

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

LÝ ĐỨC VÂN

NGHIỆM KÌ DỊ TẠI MỘT ĐIỂM
CHO PHƯƠNG TRÌNH NAVIER – STOKES

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên, Năm 2012

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

LÝ ĐỨC VÂN

NGHIỆM KÌ DỊ TẠI MỘT ĐIỂM
CHO PHƯƠNG TRÌNH NAVIER – STOKES

Chuyên ngành: Toán Giải tích
Mã số: 60.46.01.02

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: PGS.TSKH Nguyễn Minh Trí

Thái Nguyên, Năm 2012

MỤC LỤC

	Trang
Một số ký hiệu	3
Mở đầu	5
Chương 1. Một số kiến thức chuẩn bị	
1.1. Không gian Sobolev	6
1.1.1. Đạo hàm yếu	6
1.1.2. Không gian Sobolev	6
1.1.3. Không gian phụ thuộc thời gian	7
1.2. Một số bất đẳng thức cơ bản	9
1.2.1. Một dạng biến thiên của bất đẳng thức Cauchy	9
1.2.2. Bất đẳng thức Holder	9
1.2.3. Bất đẳng thức nội suy với chuẩn L^p	9
1.2.4. Bất đẳng thức Gronwall	9
1.2.5. Bất đẳng thức Sobolev	10
1.3. Phương trình Stokes	10
1.3.1. Định nghĩa	10
1.3.2. Tính chất	11
1.4. Toán tử Stokes	11
1.4.1. Định nghĩa	11
1.4.2. Tính chất	11
1.5. Phương trình Navier – Stokes	13

Chương 2. Nghiệm kì dị tại một điểm cho phương trình Navier – Stokes

2.1. Nghiệm tường minh cho dòng chảy nhớt	16
2.2. Nghiệm kì dị cho dòng chảy không nhớt	23
Kết luận	29
Tài liệu tham khảo	30

MỘT SỐ KÝ HIỆU

- $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$: Tập các số thực.
- $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$: Tập các số thực không âm.
- $\mathbb{R}^n$: Không gian véc tơ tuyến tính thực n chiều với ký hiệu tích vô hướng là $\langle \cdot, \cdot \rangle$ và chuẩn véc tơ là $\| \cdot \|$.
- $C([a, b], \mathbb{R}^n)$: tập tất cả các hàm liên tục trên $[a, b]$ và nhận giá trị trên $\mathbb{R}^n$.
- $C(U) = \{u : U \rightarrow \mathbb{R} : u \text{ liên tục}\}$.
- $C(\bar{U}) = \{u \in C(U) : u \text{ liên tục đều}\}$.
- $C^k(U) = \{u : U \rightarrow \mathbb{R} : u \text{ là liên tục khả vi } k \text{ lần}\}$.
- $C^k(\bar{U}) = \{u \in C^k(U) : D^\alpha u \text{ là liên tục đều với mọi } |\alpha| \leq k\}$. Nếu $u \in C^k(\bar{U})$ thì $D^\alpha u$ thác triển liên tục tới $\bar{U}$ với mọi đa chỉ số α , $|\alpha| \leq k$.
- $L_2([a, b], \mathbb{R}^m)$: tập các hàm khả tích bậc hai trên $[a, b]$ và lấy giá trị trong $\mathbb{R}^m$.
- $C^\infty(U) = \{u : U \rightarrow \mathbb{R} : u \text{ khả vi vô hạn}\} = \bigcap_{k=0}^\infty C^k(U)$, $C^\infty(\bar{U}) = \bigcap_{k=0}^\infty C^k(\bar{U})$
- $C_c(U), C_c^k(U), \dots$, ký hiệu các hàm trong $C(U), C^k(U), \dots$, với giá compact.
- $L^p(U) = \{u : U \rightarrow \mathbb{R} : u \text{ là đo được Lebesgue, } \|u\|_{L^p(U)} < \infty\}$.

trong đó
$$\|u\|_{L^p(U)} = \left(\int_U |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (1 \leq p < \infty).$$

- $L^\infty(U) = \{u : U \rightarrow \mathbb{R} : u \text{ là đo được Lebesgue, } \|u\|_{L^\infty(U)} < \infty\}.$

Trong đó $\|u\|_{L^\infty(U)} = \operatorname{ess\,sup}_U |u|.$

- $L^p_{\text{loc}}(U) = \{u : U \rightarrow \mathbb{R} : u \in L^p(V) \text{ với mọi } V \subset\subset U\}.$
- $H^k(U), W^k_p(U)$ ($k=1,2,3,\dots$) ký hiệu các không gian Sobolev.

