

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

PHẠM THỊ HẢI

**MỘT SỐ VẤN ĐỀ VỀ LÝ THUYẾT XẤP XỈ ĐỀU
TỐT NHẤT VÀ ỨNG DỤNG TRONG
TOÁN SƠ CẤP**

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2012

Mục lục

Mở đầu	2
Lời cam đoan	4
1 Một số kiến thức cơ bản	5
1.1 Không gian metric	5
1.2 Không gian Banach	6
1.3 Không gian Hilbert	7
2 Lý thuyết xấp xỉ đều tốt nhất	9
2.1 Đặt bài toán	9
2.2 Xấp xỉ tốt nhất trong không gian Banach.	10
2.3 Xấp xỉ đều tốt nhất trong không gian $C_{[a,b]}$	11
2.4 Một số trường hợp đặc biệt	17
2.4.1 Xấp xỉ bằng đa thức bậc không	17
2.4.2 Xấp xỉ bằng đa thức bậc nhất	18
3 Một số ứng dụng của lý thuyết xấp xỉ đều vào giải một lớp các bài toán sơ cấp	20
3.1 Lời giải tổng quát	20
3.1.1 Ứng dụng xấp xỉ bằng đa thức bậc không cho lớp các bài toán.	20
3.1.2 Ứng dụng xấp xỉ bằng đa thức bậc nhất cho lớp các bài toán dạng:	23
3.2 Lớp các bài toán cụ thể	26
Kết luận	64
Tài liệu tham khảo	65

Mở đầu

Chúng ta đã biết *Lý thuyết xấp xỉ đều tốt nhất* là một nhánh của lý thuyết xấp xỉ hàm, có vai trò đặc biệt quan trọng trong toán lý thuyết cũng như trong các toán ứng dụng. Đặc biệt, nó được dùng để tìm đa thức có "*độ lệch*" nhỏ nhất so với hàm số cho trước trên một đoạn xác định. Từ việc nghiên cứu kỹ lý thuyết xấp xỉ đều tốt nhất chúng ta có thể giải quyết được một số dạng bài toán tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất. Và dưới sự hướng dẫn của TS. Nguyễn Văn Khải, tác giả đã nghiên cứu đề tài "*Một số vấn đề về lý thuyết xấp xỉ đều tốt nhất và ứng dụng trong toán sơ cấp*".

Nội dung của luận văn này là trình bày về lý thuyết xấp xỉ đều tốt nhất từ đó xây dựng lên các bài tập toán sơ cấp áp dụng phần lý thuyết xấp xỉ đều tốt nhất vào giải bài toán. Luận văn gồm 3 chương:

Chương 1: Kiến thức chuẩn bị. Chương này trình bày một số định nghĩa cơ bản về không gian Metric, không gian Banach, không gian Hilbert.

Chương 2: Lý thuyết xấp xỉ đều tốt nhất. Chương này giới thiệu một số định nghĩa, định lý về lý thuyết xấp xỉ đều tốt nhất, các trường hợp đặc biệt xấp xỉ đa thức bằng đa thức bậc không, đa thức bậc nhất.

Chương 3: Một số ứng dụng của lý thuyết xấp xỉ đều tốt nhất vào giải một số bài toán sơ cấp. Phần đầu của Chương 3 trình bày về lời giải tổng quát của một lớp các bài toán sơ cấp, thông qua lời giải dựa trên lý thuyết xấp xỉ đều tốt nhất để hình thành lên lời giải sơ cấp. Phần tiếp theo áp dụng lời giải tổng quát vào giải một số bài tập sơ cấp cụ thể. Và từ đó đưa ra các dạng bài tập có đề bài tương tự.

Kết quả cơ bản của luận văn được tham khảo trong cuốn *Numerical methods* của Bakhvalov N.S.

Luận văn này được hoàn thành tại trường Đại Học Khoa Học - Đại Học Thái Nguyên. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn trân trọng tới thầy TS. Nguyễn Văn Khải, thầy đã trực tiếp hướng dẫn tận tình và động viên tác giả trong suốt thời gian nghiên cứu và viết luận văn vừa qua.

Trong suốt quá trình học tập và làm luận văn, thông qua các bài giảng, tác giả luôn nhận được sự quan tâm giúp đỡ của các giáo sư công tác tại Viện Toán học, Viện Công nghệ thông tin thuộc Viện Khoa học và Công nghệ Việt Nam, các thầy cô trong Đại học Thái Nguyên. Từ đáy lòng mình, tác giả xin bày tỏ lòng cảm ơn tới các thầy cô.

Tác giả xin trân trọng cảm ơn Ban Giám hiệu, phòng Đào tạo, khoa Toán - Tin của Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên đã tạo điều kiện giúp đỡ tác giả trong suốt quá trình học tập tại nhà trường và hoàn thành luận văn này trong thời gian qua.

Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới gia đình và người thân, các anh chị trong lớp cao học Toán K4C đã quan tâm, tạo điều kiện, động viên cổ vũ tác giả trong suốt quá trình học cao học cũng như viết luận văn để đạt kết quả tốt nhất.

Mặc dù có nhiều cố gắng nhưng luận văn khó tránh khỏi những thiếu sót và hạn chế. Tác giả mong nhận được những ý kiến đóng góp của các thầy cô và bạn đọc để luận văn được hoàn thiện hơn.

Và xin trân trọng cảm ơn!

Quảng Ninh, ngày 10 tháng 10 năm 2012.

Tác giả

Phạm Thị Hải

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của tôi. Các số liệu và kết quả nghiên cứu trong luận văn hoàn toàn trung thực và chưa có ai công bố trong một công trình nào khác.

Tác giả

Phạm Thị Hải

Chương 1

Một số kiến thức cơ bản

Trong chương này, ta sẽ trình bày những kiến thức cơ bản về không gian metric, không gian Banach, không gian Hilbert. Các kiến thức này được lấy từ các tài liệu [1, 5, 8].

Trong chương này, các không gian tuyến tính đều được xét trên trường số thực $\mathbb{R}$.

1.1 Không gian metric

Định nghĩa 1.1. Tập X khác rỗng được gọi là không gian metric nếu với mỗi cặp phần tử x, y đều xác định theo một quy tắc nào đó, một số thực $\rho(x, y)$ gọi là " khoảng cách giữa x và y " và thỏa mãn các tiên đề sau:

- 1) $\rho(x, y) > 0$ nếu $x \neq y$;
 $\rho(x, y) = 0$ nếu $x = y$.
- 2) $\rho(x, y) = \rho(y, x), \quad \forall x, y \in X$.
- 3) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z), \quad \forall x, y, z \in X$.

Hàm số $\rho(x, y)$ gọi là metric của không gian X

Ví dụ 1.1. Trong $\mathbb{R}^n$, với mọi $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ và

$y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ thì $\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$, là metric trên $\mathbb{R}^n$.

Định nghĩa 1.2. Cho không gian metric X . Dãy $\{x_n\}$ được là dãy Cauchy (hay dãy cơ bản) nếu $\lim_{n, m \rightarrow \infty} \rho(x_n, x_m) = 0$ tức là: $\forall \varepsilon > 0$ cho trước, $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$, sao cho $\forall n \geq n_0, \forall m \geq n_0$, ta có $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Dĩ nhiên một dãy hội tụ bao giờ cũng là dãy Cauchy (dãy cơ bản), vì nếu $x_n \rightarrow x$ thì theo bất đẳng thức tam giác, ta có:

$$\rho(x_n, x_m) \leq \rho(x_n, x) + \rho(x, x_m) \rightarrow 0, (n, m \rightarrow \infty).$$

1.2 Không gian Banach

Định nghĩa 1.3. (*Không gian tuyến tính*)

Một tập X được gọi là *một không gian tuyến tính* nếu ứng với mỗi cặp phần tử x, y của X ta có, theo một quy tắc nào đó, một phần tử của X , gọi là *tổng của x với y* được kí hiệu là $x + y$; ứng với mỗi phần tử x của X và một số thực α ta có, theo một quy tắc nào đó, một phần tử của X , gọi là *tích của x với α* được kí hiệu là αx . Các quy tắc nói trên thỏa mãn 8 tiên đề sau:

- 1) $x + y = y + x$ (tính chất giao hoán của phép cộng).
- 2) $(x + y) + z = x + (y + z)$ (tính chất kết hợp của phép cộng).
- 3) $\exists$ phần tử $0 : x + 0 = x, \forall x \in X$.
- 4) Với mỗi $x \in X$ ta có một phần tử $-x \in X : x + (-x) = 0$.
- 5) $1.x = x$.
- 6) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$, với α, β là những số bất kì.
- 7) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$.
- 8) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

Trên đây là định nghĩa không gian tuyến tính thực. Nếu trong định nghĩa ta thay các số thực bằng các số phức thì ta có không gian tuyến tính phức.

Không gian tuyến tính cũng thường gọi là không gian vectơ và các phần tử của nó cũng gọi là các vectơ.

Định nghĩa 1.4. (*Không gian tuyến tính định chuẩn*)

Một không gian định chuẩn là một không gian tuyến tính X , trong đó ứng với mỗi phần tử $x \in X$ ta có một số $\|x\|$ gọi là chuẩn của nó sao cho các điều kiện sau đây thỏa mãn, với mọi $x, y \in X$ và mọi số thực α .

- 1) $\|x\| > 0$ nếu $x \neq 0$; $\|x\| = 0$ nếu $x = 0$.
- 2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ (tính thuần nhất của chuẩn).
- 3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (bất đẳng thức tam giác).

Ví dụ 1.2. Không gian metric $\mathbb{R}^n$ là không gian tuyến tính định chuẩn với chuẩn tương ứng là

$$\mathbb{R}^n : \|x\| = \sqrt{\sum_{i=0}^n \xi_i^2}$$

Định nghĩa 1.5. (*Không gian Banach*)

Cho không gian tuyến tính định chuẩn X , $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ được xác định: $d(x, y) = \|x - y\|$ thì $d(x, y)$ gọi là hàm khoảng cách, ta nói khoảng cách này là khoảng cách cảm sinh bởi chuẩn.

Không gian Banach là không gian tuyến tính định chuẩn đầy đủ.

Ví dụ 1.3. Có thể chứng minh rằng không gian

$$C_{[a,b]} = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ là liên tục}\}$$

với chuẩn Chebyshev: $\|f\| = \max_{t \in [a,b]} |f(t)|$ là một không gian Banach.

Định nghĩa 1.6. Không gian Banach X được gọi là lồi thực sự nếu:

$$\forall x, y \neq 0 \quad \|x + y\| = \|x\| + \|y\| \Rightarrow y = \lambda x (\lambda > 0)$$

Ví dụ 1.4. Không gian $C_{[a,b]}$ không lồi thực sự.

Vì với $x(t) \equiv 1$; $y(t) \equiv \frac{t-a}{b-a}$, ta có: $\|x + y\| = \|x\| + \|y\| = 2$ nhưng $y \neq \lambda x$.

1.3 Không gian Hilbert

Trong phần này ta sẽ xét X là một không gian Hilbert thực.

Định nghĩa 1.7. (*Không gian tiền Hilbert*)

Một không gian tuyến tính thực X được gọi là không gian tiền Hilbert nếu trong đó có xác định một hàm hai biến (x, y) gọi là tích vô hướng của hai vectơ (x, y) với các tính chất sau:

- 1) $(x, y) = (y, x)$
- 2) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$
- 3) $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$ với α là số thực.
- 4) $(x, x) > 0$ nếu $x \neq 0$, $(x, x) = 0$ nếu $x = 0$

Và thỏa mãn hệ thức 5) $(x, x) = \|x\|^2$ tức là $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ xác định một chuẩn trong không gian X , nói cách khác không gian tiền Hilbert như trên là một không gian định chuẩn.

Ví dụ 1.5. Không gian $C_{[a,b]}$ gồm tất cả các hàm liên tục trên đoạn $[a, b]$ với các phép toán thông thường và với tích vô hướng cho bởi:

$$(x, y) = \int_a^b x(t)y(t)dt \quad \text{là một không gian tiền Hilbert.}$$

Định nghĩa 1.8. Không gian tiền Hilbert đầy đủ được gọi là *không gian Hilbert*.

Ví dụ 1.6. Không gian $L^2_{[a,b]}$ với chuẩn $\|x\|_2 = \left(\int_a^b |x(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$ là một không gian Hilbert.

Nhận xét 1.1. i) Không gian tiền Hilbert là không gian định chuẩn với chuẩn $\|x\| = (x, x)^{\frac{1}{2}}$.

ii) Không gian tiền Hilbert luôn có bất đẳng thức Schwars:

$$|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

iii) Không gian tiền Hilbert luôn thỏa mãn điều kiện bình hành:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

iv) Tích vô hướng (x, y) là một hàm số liên tục đối với biến x và y .

Ví dụ 1.7. Mọi không gian Hilbert là lồi thực sự.

Thật vậy, ta có $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$.

Bình phương hai vế của đẳng thức: $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2$.

Mà

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle \\ &= \langle x + y, x \rangle + \langle x + y, y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \end{aligned}$$

Suy ra $\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\|$.

Từ bất đẳng thức Cauchy- Bunhiacovski- Schwartz, suy ra

$y = \lambda x, (\lambda > 0)$.

Chương 2

Lý thuyết xấp xỉ đều tốt nhất

Chương này trình bày những kết quả quan trọng về lý thuyết xấp xỉ đều tốt nhất như sự tồn tại của xấp xỉ tốt nhất trong không gian Banach, xấp xỉ đều tốt nhất trong không gian $C_{[a,b]}$ và một số trường hợp đặc biệt xấp xỉ bằng đa thức bậc không hay xấp xỉ bằng đa thức bậc nhất. Các kết quả của chương này được tham khảo trong các tài liệu [1, 2, 7,10].

2.1 Đặt bài toán

Cho hàm số $f \in C_{[a,b]}$. Gọi P_n là tập hợp các đa thức có bậc không quá n trên $[a, b]$. Ta phải tìm đa thức $P \in P_n$ có "độ lệch" nhỏ nhất so với f trên $[a, b]$ tức là:

$$\max_{x \in [a,b]} |f(x) - P(x)| = \min_{Q \in P_n} \max_{x \in [a,b]} |f(x) - Q(x)| \quad (2.1)$$

Nếu trong $C_{[a,b]}$ ta xét chuẩn $\|\varphi\| = \max_{t \in [a,b]} |\varphi(t)|$, ($\varphi \in C_{[a,b]}$) thì bài toán (2.1) có dạng:

Tìm $P \in P_n$ sao cho

$$\|f - P\| = E_n(f) := \min_{Q \in P_n} \|f - Q\| \quad (2.2)$$

Phần tử đạt cực tiểu kí hiệu là $P = \arg \min_{Q \in P_n} \|f - Q\|$

2.2 Xấp xỉ tốt nhất trong không gian Banach.

Cho X là không gian Banach, $X_0 \subset X$ là không gian con hữu hạn chiều và $x \in X$ là một phần tử cố định cho trước. Cần tìm $x_0 \in X_0$ sao cho:

$$\|x - x_0\| = d(x, X_0) := \inf_{v \in X_0} \|x - v\| \quad (2.3)$$

Nếu phần tử x_0 tồn tại thì được gọi là xấp xỉ tốt nhất của x trong X_0

Định lý 2.1. Bài toán xấp xỉ (2.3) luôn có nghiệm.

Chứng minh. Đặt $\Omega = \{v \in X_0 : \|v\| \leq 2\|x\|\}$.

Dễ thấy nếu $v \in X_0 \setminus \Omega$ thì $\|v\| > 2\|x\| \Rightarrow \|v\| - \|x\| > \|x\|$

Khi đó $\|v - x\| \geq \|v\| - \|x\| > \|x\| = \|x - \theta\|$

Do đó v không xấp xỉ x bằng phần tử $\theta \in \Omega$. Như vậy ta có thể giới hạn việc tìm xấp xỉ tốt nhất trong Ω .

Ta có Ω là tập đóng, giới nội trong không gian hữu hạn chiều X_0 nên Ω là tập compact.

Xét hàm $\Phi(v) := \|x - v\|$ ta có

$$|\Phi(v) - \Phi(v')| = \left| \|x - v\| - \|x - v'\| \right| \leq \|x - v - x + v'\| = \|v - v'\|, \quad (v, v' \in \Omega)$$

Từ đây ta suy ra Φ là hàm liên tục trên compact, do đó Φ đạt cực tiểu

$$\exists x_0 \in \Omega : \Phi(x_0) = \min_{v \in \Omega} \Phi(v) = \min_{v \in X_0} \|x - v\|. \quad \square$$

Định lý 2.2. Trong không gian Banach lồi thực sự, xấp xỉ đều tốt nhất tồn tại và duy nhất.

Chứng minh. Sự tồn tại tốt nhất suy ra từ định lý 2.1.

