\xi}{2})^k.\frac{M^{(k)}}{k!}\partial_\xi f \tag{2.13}$$
$$= -M(w-\frac{\xi}{2}).\partial_\xi f.$$

$$J_3 = i\sum_{k=0}^{\infty}(-\frac{\xi}{2})^k.\frac{N^{(k)}}{k!}.f \tag{2.14}$$
$$= iN(w-\frac{\xi}{2}).f.$$

Do đó ta thu được dạng tường minh của toán tử lượng tử tương thích:

$$\begin{aligned}\hat{l}_A(f) &= I + J_1 + J_2 + J_3\\ &= \frac{1}{2}\partial_z\tilde{A}(w-\frac{\xi}{2})\partial_w(f) + \frac{1}{2}.M'(w-\frac{\xi}{2}).f + -M(w-\frac{\xi}{2}).\partial_\xi f + iN(w-\frac{\xi}{2}).f\\ &= M(w-\frac{\xi}{2})(\frac{1}{2}\partial_w - \partial_\xi)f + \frac{1}{2}.M'(w-\frac{\xi}{2}).f + iN(w-\frac{\xi}{2}).f.\end{aligned}$$

Đổi biến $w-\frac{\xi}{2} = s; w+\frac{\xi}{2} = t$. Ta có $\partial_s = \frac{1}{2}\partial_w - \partial_\xi$.
Ngoài ra, do $\tilde{A}(F) = 2a_1(z\cos w - \lambda\sin w) + 2b_1(z\sin w + \lambda\cos w) - 2c_1 z$ nên
$M(w) = 2a_1(z\cos w - \lambda\sin w) + 2b_1(z\sin w + \lambda\cos w) - 2c_1$,
$N(w) = -2\lambda a_1\sin w + 2\lambda b_1\cos w$,
$M'(w) = \frac{N(w)}{\lambda}$.
Vậy ta thu được

$$\hat{l}_A = 2.(a_1\cos s + b_1\sin s - c_1)\partial_s + 2(-a_1\sin s + b_1\cos s)(\lambda i + \frac{1}{2}).$$

Định lý được chứng minh.
Tương tự, ta cũng thu được cùng một kết quả đối với các quỹ đạo còn lại, trừ

quỹ đạo 0 sẽ ứng với toán tử tầm thường.

Chú ý: Chúng ta chỉ xét trường hợp s và t là số thực và do đó, không gian L^2 của chúng ta chỉ lấy theo các biến phức. Theo các kết quả về phân cực, ta thu được không gian biểu diễn là $L^2(SO(2,\mathbb{R}))$ vốn là không gian L^2 theo các tọa độ của Ω sau khi loại đi các phân cực tương ứng.

2.6 Đối ngẫu unita của SL(2,$\mathbb{R}$) và phân loại

Trong mục này chúng ta sẽ nhắc lại ngắn gọn về cách xây dựng đối ngẫu unita của SL(2,$\mathbb{R}$) theo phương pháp giải tích. Chi tiết của sự xây dựng này xem [33], Xét nhóm con

$$H = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix},$$

cùng biểu diễn một chiều

$$\rho \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} = a^{u+1},$$

Ký hiệu $H_u = L^2(G, H, \rho_u)$ là không gian các hàm f trên G thoả mãn:

$$f(hg) = \rho_u(h).f(g), \forall h \in H. \tag{2.15}$$

có hạn chế của f lên trên K là bình phương khả tích theo độ đo Haar. Cấu trúc Hilbert của $L^2(K)$ cảm sinh một cấu trúc Hilbert trên $H_u = L^2(G, H, \rho_u)$ mà đẳng cấu với không gian các lát cắt bình phương khả tích của một không gian phân thớ cảm sinh, nền là không gian thuần nhất $H\backslash G$, thớ là $\mathbb{C}$ và các hàm dán sinh bởi ρ_s. Cụ thể hơn, mọi hàm đo được trên K đều tương ứng 1-1 với một hàm đo được trên G thoả mãn biểu thức 2.15

Xét biểu diễn chính tắc của G lên trên $H_u = L^2(G, H, \rho_s)$

$$\varphi_u(g)f(x) = f(xg)$$

và do đó cũng tương đương với một biểu diễn của G lên $L^2(K)$ mà ta gọi là biểu diễn cảm sinh của ρ_s từ H lên G, ký hiệu Π_u. Đây sẽ là một khái niệm đóng vai trò cốt yếu trong xây dựng của chúng ta sau này.

Với T là biểu diễn của G lên trên $C^\infty(G)$ mà $T(g)f(g_1) = f(g_1.g)$ ta định nghĩa khái niệm biểu diễn vô cùng bé (hay biểu diễn đạo hàm) của T.

$$L(A).f(g_0) = \frac{\partial}{\partial t} T(e^{tA}).f(g_0) \mid_{t=0} .$$

Theo phân tích Iwasawata có SL(2,$\mathbb{R}$)=A.N.K trong đó

A:nhóm Abel tối đại.

N:nhóm nilpotent tối đại

K:nhóm compact tối đại

Cụ thể hơn, ta có với mỗi g thuộc G thì

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{y}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{y}} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Vậy, mọi hàm f trên G đều có thể coi là hàm của x, y, θ. Ta nhận được biểu diễn vô cùng bé của đại số Lie $\mathfrak{g}$

$L_X = 2y\cos(2\theta).\frac{\partial}{\partial x} + 2y.\sin(2\theta)\frac{\partial}{\partial y} - \cos(2\theta)\frac{\partial}{\partial \theta}.$

$L_H = -2y\sin(2\theta).\frac{\partial}{\partial x} + 2y.\cos(2\theta)\frac{\partial}{\partial y} + \sin(2\theta)\frac{\partial}{\partial \theta},$

$L_Y = \frac{\partial}{\partial \theta}.$

Chọn cơ sở mới:

$$\begin{cases} W = Y \\ E^+ = H + iX \\ E^- = H - iX \end{cases}$$

cùng với một lớp hàm đặc biệt $\phi_n \in H_s$ mà

$$\phi_n \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = e^{in\theta}.$$

Khi đó,

$L\ _W\phi_n = in\phi_n,$

$L_{E^-}\phi_n = (u + 1 - n)\phi_{n-2},$

$L_{E^+}\phi_n = (u + 1 + n)\phi_{n+2}.$

Theo lý thuyết giải tích Fourier cổ điển, thì tập các ϕ_n lập thành một cơ sở tôpô của H_s. Phân tích không gian H_0 thành các thành phần trực giao $\widehat{\bigoplus}_{n=2k}\phi_n = H^p$; $\widehat{\bigoplus}_{k=1}^{\infty}\phi_{2k+1} = H_+^d$; $\widehat{\bigoplus}_{k=1}^{\infty}\phi_{-2k-1} = H_-^d$; $L(\phi_1) = H_+^c$; $L(\phi_1) = H_-^c$.

Khi đó, ta thu được danh sách các biểu diễn unita bất khả quy của SL(2,$\mathbb{R}$) bao gồm các chuỗi biểu diễn sau:

a)Các biểu diễn chuỗi chính (π_u, H_u) với u=it, $t \neq 0$ và (π_0, H^p)
b)Các biểu diễn chuỗi rời rạc $(\pi_u, H_u$) với u=m-1 hoặc u=-m+1 và $(\pi_0, H_+^d); (\pi_0, H_-^d)$
c)Các biểu diễn chuỗi bổ sung (π_s, H_s) với $-1 < s < 1$, s≠0 và $(\pi_0, H_+^c); (\pi_0, H_-^c)$;.
Vậy, chúng ta sẽ chứng minh ở đây sự trùng nhau của biểu diễn thu được bằng lượng tử hoá biến dạng và biểu diễn thu được bằng phương pháp giải tích. Cụ thể hơn, chúng ta chứng minh sự tương đương nhau của biểu diễn vô cùng bé L và $\hat{l}$.