MỞ ĐẦU

Nghiệm ổn định hay tự đồng dạng với tính thuần nhất phù hợp đóng một vai trò cốt yếu trong lý thuyết chính quy của các bài toán phi tuyến, chúng có ý nghĩa vật lý và hình học thú vị. Điều này được chứng tỏ trong lý thuyết chính quy của các hàm điều hòa và các mặt cực tiểu. Định lý chính quy địa phương trong [CKN] chỉ ra rằng không tồn tại nghiệm tự đồng dạng với năng lượng địa phương nhỏ (có thể xem trong [TX] cho trường hợp tổng quát). Sử dụng các kết quả trong [NRS], Tsai đã chỉ ra sự tồn tại nghiệm tự đồng dạng với năng lượng địa phương hữu hạn. Tuy nhiên, vẫn còn một câu hỏi cần trả lời đó là liệu rằng nghiệm của phương trình Navier – Stokes trong không gian 3 chiều có thể sinh ra những điểm kỳ dị trong thời gian hữu hạn hay không? Do đó việc xây dựng những nghiệm đặc biệt của phương trình Navier – Stokes 3 chiều vẫn đáng được quan tâm. Chính vì vậy, tôi chọn đề tài “*Nghiệm kỳ dị tại một điểm cho phương trình Navier – Stokes*”.

Nội dung Luận văn sẽ trình bày một số kết quả nghiên cứu về nghiệm kỳ dị tại một điểm cho phương trình Navier – Stokes của Gang Tian và Zhouping Xin.

Qua đây, tôi xin bày tỏ sự kính trọng và lòng biết ơn sâu sắc tới thầy giáo PGS.TSKH Nguyễn Minh Trí, người đã tận tình hướng dẫn, tạo mọi điều kiện giúp đỡ tôi hoàn thành luận văn này. Tôi xin chân thành cảm ơn Ban Chủ nhiệm Khoa Sau đại học, Ban Chủ nhiệm khoa Toán trường Đại học Sư phạm – Đại học Thái Nguyên cùng các thầy cô giáo đã tham gia giảng dạy khoá học; xin cảm ơn gia đình, bạn bè, đồng nghiệp và các bạn cùng lớp cao học Toán K18B đã luôn quan tâm, động viên và giúp đỡ tôi trong suốt thời gian học tập và làm luận văn.

Thái Nguyên, ngày 01 tháng 8 năm 2012

Tác giả

Lý Đức Vân

Chương 1. MỘT SỐ KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Chương này sẽ giới thiệu sơ bộ về không gian Sobolev, một số bất đẳng thức cơ bản, phương trình Stokes, toán tử Stokes, phương trình Navier – Stokes.

1.1. Không gian Sobolev

Trong phần này tôi trình bày một số khái niệm và kết quả liên quan đến không gian Sobolev, phần chứng minh chi tiết có thể xem trong [RA].

1.1.1. Đạo hàm yếu

Định nghĩa 1.1.1.

Giả sử $u, v \in L^1_{\text{loc}}(U)$ và α là một đa chỉ số.

Ta nói rằng v là đạo hàm yếu cấp α của u nếu

$$\int_U u D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U v \phi dx$$

đúng với mọi hàm thử $\phi \in C_c^\infty(U)$.

Ký hiệu $D^\alpha u = v$.

Bổ đề 1.1.2. (Tính duy nhất của đạo hàm yếu).