Ta đi chứng minh tính duy nhất:

Giả sử $x_1, x_2 \in X_0$ là hai xấp xỉ tốt nhất của $x \in X$, tức là :

$$\|x - x_i\| = d := d(x, X_0), \quad (i = 1, 2)$$

Xét hai trường hợp:

a. $d = 0 \Rightarrow x_i \equiv x, \quad (i = 1, 2) \Rightarrow x_2 \equiv x_1.$

b. $d > 0$ Ta có $d \leq \left\| x - \frac{x_1 + x_2}{2} \right\| \leq \frac{1}{2} \|x - x_1\| + \frac{1}{2} \|x - x_2\| = d$

Như vậy

$$\left\| \frac{x - x_1}{2} + \frac{x - x_2}{2} \right\| = \left\| \frac{x - x_1}{2} \right\| + \left\| \frac{x - x_2}{2} \right\|$$

Do X lồi thực sự nên

$$\frac{x - x_1}{2} = \lambda \left(\frac{x - x_2}{2} \right), \quad (\lambda > 0)$$

Từ đây suy ra

$$d = \|x - x_1\| = \lambda \|x - x_2\| = \lambda d$$

Vậy $\lambda = 1$. Do đó $\frac{x - x_2}{2} = \frac{x - x_1}{2}$ hay $x_2 \equiv x_1$. □

2.3 Xấp xỉ đều tốt nhất trong không gian $C_{[a,b]}$

Trong phần này ta xét $X = C_{[a,b]}$, $X_0 = P_n$. Do mỗi đa thức $Q \in P_n : Q(x) = \sum_{i=0}^n c_i x^i$ đặc trưng bởi vectơ các hệ số $c(c_0, c_1, \dots, c_n) \in R^{(n+1)}$ nên X_0 là không gian con của X và $\dim X_0 = n + 1$.

Theo định lý 2.1, bài toán xấp xỉ đều (2.2) luôn có nghiệm. Tuy nhiên định lý 2.1 không cho ta tiêu chuẩn kiểm tra xem liệu một đa thức $P \in P_n$ có phải là đa thức xấp xỉ đều tốt nhất hay không.

Định lý 2.3. (Valleé- Poussin). Giả sử $f \in C_{[a,b]}$ và $Q \in P_n$. Nếu tồn tại $n + 2$ điểm phân biệt $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1} \leq b$ sao cho $f(x_i) - Q(x_i)$ lần lượt đổi dấu:

$$\text{sign}\{(-1)^i [f(x_i) - Q(x_i)]\} = \text{const}, \quad (i = \overline{0, n+1})$$

thì

$$E_n(f) \geq \mu := \min_{i=\overline{0, n+1}} |f(x_i) - Q(x_i)|$$

Chứng minh. a. $\mu = 0$ khi đó $E_n(f) \geq 0 = \mu$

b. $\mu > 0$. Chứng minh bằng phản chứng.

Giả sử $E_n(f) < \mu$, $P \in P_n$ là đa thức xấp xỉ đều tốt nhất của f trên $[a, b]$. Khi đó $\|f - P\| = E_n(f) < \mu$.

Suy ra $|P(x_i) - f(x_i)| \leq \|P - f\| < \mu \leq |Q(x_i) - f(x_i)|$.

Do đó

$$\begin{aligned} \text{sign}[Q(x_i) - P(x_i)] &= \text{sign}\{[Q(x_i) - f(x_i)] + [f(x_i) - P(x_i)]\} \\ &= \text{sign}[Q(x_i) - f(x_i)], \quad i = \overline{0, n+1} \end{aligned}$$

Vậy đa thức $Q - P \in P_n$ đổi dấu $n + 2$ lần nên có ít nhất $n + 1$ nghiệm. Suy ra $Q \equiv P$.

Ta có $\mu \geq \|Q - f\| \geq \min_i |Q(x_i) - f(x_i)| = \mu$.

Mâu thuẫn nhận được suy ra $E_n(f) \geq \mu$. $\square$

Chú ý: Định lý Valleé- Poussin là một trong số ít định lý có giả thuyết định tính và kết luận định lượng.

Định lý 2.4. (Chebyshev). Điều kiện cần và đủ để $P \in P_n$ là đa thức xấp xỉ đều tốt nhất của $f \in C_{[a,b]}$ là tồn tại $(n + 2)$ điểm luân phiên Chebyshev $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1} \leq b$ sao cho

$$f(x_i) - P(x_i) = \alpha(-1)^i \|f - P\|, \quad (i = \overline{0, n+1}) \quad (2.4)$$

trong đó $\alpha = \pm 1$.

Chứng minh. Điều kiện đủ: Đặt $L := \|f - P\|$, từ (2.4) ta có $L = \mu$.

Theo định lý 2.3, $\mu \leq E_n(f) \leq \|f - P\| = L$

Vậy $E_n(f) = L = \|f - P\|$ hay P là đa thức xấp xỉ đều tốt nhất của f trên $[a, b]$.

Điều kiện cần: Giả sử $Q_n(x)$ là đa thức xấp xỉ đều tốt nhất của f trên $[a, b]$, ta phải chứng minh tồn tại $n + 2$ điểm $a \leq y_1 < \dots < y_{n+2} \leq b$ sao cho:

$$f(y_i) - Q_n(y_i) = \alpha(-1)^i \|f - Q_n\|.$$

Đặt $L = \|f - Q_n\|$, ký hiệu $y_1 = \inf \{x \in [a, b] : |f(x) - Q_n(x)| = L\}$.

Từ định nghĩa của L và sự liên tục của $[f(x) - Q_n(x)]$ suy ra sự tồn tại của y_1 .

Vậy $|f(y_1) - Q_n(y_1)| = L$.

Ta coi $f(y_1) - Q_n(y_1) = +L$.

Ký hiệu : $y_2 = \inf \{x \in (y_1, b] : f(x) - Q_n(x) = -L\}$.

$$y_{k+1} = \inf \left\{ x \in (y_k, b] : f(x) - Q_n(x) = (-1)^k L \right\}.$$

Vậy : $f(y_{k+1}) - Q_n(y_{k+1}) = (-1)^k L$.

Tiếp tục quá trình này cho đến khi có $y_m = b$ hoặc đến y_m thỏa mãn điều kiện không lấy được y_m .

Nếu $m \geq n + 2$ thì ta có điều phải chứng minh.

Giả sử $m < n + 2$. Vì $(f(x) - Q_n(x))$ liên tục trên $[a, b]$ nên với mỗi k ($2 \leq k \leq m$) có thể lấy Z_{k-1} sao cho $|f(x) - Q_n(x)|$, với $Z_{k-1} \leq x < y_k$.

Đặt $Z_0 = a, Z_m = b$. Theo phép xây dựng trên thì mỗi $[Z_{i-1}, Z_i]$, $i = \overline{1, \dots, m}$ có điểm y_i sao cho $f(y_i) - Q_n(y_i) = (-1)^{i-1}L$ và không có điểm x để $[f(y_i) - Q_n(y_i)] = (-1)^i L$.

Đặt $v(x) = \prod_{j=1}^{m-1} (Z_j - x)$, $Q_n^d(x) = Q_n(x) + dv(x)$ ($d > 0$).

Xét hàm số: $f(x) - Q_n^d(x) = f(x) - Q_n - dv(x)$ trên đoạn $[Z_0, Z_1]$.

Trên $[Z_0, Z_1]$ thì $v(x) > 0$ do đó $f(x) - Q_n^d(x) \leq L - dv(x) < L$.

Mặt khác $|f(Z_1) - Q_n^d(Z_1)| = |f(Z_1) - Q_n(Z_1)| < L$.

Từ đó suy ra $f(x) - Q_n^d(x) < L, \forall x \in [Z_0, Z_1]$.

Đồng thời ta lại có: $f(x) - Q_n(x) > -L, \forall x \in [Z_0, Z_1]$.

Như vậy tồn tại d_1 dương đủ nhỏ để $\forall d \in (0, d_1)$ thì ta có:

$|f(x) - Q_n^d(x)| < L, \quad \forall x \in [Z_0, Z_1]$.

Xét hàm số $|f(x) - Q_n^d(x)|$ trên $[Z_1, Z_2]$, với $x \in (Z_1, Z_2)$ ta có :

$v(x) < 0$. Suy ra $f(x) - Q_n^d(x) \geq -L - dv(x) > -L$.

Ta lại có $f(x) - Q_n(x) < L, \quad \forall x \in [Z_1, Z_2]$.

Vậy với $d < d_2$ thì $f(x) - Q_n^d(x) < L, \quad \forall x \in [Z_1, Z_2]$.

Mặt khác : $|f(Z_1) - Q_n^d(Z_1)| = |f(Z_1) - Q_n(Z_1)| < L$.

$$|f(Z_2) - Q_n^d(Z_2)| = |f(Z_2) - Q_n(Z_2)| < L.$$

Vậy tồn tại d_2 dương đủ nhỏ để $d \in [0, d_2]$ ta có:

$$|f(x) - Q_n^d(x)| < L, \quad x \in [Z_1, Z_2].$$

Lập luận tương tự như trên đoạn $[Z_0, Z_1]$ đối với các đoạn $[Z_{i-1}, Z_i]$ với $i = 2k + 1, k = 0, 1, 2, \dots$ ta được kết quả: $\exists 0 < d_i$ sao cho với $0 < d < d_1$ thì $|f(x) - Q_n^d(x)| < L, \quad \forall x \in [Z_{i-1}, Z_i]$.

Đối với các đoạn $[Z_{i-1}, Z_i]$ với $i = 2k, k = 1, 2, \dots$ lập luận như trên đoạn $[Z_1, Z_2]$ ta được $\exists d_i > 0$ sao cho $0 < d < d_1$ thì:

$$|f(x) - Q_n^d(x)| < L, \forall x \in [Z_{i-1}, Z_i].$$

Như vậy chọn $d_0 < \min \{d_i : i = \overline{1, \dots, m}\}$.

Suy ra $|f(x) - Q_n^{d_0}(x)| < L$ trên $[Z_{i-1}, Z_i], i = \overline{1, \dots, m}$.

Vì $v(x), Q_n(x) \in X_1 \Rightarrow Q_n^d(x) \in X_1, \bigcup_{i=1}^m [Z_{i-1}, Z_i] = [a, b]$.

Suy ra $|f(x) - Q_n^{d_0}(x)| < L, \forall x \in [a, b]$.

Vậy $\max_{x \in [a, b]} |f(x) - Q_n^{d_0}(x)| < L, \forall x \in [a, b]$ trái với giả thiết $Q_n(x)$ là xấp xỉ đều tốt nhất. Suy ra $m \geq n + 2$

□

Định lý Chebyshev cho ta tiêu chuẩn kiểm tra xem một đa thức có phải là đa thức xấp xỉ đều tốt nhất của hàm $f \in C_{[a, b]}$ hay không. Nó cũng được sử dụng để chứng minh nhiều tính chất của đa thức xấp xỉ đều tốt nhất.

Như đã nói ở trên $X = C_{[a, b]}$ không là không gian lồi thực sự. Do đó ta không áp dụng được định lý 2.2. Tuy nhiên ta có:

Định lý 2.5. Đa thức xấp xỉ đều tốt nhất của $f \in C_{[a,b]}$ là duy nhất.

Chứng minh. Giả sử $P, Q \in P_n$ là hai đa thức xấp xỉ đều tốt nhất của f trên $[a, b]$. Do đó $\frac{P+Q}{2} \in P_n$ cũng là đa thức xấp xỉ đều tốt nhất, vì:

$$E_n \leq \|f - \frac{P+Q}{2}\| \leq \frac{1}{2} \|f - P\| + \frac{1}{2} \|f - Q\| = E_n(f)$$

Với $\{x_i\}_{i=0}^{n+1}$ là $(n+2)$ điểm luân phiên Chebyshev của $\frac{P+Q}{2}$, ta có

$$\left| \frac{P(x_i) + Q(x_i)}{2} - f(x_i) \right| = E_n(f), \quad (i = 0, \dots, n+1)$$

Suy ra

$$\begin{aligned} 2E_n(f) &= |P(x_i) - f(x_i) + Q(x_i) - f(x_i)| \\ &\leq |P(x_i) - f(x_i)| + |Q(x_i) - f(x_i)| \\ &\leq \|P - f\| + \|Q - f\| = 2E_n(f) \end{aligned}$$

Do đó $|P(x_i) - f(x_i)| = |Q(x_i) - f(x_i)| = E_n(f), \quad i = 0, \dots, n+1$

Hay $P(x_i) - f(x_i) = \lambda_i [Q(x_i) - f(x_i)]$ với $\lambda_i = \pm 1$ Ta có

$$(1 + \lambda_i) |Q(x_i) - f(x_i)| = (1 + \lambda_i) E_n(f) = 2E_n(f)$$

$\Rightarrow \lambda_i = 1$ Từ đây suy ra $P(x_i) = Q(x_i), \quad i = 0, \dots, n+1$ hay $P \equiv Q$. $\square$

Định lý 2.6. Đa thức xấp xỉ đều tốt nhất $P \in P_n$ của một hàm $f \in C[-1, 1]$ chẵn (lẻ) cũng là hàm chẵn (lẻ).

Chứng minh. Giả sử f là hàm chẵn. Và $P(x)$ là đa thức xấp xỉ đều tốt nhất của f , với mọi $x \in [-1, 1]$ ta có :

$$|f(x) - P(x)| \leq \|f - P\| = E_n(f).$$

Thay $x = -x$ ta có

$$|f(-x) - P(-x)| = |f(x) - P(-x)| \leq E_n(f), \quad \forall x \in [-1, 1].$$

Suy ra $P(-x)$ cũng là đa thức xấp xỉ đều tốt nhất của f . Do tính duy nhất của xấp xỉ đều tốt nhất ta được $P(-x) = P(x), \quad \forall x \in [-1, 1]$. $\square$

Định lý 2.7. Giả sử $f \in C^n[a, b]$ còn $f^{(n+1)}(x)$ giới nội và không đổi dấu trên $[a, b]$. Khi đó

$$\inf_{x \in [a, b]} |f^{(n+1)}(x)| \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}(n+1)!} \leq E_n(f) \leq \sup_{x \in [a, b]} |f^{(n+1)}(x)| \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}(n+1)!}$$

Chứng minh. Gọi P là đa thức nội suy của f với các mốc nội suy là nghiệm của đa thức Chebyshev

$$x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos \frac{(2k-1)\pi}{2(n+1)}, k = \overline{1, n+1}$$

sao cho $f(x_k) = P(x_k), k = \overline{1, n+1}$.

Theo công thức ước lượng sai số của phép nội suy ta có

$$|f(x) - P(x)| \leq \sup_{x \in [a, b]} |f^{(n+1)}(x)| \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}(n+1)!}, \forall x \in [a, b].$$

Suy ra
$$E_n(f) \leq \|f - P\| \leq \sup_{x \in [a, b]} |f^{(n+1)}(x)| \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}(n+1)!}$$

Giả sử Q là đa thức xấp xỉ đều tốt nhất của hàm f trên $[a, b]$. Khi đó theo định lý Chebyshev $f - Q$ đổi dấu $(n+2)$ lần nên $f - Q$ có ít nhất $(n+1)$ không điểm $y_i : f(y_i) = Q(y_i), i = \overline{1, n+1}$. Như vậy Q là đa thức nội suy của hàm f với các mốc nội suy $\{y_i\}_{i=1}^{n+1}$:

$$f(x) - Q(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x)$$

trong đó

$$\omega_{n+1}(x) = \prod_{i=1}^{n+1} (x - y_i), \quad \xi = \xi(x) \in [a, b]$$

Giả sử $|\omega_{n+1}(x)|$ đạt max tại $x = x_0 \in [a, b]$. Ta có

$$\begin{aligned} E_n(f) = \|f - Q\| &\geq |f(x_0) - Q(x_0)| \\ &= |f^{(n+1)}(\xi(x_0))| \frac{|\omega_{n+1}(x_0)|}{(n+1)!} \\ &\geq \inf_x |f^{(n+1)}(x)| \frac{\|\omega_{n+1}\|}{(n+1)!} \\ &\geq \inf_x |f^{(n+1)}(x)| \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}(n+1)!} \end{aligned}$$

□

Hệ quả 2.1. Đa thức xấp xỉ đều tốt nhất bậc n của một đa thức bậc $n + 1 : f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^{n+1}, (a_{n+1} \neq 0)$ có dạng

$$Q(x) = f(x) - a_{n+1}T_{n+1}\left(\frac{2x - (a+b)}{b-a}\right)\frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}}$$

Chứng minh. Ta có $f^{(n+1)}(x) = (n+1).n\dots 2.1.a_{n+1} = a_{n+1}(n+1)! = \text{const}$

Từ định lý 2.7 suy ra

$$E_n(f) = |a_{n+1}|(n+1)!\frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}(n+1)!} = |a_{n+1}|\frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}}$$

Đa thức Q có bậc không quá n , ngoài ra

$$|f(x) - Q(x)| = |a_{n+1}|\left|T_{n+1}\left(\frac{2x - (a+b)}{b-a}\right)\right|\frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}}$$

Các điểm Chebyshev của Q là

$$x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cos\frac{\pi i}{n+1}, \quad i = \overline{0, n}$$

và $\|f - Q\| = E_n(f)$. □

2.4 Một số trường hợp đặc biệt

2.4.1 Xấp xỉ bằng đa thức bậc không

Mệnh đề 2.1. Cho $f \in C_{[a,b]}$, $M := \max_{x \in [a,b]} f(x)$, $m := \min_{x \in [a,b]} f(x)$

Khi đó $Q(x) = \frac{M+m}{2}$ là đa thức xấp xỉ đều tốt nhất bậc không của $f(x)$ trên $[a, b]$.