Định lý 2.6.1 *Biểu diễn vô cùng bé $\hat{l}$ thu được từ lượng tử hoá biến dạng trùng với biểu diễn đạo hàm L của phương pháp giải tích.*

Chứng minh :Ta có $f(x, y, \theta) = y^{\frac{u+1}{2}}.f(\theta)$
do đó,
$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{u+1}{2y}.f$; $\frac{\partial f}{\partial \theta} = 0$.
Suy ra $2y\partial_y = u + 1$, $\partial_x = 0$.
Vì vậy
$L_X = (u + 1)\sin 2\theta - \cos 2\theta\partial_\theta$.
$L_H = (u + 1)\cos 2\theta + \sin 2\theta\partial_\theta$.
$L_Y = \frac{\partial}{\partial \theta}$.
Ta thu được biểu thức của toán tử biểu diễn với $A = a_1X + b_1H + c_1Y$
$L_A = (-a_1\cos(2\theta) + b_1\sin 2\theta + c_1)\partial_\theta + (u + 1)(a_1\sin 2\theta + b_1\cos 2\theta)$.
Đặt $u = 2\lambda$ và $-2\theta = s$. Dưới dạng này, thì
$L_A = 2(a_1\cos s + b_1\sin s - c_1)\partial_s + 2(-a_1\sin s + b_1\cos s)(\lambda + \frac{1}{2}) = \hat{l}_A$.
Định lý được chứng minh

KẾT LUẬN CỦA LUẬN VĂN

Bài toán thực hiện trong luận văn là lượng tử hoá biến dạng trên các K-quỹ đạo của nhóm SL(2,$\mathbb{R}$). Các kết quả chính của luận văn là:
(i)Xây dựng các bản đồ tương thích đưa $\star$- tích từ $\mathbb{R}^{2n}$ hay $\mathbb{C}^{2n}$ lên các quỹ đạo. Khẳng định $\star$-tích trên các quỹ đạo hội tụ.
(ii)Xây dựng phân cực phức đối với các quỹ đạo, thu được biểu diễn của SL(2,$\mathbb{R}$) lên không gian Hilbert các lát cắt bình phương khả tích, chỉnh hình từng phần của một không gian phân thớ véc tơ.
(iii)Nhận lại được đầy đủ các biểu diễn unita bất khả quy của SL(2,$\mathbb{R}$), độc lập với phương pháp giải tích.

Một hệ quả thú vị là sự mô tả các quỹ đạo đối phụ hợp lượng tử, đó là các đối tượng lượng tử mới, xuất hiện ở dạng tường minh.

Sau khi hoàn thành khóa luận, chúng tôi nhận thấy một số vấn đề sau đây:
(i)Bài toán hoàn toàn có thể mở rộng cho SL(n, $\mathbb{R}$) với $n > 2$.
(ii)Không gian Hilbert ứng với biểu diễn chuỗi chính mà chúng tôi chọn để biểu diễn, có thể coi như là không gian các lát cắt chỉnh hình từng phần của một không gian phân thớ véctơ, một mặt có thể coi là không gian các dạng tự đẳng cấu trên nửa mặt phẳng trên, cũng là không gian đối đồng điều với hệ số trên bó. Chúng tôi đặt vấn đề nghiên cứu một liên hệ giữa các đối tượng này, cũng như nghiên cứu sự tương tự cho các trường p-adic hay các trường không đóng đại số. Chúng tôi cũng đặt vấn đề nghiên cứu giải tích điều hoà và biểu diễn của các nhóm lượng tử tương ứng.

Hi vọng rằng các bài toán sẽ được giải quyết trong thời gian tới.

Tài liệu tham khảo

[1] Dieudoné, J.(1977), Cơ sở giải tích hiện đại, tập 6, nhà xuất bản đại học và trung học chuyên nghiệp, bản dịch tiếng việt.

[2] Nguyễn Việt Hải, (2001), Lượng tử hóa biến dạng trên các K-quỹ đạo và biểu diễn unita của hai lớp nhóm MD và MD_4, luận án tiến sĩ.

Tiếng Pháp

[3] Arnal, D. and Cortet J. C, (1990)Représentatioms $\star$ des groupes exponentiels, J Funct. Anal. 92, pp103-135.

[4] Duflo, M. (1982) Théorie de Mackey pour les groupes de Lie algébriques, Acta math. 149, pp153-213.

[5] Flato, M., Lichnerowicz A. and Sternheimer D. (1976) Crochet de Moyal-Vey et quantification, C. R. Acad. Sci. Paris I Math. 283, pp 19-24.

Tiếng Anh

[6] Arnal, D. and Cortet, $\star$-product and representation of nilpotent Lie groups, J. Geom. Phys, 2, No2, pp86-116.

[7] Arnold, V. I(1984), Mathematic methods of Classical Mechanics, Springer Verlag, Berlin-New York-Heidelberg, pp 201-231.

[8] Bayen, F. ,M. Flato, C. Fronsal, A. Licherowicz and D. Sternheimer, Deformation theory and quantization I, II, Ann. Phys. 110 (1978) 61—110, 111—151

[9] Bayen, F., M. Flato, C. Fronsal, A. Licherowicz and D. Sternheimer, (1977), Quantum Mechanics as a deformation of classical mechanics, Lett. Math. Phys. 1, pp521-530.

[10] Chevaley(1946), Theory of Lie Groups, Priceton University Express.

[11] Cuntz, J. (2001), Quantum space and Their noncommutative topology, Notices of AMS, vol48, Number 8.

[12] Do Ngoc Diep(1983), Geometric quantization, Vietnam J. Math., 11, No3, pp 1-4.

[13] Do Ngoc Diep(1999),Methods of Noncommutative Geometry for Group C^*-Algebra, Chapman and Hall, /CRC Press Reseach Notes in mathematics Series, #416.

[14] Do Ngoc Diep(1992), Multidimetional quantization and Fourier integral operators, Forchergruppe 'Topologie und nichtkommutative Geometrie", Uni Heidelberg, Heft 42, Oktober, pp. 9.

[15] Do Ngoc Diep and Nguyen Viet Hai(2001), Quantum Half-planes via Deformation Quantization, Beitrage zur Algebra und Geometrie(Contribution to Algebra and Geometry).

[16] Do Ngoc Diep and Nguyen Viet Hai(2001), Quantum coadjoint orbits of affine transformations of complex line, Beitrage zur Algebra und Geometrie(Contribution to Algebra and Geometry).

[17] Dixmier, J. (1996), Enveloping Algebra, American Mathematical Society.

[18] Fedosov(1993), Deformation quantization and Index theory, Akademie der Vissenschaften Verlag.

[19] Fulton, W. and Harris J., (1991), Representation theory, Springer-Verlag.

[20] Karaali, G.(2001), Deormation quantization, a brief survey.

[21] Gutt, S. Deformation Quantization, ICTP Workshop on Representation Theory of Lie Groups, SMR 686/14.