Một đạo hàm yếu cấp α của u nếu tồn tại thì được xác định một cách duy nhất (sai khác trên tập có độ đo không).

1.1.2. Không gian Sobolev

Định nghĩa 1.1.3. Cố định $1 \leq p \leq \infty$ và cho k là số nguyên không âm. Không gian Sobolev $W_p^k(U)$ là tập tất cả các hàm khả tổng địa phương $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho với mỗi đa chỉ số $\alpha, |\alpha| \leq k$, đạo hàm yếu $D^\alpha u$ tồn tại và thuộc $L^p(U)$.

Chú ý 1.1.4. Nếu $p = 2$ ta có

$$H^k(U) = W_2^k(U) \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

là không gian Hilbert. Chú ý rằng $H^0(U) = L^2(U)$.

Định nghĩa 1.1.5. Nếu $u \in W_p^k(U)$, ta định nghĩa chuẩn của nó là

$$\|u\|_{W_p^k} := \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_U |D^\alpha u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (1 \leq p < \infty)$$

Và
$$\|u\|_{W_p^k} := \sum_{|\alpha| \leq k} \text{ess sup}_U |D^\alpha u|, \quad (p = \infty).$$

Định nghĩa 1.1.6. Bao đóng của $C_c^\infty(U)$ trong $H^k(U)$ được ký hiệu là $H_0^k(U)$.

Như vậy, ta coi $H_0^k(U)$ như là các tập các hàm $u \in H^k(U)$ sao cho $D^\alpha u = 0$ trên ∂U với mọi $|\alpha| \leq k - 1$.

Chúng ta ký hiệu $|u| = \|u\|_{L^2(\Omega)}$.

Chuẩn Dirichlet $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega \sum_{i=1}^n |D_i u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$ sẽ được ký hiệu là $\|u\|$.

1.1.3. Không gian phụ thuộc thời gian

Định nghĩa 1.1.7. Không gian $L^p(0, T; X)$ gồm tất cả các hàm đo được

$$u: [0, T] \rightarrow X \text{ với } \|u\|_{L^p(0, T; X)} := \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \text{ với } 1 \leq p < \infty,$$

và
$$\|u\|_{L^\infty(0, T; X)} := \text{ess sup}_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_X < \infty.$$

Định nghĩa 1.1.8. Không gian $L^p(0, T; L^q)$ gồm tất cả các hàm đo được $u: [0, T] \rightarrow L^q$

$$\text{với } \|u\|_{L^p(0, T; L^q)} := \left(\int_0^T \|u(t, x)\|_{L^q(\Omega)}^p dt \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_0^T \left(\int_{\Omega} |u(t, x)|^q dx \right)^{\frac{p}{q}} dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \quad 1 \leq p < \infty$$

$$\text{và } \|u\|_{L^\infty(0, T; L^q)} := \operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_{L^q(\Omega)} < \infty.$$

Định nghĩa 1.1.9. Không gian $C([0, T]; X)$ gồm tất cả các hàm liên tục $u: [0, T] \rightarrow X$ với $\|u\|_{C([0, T]; X)} := \max_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_X < \infty$.

Định lý 1.1.10. Cho $u \in W_p^1(0, T; X)$ với $1 \leq p \leq \infty$.

Khi đó $u \in C([0, T]; X)$ và

$$u(t) = u(s) + \int_s^t u'(\tau) d\tau$$

với mỗi $0 \leq s \leq t \leq T$. Hơn nữa, $\max_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\| \leq C \|u\|_{W(0, T; X)}$, hằng số C chỉ phụ thuộc vào T .

Định lý 1.1.11. Giả sử $u \in L^2(0, T; H_0^1(U))$, với $u' \in L^2(0, T; H^{-1}(U))$.

(i) Khi đó $u \in C([0, T]; L^2(U))$.