Chứng minh. Vì $m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a, b]$ nên

$$-\frac{M-m}{2} \leq f(x) - Q(x) \leq \frac{M-m}{2}$$

hay

$$|f(x) - Q(x)| \leq \frac{M-m}{2}, \forall x \in [a, b].$$

Giả sử $f(x_1) = M, f(x_2) = m$ ta có

$$f(x_1) - Q(x_1) = \frac{M - m}{2}; \quad f(x_2) - Q(x_2) = -\frac{M - m}{2}.$$

Vậy $\|f - Q\| = \frac{M - m}{2}$ và x_1, x_2 là hai điểm Chebyshev. $\square$

2.4.2 Xấp xỉ bằng đa thức bậc nhất

Cho $f(x)$ là hàm lồi trên $[a, b]$. Nếu $f(x)$ là hàm tuyến tính thì đa thức xấp xỉ đều tốt nhất bậc nhất $Q(x) \equiv f(x)$.

Bây giờ giả sử $f(x)$ không phải là hàm tuyến tính.

Khi đó gọi $Q(x) = a_0 + a_1x$ là đa thức xấp xỉ đều tốt nhất của f trên $[a, b]$, ta có $f(x) - (a_0 + a_1x)$ cũng là hàm lồi, nên đạt cực trị tại một điểm trong duy nhất $c \in [a, b]$. Theo định lý Chebyshev, tồn tại 3 điểm luân phiên Chebyshev, tại đó $|f(x) - (a_0 + a_1x)|$ đạt cực đại. Do đó 2 điểm Chebyshev còn lại phải là a và b . Ta có :

$$f(a) - (a_0 + a_1a) = \alpha L$$

$$f(c) - (a_0 + a_1c) = -\alpha L$$

$$f(b) - (a_0 + a_1b) = \alpha L$$

trong đó $L = \|f - Q\|; \alpha = \pm 1$.

Từ hệ thức đầu và cuối, suy ra $a_1 = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Nếu f khả vi thì điểm c tìm từ điều kiện $f'(c) = 0$. Sử dụng hai hệ thức đầu ta được:

$$a_0 = \frac{f(a) + f(c)}{2} - \frac{a + c}{2} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$L = |f(a) - (a_0 + a_1a)| = \left| \frac{f(a) - f(c)}{2} - \frac{c - a}{2} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right|$$

* Ý nghĩa hình học:

Nối hai điểm $A(a, f(a)), B(b, f(b))$ bằng đoạn thẳng AB :

$$y = a_1(x - a) + f(a) = a_1x + f(a) - aa_1$$

Kẻ tiếp tuyến song song với AB : $y = a_1(x - c) + f(c) = a_1x + f(c) - ca_1$

Đường cần tìm là đường trung bình của hai đường AB và $C'D$:

$$y = a_1x + a_0, a_0 = \frac{f(a) + f(c)}{2} - \frac{a + c}{2} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Ví dụ 2.1. Tìm đa thức xấp xỉ đều tốt nhất bậc nhất của hàm $f(x) = |x|$ trên đoạn $[-1, 5]$

Ta có:

$$a_1 = \frac{5 - 1}{5 - (-1)} = \frac{2}{3}; c = 0$$

Đường thẳng qua AB : $y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$

Đường thẳng qua $C(0, 0)$ song song với AB : $y = \frac{2}{3}x$

Đường trung bình của AB, CD là $y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{6}$

Ví dụ 2.2. Tìm đa thức xấp xỉ đều tốt nhất bậc 3 của hàm $f(x) = e^{x^2}$ trên đoạn $[-1, 1]$.

Vì f là hàm chẵn nên đa thức xấp xỉ đều tốt nhất $Q_3(x)$ cũng chẵn. Do đó $Q_3(x) = a_0 + a_2x^2$. Đặt $t = x^2$; $f_1(t) = e^t, t \in [0, 1]$

$$\Rightarrow Q_3(t) = a_0 + a_2t$$

Phương trình đường thẳng qua $A(0, 1); B(1, e)$ có dạng $y = (e - 1)t + 1$.
Tìm $C(c, f_1(c))$ trong đó

$$f_1'(c) = a_2 = \frac{e - 1}{1 - 0} = e - 1$$

Ta có $e^c = e - 1$ suy ra $c = \ln(e - 1)$. Phương trình tiếp tuyến với đường cong $f_1(t)$ tại C có dạng

$$\begin{aligned} y &= (e - 1)(t - c) + f_1(c) \\ &= (e - 1)(t - \ln(e - 1)) + (e - 1) \\ &= (e - 1)t + [(e - 1) - (e - 1)\ln(e - 1)] \end{aligned}$$

Vậy phương trình đường trung bình của đường thẳng AB và tiếp tuyến có dạng:

$$y = (e - 1)t + \frac{e - (e - 1)\ln(e - 1)}{2}$$

Trở lại biến x ta có:

$$Q_3(x) = (e_1)x^2 + \frac{e - (e - 1)\ln(e - 1)}{2}$$

Chương 3

Một số ứng dụng của lý thuyết xấp xỉ đều vào giải một lớp các bài toán sơ cấp

Từ việc nghiên cứu lý thuyết xấp xỉ đều ở Chương 2 trong chương này sẽ trình bày lời giải cho một lớp các bài toán sơ cấp dựa trên lý thuyết xấp xỉ đều tốt nhất bằng đa thức bậc không và bậc nhất, cùng với lời giải sơ cấp tương ứng. Chú ý rằng lời giải sơ cấp có nhiều cách giải, ở đây chỉ trình bày lời giải tổng quát nhất cho các bài toán hay gặp.

3.1 Lời giải tổng quát

3.1.1 Ứng dụng xấp xỉ bằng đa thức bậc không cho lớp các bài toán.

Bài toán: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[\alpha, \beta]$. Tìm a sao cho $\max_{x \in [\alpha, \beta]} |f(x) - a|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

*** Lời giải dựa trên lý thuyết xấp xỉ đều tốt nhất.**

+) Bước 1: Tìm giá trị lớn nhất (GTLN), giá trị nhỏ nhất (GTNN) của $f(x)$ trên $[\alpha, \beta]$.

$$\text{Đặt } M = \max_{x \in [\alpha, \beta]} f(x), m = \min_{x \in [\alpha, \beta]} f(x).$$

+) Bước 2: $a = \frac{M + m}{2}$ là số cần tìm.

(Số cần tìm chính là đa thức xấp xỉ đều tốt nhất bậc không của hàm số $f(x)$ trên $[\alpha, \beta]$)

***Lời giải sơ cấp:**

+) Bước 1: Tìm GTLN, GTNN của $f(x)$ trên $[\alpha, \beta]$.

$$\text{Đặt } M = \max_{x \in [\alpha, \beta]} f(x), m = \min_{x \in [\alpha, \beta]} f(x), (m < M)$$

+) Bước 2: Đặt $X = f(x)$, ta có $X \in [m, M]$

$$\text{Đặt } g(X) = X - a, \text{ khi đó } g(m) = m - a, \quad g(M) = M - a.$$

$$\text{Đặt } K = \max_{X \in [m, M]} |g(X)|, \text{ hay } K = \max_{x \in [\alpha, \beta]} |f(x) - a|.$$

$$\text{Ta có } 2K \geq |g(M)| + |g(m)| \geq |g(M) - g(m)| = |M - m| = M - m.$$

$$\text{Suy ra } K \geq \frac{M - m}{2}.$$

$$\text{Từ đó ta thấy: } K = \frac{M - m}{2} \text{ khi } \begin{cases} |g(M)| = |g(m)| = \frac{M - m}{2} \\ g(M) \cdot g(m) \leq 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow a = \frac{M + m}{2}$$

+) Bước 3: Kiểm tra lại với $a = \frac{M + m}{2}$ thì $\max_{x \in [\alpha, \beta]} |f(x) - a| = \frac{M - m}{2}$.

Kết luận: Với $a = \frac{M + m}{2}$ thì $\max_{x \in [\alpha, \beta]} |f(x) - a|$ đạt min và giá trị nhỏ nhất đạt được là $\frac{M - m}{2}$.

Chú ý:

+ Ở bước 1 có thể sử dụng tính chất đồng biến, nghịch biến (nếu có) của hàm số $f(x)$, sử dụng đồ thị (ví dụ như $f(x)$ là đa thức bậc hai), hay tổng quát là khảo sát hàm số.

+ Ở bước 2 đối với học sinh phổ thông, có thể giải thích bằng việc vẽ đồ thị một kết quả hiển nhiên của giải tích là : Ảnh liên tục của đoạn $[\alpha, \beta]$ là 1 đoạn $[m, M]$. Với $M = \max_{x \in [\alpha, \beta]} f(x)$, $m = \min_{x \in [\alpha, \beta]} f(x)$.

(điều này học sinh được hiểu tương tự như việc đổi biến).

Vậy qua bước 2 ta chứng minh được : $K = \max_{x \in [\alpha, \beta]} |f(x) - a| \geq \frac{M - m}{2}$.

Nếu $K = \frac{M - m}{2}$ thì $a = \frac{M + m}{2}$.

Cần kiểm tra lại với $a = \frac{M+m}{2}$ thì : $\max_{x \in [\alpha, \beta]} |f(x) - a| = \frac{M-m}{2}$.

Điều này sẽ xảy ra nếu ta sử dụng kết quả sau:

$$|X - a| \leq \max_{\forall X \in [m, M]} \{|m - a|, |M - a|\} (*)$$

Điều (*) đúng với mọi a . Thật vậy, lấy X bất kỳ $\in [m, M]$.

Ta có : $m \leq X \leq M$, suy ra $m - a \leq X - a \leq M - a$.

+ Nếu $X - a < 0$. Khi đó : $m - a \leq X - a < 0$, suy ra $|X - a| \leq |m - a|$.

+ Nếu $X - a \geq 0$. Khi đó : $0 \leq |X - a| \leq |M - a|$, suy ra $|X - a| \leq |M - a|$.

Từ đó : $\max_{X \in [m, M]} g(X) = \max \{g(M), g(m)\}$.

Khi mà $a = \frac{M+m}{2}$ thì $g(M) = g(m) = \frac{M-m}{2}$.

Vậy $\max_{X \in [m, M]} |g(X)| = \frac{M-m}{2}$.

Bước kiểm tra lại cuối cùng là nhấn mạnh thêm mức độ chặt chẽ về mặt logic, ta có thể chỉ ra rằng:

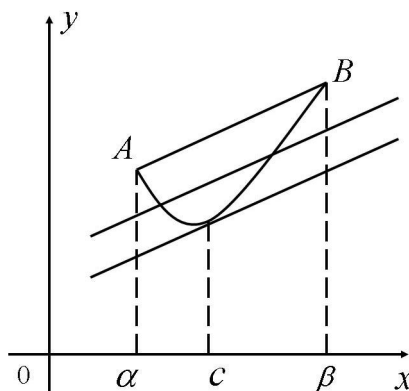
Bước 2 chỉ chứng tỏ rằng $K \geq \frac{M-m}{2}$.

$$K = \frac{M-m}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} g(M) = g(m) = \max_{X \in [m, M]} g(X) & (1) \\ g(M) = g(m) = \frac{M-m}{2} & (2) \\ g(M) \cdot g(m) \leq 0 & (3) \end{cases}$$

Tuy nhiên chỉ với (2),(3) là ta tìm được a , do vậy với a tìm được thì (2) và (3) được thỏa mãn. Vì lí do như vậy mà việc kiểm tra (1) là cần thiết.

3.1.2 Ứng dụng xấp xỉ bằng đa thức bậc nhất cho lớp các bài toán dạng:

Bài toán: Cho hàm số $f(x)$ liên tục, lồi (hoặc lõm) trên $[\alpha, \beta]$. Tìm a, b sao cho $\max_{x \in [\alpha, \beta]} |f(x) - (ax + b)|$ đạt GTNN. (Hình 3.1)



Hình 3.1:

***Lời giải dựa trên lý thuyết xấp xỉ đều tốt nhất:**

+ Bước 1: Xác định 2 điểm $A(\alpha, f(\alpha)), B(\beta, f(\beta))$, viết phương trình đường thẳng AB: $y = kx + m$.

+ Bước 2: Tìm phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và song song AB (tiếp điểm là $x = c$), khi đó tiếp tuyến có dạng: $y = kx + n$.

+ Bước 3: Đường thẳng cần tìm là đường song song cách đều 2 đường thẳng AB và tiếp tuyến trên là: $y = kx + \frac{1}{2}(m + n)$.

+ Bước 4: Kết luận $a = k, b = \frac{1}{2}(m + n)$. GTNN đạt được :

$$M_0 = \left| f(\alpha) - \left(k\alpha + \frac{1}{2}(m + n) \right) \right| = \left| f(\beta) - \left(k\beta + \frac{1}{2}(m + n) \right) \right|.$$

Chú ý rằng:

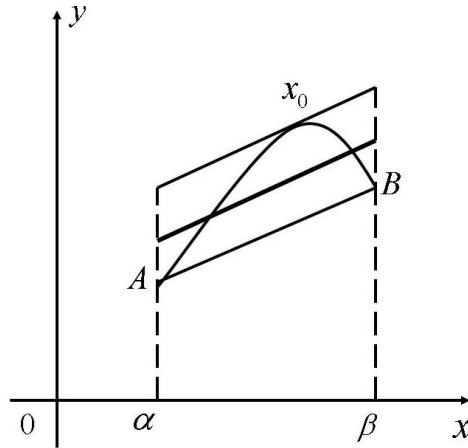
* Cần kiểm tra $f(x)$ có lồi (lõm) trên $[\alpha, \beta]$ hay không?

* Với giá trị a, b cần tìm thì $|g(x_0)| = |g(\alpha)| = |g(\beta)| = M_0$. Đồng thời ta có thể thấy chỉ có thể xảy ra một trong hai trường hợp:

+ $g(x_0) = M_0, g(\alpha) = g(\beta) = -M_0$ (Hình 3.2).

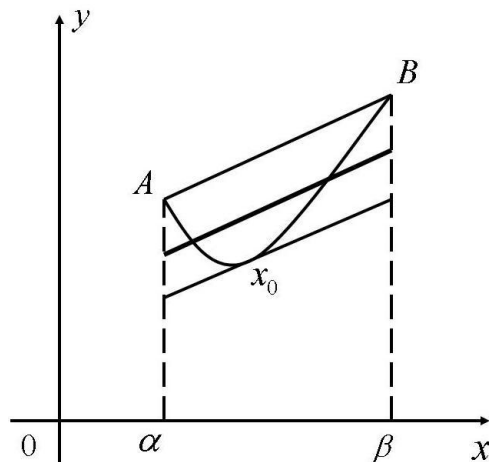
+ $g(x_0) = -M_0, g(\alpha) = g(\beta) = M_0$ (Hình 3.3).

Nếu f là hàm lồi thì luôn có $g(x_0) = M_0, g(\alpha) = g(\beta) = -M_0$.



Hình 3.2: Hàm lồi

Nếu f là hàm lõm thì luôn có $g(x_0) = -M_0, g(\alpha) = g(\beta) = M_0$.



Hình 3.3: Hàm lõm

***Lời giải sơ cấp:**

+ Bước 1: Đặt $g(x) = f(x) - (ax + b)$, $M = \max_{x \in [\alpha, \beta]} |g(x)|$.

Tính $g(\alpha), g(\beta), g(x_0)$ (x_0 và M_0 tìm được nhờ lời giải theo phương pháp xấp xỉ đều).

+ Bước 2: Ta xét 2 trường hợp :

- Trường hợp 1 : $a > k$

- Trường hợp 2 : $a < k$.

Tại mỗi trường hợp ta đánh giá $|g(\alpha) - g(x_0)|$ hoặc $|g(\beta) - g(x_0)|$ để đưa ra kết luận $M > M_0$.

+ Bước 3: Trường hợp 3: $a = k$.

Khi đó $g(\alpha) = g(\beta)$, ta vẫn đánh giá $|g(\alpha) - g(x_0)|$ để đưa ra kết luận $M \geq M_0$, $M = M_0$ khi mà $b = \frac{1}{2}(m+n)$.

+ Bước 4: Ta chứng minh : với $a = k$, $b = \frac{1}{2}(m+n)$ thì $\max_{X \in [\alpha, \beta]} |g(x)|$ đúng bằng M_0 .