[22] Gamkrelidze, R. V.(1980), Geometry I, Springer-Verlag

[23] Gutt, S. Variations on Deformation quantization, math, DG/0003107.

[24] Gorbasevich, V. V., Lonishchik, A. and Vinberg, E. B(1997) Foundation of Lie theory and Lie transformation Groups, Springer Verlag.

[25] Gelfand, I. M and Naimark, M. A(1947) Unitary representation of the group of affine transformations of the straight line, Dolk Akad Nauk SSSR, 55, No7, 571-574.

[26] Gelfand, I. M and Naimark, M. A(1947) Unitary representation of the Lorenz group, ives Akad Nauk SSSR, 55, No11, 411-541.

[27] Nguyen Viet Hai, Quantum coadjoint orbits of MD_4 groups, Viet Nam J. Math. Vol 29, IS, 02/2001, pp131-158.

[28] Jorgensen, E. T. (1994)Quantization and Deformation of Lie algebras, contemporary Mathmatics, vol1960, 1994.

[29] Kontsevich, M. (1997) Deformation quantization of Poisson manifold, I. IHES preprint q-alg/9709040.

[30] Kirillov, A. A(1976), Element of theory of representation. Springer-Verlag.

[31] Kirillov, A. A(1999)Merit and demerit of the orbit method. BULLETIN (new series) of the AMS, vol 36, number 4, p433-488.

[32] Kostant, B. (1970) On certain unitary representations which arise from a quantization theory, Lecture notes in Math, 170, pp237-240

[33] Lang, S., SL(2,$\mathbb{R}$), Addison-Wesley publishing company, 1975.

[34] Nomizu, K.(1956), Lie group and differential geometry, The mathematical society of Japan.

[35] Maurin K. (1968) General Eigenfunction Expansions and unita Representation of Topological Groups, Polish Scientific Publishers.

[36] Micho, D., Quantum Geometry and new concept of space

[37] Reshetikhin, N. and Takhtajan L. A. (1998)Deformation quantization of kahler manifolds, math. QA/9907171.

[38] Howe, R.and Tan, E. C. (1992), Non-abelian Harmonic Analysis, Application of SL(2,$\mathbb{R}$); Springer Verlag

[39] Vogan, D., Representations of Real Reductive Lie Groups Birkh auser Boston Basel Stuttgart

[40] Vogan, D., Dixmier Algebras, Sheets and Representation theory

[41] Le Anh Vu(1990), On the structure of the $C^{\star}$ algebra of foliation formed by the K-orbits of maximal dimention of the real diamond group, J Operator Theory, 24, No2. pp227-238.

[42] Le Anh Vu(1990), On the foliation formed by the generic K-orbits of the MD_4 groups, Acta Math Vietnam, 15, No2. pp35-55.

Deformation quantization and quantum coadjoint orbits of SL(2,$\mathbb{R}$).

Do Duc Hanh

March 1, 2002

C/O: Institute of Mathematics, National Center for Science and Technology, P. O. Box 631, Bo Ho, 10.000, Hanoi, Vietnam.
e-mail: hanhmath@yahoo.com

Abstract

In this article, we describe the coadjoint orbits of SL(2,$\mathbb{R}$). After choosing polarizations for each orbits, we pointed out the corresponding quantum coadjoint orbits and therefore unitary representations of SL(2,$\mathbb{R}$) via deformation quantization.

1 Introduction

Let us recall that quantization is a process associating to each Poisson manifold M a Hilbert space H of so-called quantum states, to each classical quantity f$\in C^\infty(M)$ a quantum quantity Q(f) $\in \mathfrak{L}(H)$, i.e., a continuous, perhaps unbounded, normal operator which is auto-adjoint if f is a real-valued function such that

$$Q(\{f,g\}) = \frac{i}{\hbar}[Q(f),Q(g)],$$

$$Q(1) = Id_H.$$

There are some approaches to this problem, such as Feynman path-integral quantization, pseudo-differential operator quantization, geometric quantization, etc...In Fedosov deformation quantization, the quantization is considered as the deformation of the structure of the Poisson algebra of classical observables via a family of associated algebras indexed by the so-called deformation parameter rather than a radical change in the nature of the observables.

It is interesting to construct quantum objects corresponding to the classical ones. It is well-known that the coadjoint orbits are almost all the classified flat G-symplectic manifolds. A natural question is to associate to coadjoint orbits some quantum systems called *quantum coadjoint orbits*. Following the Kontsevich' results, every Poisson structure can be quantized. However, this quantizating is only formal and it is difficult to calculate exactly the corresponding quantum objects and representations in concrete cases. Recently, Do Ngoc Diep and Nguyen Viet Hai, in [5], [6], described the quantum coadjoint orbits and representations of MD and MD_4 groups. However, the same problem for SL(2,$\mathbb{R}$) is still open. Although all the irreducible unitary representations of SL(2,$\mathbb{R}$) are well-known, the correspondence of them with coadjoint orbits has not yet been clarified. In this paper, we shall use the Fedosov deformation quantization to find out $\star$-product formulae and representation of SL(2,$\mathbb{R}$). The algebras of smooth functions on coadjoint orbits of SL(2,$\mathbb{R}$), deformed by exactly computed $\star$-products give us series of quantum coadjoint orbits: quantum elliptic hyperboloids, quantum upper (lower) half-hyperboloids, quantum upper (lower) cones, etc...To our knowledge, these quantum objects, as we know, are established here for the first time.

The paper is organized as follows. We describe coadjoint orbits in §2. In §3 we compute for each coadjoint orbit a polarization. The deformation $\star$-products are computed in §4 and in the last section §5, we show the relation with the unitary dual of SL(2,$\mathbb{R}$).

For notation, we refer the reader to [10] or [4], [5], [6].

2 Coadjoint orbits of SL(2,$\mathbb{R}$)

Recall that SL(2,$\mathbb{R}$) is a Lie group with Lie algebra consisting of 2 by 2 matrices with trivial traces. It admits a natural basis of three generators:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

subject to relations: [H,X]=2Y, [H,Y]=2X, [X,Y]=-2H. Denote by X^*, H^*, Y^* the dual basis of $\mathfrak{g}^*$. Because the Killing form is non-degenerate, we can identity $\mathfrak{g}$ with $\mathfrak{g}^*$ in such a way that $\hat{X}(Y) = \frac{1}{4}B(X,Y) = \frac{Tr(adX.adY)}{4}$. This isomorphism maps X into $2X^*$, H into $2H^*$ and Y into $-2Y^*$.

Naturally, the coadjoint action of SL(2,$\mathbb{R}$) on $\mathfrak{g}^*$ is given by:

$$\langle K(g)F, Z\rangle = \langle F, Ad(g^{-1})Z\rangle \quad \forall F \in \mathfrak{g}^*, g \in G, \text{ and } Z \in \mathfrak{g}.$$

where $\mathfrak{g}$ is a G-space with Ad-action. However, there is a natural isomorphism of G-spaces.