(ii) Ánh xạ $t \mapsto \|u(t)\|_{L^2(U)}^2$ là liên tục tuyệt đối, với

$$\frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^2(U)}^2 = 2 \langle u'(t), u(t) \rangle, \quad 0 \leq t \leq T \text{ h.k.n.}$$

(iii) Hơn nữa, $\max_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_{L^2(U)} \leq C \left(\|u\|_{L^2(0, T; H_0^1(U))} + \|u'\|_{L^2(0, T; H^{-1}(U))} \right),$

hằng số C chỉ phụ thuộc vào T .

1.2. Một số bất đẳng thức cơ bản

1.2.1. Một dạng biến thiên của bất đẳng thức Cauchy

$$ab \leq \xi a^2 + \frac{b^2}{4\xi} \quad (a, b > 0, \xi > 0).$$

1.2.2. Bất đẳng thức Holder

Giả thiết $1 \leq p, q \leq \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Khi đó nếu $u \in L^p(U), v \in L^q(U)$, ta có:

$$\int_U |uv| dx \leq \|u\|_{L^p(U)} \|v\|_{L^q(U)}.$$

1.2.3. Bất đẳng thức nội suy đối với chuẩn L^p

Giả thiết $1 \leq s \leq r \leq t \leq \infty$ và $\frac{1}{r} = \frac{\theta}{s} + \frac{1-\theta}{t}$. Giả sử $u \in L^s(U) \cap L^t(U)$.

Khi đó $u \in L^r(U)$ và $\|u\|_{L^r(U)} \leq \|u\|_{L^s(U)}^\theta \|u\|_{L^t(U)}^{1-\theta}$.

1.2.4. Bất đẳng thức Gronwall

Cho $\eta(\cdot)$ là một hàm liên tục tuyệt đối, không âm trên $[0, T]$ và thỏa mãn hầu khắp t bất đẳng thức vi phân

$$\eta'(t) \leq \phi(t)\eta(t) + \psi(t).$$

Trong đó $\phi(t), \psi(t)$ là các hàm khả tích, không âm trên $[0, T]$.

Khi đó

$$\eta(t) \leq e^{\int_0^t \phi(s) ds} \left[\eta(0) + \int_0^t \psi(s) ds \right], \text{ với } 0 \leq t \leq T.$$

1.2.5. Bất đẳng thức Sobolev

Giả sử $1 \leq p < n$, $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$. Khi đó tồn tại hằng số C chỉ phụ thuộc vào p và n sao cho:

$$\|u\|_{L^{p^*}} \leq C \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad u \in C_c^1(\mathbb{R}^n).$$

1.3. Phương trình Stokes

Ký hiệu $W = \left\{ \varphi \in (C_0^\infty(\Omega))^n : \operatorname{div}(\varphi) = 0 \right\}$.

H là bao đóng của W trong $L^2(\Omega)^n$. V là bao đóng của W trong $H_0^1(\Omega)^n$. Ta có

$$W \subset H_0^1(\Omega)^n \subset L^2(\Omega)^n \Rightarrow W \subset V \subset H.$$

1.3.1. Định nghĩa

Cho Ω là tập mở, bị chặn trong $\mathbb{R}^n$. Cho $f \in L^2(\Omega)^n$, $\nu > 0$ là một hằng số. Phương trình Stokes cho véc tơ $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ và f cho trước là

$$-\nu \Delta u + \operatorname{grad}(p) = f \quad \text{trong } \Omega, \quad (1.1)$$

$$\operatorname{div} u = 0 \quad \text{trong } \Omega, \quad (1.2)$$

$$u = 0 \quad \text{trên } \partial\Omega. \quad (1.3)$$

Nếu u, p là các hàm trơn thì tích phân từng phần ta được

$$\nu((u, v)) = (f, v), \quad \forall v \in V. \quad (1.4)$$

Trong đó $((u, v))$ là tích vô hướng

$$((u, v)) = \sum_{i=1}^n (D_i u, D_i v).$$

Chúng ta nói rằng u là nghiệm yếu của phương trình Stokes (1.1) – (1.3) nếu $u \in V$ và

$$v((u, v)) = (f, v), \quad \forall v \in V.$$

1.3.2. Tính chất

Người ta đã chứng minh được các tính chất sau (xem [CF]) của phương trình Stokes:

Định lý 1.3.1. Cho Ω là tập mở, bị chặn. Khi đó với mỗi $f \in L^2(\Omega)^n$, $\nu > 0$ tồn tại duy nhất nghiệm yếu của phương trình Stokes (1.1) – (1.3).