Chú ý: Ở trường hợp 3, ta có thể chia nhỏ làm 3 trường hợp:

$$\left. \begin{array}{l} + \quad b < \frac{1}{2}(m+n) \\ + \quad b > \frac{1}{2}(m+n) \end{array} \right\}, \text{ ta sẽ chứng minh } M > M_0$$
$$+ \quad b = \frac{1}{2}(m+n), \text{ ta chứng minh } M = M_0$$

Khi đó bỏ qua bước 4.

Nhận xét :

Như ở trên tôi đã đưa ra lời giải tổng quát, dựa trên lý thuyết xấp xỉ đều tốt nhất, cùng lời giải sơ cấp tương ứng trong việc vận dụng một số ứng dụng xấp xỉ bằng đa thức bậc không và bậc nhất. Từ đó giáo viên có định hướng ra một lớp các bài toán sơ cấp cho học sinh khá giỏi THPT. Tuy nhiên việc lựa chọn hàm số $f(x)$ cũng như đoạn $[\alpha, \beta]$ là không đơn giản chút nào. Cần ghi nhớ rằng : đối với xấp xỉ bằng đa thức bậc không thì $f(x)$ liên tục trên đoạn $[\alpha, \beta]$, còn đối với xấp xỉ bằng đa thức bậc nhất thì $f(x)$ liên tục, lồi (hoặc lõm) trên đoạn $[\alpha, \beta]$. Khi đưa ra hàm số $f(x)$ tương ứng với đoạn $[\alpha, \beta]$ sao cho quá trình tính toán không nên quá công kênh, vì lời giải sơ cấp tương đối là kỹ thuật, các giá trị đưa ra để đánh giá (ví dụ như $a > k$ chẳng hạn) là không tự nhiên, nên giáo viên có thể đưa ra gợi ý về các bước, hay các bài toán dẫn dắt. Sau đây là một số ví dụ cụ thể:

3.2 Lớp các bài toán cụ thể

Bài toán 1: Tìm a để $\max_{x \in [-1, 2]} |-9x^2 + 4x + a|$ đạt min.

* Lời giải nhờ lý thuyết xấp xỉ đều tốt nhất:

Ta có hàm số $f(x) = -9x^2 + 4x$ liên tục trên đoạn $[-1, 2]$.

Yêu cầu bài toán tương đương với :

Tìm a để $\max_{x \in [-1, 2]} |-9x^2 + 4x - (-a)|$ đạt min.

Tức là ta phải tìm đa thức xấp xỉ đều tốt nhất bậc không của hàm số $f(x) = -9x^2 + 4x$ trên đoạn $[-1, 2]$.

Trước hết ta tìm GTLN, GTNN của hàm số $f(x) = -9x^2 + 4x$ trên đoạn $[-1, 2]$. Xét hàm số $f(x) = -9x^2 + 4x$ trên đoạn $[-1, 2]$

có $f'(x) = -18x + 4$

Bảng biến thiên:

x	-1	$\frac{2}{9}$	2
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	-13	$\frac{4}{9}$	-28

Từ đó ta có : $M = \max_{x \in [-1, 2]} f(x) = \frac{4}{9}$, $m = \min_{x \in [-1, 2]} f(x) = -28$

Suy ra đa thức xấp xỉ đều tốt nhất bậc không của hàm số

$f(x) = -9x^2 + 4x$ trên đoạn $[-1, 2]$ là : $P(x) = \frac{\frac{4}{9} - 28}{2} = -\frac{124}{9}$

Vậy : $-a = -\frac{124}{9} \Leftrightarrow a = \frac{124}{9}$.

Khi đó GTNN đạt được :

$$\max_{x \in [-1, 2]} \left| -9x^2 + 4x + \frac{124}{9} \right| = \max_{x \in [-1, 2]} \left| \frac{128}{9} - \left(3x - \frac{2}{3} \right)^2 \right| = \frac{128}{9}.$$

Hướng dẫn sơ cấp:

Căn cứ vào lời giải cao cấp của bài toán trên, ta có thể đưa ra một lớp các bài toán sau với một số cách đặt câu hỏi như:

Bài tập 1: Tìm a để $\left| -9x^2 + 4x + a \right| \leq \frac{128}{9}, \quad \forall x \in [-1, 2].$

Bài tập 2: Cho $f(x) = -9x^2 + 4x + a$. Tìm a để GTLN của hàm số $y = |f(x)|$ trên $[-1, 2]$ đạt nhỏ nhất.

Bài tập 3: Với giá trị nào của a thì $\max_{x \in [-1, 2]} \left| -9x^2 + 4x + a \right|$ đạt giá trị nhỏ nhất là $\frac{128}{9}$.

Bài tập 4: Với giá trị nào của a thì GTLN của hàm số $y = \left| -9x^2 + 4x + a \right|$ trên $[-1, 2]$ đạt GTNN.

Bài tập 5: Tìm a để $\max_{x \in [-1, 2]} \left| -9x^2 + 4x + a \right|$ đạt GTNN.

Bài tập 6: CMR với $a = \frac{124}{9}$ thì GTLN của hàm số $y = \left| -9x^2 + 4x + a \right|$ là nhỏ nhất trên $[-1, 2]$.

Ở đây tùy theo từng đối tượng học sinh mà ta có thể đưa ra đề bài toán cho thích hợp, bằng các lập luận cuối cùng phải tìm ra: $a = \frac{124}{9}$.

Cái hay của việc ứng dụng loại toán này là giáo viên có thể thấy ngay được kết quả của bài toán nhờ cách giải cao cấp, mà từ đó có định hướng để hướng dẫn học sinh tìm ra kết quả theo con đường sơ cấp.

* Lời giải sơ cấp như sau:

Đặt $X = -9x^2 + 4x$. Khi đó ta có: $\left| -9x^2 + 4x + a \right| = |X + a| = y(X)$.
Ta dễ thấy: $x \in [-1, 2] \Rightarrow X \in \left[-28, \frac{4}{9} \right]$.

(Có thể gợi ý cho học sinh thấy được qua bảng biến thiên như ở phần trên. Nếu học sinh chưa học khảo sát hàm số thì dùng đồ thị hàm bậc hai để tìm GTLN, GTNN).

Khi đó bài toán có dạng: Tìm a sao cho $\max_{X \in [-28, \frac{4}{9}]} |X + a|$ đạt min.

$$\text{Ta có } y(-28) = |-28 + a|, \quad y\left(\frac{4}{9}\right) = \left|\frac{4}{9} + a\right|.$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra : } y(-28) + y\left(\frac{4}{9}\right) &= |-28 + a| + \left|\frac{4}{9} + a\right| \\ &= |28 - a| + \left|a + \frac{4}{9}\right| \geq \left|(28 - a) + \left(a + \frac{4}{9}\right)\right| = \frac{256}{9}. \end{aligned}$$

Đặt $K = \max_{X \in [-28, \frac{4}{9}]} y(X)$, từ ước lượng trên ta có:

$$K = \frac{128}{9} \Leftrightarrow \begin{cases} y(-28) = y\left(\frac{4}{9}\right) = \frac{128}{9} \\ (28 - a) \left(\frac{4}{9} + a\right) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{124}{9} \\ -\frac{4}{9} \leq a \leq 28 \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{124}{9}$$

Việc còn lại là chứng minh: $\max_{x \in [-1, 2]} |g(x)|$ với $a = \frac{124}{9}$ đúng bằng $\frac{128}{9}$.

$$\text{Ta có } g(x) = -9x^2 + 4x + \frac{124}{9} \Rightarrow g'(x) = -18x + 4.$$

Bảng biến thiên:

x	-1	$\frac{2}{9}$	2
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	$\frac{7}{9}$	$\frac{128}{9}$	$-\frac{128}{9}$

Vậy với $a = \frac{124}{9}$ thì giá trị lớn nhất của hàm số $y = |-9x^2 + 4x + a|$ trên $[-1, 2]$ đạt GTNN và giá trị đó là: $\frac{128}{9}$.

Bài toán 2: Tìm m để $\max_{[0,2]} |3^x + m|$ đạt min.

* Lời giải nhờ lý thuyết xấp xỉ đều tốt nhất:

Đặt $f(x) = 3^x$, dễ thấy hàm số $f(x) = 3^x$ liên tục trên $[0, 2]$, khi đó:

$$|3^x + m| = |f(x) - (-m)|$$

Yêu cầu bài toán tương ứng với :

Tìm đa thức xấp xỉ đều tốt nhất bậc không của $f(x)$ trên $[0, 2]$.

Ta có : $\min_{x \in [0,2]} f(x) = 1$, $\max_{x \in [0,2]} f(x) = 9$.

Vậy đa thức xấp xỉ đều tốt nhất bậc không của hàm số $f(x) = 3^x$ trên $[0, 2]$ là $P(x) = 5 \Rightarrow -m = 5 \Leftrightarrow m = -5$ và GTNN đạt được : $|9 - 5| = 4$.

* Hướng dẫn sơ cấp:

Đặt $X = 3^x$. Khi đó : $y(X) = |X + m|$, ta thấy $x \in [0, 2] \Rightarrow X \in [1, 9]$.

Ta có : $y(1) = |1 + m|$, $y(9) = |9 + m|$

$$y(1) + y(9) = |1 + m| + |9 + m| = |-1 - m| + |9 + m| \geq 8$$

Đặt $K = \max_{X \in [1,9]} y(X)$, từ ước lượng ở trên ta có : $2K \geq 8 \Rightarrow K \geq 4$. Vậy

$$K = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} y(1) = y(9) = 8 \\ (-1 - m)(9 + m) \geq 0 \\ \max_{X \in [1,9]} y(X) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -5 \\ -9 \leq m \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow m = -5$$

Ta kiểm tra lại với $m = -5$ thì $\max_{x \in [0,2]} |3^x + m| = 4$.

Thật vậy : với $m = -5 \Rightarrow y = |3^x - 5| = |g(x)|, x \in [0, 2]$.

Ta có $g'(x) = 3^x \cdot \ln 3 > 0, \quad \forall x$

Bảng biến thiên:

x	0	2
$g'(x)$	+	
$g(x)$	-4	4

Từ bảng biến thiên ta thấy: $\max_{x \in [0,2]} |g(x)| = 4$.

Vậy $\max_{x \in [0,2]} |3^x + m|$ đạt min $\Leftrightarrow m = -5$ và giá trị đó bằng 4.

Nhận xét: Sau đây là một số bài tập mà học sinh có thể giải tương tự:

Bài tập 1: Chứng minh $\max_{x \in [0,2]} |3^x + m| \geq 4 \quad \forall m$.

Bài tập 2 : Tìm m để $\max_{x \in [0,2]} |3^x + m| = 4$.

Bài tập 3 : CMR : Với $m = -5$ thì $\max_{x \in [0,2]} |3^x + m|$ đạt GTNN.

Bài toán 3: Tìm m để $\max_{x \in [0, \frac{\pi}{2}]} |\cos x + m|$ đạt min.

Lời giải nhờ lý thuyết xấp xỉ đều tốt nhất:

Ta thấy hàm số $y = \cos x$ liên tục trên $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Yêu cầu bài toán: Tìm m để $\max_{x \in [0, \frac{\pi}{2}]} |\cos x - (-m)|$ đạt min.

Tức là tìm đa thức xấp xỉ đều tốt nhất bậc không của hàm số $y = \cos x$ trên $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Ta có $\max_{x \in [0, \frac{\pi}{2}]} \cos x = 1$, $\min_{x \in [0, \frac{\pi}{2}]} \cos x = 0$.

Từ đó có đa thức xấp xỉ đều tốt nhất bậc không của hàm số $y = \cos x$ trên $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ là $P(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow m = -\frac{1}{2}$ và GTNN đạt được là $\frac{1}{2}$.

Hướng dẫn sơ cấp:

Ta thấy hàm số $y = \cos x$ nghịch biến trên $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Xét $f(x) = |\cos x + m|$ trên $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Tính $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = |m|$, $f(0) = |1 + m|$.

Suy ra $f(0) + f\left(\frac{\pi}{2}\right) = |1 + m| + |m| = |1 + m| + |-m| \geq |1 + m - m| = 1$.

Đặt $M = \max_{x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]} f(x)$, từ ước lượng ở trên ta có : $2M \geq 1 \Leftrightarrow M \geq \frac{1}{2}$.

$$\text{Vậy } M = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \\ f(0) + f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \\ \max_{x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]} f(x) = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |m| = \frac{1}{2} \\ |m + 1| = \frac{1}{2} \\ -m(1 + m) \geq 0 \end{cases}$$

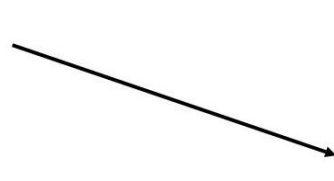
$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = -\frac{1}{2} \\ -1 \leq m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}.$$

Ta kiểm tra : $m = -\frac{1}{2}$ thì $f(x) = \left|\cos x - \frac{1}{2}\right|$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Ta có : $g(x) = \cos x - \frac{1}{2}$. khi đó $g'(x) = -\sin x$.

Bảng biến thiên :

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$g'(x)$		—
$g(x)$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$



Từ bảng biến thiên ta thấy $\max_{x \in [0, \frac{\pi}{2}]} |g(x)| = \frac{1}{2}$.

Kết luận : Với $m = -\frac{1}{2}$, ta có $\max_{x \in [0, \frac{\pi}{2}]} \left| \cos x - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}$.

Bài toán 4: Tìm a để $\max_{x \in [0, 2]} \left| \frac{x^2 + 2x - 1}{x + 1} - a \right|$ đạt min.

* Lời giải nhờ lý thuyết xấp xỉ đều tốt nhất:

Ta thấy hàm số $y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x + 1}$ liên tục trên $[0, 2]$.

Yêu cầu bài toán tương đương với : Tìm đa thức xấp xỉ đều tốt nhất bậc không của hàm số $y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x + 1}$ trên $[0, 2]$.

Ta thấy hàm số $y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x + 1}$ đồng biến trên $[0, 2]$.

Suy ra: $\max_{x \in [0, 2]} y = \frac{7}{3}$, $\min_{x \in [0, 2]} y = -1$.

Vậy đa thức xấp xỉ đều tốt nhất bậc không của hàm số: $y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x + 1}$ trên $[0, 2]$ là $P(x) = \frac{2}{3} \Rightarrow a = \frac{2}{3}$ và GTNN đạt được là $\frac{5}{3}$.

* Hướng dẫn sơ cấp:

Xét $f(x) = \left| \frac{x^2 + 2x - 1}{x + 1} - a \right|$ trên $[0, 2]$ có

$$f(0) = |-1 - a|, f(2) = \left| \frac{7}{3} - a \right|$$

Suy ra $f(0) + f(2) = |1 + a| + \left| \frac{7}{3} - a \right| \geq \frac{10}{3}$.

Đặt $K = \max_{x \in [0, 2]} f(x)$, từ ước lượng ở trên ta có $2K \geq \frac{10}{3} \Leftrightarrow K \geq \frac{5}{3}$.

$$\text{Vậy } K = \frac{5}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} f(0) = f(2) = \frac{5}{3} \\ (1+a)\left(\frac{7}{3} - a\right) \geq 0 \\ \max_{x \in [0,2]} f(x) = \frac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ -1 \leq a \leq \frac{7}{3} \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{2}{3}.$$

Kiểm tra lại: Với $a = \frac{2}{3}$ ta có $g(x) = \frac{x^2 + 2x - 1}{x + 1} - \frac{2}{3}$.

$$\Rightarrow g'(x) = 1 + \frac{2}{(x+1)^2} > 0, \forall x \neq -1.$$

Bảng biến thiên:

x	0	2
$g'(x)$		+
$g(x)$	$-\frac{5}{3}$	$\frac{5}{3}$

Từ bảng biến thiên ta thấy $\max_{x \in [0,2]} |g(x)| = \frac{5}{3}$.

Vậy với $a = \frac{2}{3}$ thì $\max_{x \in [0,2]} f(x) = \frac{5}{3}$.

Nhận xét: Từ các bài toán trên ta có thể đưa ra một số bài tập có cách giải tương tự:

Bài tập 1: Tìm a để $\max_{x \in [1,2]} |\sqrt{x} + a|$ đạt min.

Bài tập 2: Cho $f(x) = \frac{1}{x} - m$. Tìm m để GTLN của hàm số $y = |f(x)|$ trên $[-2, -1]$ đạt nhỏ nhất.

Bài tập 3: Với giá trị nào của m thì GTLN của hàm số $y = |\log_2 x + m|$ trên $[1, 4]$ đạt GTNN.

Bài toán 5: Tìm a, b : $\max_{x \in [-1, 4]} |x^2 - (ax + b)|$ đạt min.

Ta dễ thấy hàm số $f(x) = x^2$ là hàm lõm trên $[-1, 4]$.