Proposition 2.1 *Operator $X \mapsto \widehat{X}$ is a smooth G-equivariant isomorphism between G-spaces. In another words, $\widehat{Ad(g)X} = K(g)\widehat{X}$.*

It is well-known that GL(2,$\mathbb{R}$) is a direct product of SL(2,$\mathbb{R}$) and $R^* = R\backslash(0)$, and therefore each B $\in GL(2,\mathbb{R})$ can be decomposed as the product of an element from SL(2,$\mathbb{R}$) and $\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ or $\lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ with $\lambda \in R^*_+$. Due to the G-equivariant isomorphism of $\mathfrak{g}$ with Ad-action and $\mathfrak{g}^*$with K-action, we study the adjoint orbits in stead of coadjoint orbits of $\mathfrak{g}^*$. It is well-known that every matrix $B \in sl(2,\mathbb{R})$ can be reduced to one of the following normal forms:

$$\begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -\lambda \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

We obtain the following description of the geometry of coadjoint orbits which may be known but we could not find in literature.

Theorem 2.2 *Each coadjoint orbit of SL(2,$\mathbb{R}$) is one of the following forms:*

(a) Elliptic hyperboloid: Ω^1_λ={ $2xX^* + 2hH^* - 2yY^* \mid x^2 + h^2 = y^2 + \lambda^2, \lambda \neq 0$},

(b) Upper half-cones: Ω^2_+={ $2xX^* + 2hH^* - 2yY^* \mid x^2 + h^2 = y^2, y > 0$},
Lower half-cones: Ω^2_-={ $2xX^* + 2hH^* - 2yY^* \mid x^2 + h^2 = y^2, y < 0$},
One point: Ω^2_0={ 0},

(c) Upper half-hyperboloid: Ω^3_+={ $2xX^* + 2hH^* - 2yY^* \mid x^2 + h^2 = y^2 - \lambda^2, y > 0$},
Lower half-hyperboloid: Ω^3_-={ $2xX^* + 2hH^* - 2yY^* \mid x^2 + h^2 = y^2 + \lambda^2, y < 0$}.

Proof. We describe the geometry of adjoint orbits corresponding to Ω^1_λ, Ω^2_- and $\Omega^3_{\lambda,+}$. The remaining can be analogously treated.

The adjoint orbit corresponding to Ω^1_λ contains $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix}$. By a direct computation, for $S = \begin{pmatrix} u & v \\ s & t \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R})$, we have

$$\begin{pmatrix} h & x+y \\ x-y & -h \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} S^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda(ut+sv) & -2\lambda uv \\ 2\lambda st & -\lambda(ut+sv) \end{pmatrix}.$$

Hence, $\frac{h}{\lambda} = ut + sv$, $\frac{x+y}{\lambda} = -2uv$, $\frac{x-y}{\lambda} = 2st$ and therefore, $\frac{x^2-y^2}{\lambda^2} + \frac{h^2}{\lambda^2} = -4uvst + (ut+sv)^2 = (ut-sv)^2 = 1$.
Moreover, the coadjoint orbit containing $2\lambda H^*$ is
$\{2xX^* + 2hH^* - 2yY^* \mid x^2 + h^2 - y^2 = \lambda^2\}$.
It is exactly the elliptic hyperboloid.

The adjoint orbit corresponding to $\Omega^3_{\lambda,-}$ contains $\begin{pmatrix} 0 & -\lambda \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}$. By a direct computation, for $S = \begin{pmatrix} u & v \\ s & t \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R})$, we have

$$\begin{pmatrix} h & x+y \\ x-y & -h \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} 0 & -\lambda \\ \lambda & 0 \end{pmatrix} S^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda(vt-us) & -\lambda(u^2+v^2) \\ \lambda(s^2+t^2) & -\lambda(vt-us) \end{pmatrix}.$$

Hence, $\dfrac{h}{\lambda} = vt + us$, $\dfrac{x+y}{\lambda} = -(u^2+v^2)$, $\dfrac{x-y}{\lambda} = s^2 + t^2$. And therefore, $\dfrac{x^2-y^2}{\lambda^2} + \dfrac{h^2}{\lambda^2} = 1$ for $0 \geq x+y$, $x-y \geq 0$.
Moreover, the coadjoint orbit containing $2\lambda Y$ is $\{2xX^* + 2hH^* - 2yY^* \mid x^2 + h^2 = y^2 - \lambda^2, y < 0\}$. It is exactly one of the two connected components of the elliptic hyperboloid.

Let us consider the adjoint orbit corresponding to Ω^2_- containing $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. By a direct computation, for $S \in SL(2,\mathbb{R})$, we have:

$$\begin{pmatrix} h & x+y \\ x-y & -h \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} S^{-1} \begin{pmatrix} vt & -v^2 \\ t^2 & -vt \end{pmatrix}.$$

Hence, h=vt, $x+y = -v^2$, $x-y = t^2$.

And therefore $x^2 + h^2 - y^2 = 0, 0 \geq x + y, x - y \geq 0$. Note that $(x, h, y) \neq (0, 0, 0)$. The coadjoint orbit containing $X^* + Y^*$ is
$\{2xX^* + 2hH^* - 2yY^* \mid x^2 + h^2 = y^2, y > 0\}$. It is really the upper half-cones. The theorem is proved.

3 Complex Polarizations of K-Orbits of SL(2,$\mathbb{R}$)

Before quantizing coadjoint orbits we do first describe some polarizations on orbits. Let us recall some basis concepts concerning polarization, see [4].

Let G be a Lie group. A complex polarization of orbit Ω_F at $F \in \Omega_F$ is a quadruple of $(\eta, \mathfrak{h}, U, \rho)$ such that:

1. η is a subalgebra of the complex Lie algebra $\mathfrak{g}_C = g \underset{R}{\otimes} C$ containing $\mathfrak{g}_F$.
2. The subalgebra η is invariant under the action of all the operators of type $Ad_{\mathfrak{g}_C} x$, $x \in G_F$.
3. The vector space $\eta + \bar{\eta}$ is the complexification of real subalgebra Lie $\mathfrak{m} = (\eta + \bar{\eta}) \cap \mathfrak{g}$.
4. All subgroup M_0, H_0, M, H are closed, where, by definition M_0 (reps., H_0) is the connected subgroup of G with Lie algebra m (reps., $\mathfrak{h} := \eta \cap \mathfrak{g}$) and M:=$G_F.M_0$, H:=$G_F.H_0$.
5. U is an irreducible representation of H_0 in some Hilbert space H such that: 1. The restriction $U \mid_{G_F \cap H_0}$ is some multiple of χ_F where by definition $\chi_F(expX) \mid_{(G_F)_0 \cap H_0} := exp(2\pi\sqrt{-1}\langle F, X\rangle)$; 2. The Nelson condition is satisfied. See [4], 10.5, theorem 3.
6. The Pukanszky condition is satisfied: $F + \eta^{\perp} \subset \Omega_F$, see [10], $\S 15.3$.

Denote by ρ the one dimension representation $2\pi\sqrt{-1}\langle F, X\rangle$ of Lie algebra η. Let $C^\infty(G, \eta, H, \rho, U)$ be the set of common solutions of

$$f(hg) = U(h).f(g),$$
$$(L_X - \rho(X))f = 0 \quad X \in \eta.$$

Remark 1 . *The condition 5 and 6 are often included in order to obtain irreducible representations.*

In this section, we establish complex polarization for K-orbits.