Định lý 1.3.2. Cho Ω là tập mở, bị chặn của lớp C^2 . Khi đó với mỗi $f \in L^2(\Omega)^n$, $\nu > 0$ tồn tại duy nhất nghiệm $u \in H^2(\Omega) \cap V$, $p \in H^1(\Omega)$ của phương trình Stokes (1.1) – (1.3). Hơn nữa,

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} + \|p\|_{H^1(\Omega)/\mathbb{R}} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

1.4. Toán tử Stokes

1.4.1. Định nghĩa

Cho Ω là một tập mở, bị chặn trong $\mathbb{R}^n$, $\partial\Omega$ thuộc lớp C^2 . Cho $f \in L^2(\Omega)^n$. Gọi $P: L^2(\Omega)^n \rightarrow H$ là phép chiếu Helmholtz – Leray.

Định nghĩa 1.4.1. Toán tử Stokes được định nghĩa là

$$A: D(A) \subset H \rightarrow H, \quad A = -P\Delta, \quad D(A) = H^2(\Omega) \cap V.$$

1.4.2. Tính chất

Mệnh đề 1.4.2. Toán tử Stokes là đối xứng, tức là

$$(Au, v) = (u, Av), \quad \forall u, v \in D(A).$$

Chứng minh. Trước hết giả sử $u, v \in (C_0^\infty(\Omega))^n$ và $\operatorname{div} u = \operatorname{div} v = 0$. Thì từ $Pu = u$, $Pv = v$ nên $(Au, v) = (u, Av)$ và ta có

$$-\int_{\Omega} (\Delta u_i) v_i dx = \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx.$$

Bây giờ, nếu $u, v \in D(A)$ tùy ý, chúng ta có thể xấp xỉ chúng trong $H^1(\Omega)^n$ bởi một hàm trong V . Nếu $u \in D(A)$ và $v \in V$ thì hiển nhiên

$$-\int_{\Omega} (\Delta u_i) v_i dx = \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx \quad \text{đúng.}$$

Đặc biệt,

$$(Au, v) = (u, Av), \quad \forall u, v \in D(A).$$

Từ $((u, v))$ là đối xứng nên mệnh đề được chứng minh. Chúng ta chú ý rằng $(Au, v) = ((u, v))$ đúng với $u \in D(A), v \in V$. $\square$

Định lý 1.4.3. Toán tử Stokes là tự liên hợp.

Định lý 1.4.4. Nghịch đảo của toán tử Stokes, A^{-1} , là toán tử compact trong H .

Chứng minh. Cho $f \in H$, $A^{-1}f = u$ trong đó u là nghiệm duy nhất thuộc $H^2(\Omega) \cap V = D(A)$ của phương trình Stokes (xem [CF]). Ta đã biết $A^{-1}: H \rightarrow V$ là bị chặn. Ta có $K = A^{-1}$ là đơn ánh, compact và tự liên hợp vì

$$\langle A^{-1}f, g \rangle = \langle A^{-1}f, AA^{-1}g \rangle = \langle AA^{-1}f, A^{-1}g \rangle = \langle f, A^{-1}g \rangle.$$

Do đó tồn tại một dãy các số dương $\mu_j > 0$, $\mu_{j+1} \leq \mu_j$ và một cơ sở trực giao của H là (w_j) thỏa mãn $Kw_j = \mu_j w_j$. Đặt $\lambda_j = \mu_j^{-1}$ ta có $Aw_j = \lambda_j w_j$ (1.5)

$$0 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_j \leq \lambda_{j+1} \leq \dots \quad (1.6)$$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \lambda_j = \infty \quad (1.7)$$

$(w_j)_{j=1,2,\dots}$ là một cơ sở trực giao của H . $\square$

Mệnh đề 1.4.5. Nếu Ω là bị chặn thuộc lớp C^{1+2} , $l \geq 0$ thì $w_j \in H^{1+2}(\Omega)^n$.