* Lời giải nhờ lý thuyết xấp xỉ đều tốt nhất:

Yêu cầu bài toán tương đương với :

Tìm đa thức xấp xỉ đều tốt nhất bậc nhất $Q(x) = ax + b$ của hàm số $f(x) = x^2$ trên $[-1, 4]$.

Xét hàm số: $f(x) = x^2$, khi đó ta có $f(-1) = 1, f(4) = 16$.

Vậy $A(-1, 1), B(4, 16)$ thuộc đồ thị hàm số $f(x) = x^2$.

Từ đó ta có phương trình AB là $y = 3x + 4$, hệ số góc $k = 3$.

Ta tìm phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x) = x^2$ và song song với AB , ta có $f'(x) = 2x$.

Vì tiếp tuyến song song AB nên $2x_0 = 3 \Leftrightarrow x_0 = \frac{3}{2} \Rightarrow f(x_0) = \frac{9}{4}$.

Suy ra phương trình tiếp tuyến tại $x_0 = \frac{3}{2}$ là:

$$y = 3\left(x - \frac{3}{2}\right) + \frac{9}{4} \Leftrightarrow y = 3x - \frac{9}{4}$$

Khi đó đường thẳng cần tìm là đường song song cách đều của hai đường AB và tiếp tuyến trên, từ đó nó có phương trình :

$$y = 3x + \frac{1}{2}\left(4 - \frac{9}{4}\right) \Leftrightarrow y = 3x + \frac{7}{8}$$

Vậy đa thức xấp xỉ đều tốt nhất bậc nhất của hàm số: $f(x) = x^2$ trên đoạn $[-1, 4]$ là $Q(x) = 3x + \frac{7}{8}$. Từ đó suy ra $a = 3, b = \frac{7}{8}$.

Giá trị nhỏ nhất đạt được : $\max_{x \in [-1, 4]} |x^2 - \left(3x + \frac{7}{8}\right)| = \frac{25}{8}$.

* Hướng dẫn sơ cấp:

Đặt $g(x) = x^2 - (ax + b)$, $M = \max_{x \in [-1, 4]} |g(x)|$.

Khi đó : $g(-1) = 1 + a - b$, $g(4) = 16 - 4a - b$, $g\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} - \frac{3}{2}a - b$.

Trường hợp 1: $a > 3$. Ta có : $2M \geq \left|g(-1) - g\left(\frac{3}{2}\right)\right| = \left|\frac{5}{2}a - \frac{5}{4}\right|$

Vì $a > 3 \Rightarrow \frac{5}{2}a > \frac{15}{2} \Leftrightarrow \frac{5}{2}a - \frac{5}{4} > \frac{15}{2} - \frac{5}{4} = \frac{25}{4}$, nên :

$$2M \geq \left|\frac{5}{2}a - \frac{5}{4}\right| \geq \frac{25}{4} \Rightarrow M > \frac{25}{8}.$$

Trường hợp 2: $a < 3$. Ta có : $2M \geq \left|g(4) - g\left(\frac{3}{2}\right)\right| = \left|\frac{55}{4} - \frac{5}{2}a\right|$.

Vì $a < 3 \Rightarrow -\frac{5}{2}a > -\frac{15}{2} \Leftrightarrow \frac{55}{4} - \frac{5}{2}a > \frac{55}{4} - \frac{15}{2} = \frac{25}{4}$, nên :

$$2M \geq \left|\frac{55}{4} - \frac{5}{2}a\right| > \frac{25}{4} \Rightarrow M > \frac{25}{8}.$$

Trường hợp 3: $a = 3$, Ta có : $g(-1) = 4 - b = g(4)$, $g\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{9}{4} - b$.

a) Nếu $b > \frac{7}{8} \Leftrightarrow -b < -\frac{7}{8}$

$$\Leftrightarrow -\frac{9}{4} - b < -\frac{9}{4} - \frac{7}{8} = -\frac{25}{8} \Leftrightarrow \left|-\frac{9}{4} - b\right| > \frac{25}{8}.$$

Vậy $M \geq \left|g\left(\frac{3}{2}\right)\right| = \left|-\frac{9}{4} - b\right| > \frac{25}{8} \Rightarrow M > \frac{25}{8}$.

b) Nếu $b < \frac{7}{8} \Leftrightarrow 4 - b > 4 - \frac{7}{8} = \frac{25}{8} \Leftrightarrow |4 - b| > \frac{25}{8}$.

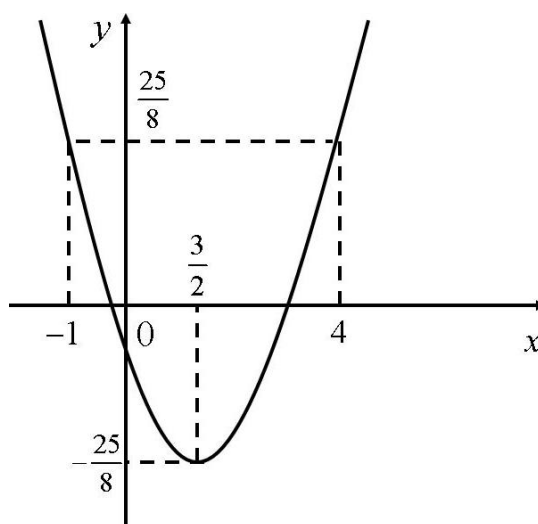
Vậy $M \geq |g(-1)| = |4 - b| > \frac{25}{8} \Rightarrow M > \frac{25}{8}$.

c) Nếu $b = \frac{7}{8} \Rightarrow g(x) = x^2 - 3x - \frac{7}{8} \Rightarrow g'(x) = 2x - 3$,

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}.$$

Ta có bảng biến thiên.

x	-1	$\frac{3}{2}$	4	
$g'(x)$		-	0	+
$g(x)$	$\frac{25}{8}$		$-\frac{25}{8}$	$\frac{25}{8}$



Kết luận : Với $a = 3$, $b = \frac{7}{8}$ thì $\max_{x \in [-1, 4]} |x^2 - (ax + b)| = \frac{25}{8}$.

Bài toán 6: Tìm a, b để $\max_{|x| \leq 1} |x^2 + ax + b|$ đạt min.

* Lời giải nhờ lý thuyết xấp xỉ đều tốt nhất:

Ta thấy hàm số $f(x) = x^2$ lõm trên $[-1, 1]$.

Cách 1: Yêu cầu bài toán tương đương với:

Tìm a, b để $\max_{|x| \leq 1} |x^2 - (-ax - b)|$ đạt min.

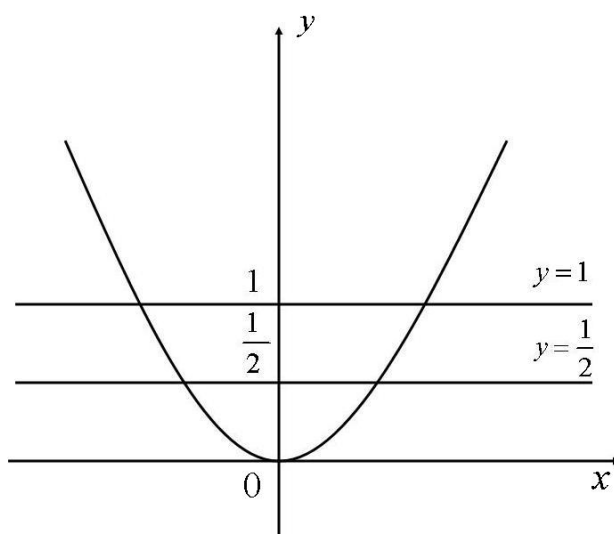
Tức là ta phải tìm đa thức xấp xỉ đều tốt nhất bậc nhất $Q(x) = -ax - b$ của hàm số $f(x) = x^2$ trên $[-1, 1]$. Tính $f(-1) = 1, f(1) = 1$.

Vậy $A(-1, 1), B(1, 1)$ thuộc đồ thị hàm số $f(x) = x^2$.

Khi đó phương trình AB là: $y = 1$.

Suy ra phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x) = x^2$ và song song AB là $y = 0$, hoành độ tiếp điểm $x_0 = 0$.

Phương trình đường thẳng cần tìm là : $y = \frac{1}{2}$



Vậy đa thức xấp xỉ đều tốt nhất bậc nhất của hàm số $f(x) = x^2$ trên $[-1, 1]$ là $Q(x) = \frac{1}{2}$. Khi đó $a = 0, b = -\frac{1}{2}$.

GTNN đạt được : $\max_{x \in [-1, 1]} |x^2 - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$.

Cách 2: Vì hàm số $f(x) = x^2$ là hàm số chẵn trên $[-1, 1]$, nên đa thức xấp xỉ đều tốt nhất của nó trên $[-1, 1]$ cũng là hàm chẵn $\Rightarrow a = 0$. Do đó đa thức xấp xỉ đều tốt nhất bậc nhất của $f(x) = x^2$ cũng chính là đa thức xấp xỉ đều tốt nhất bậc không trên $[-1, 1]$.

Ta có $\min_{|x| \leq 1} f(x) = 0, \max_{|x| \leq 1} f(x) = 1$

Suy ra đa thức xấp xỉ đều tốt nhất bậc không trên $[-1, 1]$ là:

$$P(x) = \frac{0 + 1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow b = -\frac{1}{2}.$$

* Hướng dẫn sơ cấp:

Đặt $g(x) = x^2 + ax + b$, $M = \max_{|x| \leq 1} |g(x)|$.

Ta có $g(-1) = 1 - a + b$, $g(1) = 1 + a + b$, $g(0) = b$.

Trường hợp 1: $a < 0$. Ta có $2M \geq |g(-1) - g(0)| = |1 - a|$.

Vì $a < 0 \Leftrightarrow -a > 0 \Leftrightarrow 1 - a > 1 \Leftrightarrow |1 - a| > 1$

$$\Rightarrow 2M \geq |1 - a| > 1 \Leftrightarrow M > \frac{1}{2}$$

Trường hợp 2: $a > 0$. Ta có $2M \geq |g(-1) - g(0)| = |1 + a| > 1 \Rightarrow M > \frac{1}{2}$.

Trường hợp 3: $a = 0$. Ta có $g(-1) = 1 + b = g(1)$, $g(0) = b$.

a) $b > -\frac{1}{2} \Leftrightarrow b + 1 > \frac{1}{2} \Leftrightarrow |g(1)| > \frac{1}{2} \Rightarrow M > \frac{1}{2}$.

b) $b < -\frac{1}{2} \Leftrightarrow |b| > \frac{1}{2} \Leftrightarrow |g(0)| > \frac{1}{2} \Rightarrow M > \frac{1}{2}$.

c) $b = -\frac{1}{2} \Rightarrow g(x) = x^2 - \frac{1}{2} \Rightarrow g'(x) = 2x, g'(0) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Ta có bảng biến thiên :

x	-1	0	1
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Kết luận: $a = 0, b = -\frac{1}{2}$. GTNN đạt được : $\max_{x \in [-1, 1]} |x^2 - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$.

Bài toán 7: Tìm a, b để $\max_{-2 \leq x \leq 3} |2x^2 + (a+4)x + (b+3)|$ đạt min.

* Lời giải nhờ lý thuyết xấp xỉ đều tốt nhất:

Yêu cầu bài toán tương đương với:

Tìm a, b để $\max_{-2 \leq x \leq 3} |2x^2 - [-(a+4)x - (b+3)]|$ đạt min.

Tức là ta đi tìm đa thức xấp xỉ đều tốt nhất bậc nhất:

$Q(x) = -(a+4)x - (b+3)$ của hàm số $f(x) = 2x^2$ trên đoạn $[-2, 3]$.

Ta có : $f(-2) = 8, f(3) = 18$

Từ đó $A(-2, 8), B(3, 18)$ là 2 điểm thuộc đồ thị hàm số $f(x) = 2x^2$.

Suy ra phương trình $AB : y = 2x + 12$, hệ số góc $k = 2$.

Có : $f'(x) = 4x$. Vậy $4x_0 = 2 \Rightarrow x_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow f(x_0) = \frac{1}{2}$.

Suy ra phương trình tiếp tuyến tại $x_0 = \frac{1}{2}$ là $y = 2x - \frac{1}{2}$.

Phương trình đường thẳng cần tìm là : $y = 2x + \frac{23}{4}$.

Vậy đa thức xấp xỉ đều tốt nhất bậc nhất của hàm số $f(x) = 2x^2$ trên $[-2, 3]$ là :

$$Q(x) = 2x + \frac{23}{4} \Rightarrow \begin{cases} -(a+4) = 2 \\ -(b+3) = \frac{23}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -6 \\ b = -\frac{35}{4} \end{cases}.$$

GTNN đạt được : $M_0 = \max_{x \in [-2, 3]} |2x^2 - 2x - \frac{23}{4}| = 12 - \frac{23}{4} = \frac{25}{4}$.

* Hướng dẫn giải sơ cấp:

Đặt $g(x) = 2x^2 + (a+4)x + (b+3)$, $M = \max_{x \in [-2, 3]} |g(x)|$.

Ta có $g(-2) = 3 - 2a + b$, $g(3) = 33 + 3a + b$, $g(\frac{1}{2}) = \frac{11}{2} + \frac{a}{2} + b$.

Trường hợp 1: $a > -6$. Ta có:

$$2M \geq |g(3) - g(\frac{1}{2})| = |\frac{55}{2} + \frac{5}{2}a| > \frac{55}{2} + \frac{5}{2}a(-6) = \frac{25}{2}$$

Suy ra $M > \frac{25}{2} = M_0$.

Trường hợp 2: $a < -6$. Ta có:

$$2M \geq |g(-2) - g(\frac{1}{2})| = |-\frac{5}{2} - \frac{5}{2}a|.$$

$$\text{Vì } a < -6 \Leftrightarrow -a > 6 \Leftrightarrow -\frac{5}{2}a > \frac{5}{2} \cdot 6 \Leftrightarrow -\frac{5}{2} - \frac{5}{2}a > -\frac{5}{2} + \frac{30}{2} = \frac{25}{2}.$$

$$\text{Suy ra } 2M > \frac{25}{2} \Rightarrow M > \frac{25}{4} = M_0.$$

Trường hợp 3: $a = -6 \Rightarrow g(-2) = 15 + b = g(3), g(\frac{1}{2}) = \frac{5}{2} + b$.

$$\text{a) } b > -\frac{35}{4} \Leftrightarrow 15 + b > 15 - \frac{35}{4} = \frac{25}{4} \Rightarrow |15 + b| > \frac{25}{4}.$$

$$\text{Vậy } M \geq |g(-2)| = |15 + b| > \frac{25}{4} = M_0.$$

$$\text{b) } b < -\frac{35}{4} \Leftrightarrow \frac{5}{2} + b < \frac{5}{2} - \frac{35}{4} = -\frac{25}{4} \Rightarrow |\frac{5}{2} + b| > \frac{25}{4}.$$

$$\text{Vậy } M \geq |g(\frac{1}{2})| = |\frac{5}{2} + b| > \frac{25}{4} = M_0.$$

$$\text{c) } b = -\frac{35}{4}. \text{ Ta có } g(x) = 2x^2 - 2x - \frac{23}{4}.$$

$$\text{Suy ra } g'(x) = 4x - 2, \quad g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Bảng biến thiên:

x	-2	$\frac{1}{2}$	3
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$\frac{25}{4}$		$\frac{25}{4}$
	↘		↗
	$-\frac{25}{4}$		

Bài toán 8: Tìm a, b để $\max_{x \in [-1, 1]} |x^4 + ax^2 + b|$ đạt min.

Đặt $x^2 = t \Rightarrow t \in [0, 1]$.

* Lời giải nhờ lý thuyết xấp xỉ đều tốt nhất:

Ta thấy hàm số $f(t) = t^2$ lõm trên $[0, 1]$.

Yêu cầu bài toán tương đương với:

Tìm a, b để $\max_{t \in [0, 1]} |t^2 + at + b|$ đạt min.

Tức là ta đi tìm đa thức xấp xỉ đều tốt nhất bậc nhất $Q(t) = -at - b$ của hàm số $f(t) = t^2$ trên $[0, 1]$.

Có $f(0) = 0, f(1) = 1$.

$A(0, 0), B(1, 1)$ là 2 điểm thuộc đồ thị hàm số $f(t) = t^2$ trên $[0, 1]$.

Suy ra phương trình $AB: y = t$.

Có $f'(t) = 2t$. Vậy $2t_0 = 1 \Leftrightarrow t_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow f(t_0) = \frac{1}{4}$.

Phương trình tiếp tuyến của $f(t)$ tại t_0 là: $y = t - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \Leftrightarrow y = t - \frac{1}{4}$.

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = t + \frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{4}) \Leftrightarrow y = t - \frac{1}{8}$.

Đa thức xấp xỉ đều tốt nhất bậc nhất của $f(t) = t^2$ trên đoạn $[0, 1]$ là: $Q(t) = t - \frac{1}{8}$.