3.1 Polarization of Ω_λ^1

Let us consider a point $\hat{F} = 2\lambda H^* \in \Omega_\lambda^1$ and the complex subalgebra $\eta = \langle H, X+Y\rangle_C$. The representation $U = e^{2\pi i\langle \hat{F},.\rangle}$ can be extended to $H = H^0 \cup \varepsilon H^0$ as $U(\varepsilon) = \pm 1$. Let ρ be the natural extension of dU to η

Proposition 3.1 *(η, ρ, U) is a polarization of Ω_λ^1.*

Proof. It is easy to see that the stabilizer $G_F = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1}\end{pmatrix}\right\}$ consists of two connected components corresponding to $a > 0$ and $a < 0$. Obviously, its Lie algebra is $\mathfrak{g}_F = \langle H\rangle$. The Ad-orbit passing through $F = \lambda H$ contains two lines $\{F + t(X \mp Y)\}$. Clearly, these lines are the images of ones $\{\hat{F} + t(X^* \pm Y^*)\}$ passing through $\hat{F}$ on Ω_λ^1 under the isomorphism generated by Killing form. Chose $\eta = \langle H, X+Y\rangle_C$, we can see that Pukanszky condition is satisfied. Note that [H, X+Y]=2(X+Y) so η is a invariant Lie algebra under Ad-action of G_F. We also deduce $\mathfrak{h} = \eta \cap \mathfrak{g} = \mathfrak{m} = \langle H, X+Y\rangle, \bar{\eta} = \eta, \mathfrak{m}_C = \eta + \bar{\eta} = \eta$. Chose $\rho(A) = 2\pi i\langle \hat{F}, A\rangle$, where $A \in \eta$, to be holomorphic representation of η. We have, $\rho(aH + b(X+Y)) = 4\pi i\lambda a$. Because G_F has two connected components, $H = G_F.H^0 = \left\{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha^{-1}\end{pmatrix} \mid \alpha \neq 0\right\}$.
By an exact computation, we have
$$exp\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -a\end{pmatrix} = exp\left(a.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} e^a & b(\frac{e^a - e^{-a}}{2}) \\ 0 & e^{-a}\end{pmatrix}.$$
Thus, $U\left(exp\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -a\end{pmatrix}\right) = e^{4\pi i\lambda a}$ or $U\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha^{-1}\end{pmatrix} = \alpha^{4\pi i\lambda}$ for all $\lambda > 0$. On the other hand, $H = H^0 \cup \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}.H^0$, and so we can extend U onto H following $U\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix} = \pm I$. Corresponding to characters of $H/H^0 = \mathbb{Z}_2$, we obtain thus two unitary representations of H: $U\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha^{-1}\end{pmatrix} = |\alpha|^{4\pi i\lambda}$ and $U\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha^{-1}\end{pmatrix} = |\alpha|^{4\pi i\lambda}.sgn(\alpha)$.

3.2 Polarization of Ω^2_+

Let us consider a point $\hat{F} = X^* - Y^* \in \Omega^2_+$ and the complex subalgebra $\eta = \langle H, X+Y\rangle_C$. The representation $U = e^{2\pi i\langle F,.\rangle}$ can be extended to $H = H^0 \cup \varepsilon H^0$ as $U(\varepsilon) = \pm 1$. Let ρ be the natural extension of dU to η.

Proposition 3.2 *(η, ρ, U, ρ) is a polarization of Ω^2_+.*

Proof. It is easy to see that the stabilizer $G_F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \right\}; a \in \{-1, 1\}$ consists of two connected components corresponding to $a > 0$ and $a < 0$ with Lie subalgebra $\mathfrak{g}_F = \langle X + Y\rangle$. Chose $\eta = \langle H, X + Y\rangle_C$. Since [H, X+Y]=2(X+Y), η is a invariant Lie algebra under the Ad action of G_F. Clearly, $\eta^\perp = \langle X^* - Y^*\rangle$ and it is a space of functionals on $\mathfrak{g}$ vanishing on η when extented to complexification of $\mathfrak{g}$. It also implies $\mathfrak{h} = \eta \cap \mathfrak{g} = \langle H, X+Y\rangle, \bar{\eta} = \eta = \mathfrak{m}_C$ and 0 is the one-dimension representation of η. Naturally, $H = H^0 \cup \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .H^0$ and $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^2 = I$. It follows $U\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \pm I$. We obtain two unitary representations of H with respect to characters of H/H^0
$U\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix} = 1$ and $U\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix} = \mathrm{sgn}(\alpha)$.
Analogously, we obtain the same result for Ω^2_-.

3.3 Polarization of $\Omega^3_{\lambda,+}$

Let us consider a point $\hat{F} = 2H^* \in \Omega^3_{\lambda,+}$, the complex subalgebra $\eta = \langle Y, X + iH\rangle_C$. Because of the fact that the stabilizer SO(2,$\mathbb{R}$) of $\hat{F}$ is not simply connected, $U = e^{2\pi i\langle F,.\rangle}$ can be extented to H only if the orbit is integral.

Proposition 3.3 *(η, ρ, U, ρ) is a polarization of $\Omega^3_{\lambda,+}$ and this orbit is integral if and only if λ is of the form $\lambda = \frac{k}{8}$.*

Proof. It is trivial that the stabilizer $G_F = SO(2, R)$ with Lie algebra $\mathfrak{g}_F = \langle Y\rangle$ is connected but not simply connected. By choosing $\eta = \langle Y, X + iH\rangle_C, \mathfrak{m}_C = \mathfrak{g}, \mathfrak{h} = \eta \cap \mathfrak{g}$, η admits an one-dimension representation $\rho\begin{pmatrix} -ia & a+b \\ -a+b & ia \end{pmatrix} = -4\pi i\lambda a$, which has the restriction on $\mathfrak{h}$, $\rho\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} = -4\pi i\lambda a$. On the other hand,

$$exp \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos a & \sin a \\ -\sin a & \cos a \end{pmatrix}.$$

Thus

$$U \begin{pmatrix} \cos a & \sin a \\ -\sin a & \cos a \end{pmatrix} = e^{-4\pi i\lambda a}.$$

Because SO(2,$\mathbb{R}$) is not simply connected, U may not exist. The necessary and sufficient condition for such an existence is $\lambda = \frac{k}{8}$. The orbit $\Omega^3_{\lambda,-}$ can be treated analogously and we gain the same result.

A corollary of polarization for all coadjoint orbits is the representation of SL(2,$\mathbb{R}$) on the Hilbert space of partial holomorphic, square- integrable sections of induced vector bundles. See e.g [11], [4]. We follow another approach by using the Fedosov deformation quantization.

4 Quantum coadjoint orbits of SL(2,$\mathbb{R}$)

We shall work from now on the fixed coadjoint orbit Ω^1_λ. Following the scheme from [5],[6], first we study the geometry of this orbit and introduce some canonical coordinates in it. It's well known that coadjoint orbits are isomorphism to the homogeneous spaces G/G_F which are symplectic manifolds. We introduce a coordinate system on this orbit and it turns out to be a Darboux one. Each $A \in \mathfrak{g}$ can be considered which is linear functional $\tilde{A}$ on coadjoint orbits, as a subset of $\mathfrak{g}^*$, $\tilde{A}(F) = \langle F, A\rangle$. It is also well known that this function is just the Hamilton function associated with the Hamiltonian vector field ξ_A generated by the following formula:

$$\xi_A(f)(x) = \frac{d}{dt} f(x \exp{(tA)}) \mid_{t=0}$$

The Kirillov form ω_F is defined by the formula

$$\omega_F(\xi_A, \xi_B) = \langle F, [A, B]\rangle$$

It is known as the flatness of the coadjoint orbits that the correspondence $A \mapsto \tilde{A}$ is a Lie homomorphism. Motivated by the constructed polarizations, Ω^1_λ can be parameterized as

$$\begin{cases} x = M(p,q) = p\cos(q) - \lambda\sin(q); \\ h = N(p,q) = p\sin(q) + \lambda\cos(q); \\ y = P(p,q) = p; \end{cases}$$

where M, N, P satisfy

$$M_q = -N; N_q = M; M_p = \cos(q); N_p = \sin(q); M.\cos(q) + N.\sin(q) = p; \tag{1}$$

Let us consider the mapping $\psi : (p,q) \mapsto 2M(p,q)X^* + 2N(p,q)H^* - 2P(p,q)Y^*$ Clearly, $(R^2, \Omega^1_\lambda, \psi)$ is an universal covering space.