Định nghĩa 1.4.6. Cho $\alpha > 0$ là một số thực. Chúng ta định nghĩa toán tử A^α bởi

$$A^\alpha(u) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^\alpha u_j w_j, \quad u = \sum_{j=1}^{\infty} u_j w_j, \quad u \in D(A^\alpha).$$

$$D(A^\alpha) = \left\{ u \in H \mid u = \sum_{j=1}^{\infty} u_j w_j, \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{2\alpha} |u_j|^2 < \infty, u_j \in \mathbb{R} \right\}.$$

1.5. Phương trình Navier – Stokes

Giả sử $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ là một tập mở. Phương trình Navier – Stokes là một hệ $(n+1)$ phương trình với các ẩn $u_1(t, x), \dots, u_n(t, x)$ miêu tả một véc tơ vận tốc và $p(t, x)$ miêu tả áp suất. Biến $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$ biểu diễn thời gian và vị trí. Hệ phương trình có dạng:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} - \nu \Delta u_i + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = f_i, \quad i=1,2,\dots,n, \quad (1.8)$$

$$\operatorname{div} u = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0. \quad (1.9)$$

Véc tơ $\left(u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad i=1,2,\dots,n$ được kí hiệu bởi $(u \cdot \nabla)u$ hoặc $u \cdot \nabla u$. Các hàm $f_i(t, x)$ là các lực cho trước. Hệ số $\nu > 0$ được gọi là hệ số nhớt động học. Hệ phương trình trên có điều kiện biên. Đó là điều kiện dính:

$$u(t, x) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \quad (1.10)$$

Hoặc điều kiện biên điều hòa:

$$u(t, x + L e_i) = u(t, x), \quad L > 0, \quad e_i \text{ là cơ sở chính tắc trong } \mathbb{R}^n. \quad (1.10')$$

$$\text{Với điều kiện ban đầu: } u(0, x) = u_0(x) \quad (1.11)$$

ở đây u_0 là một hàm véc tơ cho trước.

Hệ phương trình Navier – Stokes có tính chất quan trọng. Giả sử các hàm $v(s,y)$, $q(s,y)$ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} \frac{\partial v_i}{\partial s} - \mu \Delta v_i + v_j \frac{\partial v_i}{\partial y_j} + \frac{\partial q}{\partial y_i} = g_i(s, y), & i=1,2,\dots,n. \\ \frac{\partial v_i}{\partial y_i} = 0. \end{cases}$$

Với $s > 0$, $y \in D \subset \mathbb{R}^n$. Khi đó với $L > 0, T > 0$ các hàm:

$$u(t, x) = \frac{L}{T} v\left(\frac{t}{T}, \frac{x}{L}\right), \quad (1.12)$$

$$p(t, x) = \frac{L^2}{T^2} q\left(\frac{t}{T}, \frac{x}{L}\right) \quad (1.13)$$

là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + (u \cdot \nabla) u + \nabla p = f, \\ \operatorname{div} u = 0. \end{cases}$$

Trong $\Omega = LD$ với $t > 0$ và:

$$f = \frac{L}{T^2} g\left(\frac{t}{T}, \frac{x}{L}\right) \text{ và} \quad (1.14)$$

$$\nu = \frac{L^2}{T} \mu. \quad (1.15)$$

Tất cả các vấn đề về hệ phương trình Navier – Stokes đều phải dựa trên (1.12) và (1.13). Chúng ta nói rằng u có chiều L/T , p có chiều L^2/T^2 , f có chiều L/T^2 và ν có chiều L^2/T . Chiều của biến t là T và của x là L .