Suy ra $\begin{cases} -a = 1 \\ -b = -\frac{1}{8} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = \frac{1}{8} \end{cases}$

và GTNN đạt được: $M_0 = \max_{t \in [0, 1]} \left| t^2 - t + \frac{1}{8} \right| = \frac{1}{8}$.

* Hướng dẫn sơ cấp:

Dựa trên lời giải của việc vận dụng lý thuyết xấp xỉ đều tốt nhất ở trên, giáo viên có thể đưa ra lớp các bài toán mà học sinh PTTH có thể giải được theo sơ cấp:

Bài tập 1: Tìm a, b để $\max_{x \in [-1, 1]} |x^4 + ax^2 + b|$ đạt GTNN.

Lời giải:

Đặt $g(t) = t^2 + at + b$, $M = \max_{t \in [0,1]} |g(t)|$.

Ta có $g(0) = b$, $g(1) = 1 + a + b$, $g(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} + \frac{a}{2} + b$.

Trường hợp 1: $a > -1$. Ta có:

$$2M \geq \left| g(1) - g\left(\frac{1}{2}\right) \right| = \left| \frac{3}{4} + \frac{a}{2} \right| > \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow M > \frac{1}{8} = M_0.$$

Trường hợp 2: $a < -1$. Ta có:

$$2M \geq \left| g(0) - g\left(\frac{1}{2}\right) \right| = \left| -\frac{1}{4} - \frac{a}{2} \right|.$$

$$\text{Vì } a < -1 \Leftrightarrow -a > 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{4} - \frac{a}{2} > -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Suy ra } 2M \geq \left| -\frac{1}{4} - \frac{a}{2} \right| > \frac{1}{4} \Rightarrow M > \frac{1}{8} = M_0.$$

Trường hợp 3: $a = -1$.

$$\text{Ta có } g(0) = b = g(1), \quad g\left(\frac{1}{2}\right) = b - \frac{1}{4}.$$

$$\text{a) Nếu } b > \frac{1}{8} \Leftrightarrow |b| > \frac{1}{8}. \text{ Vậy } M \geq |g(0)| = |b| > \frac{1}{8} = M_0.$$

$$\text{b) Nếu } b < \frac{1}{8} \Leftrightarrow b - \frac{1}{4} < \frac{1}{8} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{8} \Leftrightarrow \left| b - \frac{1}{4} \right| > \frac{1}{8}.$$

$$\text{Vậy } M \geq \left| g\left(\frac{1}{2}\right) \right| = \left| b - \frac{1}{4} \right| > \frac{1}{8} = M_0.$$

$$\text{c) Nếu } b = \frac{1}{8} \Rightarrow g(t) = t^2 - t + \frac{1}{8}.$$

$$\text{Ta có } g'(t) = 2t - 1, \quad g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}.$$

Ta có bảng biến thiên:

x	0	$\frac{1}{2}$	1
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	M_0	$-M_0$	M_0

Từ bảng biến thiên $\Rightarrow \max_{t \in [0,1]} \left| t^2 - t + \frac{1}{8} \right| = M_0 = \frac{1}{8}$ với $a = -1, b = \frac{1}{8}$.

Bài tập 2: Tìm a, b để $|x^4 + ax^2 + b| \leq \frac{1}{8}, \forall x \in [-1, 1]$.

Lời giải:

Đặt $x^2 = t \Rightarrow t \in [0, 1]$.

Yêu cầu bài toán: Tìm a, b để $|t^2 + at + b| \leq \frac{1}{8}, \forall t \in [0, 1]$.

Ta xét lại 3 điểm : $t = 1, t = 0, t = \frac{1}{2}$, đặt $g(t) = t^2 + at + b$.

Ta có $g(0) = b, g(1) = 1 + a + b, g(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}a + b$.

Từ đó suy ra $|1 + at + b| \leq \frac{1}{8}, |b| \leq \frac{1}{8}, \left| \frac{1}{4} + \frac{1}{2}a + b \right| \leq \frac{1}{8}$.

Vậy $-\frac{1}{8} \leq -b \leq \frac{1}{8}$ (vì $|b| = |-b|$), $-\frac{1}{8} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{2}a + b \leq \frac{1}{8}$.

Cộng vế với vế ta có: $-\frac{1}{4} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{2}a \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}a \leq 0$

$$\Leftrightarrow -1 \leq a \leq 0 \quad (1)$$

Ta lại có: $-\frac{1}{8} \leq 1 + a + b \leq \frac{1}{8} \Leftrightarrow -\frac{1}{8} \leq -\frac{1}{4} - \frac{1}{2}a - b \leq \frac{1}{8}$.

Cộng vế với vế ta có: $-\frac{1}{4} \leq \frac{3}{4} + \frac{1}{2}a \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow -1 \leq \frac{1}{2}a \leq -\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow -2 \leq a \leq -1 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $a = -1$.

Khi đó ta có: $|b| \leq \frac{1}{8}$ và $\left| \frac{1}{4} - b \right| \leq \frac{1}{8}$.

Từ $\left| \frac{1}{4} - b \right| \leq \frac{1}{8} \Leftrightarrow -\frac{1}{8} \leq \frac{1}{4} - b \leq \frac{1}{8} \Leftrightarrow -\frac{3}{8} \leq -b \leq -\frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{1}{8} \leq b \leq \frac{3}{8}$.

Mà $|b| \leq \frac{1}{8} \Rightarrow b = \frac{1}{8}$.

Việc còn lại là chứng minh $\left| t^2 - t + \frac{1}{8} \right| \leq \frac{1}{8} \quad \forall t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \left| t^2 - t + \frac{1}{8} \right| \leq \frac{1}{8} &\Leftrightarrow -\frac{1}{8} \leq t^2 - t + \frac{1}{8} \leq \frac{1}{8} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \leq t^2 - t \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{4} \leq t^2 - t \\ t^2 - t \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (t - \frac{1}{2})^2 \geq 0 \\ (t - 1)t \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

luôn đúng với mọi $t \in [0, 1]$.

Như vậy ta chứng minh được:

Với $a = -1$, $b = \frac{1}{8}$ thì $|t^2 + at + b| \leq \frac{1}{8} \quad \forall t \in [0, 1]$.

Kết luận: $a = -1$, $b = \frac{1}{8}$ thì $|x^4 + ax^2 + b| \leq \frac{1}{8} \quad \forall t \in [-1, 1]$.

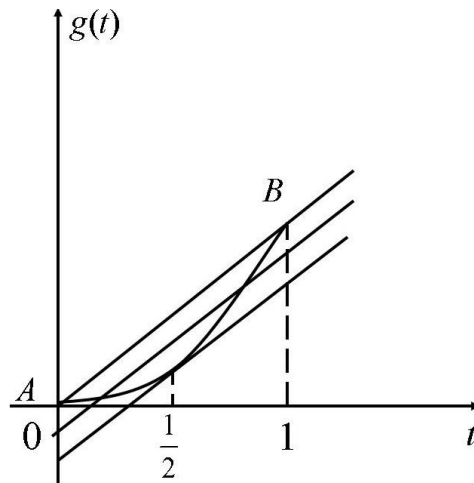
* Chú ý: Nếu như ở bài trên không đặt ẩn phụ $t = x^2, t \in [0, 1]$, thì sau khi đã tìm được $a = -1$, $b = \frac{1}{8}$, phần còn lại là :

Phải chứng minh: $\left| x^4 - x^2 + \frac{1}{8} \right| \leq \frac{1}{8} \quad \forall x \in [-1, 1]$.

Có thể làm như sau:

$$\begin{aligned} \text{Đặt } x &= \cos \alpha, \quad \alpha \in [0, \pi]. \\ \text{Từ đó } \left| x^4 - x^2 + \frac{1}{8} \right| &= \left| \cos^4 \alpha - \cos^2 \alpha + \frac{1}{8} \right| = \frac{1}{8} |8\cos^4 \alpha - 8\cos^2 \alpha + 1| \\ &= \frac{1}{8} \left| 8 \cdot \left(\frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \right)^2 - 8 \cdot \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} + 1 \right| \\ &= \frac{1}{8} |3 + 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha - 4 - 4\cos 2\alpha + 1| \\ &= \frac{1}{8} |\cos 4\alpha| \leq \frac{1}{8} \quad \forall \alpha \in [0, \pi] \end{aligned}$$

Nhận xét: Vậy thực chất của lời giải này là gì? Tại sao lại xét $g(\frac{1}{2})$ mà không phải vị trí nào khác? Số $t = \frac{1}{2}$ chính là lấy từ kết quả ý nghĩa hình học của xấp xỉ bậc nhất đã trình bày ở chương 1. Còn kỹ thuật xét thực chất là xét $g(\frac{1}{2}) - g(0)$ và $g(1) - g(\frac{1}{2})$.



Bài tập 3: CMR với $a = -1, b = \frac{1}{8}$ thì GTLN của $y = |x^4 + ax^2 + b|$ là nhỏ nhất, tìm giá trị đó?

Bài tập 4: Với giá trị nào của a, b thì GTLN của hàm số $y = |x^4 + ax^2 + b|$ đạt GTNN trên $[-1, 1]$.

Bài toán 9: Tìm a, b để $\max_{x \in [1, 2]} \left| \frac{1}{x} - (ax + b) \right|$ đạt min.

* Lời giải nhờ lý thuyết xấp xỉ đều tốt nhất:

Yêu cầu bài toán tương đương với:

Tìm đa thức xấp xỉ đều tốt nhất bậc nhất $Q(x) = ax + b$ của hàm số $f(x) = \frac{1}{x}$ trên $[1, 2]$.

Xét hàm số: $f(x) = \frac{1}{x}$. Suy ra $f(1) = 1, f(2) = \frac{1}{2}$. Ta thấy $A(1, 1), B(2, \frac{1}{2})$

là 2 điểm thuộc đồ thị hàm số $f(x) = \frac{1}{x}$ trên $[1, 2]$.

Khi đó phương trình đường thẳng AB là: $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.

Ta có: $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$. Vì tiếp tuyến song song với AB nên: $-\frac{1}{x_0^2} = -\frac{1}{2}$.

Suy ra $x_0 = \sqrt{2} \Rightarrow f(x_0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Phương trình tiếp tuyến tại $x_0 = \sqrt{2}$ là:

$$y = -\frac{1}{2}(x - \sqrt{2}) + \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + \sqrt{2}$$

Vậy đường thẳng cần tìm là đường song song cách đều của đường AB và tiếp tuyến trên là : $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \sqrt{2}\right) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Từ đó ta có đa thức xấp xỉ đều tốt nhất bậc nhất của hàm số $f(x) = \frac{1}{x}$ trên $[1, 2]$ là $Q(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow a = -\frac{1}{2}, b = \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\text{GTNN đạt được: } M_0 = \max_{x \in [1, 2]} \left| \frac{1}{x} - \left(-\frac{1}{2}x + \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right| = \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

* Hướng dẫn sơ cấp:

$$\text{Đặt } g(x) = \frac{1}{x} - (ax + b), M = \max_{x \in [1, 2]} |g(x)|.$$

$$\text{Ta có } g(1) = 1 - a - b, g(2) = \frac{1}{2} - 2a - b, g(\sqrt{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}a.$$

$$\text{Trường hợp 1: } a > -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Ta có: } 2M \geq |g(\sqrt{2}) - g(1)| = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}a - 1 + a \right| = \left| (\sqrt{2} - 1) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + a \right) \right|.$$

$$\text{Vì } a > -\frac{1}{2} \Leftrightarrow a + \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{2} - 1) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + a \right) > (\sqrt{2} - 1) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{2} - \sqrt{2} > 0.$$

$$\text{Vậy } 2M \geq \frac{3}{2} - \sqrt{2} \Rightarrow \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} = M_0.$$

$$\text{Trường hợp 2: } a < -\frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } 2M &\geq |g(\sqrt{2}) - g(2)| = \left| \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1) + \sqrt{2}a(\sqrt{2} - 1) \right| \\ &= \left| (\sqrt{2} - 1) \left(\frac{1}{2} + a\sqrt{2} \right) \right| = \left| (1 - \sqrt{2}) \left(-\frac{1}{2} - a\sqrt{2} \right) \right| \\ &> (\sqrt{2} - 1) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{2} - \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Suy ra $M > \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} = M_0$.

(vì $a < -\frac{1}{2} \Rightarrow -a > \frac{1}{2} \Rightarrow -a\sqrt{2} > \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} - a\sqrt{2} > \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} > 0$).

Trường hợp 3: $a = -\frac{1}{2}$.

Khi đó $g(1) = \frac{3}{2} - b = g(2)$, $g(\sqrt{2}) = \sqrt{2} - b$.

a) Nếu $b > \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow -b < -\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} - b < \sqrt{2} - \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\left(\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow |\sqrt{2} - b| > \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy $M \geq |g(\sqrt{2})| = |\sqrt{2} - b| > \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} = M_0 \Rightarrow M > M_0$.

b) Nếu $b < \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{3}{2} - b > \frac{3}{2} - \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $M \geq |g(1)| = \left|\frac{3}{2} - b\right| > \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} = M_0 \Rightarrow M > M_0$.

c) Nếu $b = \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow g(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2}x - \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Suy ra $g'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2}$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}, x \in [1, 2]$.

Bảng biến thiên:

x	1	$\sqrt{2}$	2
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	M_0	$-M_0$	M_0

Bài toán 10: Tìm a, b để $\max_{x \in [1, n]} \left| \frac{1}{x} - (ax + b) \right|$ đạt min.

* Lời giải nhờ lý thuyết xấp xỉ đều tốt nhất:

Yêu cầu bài toán tương đương với:

Tìm đa thức xấp xỉ đều tốt nhất bậc nhất $Q(x) = ax + b$ của hàm số $f(x) = \frac{1}{x}$ trên $[1, n]$, tính $f(1) = 1, f(n) = \frac{1}{n}$.

$A(1, 1), B(n, \frac{1}{n})$ là 2 điểm thuộc đồ thị hàm số $f(x) = \frac{1}{x}$ trên $[1, n]$.

Phương trình đường thẳng $AB: y = -\frac{1}{n}x + \frac{n+1}{n}$, hệ số góc $k = -\frac{1}{n}$.

Xét $f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Vì tiếp tuyến song song AB nên $:-\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{n} \Rightarrow x_0 = \sqrt{n}, \quad x_0 \in [1, n]$,

suy ra $f(x_0) = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Khi đó phương trình tiếp tuyến tại $x_0 = \sqrt{n}$ là :

$$y = -\frac{1}{n}(x - \sqrt{n}) + \frac{1}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow y = -\frac{1}{n}x + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n}.$$

Ta có phương trình đường thẳng cần tìm là: $y = -\frac{1}{n}x + (\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n})$.

Vậy đa thức xấp xỉ đều tốt nhất bậc nhất của hàm số $f(x) = \frac{1}{x}$ trên $[1, n]$ là :

$Q(x) = -\frac{1}{n}x + (\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n})$, suy ra $a = -\frac{1}{n}, b = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n}$.

GTNN đạt được: $M_0 = \max_{x \in [1, n]} \left| \frac{1}{x} - (-\frac{1}{n}x + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n}) \right| = \frac{n+1}{2n} - \frac{1}{\sqrt{n}}$.

* Hướng dẫn sơ cấp:

Đặt $g(x) = \frac{1}{x} - (ax + b), M = \max_{x \in [1, n]} |g(x)|$.

Ta có $g(1) = 1 - a - b, g(n) = \frac{1}{n} - na - b, g(\sqrt{n}) = \frac{1}{\sqrt{n}} - a\sqrt{n} - b$.