Proposition 4.1 *ψ is a symplectomophism and Hamiltonian $\tilde{A}$ in coordinates (p, q) is of the form:*

$$\tilde{A}(F) = \langle F, A\rangle = (2a_1\cos q + 2b_1\sin q - 2c_1)p + (-2a_1\sin q + 2b_1\cos q)\lambda$$

Proof. Each F$\in \Omega^1_\lambda$ is of the form $2MX^* + 2NH^* - 2PY^*$. From this it folllows that the Hamiltonian function generated by invariant vector field ξ_A is

$$\tilde{A}(F) = \langle F, A\rangle = 2a_1M + 2b_1N - 2c_1P.$$

It implies therefore

$$\tilde{A}(F) = 2a_1(p\cos q - \lambda\sin q) + 2b_1(p\sin q + \lambda\cos q) - 2c_1p.$$

There are two symplectic structures on R^2: the first one is the Kirillov form induced by mapping ψ and the second is the canonical symplectic form $dp\wedge dq$. We prove their coincidence by observing that their values at invariant vector fields are equal.
Note that $\omega_F(\xi_A, \xi_B) = \langle F, [A,B]\rangle$
$= \langle 2MX^* + 2NH^* - 2PY^*, 2(b_1c_2 - b_2c_1)X + 2(c_1a_2 - c_2a_1)H - 2(a_1b_2 - a_2b_1)Y\rangle$
$= 4M(b_1c_2 - b_2c_1) + 4N(c_1a_2 - c_2a_1) + 4P(a_1b_2 - a_2b_1)$.
On the other hand,
$(dp\wedge dq)(\xi_A, \xi_B) = \{\tilde{A}, \tilde{B}\} = \frac{\partial\tilde{A}}{\partial p}\frac{\partial\tilde{B}}{\partial q} - \frac{\partial\tilde{A}}{\partial q}\frac{\partial\tilde{B}}{\partial p}$
$= 4(b_1c_2 - b_2c_1)N_q + 4(c_1a_2 - c_2a_1)(-M_q) + 4(a_1b_2 - a_2b_1)(M_pN_q - N_pM_q)$.
Then $\omega_F(\xi_A, \xi_B) = (dp\wedge dq)(\xi_A, \xi_B)$.
The theorem is therefore proven.

Remark 2 *The case of diffenrent orbits can be treated similarly with a small change. With the orbits $\Omega^3_{\lambda,+}$ and $\Omega^3_{\lambda,+}$, clearly we can□t find out a affine subspace of a half dimensions, thus there can□t exist a coordinate as above. However, a good approach is considering the complexification of orbits and we obtain $(C \times C, \Omega^1_\lambda, \psi)$ as universal complex symplectic covering space, only by replacing λ by $i\lambda$. The orbits Ω^2_+, Ω^2_+ can be viewed as a part of the case $\Omega^1_{\lambda,+}$ and $\Omega^3_{\lambda,+}$ when $\lambda = 0$.*

From now, because of the similarity, we'll deal mainly with the orbits Ω^1_λ. The other orbit can be treated with a simple modification.

Theorem 4.2 *With A, $B \in \mathfrak{g}$, the Moyal $\star$-product satisfies*

$$i\tilde{A} \star i\tilde{B} - i\tilde{B} \star i\tilde{A} = i\widetilde{[A,B]}.$$

Proof. Consider two arbitrary elements $A = a_1X + b_1H + c_1Y, B = a_2X + b_2H + c_2Y \in \mathfrak{g}$, By the Moyal-Weyl formula,

$$i\tilde{A} \star i\tilde{B} = \sum_{k=0}^{\infty} P^k(i\tilde{A}, i\tilde{B}).\frac{1}{k!}(\frac{1}{2i})^k,$$

with $P^k(i\tilde{A}, i\tilde{B}) = - \wedge^{i_1j_1} \wedge^{i_2j_2} \cdots \wedge^{i_kj_k} \partial_{i_1i_2\cdots i_k}\tilde{A}\partial_{j_1j_2\cdots j_k}\tilde{B}$.
It's easy, then, to see that:

$$P^0(i\tilde{A}, i\tilde{B}) = -\tilde{A}.\tilde{B},$$

$$P^1(i\tilde{A}, i\tilde{B}) = -(\wedge^{12}\frac{\partial\tilde{A}}{\partial p}.\frac{\partial\tilde{B}}{\partial q} + \wedge^{21}\frac{\partial\tilde{A}}{\partial q}.\frac{\partial\tilde{B}}{\partial p}) = -\{\tilde{A}, \tilde{B}\},$$

By proposition 4.1, $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ are linear functions of p. Thus for $k \geq 2$, we have

$$\begin{aligned} P^2(i\tilde{A}, i\tilde{B}) = -(&\wedge^{12}\wedge^{12}\tilde{A}_{pp}\tilde{B}_{qq} + \wedge^{21}\wedge^{21}\tilde{A}_{qq}\tilde{B}_{pp} \\ &+ \wedge^{12}\wedge^{21}\tilde{A}_{pq}\tilde{B}_{qp} + \wedge^{21}\wedge^{12}\tilde{A}_{qp}\tilde{B}_{pq} = -2\tilde{A}_{pq}\tilde{B}_{qp}. \end{aligned}$$

$P^2(i\tilde{A}, i\tilde{B}) = P^2(i\tilde{B}, i\tilde{A})$,. Therefore
$P^k(i\tilde{A}, i\tilde{B}) = - \wedge^{i_1j_1} \wedge^{i_2j_2} \cdots \wedge^{i_kj_k} \partial_{i_1i_2\cdots i_k}\tilde{A}\partial_{j_1j_2\cdots j_k}\tilde{B} = 0 \quad \forall k \geq 3$.
We get $i\tilde{A} \star i\tilde{B} - i\tilde{B} \star i\tilde{A} = (P^1(i\tilde{A}, i\tilde{B}) - P^1(i\tilde{B}, i\tilde{A}))\frac{1}{2i} + (P^2(i\tilde{A}, i\tilde{B}) - P^2(i\tilde{B}, i\tilde{A}))(\frac{1}{2i})^2.\frac{1}{2!} = i\{\tilde{A}, \tilde{B}\} = i\widetilde{[A,B]}$.
The theorem can be proved analogously on Ω^2_+, Ω^2_- and $\Omega^3_{\lambda,C}$.