Áp dụng phép chiếu Leray P vào (1.8) ta được các hàm trơn $u(t,x)$, $p(t,x)$ thỏa mãn (1.8), (1.9) và:

$$\frac{du}{dt} + vAu + B(u, u) = Pf. \quad (1.16)$$

Với A là toán tử Stokes và:

$$B(u, u) = P(u \cdot \nabla u). \quad (1.17)$$

Việc áp dụng toán tử P để loại bỏ áp suất từ hệ phương trình. Trong (1.16), đại lượng vAu đã được loại bỏ. Nghĩa là năng lượng đã được loại bỏ hoặc làm trơn đi. Đại lượng $B(u, u)$ là đại lượng phi tuyến và Pf là đại lượng cưỡng bức.

Chương 2. NGHIỆM KÌ DỊ TẠI MỘT ĐIỂM CHO PHƯƠNG TRÌNH NAVIER – STOKES

Trong chương này, chúng ta xây dựng họ một tham số của các nghiệm tron tường minh của phương trình Navier – Stokes 3 chiều trên $\mathbb{R}^3 \setminus p$, với p là điểm cho trước bất kì. Những nghiệm này đối xứng theo trục, thuần nhất bậc -1. Chúng là các nghiệm ổn định và tự đồng dạng của các phương trình Navier – Stokes. Các nghiệm như vậy là duy nhất trong lớp các dòng chảy đối xứng theo trục. Chúng có thể cung cấp ansatz ở vô cực cho nghiệm kì dị của phương trình Navier – Stokes hoặc các bài toán bên ngoài cho phương trình Navier – Stokes dưng 3 chiều. Cấu trúc của các nghiệm sẽ được chỉ ra trong mục tiếp theo. Độc giả có thể xem trong [CP], [GK] cho các bài toán có liên quan. Cần lưu ý rằng, với các tham số đặc biệt, các nghiệm sẽ trở thành các nghiệm đã biết như một phản lực nổi lên từ một nguồn điểm ([LL]). Tuy nhiên, cách tiếp cận của ta tổng quát hơn khi nó cũng cho tính duy nhất nghiệm và có thể áp dụng cho cả chất lỏng lí tưởng.

Trong phần 2.2, ta sẽ chỉ ra rằng các phương trình Euler 3 chiều không có nghiệm kiểu này. Thay thế nó là lớp nghiệm đối xứng theo trục thuần nhất với bậc -1 đối với các bài toán cho hệ vô hình.

2.1. Nghiệm tường minh cho dòng chảy nhớt

Trong mục này, ta sẽ chỉ ra công thức tường minh cho họ 1 tham số các nghiệm kì dị của các phương trình Navier – Stokes 3 chiều, chúng ổn định, đối xứng quanh trục, thuần nhất bậc -1 và chính quy hầu khắp nơi ngoại trừ tại 1 điểm cho trước (nghiệm kì dị 1 điểm). Hơn nữa, ta sẽ chứng minh rằng công thức nghiệm đó sinh ra tất cả các nghiệm kì dị 1 điểm có thể có của một dòng chảy nhớt đối xứng quanh trục. Chính xác hơn, chúng ta sẽ trình bày về các định lí sau:

Định lí 2.1.1. *Tất cả các nghiệm kì dị 1 điểm của các phương trình Navier-Stokes 3 chiều kì dị tại (x_1^0, x_2^0, x_3^0) và đối xứng quanh trục x_1 , được cho bởi công thức sau:*

$$\vec{u}(\vec{x}) = 2 \left(\frac{cr^2 - r(x_1 - x_1^0) + c(x_1 - x_1^0)^2}{r(cr - (x_1 - x_1^0))^2}, \frac{(x_2 - x_2^0)(c(x_1 - x_1^0) - r)}{r(cr - (x_1 - x_1^0))^2}, \right. \\ \left. \frac{(x_3 - x_3^0)(c(x_1 - x_1^0) - r)}{r(cr - (x_1 - x_1^0))^2} \right) \quad (2.1)$$

$$p(\vec{x}) = \frac{4(c(x_1 - x_1^0) - r)}{r(cr - (x_1 - x_1^0))^2}, \quad (2.2)$$

với $r = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + (x_3 - x_3^0)^2}$, và c là một hằng số bất kì thỏa mãn

$$|c| > 1. \quad (2.3)$$

Chứng minh. Dựa vào tính bất biến đối với phép tịnh tiến của các phương trình Navier – Stokes, ta có thể giả sử điểm kì dị là gốc tọa độ $\vec{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0) = (0, 0, 0)$. Ta kí hiệu