Trường hợp 1: $a > -\frac{1}{n}$.

$$\begin{aligned}\text{Ta có : } 2M &\geq |g(\sqrt{n}) - g(1)| = \left| \frac{1}{\sqrt{n}} - a\sqrt{n} - 1 + a \right| \\ &= \left| (1 - \sqrt{n})\left(\frac{1}{\sqrt{n}} + a\right) \right| = \left| (\sqrt{n} - 1)\left(a + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right|.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Vì } a > -\frac{1}{n} &\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} + a > \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{n} - 1)\left(a + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) > (\sqrt{n} - 1)\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } 2M > (\sqrt{n} - 1)\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n}\right) = \frac{n+1}{n} - \frac{2}{\sqrt{n}} \Rightarrow M > M_0$$

Trường hợp 2: $a < -\frac{1}{n}$.

$$\text{Ta có } 2M \geq |g(\sqrt{n}) - g(n)| = \left| (\sqrt{n} - 1) \left(a\sqrt{n} + \frac{1}{n} \right) \right| = (\sqrt{n} - 1) \left| -\frac{1}{n} - a\sqrt{n} \right|.$$

$$\begin{aligned}\text{Vì } a < -\frac{1}{n} &\Leftrightarrow -a > \frac{1}{n} \Leftrightarrow -a\sqrt{n} > \frac{1}{\sqrt{n}} \\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{n} - a\sqrt{n} > -\frac{1}{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}.\end{aligned}$$

$$\text{Vậy } 2M > (\sqrt{n} - 1) \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} \right) = \frac{n+1}{n} - \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

$$\text{Suy ra } M > \frac{n+1}{n} - \frac{1}{\sqrt{n}} = M_0.$$

Trường hợp 3: $a = -\frac{1}{n}$. Ta có $g(1) = \frac{n+1}{n} - b = g(n)$, $g(\sqrt{n}) = \frac{2}{\sqrt{n}} - b$.

a) Nếu $b > \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{n+1}{2n}\right)$, khi đó:

$$-b < -\frac{n+1}{2n} - \frac{1}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{n}} - b < -\frac{n+1}{2n} - \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{2}{\sqrt{n}} = -\left(\frac{n+1}{2n} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

$$\text{Suy ra } \left| \frac{2}{\sqrt{n}} - b \right| > \left(\frac{n+1}{2n} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

$$\text{Vậy } M \geq |g(\sqrt{n})| = \left| \frac{2}{\sqrt{n}} - b \right| > \left(\frac{n+1}{2n} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = M_0.$$

$$\text{b, Nếu } b < \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{n+1}{2n} \Leftrightarrow -b > -\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{n+1}{2n}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n+1}{n} - b > \frac{n+1}{n} - \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{n+1}{2n} = \frac{n+1}{2n} - \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\text{Vậy } M \geq |g(1)| = \left| \frac{n+1}{n} - b \right| > \frac{n+1}{2n} - \frac{1}{\sqrt{n}} = M_0.$$

$$\text{c) Nếu } b = \frac{n+1}{2n} - \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

$$\text{Ta có } g(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{n}x - \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{n+1}{2n} \right).$$

$$\text{Khi đó : } g'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{n}, g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{n}.$$

Bảng biến thiên:

x	1	$\sqrt{n}$	n
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	M_0	$-M_0$	M_0

Nhận xét: Qua bài toán 9, bài toán 10, ta có thể đưa ra một lớp các bài toán có lời giải tương tự và đơn giản hơn với $n = 4, 9, 25, \dots$

Bài toán 11: Tìm a, b để $\max_{2 \leq x \leq 6} \left| \frac{x+2}{x-1} + ax + b \right|$ đạt min.

* Lời giải nhờ lý thuyết xấp xỉ đều tốt nhất:

Yêu cầu bài toán tương đương với: Tìm đa thức xấp xỉ đều tốt nhất bậc nhất $Q(x) = -ax - b$ của hàm số $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ trên $[2, 6]$.

Xét hàm số: $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$. Ta có $f(2) = 4, f(6) = \frac{8}{5}$.

$A(2, 4), B(6, \frac{8}{5})$ là 2 điểm thuộc đồ thị hàm số $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ trên $[2, 6]$.

Khi đó phương trình $AB: y = -\frac{3}{5}x + \frac{26}{5}$, hệ số góc $k = -\frac{3}{5}$.

$$\text{Ta có } f'(x) = -\frac{3}{(x-1)^2}.$$

$$f'(x) = k \Leftrightarrow -\frac{3}{(x_o - 1)^2} = -\frac{3}{5} \Leftrightarrow x_o = 1 + \sqrt{5} \in [2, 6].$$

$$\Rightarrow f(x_o) = \frac{3 + \sqrt{5}}{\sqrt{5}}.$$

Phương trình tiếp tuyến tại $x_o = 1 + \sqrt{5}$ là : $y = -\frac{3}{5}x + \left(\frac{8}{5} + \frac{6}{\sqrt{5}}\right)$.

Từ đó ta có phương trình đường thẳng cần tìm: $y = -\frac{3}{5}x + \frac{17}{5} + \frac{3}{\sqrt{5}}$

Vậy đa thức xấp xỉ đều tốt nhất bậc nhất của hàm số trên $[1, 2]$ là:

$$Q(x) = -\frac{3}{5}x + \frac{17}{5} + \frac{3}{\sqrt{5}}. \text{ Suy ra } a = \frac{3}{5}, \quad b = -\left(\frac{17}{5} + \frac{3}{\sqrt{5}}\right).$$

$$\text{GTNN đạt được : } M_0 = \max_{x \in [2, 6]} \left| \frac{x+2}{x-1} + \frac{3}{5}x - \left(\frac{17}{5} + \frac{3}{\sqrt{5}}\right) \right| = \frac{9}{5} - \frac{3}{\sqrt{5}}.$$

* Hướng dẫn sơ cấp:

$$\text{Đặt } g(x) = \frac{x+2}{x-1} + ax + b, \quad M = \max_{2 \leq x \leq 6} |g(x)|.$$

$$\text{Ta có } g(2) = 4 + 2a + b, \quad g(6) = \frac{8}{5} + 6a + b, \quad g(1 + \sqrt{5}) = (1 + \sqrt{5})a + b.$$

Trường hợp 1: $a > \frac{3}{5}$. Ta có:

$$\begin{aligned} 2M &\geq |f(1 + \sqrt{5})| + |f(6)| \\ &\geq |f(1 + \sqrt{5}) - f(6)| = \left| (\sqrt{5} - 5)a + \left(\frac{3}{\sqrt{5}} - \frac{3}{5}\right) \right| \\ &= \left| (5 - \sqrt{5})a + \left(\frac{3}{5} - \frac{3}{\sqrt{5}}\right) \right| \\ &> (5 - \sqrt{5})\frac{3}{5} + \frac{3}{5} - \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{18}{5} - \frac{6}{\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } M > \left(\frac{9}{5} - \frac{3}{\sqrt{5}}\right) = M_0.$$

Trường hợp 2: $a < \frac{3}{5}$.

$$\text{Ta có } 2M \geq |f(1 + \sqrt{5}) - f(2)| = \left| (\sqrt{5} - 1)a + \frac{3}{\sqrt{5}} - 3 \right|$$

$$= \left| \left(1 - \sqrt{5}\right) a + \left(3 - \frac{3}{\sqrt{5}}\right) \right| > \left(1 - \sqrt{5}\right) \frac{3}{5} + \left(3 - \frac{3}{\sqrt{5}}\right) = \frac{18}{5} - \frac{6}{\sqrt{5}}.$$

Suy ra $M > \left(\frac{9}{5} - \frac{3}{\sqrt{5}}\right) = M_0$.

Trường hợp 3: $a = \frac{3}{5}$.

Ta có: $g(2) = \frac{26}{5} + b = g(6)$, $g(1 + \sqrt{5}) = \frac{8}{5} + \frac{6}{\sqrt{5}} + b$.

$$\text{a) } b > -\left(\frac{17}{5} + \frac{3}{\sqrt{5}}\right) \Leftrightarrow \frac{26}{5} + b > \frac{26}{5} - \frac{17}{5} - \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{9}{5} - \frac{3}{\sqrt{5}}.$$

Suy ra $\left|\frac{26}{5} + b\right| > \frac{9}{5} - \frac{3}{\sqrt{5}} = M_0$.

Vậy $M \geq |g(2)| = \left|\frac{26}{5} + b\right| > M_0$.

$$\text{b) } b < -\left(\frac{17}{5} + \frac{3}{\sqrt{5}}\right).$$

Ta có $\frac{8}{5} + \frac{6}{\sqrt{5}} + b < \frac{8}{5} + \frac{6}{\sqrt{5}} - \frac{17}{5} - \frac{3}{\sqrt{5}} = -\left(\frac{9}{5} - \frac{3}{\sqrt{5}}\right)$.

Suy ra $\left|\frac{8}{5} + \frac{6}{\sqrt{5}} + b\right| > \frac{9}{5} - \frac{3}{\sqrt{5}} = M_0$.

Vậy $M \geq |g(1 + \sqrt{5})| = \left|\frac{8}{5} + \frac{6}{\sqrt{5}} + b\right| > M_0$.

$$\text{c) } b = -\left(\frac{17}{5} + \frac{3}{\sqrt{5}}\right). \text{ Khi đó } g(x) = \frac{x+2}{x-1} + \frac{3}{5}x - \left(\frac{17}{5} + \frac{3}{\sqrt{5}}\right).$$

Ta có $g'(x) = -\frac{3}{(x-1)^2} + \frac{3}{5}$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 + \sqrt{5} \in [2, 6]$.

Bảng biến thiên:

x	2	$1 + \sqrt{5}$	6
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	M_0	$-M_0$	M_0

Bài toán 12: Tìm a, b để $\max_{x \in [0,1]} \left| \frac{x^2 + 2x - 1}{x + 1} - (ax + b) \right|$ đạt min.

* Lời giải nhờ lý thuyết xấp xỉ đều tốt nhất:

Yêu cầu bài toán tương đương với :

Tìm đa thức xấp xỉ đều tốt nhất $Q(x) = ax + b$ của hàm số $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 1}{x + 1}$ trên $[0, 1]$. Có $f(0) = -1, f(1) = 1$.

Ta thấy $A(0, -1), B(1, 1)$ là 2 điểm thuộc đồ thị hàm số $f(x)$ trên $[0, 1]$. Khi đó phương trình AB là: $y = 2x - 1$, hệ số góc $k = 2$.

Ta có: $f'(x) = 1 + \frac{2}{(x + 1)^2}$.

$$f'(x_0) = k \Leftrightarrow 1 + \frac{2}{(x_0 + 1)^2} = 2 \Leftrightarrow x_0 = -1 + \sqrt{2} \in [0, 1].$$

$$f(x_0) = 0.$$

Phương trình tiếp tuyến của $f(x)$ tại $x_0 = -1 + \sqrt{2}$ là: $y = 2x + 2 - 2\sqrt{2}$

Khi đó phương trình đường thẳng cần tìm là: $y = 2x + \frac{1}{2} - \sqrt{2}$.

Vậy đa thức xấp xỉ đều tốt nhất của hàm số trên $[0, 1]$ là :

$$Q(x) = 2x + \frac{1}{2} - \sqrt{2}. \text{ Suy ra } a = 2, b = \frac{1}{2} - \sqrt{2}.$$

$$\text{GTNN đạt được: } M_0 = \max_{x \in [0,1]} \left| \frac{x^2 + 2x - 1}{x + 1} - 2x - \frac{1}{2} + \sqrt{2} \right| = \sqrt{2} - \frac{3}{2}.$$

* Hướng dẫn sơ cấp:

$$\text{Đặt } g(x) = \frac{x^2 + 2x - 1}{x + 1} - (ax + b), M = \max_{x \in [0,1]} |g(x)|.$$

$$\text{Ta có } g(0) = -1 - b, g(1) = 1 - a - b, g(-1 + \sqrt{2}) = (1 - \sqrt{2})a - b.$$

Trường hợp 1: $a > 2$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } 2M &\geq |g(0) - g(-1 + \sqrt{2})| \\ &= |-1 + (\sqrt{2} - 1)a| > -1 + (\sqrt{2} - 1).2 = 2\sqrt{2} - 3 \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } M > \sqrt{2} - \frac{3}{2} = M_0.$$

Trường hợp 2: $a < 2$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } 2M &\geq |g(1) - g(-1 + \sqrt{2})| = |1 + (\sqrt{2} - 2)a| \\ &> 1 + (\sqrt{2} - 2).2 = 2\sqrt{2} - 3. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } M > \sqrt{2} - \frac{3}{2} = M_0.$$

Trường hợp 3: $a = 2$.

$$\text{Ta có } g(0) = -1 - b = g(1), \quad g(-1 + \sqrt{2}) = 2 - 2\sqrt{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{a) } b &> \frac{1}{2} - \sqrt{2} \Leftrightarrow -b < \sqrt{2} - \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow (2 - 2\sqrt{2}) - b < \sqrt{2} - \frac{1}{2} + (2 - 2\sqrt{2}) = -\left(\sqrt{2} - \frac{3}{2}\right). \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } M \geq |g(-1 + \sqrt{2})| = |(2 - 2\sqrt{2}) - b| > \sqrt{2} - \frac{3}{2} = M_0.$$

$$\begin{aligned} \text{b) } b &< \frac{1}{2} - \sqrt{2} \Leftrightarrow -b > \sqrt{2} - \frac{1}{2} \Leftrightarrow -1 - b < \sqrt{2} - \frac{1}{2} - 1 = \left(\sqrt{2} - \frac{3}{2}\right) \\ &\Leftrightarrow |-1 - b| > \sqrt{2} - \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } M \geq |g(0)| = |-1 - b| > \sqrt{2} - \frac{3}{2} = M_0.$$

$$\text{c) } b = \frac{1}{2} - \sqrt{2}. \text{ Ta có } g(x) = \frac{x^2 + 2x - 1}{x + 1} - 2x - \frac{1}{2} + \sqrt{2}.$$

$$\text{Suy ra } g'(x) = 1 + \frac{2}{(x + 1)^2} - 2 = \frac{2}{(x + 1)^2} - 1.$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 + \sqrt{2}.$$

Bảng biến thiên:

x	0	$-1 + \sqrt{2}$	1
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	$-M_0$	M_0	$-M_0$

Bài toán 13: Tìm a, b sao cho $\max_{x \in [0,1]} |\sqrt{x} - (ax + b)|$ đạt min.

* Lời giải nhờ lý thuyết xấp xỉ đều tốt nhất:

Yêu cầu bài toán tương đương với:

Tìm đa thức xấp xỉ đều tốt nhất bậc nhất $Q(x) = ax + b$ của hàm số $f(x) = \sqrt{x}$ trên $[0, 1]$. Ta có $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

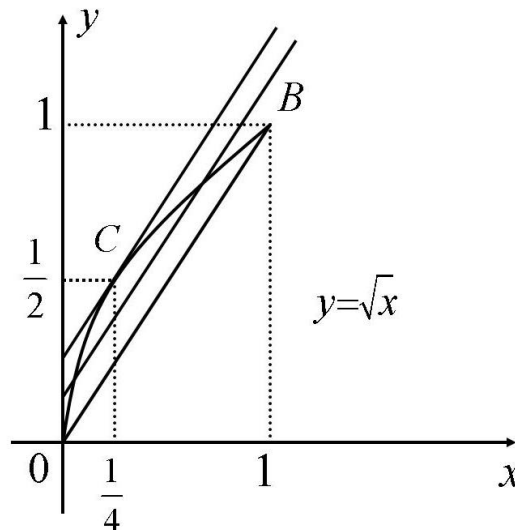
$$f''(x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2x\sqrt{x}} < 0, \quad x \in [0, 1].$$

Khi đó $f(x)$ lồi trên $[0, 1]$ và $O(0, 0), B(1, 1)$ là 2 điểm thuộc đồ thị hàm số $f(x) = \sqrt{x}$. Nên phương trình OB là: $y = x$, hệ số góc $k = 1$.

Giả sử C là điểm thuộc đồ thị hàm số $f(x) = \sqrt{x}$, mà tiếp tuyến với đồ thị C song song với OB , nên hoành độ điểm C là nghiệm phương trình: $f'(x_0) = k$. Hay $\frac{1}{2\sqrt{x_0}} = 1 \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{4}, f(x_0) = \frac{1}{2}$.

Phương trình tiếp tuyến tại C : $y = (x - \frac{1}{4}) + \frac{1}{2} \Leftrightarrow y = x + \frac{1}{4}$.

Đường thẳng song song cách đều OB và tiếp tuyến tại C là: $y = x + \frac{1}{8}$.



Vậy đa thức xấp xỉ đều tốt nhất bậc nhất của $f(x)$ trên $[0, 1]$ là:

$$Q(x) = x + \frac{1}{8}. \text{ Suy ra } a = 1, b = \frac{1}{8}.$$

GTNN đạt được $M_0 = \max_{x \in [0,1]} \left| \sqrt{x} - x - \frac{1}{8} \right| = \frac{1}{8}$.

* Hướng dẫn sơ cấp:

Xét tại 3 điểm O, B, C với các hoành độ $x = 0, x = \frac{1}{4}, x = 1$.

Cách 1: Đặt $g(x) = \sqrt{x} - (ax + b)$, $M = \max_{x \in [0,1]} |g(x)|$.

Ta có $g(0) = -b, g(1) = 1 - a - b, g(\frac{1}{4}) = \frac{1}{2} - \frac{a}{4} - b$.