Remark 3 *Consider the canonial representation of quantum algebra $(C^\infty(\Omega), \star)$ on itself which is a Fréchet Poisson algebra by left $\star$-multiplication defined by:*

$$l_f : C^\infty(\Omega) \to C^\infty(\Omega),$$

$$g \mapsto f \star g.$$

Then, $C^\infty(\Omega)$ can be viewed as a algebra of pseudo-diiffefential operators on $C^\infty(\Omega)$. On the other hand, the corespondence $A \mapsto \tilde{A}$ is a Lie algebra homomorphism. Thus, we can consider the repersentation of Lie algebra sl(2,$\mathbb{R}$) on dense subspace $L^2(\mathbb{R} \times [0, 2\pi), \frac{dpdq}{2\pi})^\infty$ of smooth functions by left $\star$-multiplication by $i\tilde{A}\star$. This representation is then extended to the whole space $L^2(\mathbb{R} \times SO(2, \mathbb{R}), \frac{dp.dq}{2\pi})$ by [1]. We study now the convergence of the formal power series. In order to do this, we look at the $\star$-product of $i\tilde{A}$ as the $\star$-product of symbols and define the differential operators corresponding to $i\tilde{A}$. It is easy to see that the resulting correspondence is a representation of $\mathfrak{g}$ by pseudo-differential operators.

On $\Omega_1^\lambda = \{2xX^* + 2hH^* - 2yY^* \mid x^2 + h^2 = y^2 + \lambda^2\}$ the following results hold:

Lemma 4.3
(1)$\mathcal{F}_p(\partial_p \mathcal{F}_p^{-1}(f)) = i^{-1}(x.f)$,
(2)$\mathcal{F}_p(p.\mathcal{F}_p^{-1} f) = i\partial_x(f)$,
(3)$P^k(\tilde{A}, \mathcal{F}_p^{-1}(f)) = k(-1)^{k-1}\tilde{A}_{q\cdots qp}\partial_{p\cdots pq}\mathcal{F}_p^{-1}(f) + (-1)^k \tilde{A}_{q\cdots q}\partial_{p\cdots}\mathcal{F}_p^{-1}(f)$.

Proof The first two formulas are well-known from the theory of Fourier transforms. If $k \geq 2$ then by theorem 4.1, it implies that $\tilde{A}$ is a linear function of p. Because one of the coordinates is linear, if two of indeces $i_1, i_{,2}, \cdots, i_k$ are equal to 1, then $\partial_{i_1, i_{,2}, \cdots, i_k}\tilde{A} = 0$. Therefore, for all $k \geq 2$:

$$P^k(\tilde{A}, \mathcal{F}_p^{-1}(f)) = \wedge^{i_1, j_1} \wedge^{i_2 j_2} \cdots \wedge^{i_k j_k} \tilde{A}_{i_1 \cdots i_n}\partial_{j_1 \cdots j_n}\mathcal{F}_p^{-1}(f)$$
$$= \sum \wedge^{21} \cdots \wedge^{12} \cdots \wedge^{21} \tilde{A}_{q\cdots p \cdots q}\partial_{p\cdots q\cdots p}\mathcal{F}_p^{-1}(f) + \wedge^{21} \cdots \wedge^{21} \tilde{A}_{q\cdots q}\partial_{p\cdots p}\mathcal{F}_p^{-1}(f).$$

It is clear that $\wedge^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, So we get $\wedge^{12} = 1, \wedge^{21} = -1$. It deduces $P^k(\tilde{A}, \mathcal{F}_p^{-1}(f)) = k(-1)^{k-1}\tilde{A}_{q\cdots p\cdots q}\partial_{p\cdots q\cdots p}\mathcal{F}_p^{-1}(f) + (-1)^{k-1}\tilde{A}_{q\cdots q}\partial_{p\cdots p}\mathcal{F}_p^{-1}(f)$. With k=0 hay k=1, clearly, the lemma is also satified. Apply this lemma, we have the followimg theorem:

Theorem 4.4 *.If we set s=*$q - \frac{x}{2}$*, for each compactly supported smooth function f*$\in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ *we have*
$\hat{l}_A = \mathcal{F}_p \circ l_A \circ \mathcal{F}_p^{-1} = (a_1 \cos s + b_1 \sin s - c_1)\partial_s + (-a_1 \sin s + b_1 \cos s)(2\lambda i + 1)$

Proof
By Moyal formula, we have:

$$\hat{l}_A(f) = \mathcal{F}_p \circ l_A \circ \mathcal{F}_p^{-1}(f) = i\mathcal{F}_p(\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{2i})^k.\frac{1}{k!}P^k(\tilde{A}, \mathcal{F}_p^{-1}(f)),$$

Apply the above lemma, it implies

$$\hat{l}_A(f) = i\mathcal{F}_p\Big(\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{2i})^k\frac{1}{k!}.(-1)^{k-1}.k.\tilde{A}_{q\cdots p\cdots q}\partial_{p\cdots q\cdots p}\mathcal{F}_p^{-1}(f)$$
$$+\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{2i})^k\frac{1}{k!}.(-1)^k.\tilde{A}_{q\cdots q}\partial_{p\cdots p}\mathcal{F}_p^{-1}(f)\Big) = I + J,$$

Note the fact that $\tilde{A}$ is a linear function of p. Therefore $\tilde{A}_{q\cdots p\cdots q}$ is a function of only variable p.

$$\begin{aligned} I &= i\mathcal{F}_p(\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{2i})^k\frac{1}{k!}.(-1)^{k-1}.k.\tilde{A}_{q\cdots p\cdots q}\partial_{p\cdots q\cdots p}\mathcal{F}_p^{-1}(f)) \qquad (2)\\ &= i\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{2i})^k\frac{1}{k!}.(-1)^{k-1}.k.\mathcal{F}_p(\tilde{A}_{q\cdots p\cdots q}\partial_{p\cdots q\cdots p}\mathcal{F}_p^{-1}(f))\\ &= i\sum_{i=1}^{\infty}(\frac{1}{2i})^k\frac{1}{(k-1)!}.(-1)^{k-1}.(ix)^{k-1}\tilde{A}_{q\cdots p\cdots q}\partial_p f\\ &= \frac{1}{2}\partial_p\tilde{A}(q - \frac{x}{2})\partial_q(f). \end{aligned}$$

Set $\tilde{A}$ =p.M+N, where M, N depend only q, by exact computations, we have

$$\begin{aligned}
J &= i\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{2i})^k\frac{1}{k!}.(-1)^k.\mathcal{F}_p((p.M_{q\cdots q}+N_{q\cdots q}).\mathcal{F}_p^{-1}(f))\\
&= i\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{i}{2})^k\frac{1}{k!}((i.\partial_x M^{(k)}+N^{(k)}).(ix)^k.f)\\
&= i\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{i}{2})^k\frac{1}{k!}.i\partial_x.M^{(k)}(q).(ix)^k.f + i\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{i}{2})^k\frac{1}{k!}N^{(k)}(q)(ix)^k.f\\
&= -\sum_{k=0}^{\infty}(-\frac{x}{2})^k.\frac{M^{(k)}}{k!}\partial_x f - \sum_{k=0}^{\infty}(-\frac{1}{2})k.\frac{M^{(k)}}{k!}.k.x^{k-1}\partial_x f + i\sum_{k=0}^{\infty}(-\frac{x}{2})^k.\frac{N^{(k)}}{k!}\partial_x f\\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-\frac{x}{2})^k.\frac{M^{(k+1)}(q)}{k!}.f - M(q-\frac{x}{2}).\partial_x f + iN(q-\frac{x}{2}).f\\
&= \frac{1}{2}.M'(q-\frac{x}{2}).f - M(q-\frac{x}{2}).\partial_x f + iN(q-\frac{x}{2}).f.
\end{aligned}$$