Trường hợp 1: $a > 1$. Khi đó:

$$2M \geq \left| g\left(\frac{1}{4}\right) - g(1) \right| = \left| \frac{3a}{4} - \frac{1}{2} \right| > \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow M > \frac{1}{8} = M_0$$

Trường hợp 2: $a < 1$. Khi đó $2M \geq \left| g\left(\frac{1}{4}\right) - g(0) \right| = \left| \frac{1}{2} - \frac{a}{4} \right|$.

$$a < 1 \Leftrightarrow -a > -1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} - \frac{a}{4} > \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Suy ra } 2M \geq \left| \frac{1}{2} - \frac{a}{4} \right| > \frac{1}{4} \Rightarrow M > \frac{1}{8} = M_0.$$

Trường hợp 3: $a = 1 \Rightarrow g(0) = -b = g(1), g(\frac{1}{4}) = \frac{1}{4} - b$.

$$\text{a) } b > \frac{1}{8} \Leftrightarrow |b| > \frac{1}{8}.$$

$$\text{Vậy } M \geq |g(0)| = |-b| = |b| > \frac{1}{8} = M_0.$$

$$\text{b) } b < \frac{1}{8} \Leftrightarrow -b < -\frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{1}{4} - b > \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}.$$

$$\text{Vậy } M \geq \left| g\left(\frac{1}{4}\right) \right| = \left| \frac{1}{4} - b \right| > \frac{1}{8} = M_0.$$

$$\text{c) } b = \frac{1}{8}, \text{ khi đó } g(x) = \sqrt{x} - x - \frac{1}{8}.$$

$$\text{Nên } g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 1, \quad g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}.$$

Bảng biến thiên:

x	0	$\frac{1}{4}$	1
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$

Cách 2:

Xét tại $x = 0, x = \frac{1}{4}, x = 1$, đặt $f(x) = |\sqrt{x} - (ax + b)|$.

Ta có $f(0) = |b|, f(1) = |1 - a - b| = |a + b - 1|, f(\frac{1}{4}) = \left| \frac{1}{2} - \frac{a}{4} - b \right|$.

Suy ra $f(1) + 4f(\frac{1}{4}) = |a + b - 1| + |2 - a - 4b| \geq |1 - 3b|$.

Dấu " $=$ " xảy ra $\Leftrightarrow (2 - a - 4b)(a + b - 1) \geq 0$.

Ta lại suy ra được $f(1) + 4f(\frac{1}{4}) + 3f(0) \geq |1 - 3b| + 3|b| \geq 1$.

Dấu " $=$ " xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} (1 - 3b)3b \geq 0 \\ (2 - a - 4b)(a + b - 1) \geq 0 \end{cases}$

Do đó nếu đặt $M = \max_{x \in [0,1]} |f(x)|$ thì $8M \geq 1 \Rightarrow M \geq \frac{1}{8}$.

$$M = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \begin{cases} f(1) = f(\frac{1}{4}) = f(0) = \frac{1}{8} \\ (1 - 3b).3b \geq 0 \\ (2 - a - 4b)(a + b - 1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = \frac{1}{8} \end{cases}$$

Vậy $a = 1, b = \frac{1}{8}$ và $M = \max_{x \in [0,1]} \left| \sqrt{x} - x - \frac{1}{8} \right| = \frac{1}{8} = M_0$.

Bài toán 14: Tìm a, b để $\max_{x \in [0,1]} |\sqrt[3]{x} - (ax + b)|$ đạt min.

* Lời giải nhờ lý thuyết xấp xỉ đều tốt nhất:

Yêu cầu bài toán tương đương với:

Tìm đa thức xấp xỉ đều tốt nhất bậc nhất $Q(x) = ax + b$ của hàm số $f(x) = \sqrt[3]{x}$ trên $[0, 1]$. Ta có $f(0) = 0, f(1) = 1$.

Dễ thấy $A(0, 0), B(1, 1)$ là 2 điểm thuộc đồ thị hàm số $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

Nên phương trình AB là : $y = x$, hệ số góc $k = 1$.

Ta có $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, f'(x_0) = k \Leftrightarrow \frac{1}{3\sqrt[3]{x_0^2}} = 1$.

Suy ra $x_0 = \frac{1}{3\sqrt{3}} \in [0, 1], f(x_0) = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Phương trình tiếp tuyến của $f(x)$ tại $x_0 = \frac{1}{3\sqrt{3}}$ là $y = x + \frac{2}{3\sqrt{3}}$.

Khi đó phương trình đường thẳng cần tìm là: $y = x + \frac{1}{3\sqrt{3}}$.

GTNN đạt được $M_0 = \max_{x \in [0,1]} \left| \sqrt[3]{x} - x - \frac{1}{3\sqrt{3}} \right| = \frac{1}{3\sqrt{3}}$.

* Hướng dẫn sơ cấp:

Đặt $g(x) = \sqrt[3]{x} - (ax + b), M = \max_{x \in [0,1]} |g(x)|$.

Ta có $g(0) = -b, g(1) = 1 - a - b, g\left(\frac{1}{3\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} - a \cdot \frac{1}{3\sqrt{3}} - b$.

Trường hợp 1: $a > 1$.

$2M \geq \left| g\left(\frac{1}{3\sqrt{3}}\right) - g(1) \right| = \left| \frac{(a-1)(3\sqrt{3}-1)+2}{3\sqrt{3}} \right| > \frac{2}{3\sqrt{3}}$.

Suy ra $M > \frac{1}{3\sqrt{3}} = M_0$.

Trường hợp 2: $a < 1$.

$$\text{Ta có } 2M \geq \left| g\left(\frac{1}{3\sqrt{3}}\right) - g(0) \right| = \left| \frac{3-a}{3\sqrt{3}} \right| > \frac{3-1}{3\sqrt{3}} = \frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

$$\text{Suy ra } M > \frac{1}{3\sqrt{3}} = M_0.$$

Trường hợp 3: $a = 1$. Ta có $g(0) = -b = g(1)$, $g\left(\frac{1}{3\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}} - b$.

$$\text{a) } b > \frac{1}{3\sqrt{3}} \Leftrightarrow |b| > \frac{1}{3\sqrt{3}}.$$

$$\text{Khi } M \geq |g(0)| = |-b| = |b| > \frac{1}{3\sqrt{3}} = M_0.$$

$$\text{b) } b < \frac{1}{3\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{2}{3\sqrt{3}} - b > \frac{2}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{3\sqrt{3}}.$$

$$\text{Khi đó } M \geq \left| g\left(\frac{1}{3\sqrt{3}}\right) \right| = \left| \frac{2}{3\sqrt{3}} - b \right| > \frac{1}{3\sqrt{3}} = M_0.$$

$$\text{c) } b = \frac{1}{3\sqrt{3}}. \text{ Ta có } g(x) = \sqrt[3]{x} - x - \frac{1}{3\sqrt{3}}, \text{ Suy ra } g'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x}} - 1$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - 3\sqrt[3]{x^2} = 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^2} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{27} \Rightarrow x = \frac{1}{3\sqrt{3}} \in [0, 1].$$

Bảng biến thiên:

x	0	$\frac{1}{3\sqrt{3}}$	1
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$		M_0	
	$-M_0$		$-M_0$

Chú ý: Ta có thể biến dạng bài toán như sau:

Tìm a, b để $\max_{t \in [0,1]} |at^3 + t + b|$ đạt GTNN.

(Nếu đặt $t^3 = x$ thì quay về bài toán tương tự như trên).

Bài toán 15: Tìm a, b để $\max_{x \in [0,1]} |\sqrt[n]{x} - (ax + b)|$ đạt min.

* Lời giải nhờ lý thuyết xấp xỉ đều tốt nhất:

Yêu cầu bài toán tương đương với:

Tìm đa thức xấp xỉ đều tốt nhất bậc nhất $Q(x) = ax + b$ của hàm số $f(x) = \sqrt[n]{x}$ trên $[0, 1]$. Ta có $f(0) = 0, f(1) = 1$.

Dễ thấy $A(0, 0), B(1, 1)$ là 2 điểm thuộc đồ thị hàm số $f(x) = \sqrt[n]{x}$.

Khi đó phương trình AB là : $y = x$, hệ số góc $k = 1$.

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{1}{n} x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{x^{\frac{n-1}{n}}}.$$

$$f'(0) = k \Leftrightarrow \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{x_0^{\frac{n-1}{n}}} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{n} = x_0^{\frac{n-1}{n}}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{n}\right)^n = x_0^{n-1} \Leftrightarrow x_0 = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{n-1}{n}}.$$

$$\text{Suy ra } f(x_0) = \left(\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Từ đó ta có phương trình tiếp tuyến của $f(x)$ tại $x_0 = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{n-1}{n}}$ là:

$$\begin{aligned} y &= x - \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{n-1}} + \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}} = x - \left(\frac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n-1}} + \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}} \\ &= x + \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = x + \frac{n-1}{n} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}. \end{aligned}$$

$$\text{Hay } y = x + \frac{n-1}{n} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

$$\text{Suy ra phương trình đường thẳng cần tìm : } y = x + \frac{n-1}{2n} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Vậy đa thức xấp xỉ đều tốt nhất bậc nhất của $f(x)$ trên $[0, 1]$ là

$$Q(x) = x + \frac{n-1}{2n} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}, \text{ nên ta có } a = 1, b = \frac{n-1}{2n} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

$$\text{GTNN đạt được: } M_0 = \max_{x \in [0,1]} \left| \sqrt[n]{x} - x - \frac{n-1}{2n} \left(\frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{n-1}} \right| = \frac{n-1}{2n} \cdot \left(\frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

* Hướng dẫn sơ cấp:

$$\text{Đặt } g(x) = \sqrt[n]{x} - (ax + b), M = \max_{x \in [0,1]} |g(x)|.$$

$$\text{Ta có } g(0) = -b, g(1) = 1-a-b, g\left(\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{n-1}}\right) = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}} - a \cdot \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Trường hợp 1: $a > 1$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } 2M &\geq \left| g\left(\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{n-1}}\right) - g(1) \right| = \left| \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}} - a \cdot \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}} - 1 \right| \\ &= \left| \frac{n - a - n \cdot n^{\frac{1}{n}-1} + a \cdot n \cdot n^{\frac{1}{n-1}}}{n \cdot n^{\frac{1}{n-1}}} \right| = \left| \frac{a \cdot n \cdot n^{\frac{1}{n-1}} n - a - n \cdot n^{\frac{1}{n-1}} + 1 + n - 1}{n \cdot n^{\frac{1}{n-1}}} \right| \\ &= \frac{a \left(n \cdot n^{\frac{1}{n-1}} - 1 \right) - \left(n \cdot n^{\frac{1}{n-1}} - 1 \right) + (n-1)}{n \cdot n^{\frac{1}{n-1}}} \\ &= \left| \frac{(a-1) \left(n \cdot n^{\frac{1}{n-1}} - 1 \right) + (n-1)}{n \cdot n^{\frac{1}{n-1}}} \right| > \frac{n-1}{n \cdot n^{\frac{1}{n-1}}}. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } M > \frac{n-1}{2n \cdot n^{\frac{1}{n-1}}} = M_0.$$

Trường hợp 2: $a < 1$

$$\text{Ta có: } 2M \geq \left| g\left(\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{n-1}}\right) - g(0) \right| = \left| \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{n-1}} - a \cdot \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}} \right|.$$

$$\begin{aligned} \text{Vì } a < 1 &\Leftrightarrow -a > -1 \Leftrightarrow -a \cdot \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}} > -\frac{1}{n} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}} \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{n-1}} - a \cdot \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}} > \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{n-1}} - \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}} = \frac{n-1}{n} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{n-1}}. \end{aligned}$$

Nên ta có $2M \geq \left| \left(\frac{1}{n} \right)^{\frac{n}{n-1}} - a \cdot \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{n} \right)^{\frac{n}{n-1}} \right| > \frac{n-1}{n} \left(\frac{1}{n} \right)^{\frac{n}{n-1}}.$

Hay $M > \frac{n-1}{2n} \left(\frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{n-1}} = M_0.$

Trường hợp 3: $a = 1.$

ta có $g(0) = -b = g(1), g \left(\left(\frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{n-1}} \right) = \frac{n-1}{n} \cdot \left(\frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{n-1}} - b.$

a) Nếu $b > \frac{n-1}{2n} \cdot \left(\frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{n-1}} \Leftrightarrow |b| > \frac{n-1}{2n} \cdot \left(\frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{n-1}}.$

Vậy $M \geq |g(0)| = |-b| = |b| > \frac{n-1}{2n} \cdot \left(\frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{n-1}} = M_0.$

b) Nếu $b < \frac{n-1}{2n} \cdot \left(\frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{n-1}} \Leftrightarrow -b > -\frac{n-1}{2n} \cdot \left(\frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{n-1}}.$

Khi đó : $\frac{n-1}{n} \cdot \left(\frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{n-1}} - b > \left(\frac{n-1}{n} \right) \left(\frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{n-1}} - \left(\frac{n-1}{2n} \right) \left(\frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{n-1}}.$

$$= \left(\frac{n-1}{2n} \right) \left(\frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{n-1}} = M_0.$$

Vậy $M \geq \left| g \left(\left(\frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{n-1}} \right) \right| > M_0.$

c) Nếu $b = \frac{n-1}{2n} \cdot \left(\frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{n-1}}.$

Ta có $g(x) = \sqrt[n]{x} - x - \frac{n-1}{2n} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}$.

$$g'(x) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{x^{\frac{n-1}{n}}} - 1.$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x^{\frac{n-1}{n}} = \frac{1}{n} \Leftrightarrow x = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{n-1}} = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{n-1}}.$$

Bảng biến thiên:

x	0	$\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{n-1}}$	1
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	$ \begin{array}{ccc} & M_0 & \\ -M_0 & \nearrow & \searrow -M_0 \end{array} $		

Nhận xét: Qua các bài toán 13, 14, 15 ta có thể đưa ra một lớp các bài tập có lời giải tương tự:

Bài tập 1: Tìm a, b để $\max_{x \in [0,4]} |\sqrt{x} - (ax + b)|$ đạt min.

Bài tập 2: Tìm a, b để $\max_{x \in [0,k^2]} |\sqrt{x} - (ax + b)|$ đạt min với $k \in \mathbb{N}$.

Bài tập 3: Tìm a, b để $\max_{x \in [0,5]} |\sqrt{x} - (ax + b)|$ đạt min.

Bài tập 4: Tìm a, b để $\max_{x \in [0,n]} |\sqrt{x} - (ax + b)|$ với $n \in \mathbb{N}$.

Bài tập 5: a, b để $\max_{x \in [0,n]} |\sqrt[n]{x} - (ax + b)|$, (với n là một số chính phương).

Bài tập 6: Tìm a, b để $\max_{x \in [0,k]} |\sqrt[n]{x} - (ax + b)|$ đạt min, với $k \in \mathbb{N}$.

Kết luận

Trong luận văn này, tôi đã trình bày về một số vấn đề về lý thuyết xấp xỉ đều tốt nhất và ứng dụng trong toán sơ cấp. Các kết quả thu được cụ thể là:

1) Nhắc lại một số khái niệm và ví dụ của giải tích về không gian Metric, không gian Banach, không gian Hilbert.

2) Nhắc lại được định nghĩa, định lý của lý thuyết xấp xỉ đều tốt nhất, trường hợp đặc biệt xấp xỉ bằng đa thức bậc không, xấp xỉ bằng đa thức bậc nhất.

3) Sử dụng lý thuyết xấp xỉ đều tốt nhất để giải quyết một lớp các bài toán sơ cấp với các hàm số thường gặp.

4) Áp dụng các bài tập đã làm được để đưa ra một số dạng bài tập tương tự phục vụ cho quá trình ôn tập học sinh giỏi ở Trung học phổ thông.

Trong luận văn này, tôi chưa xét đến việc tìm xấp xỉ đều tốt nhất bậc cao hơn bậc nhất cho một lớp các hàm số phức tạp. Đó là những bài toán tương đối phức tạp đòi hỏi nhiều kiến thức sâu rộng và tính toán tỉ mỉ. Tôi rất mong nhận được sự góp ý của quý thầy cô và các bạn để hoàn thiện hơn, mở rộng hơn luận văn này. Tôi xin trân trọng cảm ơn!

Tài liệu tham khảo

- [1] Phạm Kỳ Anh, *Giải tích số*, Nxb Đại học Quốc Gia Hà Nội, 2005.
- [2] Nguyễn Minh Chương(Chủ biên), Nguyễn Văn Khải, Khuất Văn Ninh, Nguyễn Tường, *Giải tích số*, Nxb Giáo dục, Hà Nội, 2001.
- [3] Phan Huy Khải, *Các phương pháp tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất*, Nxb Hà Nội, 2002.
- [4] Phan Huy Khải, *Các phương pháp giải toán giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất*, Nxb Đại học sư phạm, Hà Nội, 2011.
- [5] Nguyễn Xuân Liêm, *Giải tích hàm*, Nxb Giáo dục, Hà Nội, 1997.
- [6] Nguyễn Vũ Thanh, *263 Bài toán bất đẳng thức chọn lọc*, Nxb Giáo dục, Hà Nội, 1997.
- [7] Lê Đình Thịnh, *Phương pháp tính*, Nxb Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội, 1995.
- [8] Hoàng Tụy, *Hàm thực và Giải tích hàm*, Nxb Đại học Quốc Gia Hà Nội, 2003.
- [9] *Báo toán học tuổi trẻ*, năm 2000 đến nay.
- [10] Bakhvalov N.S, *Numerical methods* (tiếng Nga), 1973.