Finally, we have the explicited formula of the corresponding quantized operator:

$$\begin{aligned}
\hat{l}_A(f) &= \frac{1}{2}\partial_p\tilde{A}(q-\frac{x}{2})\partial_q(f) + \frac{1}{2}.M'(q-\frac{x}{2}).f + -M(q-\frac{x}{2}).\partial_x f + iN(q-\frac{x}{2}).f\\
&= M(q-\frac{x}{2})(\frac{1}{2}\partial_q - \partial_x)f + \frac{1}{2}.M'(q-\frac{x}{2}).f + iN(q-\frac{x}{2}).f.
\end{aligned}$$

Put $q-\frac{x}{2}=s; q+\frac{x}{2}=t$, it follows $\partial_s=\partial_q-2\partial_x$. Recall that
$\tilde{A}(F) = 2a_1(p\cos q - \lambda\sin q) + 2b_1(p\sin q + \lambda\cos q) - 2c_1 p$. $M(q) = 2a_1(p\cos q - \lambda\sin q) + 2b_1(p\sin q + \lambda\cos q) - 2c_1$,
$N(q) = -2\lambda a_1\sin q + 2\lambda b_1\cos q$,
$M'(q) = \frac{N(q)}{\lambda}$.
Therefore,
$\hat{l}_A(f) = \frac{1}{2}M(s).\partial_s f + (\frac{N(s)}{2.\lambda} + iNs)f$
$\quad = (a_1\cos s + b_1\sin s - c_1)\partial_s + (-a_1\sin s + b_1\cos s)(2\lambda i + 1)$.
The theorem is proved.
By analogy, we get the same results for all two dimesion coadjoint orbits.

Note that, following the virtual of the polarizations chosen for orbits, we obtain the representation of sl(2,$\mathbb{R}$) on L^2-space on SO(2,$\mathbb{R}$).

5 Relation with unitary dual of SL(2,$\mathbb{R}$)

We recall some basic results of contructing unitary dual of SL$(2,\mathbb{R})$ by the classical methods, see e.g. [11].

Consider the subgroup $H = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$ associated with one-dimension representation $\rho_s \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} = a^{s+1}$. Let ϕ_s be the induced representation of ρ_s on to SL(2,$\mathbb{R}$). Clearly, the space of induced vector bundle is isomorphic to the space H_s of function on G satisfies $f(hg) = \rho_s(h).f(g)$ with restriction on K lying on $L^2(K)$, also isomorphic to $L^2(K)$ where $K = SO(2,\mathbb{R}) \simeq G/H$

Let T be the representation of G on $C^\infty(G)$ defined by $T(g_1)f(g) = f(gg_1)$. The infinitesimal representation of T determined by $L(A)f(g_0) = \frac{\partial}{\partial t}T(e^{tA})f(g_0)\mid_{t=0}$. By the Iwasawa decomposition, each g of SL(2,$\mathbb{R}$) can be viewed as the product $g = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{y}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{y}} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

So a function on G can be viewed as function of x, y, θ. We obtain the explicited fomulars of L as:

$L_X = (s+1)\sin 2\theta - \cos 2\theta \partial_\theta$,

$L_H = (s+1)\cos 2\theta + \sin 2\theta \partial_\theta$,

$L_Y = \frac{\partial}{\partial \theta}$,

From this, by considering the algebraic vector subspaces of $L^2(K)$, it can imply all the irreducible unitary representations of $SL(2,\mathbb{R})$ of discrete series, principal series, the complementary series as in [11]. In order to prove the equivalence of two approachs, it is enough to show that the corresponding infinitesimal representations of Lie algebra sl(2,$\mathbb{R}$) are the same.

Theorem 5.1 *The representations $\hat{l}$ obtained from deformation quantization are coincided with the infinitesimal representation L of Lie algebra corresponding to discrete series, principal series, the complementary series of SL(2,$\mathbb{R}$).*

Proof. We know that $f(x,y,\theta) = y^{\frac{s+1}{2}}.f(\theta)$. So, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{s+1}{2y}.f$, $\frac{\partial f}{\partial \theta} = 0$. Thus $2y\partial_y = s+1$, $\partial_x = 0$. We obtain the explicited formual of representation: for $A = a_1X + b_1H + c_1Y$, $L_A = (-a_1\cos(2\theta) + b_1 \sin 2\theta + c_1)\partial_\theta + (s+1)(a_1 \sin 2\theta + b_1 \cos 2\theta)$.

Setting $s = 2\lambda$ và $-2\theta = s$, then

$L_A = (a_1 \cos s + b_1 \sin s - c_1)\partial_s + (-a_1 \sin s + b_1 \cos s)(2\lambda + 1) = \hat{l}_A$.

The proof is therefore achieved.

Remark 4 *We demonstrated how irreducible unitary representations of SL(2,$\mathbb{R}$) could be obtained from deformation quantization. It is reasonable to refer to the algebras of functions on coadjoint orbits with corresponding $\star$-product as a quantum ones, namely* **quantum elliptic hyperboloids** $(C^\infty(\Omega^1_\lambda), \star_\hbar)$, **quantum elliptic cones** $(C^\infty(\Omega^2_\pm), \star_\hbar)$, **two folds quantum hyperboloids** $(C^\infty(\Omega^3_\lambda), \star_\hbar)$ *etc.*

Acknowledgments. I am very much indebted to his teacher, Professor Do Ngoc Diep for his guidance and help in this paper. I would like to thank Professor Nguyen Viet Dung for his generous help in literature. I also give the thank to Professor Pham Ky Anh and Professor Nguyen Huu Viet Hung for reading this paper and giving many valuable comments.

References

[1] Arnal, D. and Cortet, J.C: $\star$-product and representation of nilpotent Lie groups, *J. Geom. Phys*, **2**, No2, 86-116.

[2] Arnal, D. and Cortet, J. C: Representations $\star$ des groupes exponentiels, *J Funct. Anal*, **92**, 103-135, 1990.

[3] Arnold, V. I: *Mathematical methods of Classical Mechanics*, Springer Verlag, Berlin-New York-Heidelberg, 201-231, 1984.

[4] Do Ngoc Diep: *Methods of Noncommutative Geometry for Group $C^\star$-Algebra*, Chapman and Hall /CRC Press, Research Notes in mathematics Series, #416 Boca Raton-London-New York- Washington. D. C., 1999.

[5] Do Ngoc Diep and Nguyen Viet Hai: Quantum Half-planes via Deformation Quantization, *Beitrage zur Algebra und Geometrie (Contribution to Algebra and Geometry)*, (2001) **No 2**, 407-417.

[6] Do Ngoc Diep and Nguyen Viet Hai: Quantum coadjoint orbits of affine transformations of complex line, *Beitrage zur Algebra und Geometrie (Contribution to Algebra and Geometry)*, **No 2**, 419-430, 2001.

[7] Fedosov: *Deformation quantization and Index theory*, Akademie der Vissenschaften Verlag GmbH, Berlin 1996.

[8] Gelfand, I. M and Naimark, M. A: Unitary representation of the group of affine transformations of the straight line, *Dolk Akad Nauk SSSR*, **55**, (1947) No7, 571-574.

[9] Nguyen Viet Hai: Deformation quantization and unitary representation of MD and MD_4 groups, Ph.D thesis, Institute of Mathematics, Vietnam, 2001.

[10] Kirillov, A. A.: *Element of theory of representation*, Springer-Verlag, 1975.

[11] Lang, S.: $SL_2(R)$, Addison-Wesley publishing company, 1975.