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = |\vec{x}|, \quad s = \frac{x_1}{r}. \quad (2.4)$$

Công việc chính của chúng ta là tìm nghiệm của phương trình Navier-Stokes 3D dưới dạng sau:

$$\vec{u}(\vec{x}) = (u_1(\vec{x}), u_2(\vec{x}), u_3(\vec{x})) = \frac{1}{r} \left(f(s), \frac{x_2}{r}g(s) + \frac{x_3}{r}k(s), \frac{x_3}{r}g(s) - \frac{x_2}{r}k(s) \right), \quad (2.5)$$

$$p(\vec{x}) = \frac{1}{r^2} h(s), \quad (2.6)$$

với $f(s), g(s), k(s), h(s)$ là các hàm khả vi liên tục cấp 2 và bị chặn trên đoạn $[-1, 1]$, để từ (2.5) – (2.6) ta giải ra nghiệm hầu khắp nơi ngoại trừ tại $r = 0$. Điều này dẫn đến một hệ phương trình vi phân thường cấp 2 đối với $(f(s), g(s), k(s), h(s))$.

Tính toán trực tiếp, ta có:

$$\nabla u_1 = \left(\frac{1}{r^2} (-sf(s) + (1-s^2)f'(s)), -\frac{x_2}{r^3} (f(s) + sf'(s)), -\frac{x_3}{r^3} (f(s) + sf'(s)) \right), \quad (2.7)$$

$$\vec{u} \cdot \nabla u_1 = \frac{1}{r^3} (-sf^2(s) + (1-s^2)f(s)f'(s) - (1-s^2)gf - s(1-s^2)gf'), \quad (2.8)$$

$$\Delta u_1 = \frac{1}{r^3} [(1-s^2)f']', \quad (2.9)$$

$$\nabla p = \frac{1}{r^3} \left([(1-s^2)h']', -\frac{x_2}{r} (2h + sh'), -\frac{x_3}{r} (2h + sh') \right), \quad (2.10)$$

Trong đó $f' = \frac{d}{ds}(f(s))$,

Thành phần đầu tiên của định luật bảo toàn động lượng tương đương với

$$t((1-s^2)f')' - ((1-s^2)h)' + sf^2 - (1-s^2)ff' + (1-s^2)gf + s(1-s^2)gf' = 0. \quad (2.11)$$

Tiếp theo, tính toán ta có:

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \nabla u_2 &= \frac{x_2}{r_4} [-2sgf + (1-s^2)g'f + (2s^2-1)g^2 - s(1-s^2)gg' - k^2] \\ &\quad + \frac{x_3}{r^4} [-2skf + (1-s^2)k'f + 2s^2kg - s(1-s^2)gk'], \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\Delta u_2 = \frac{x_2}{r^4} [(1-s^2)g]'' + \frac{x_3}{r^4} [(1-s^2)k]'' . \quad (2.13)$$

Từ (2.10), (2.12) và (2.13), ta có thành phần thứ hai của định luật bảo toàn động lượng trong phương trình Navier – Stokes tương đương với hệ sau:

$$\left((1-s^2)g\right)'' + 2sfg - (1-s^2)g'f - (2s-1)g^2 + s(1-s^2)gg' + 2h + sh' + k^2 = 0, \quad (2.14)$$

$$\left((1-s^2)k\right)'' + 2skf - (1-s^2)k'f - 2s^2kg + s(1-s^2)gk' = 0. \quad (2.15)$$

Do tính đối xứng, rõ ràng hệ (2.14) – (2.15) tương đương với thành phần thứ 3 của định luật bảo toàn động lượng trong phương trình Navier – Stokes. Cuối cùng, dễ dàng kiểm tra phương trình liên tục $\text{div } \vec{u} = 0$ trở thành

$$(1-s^2)f' - sf - s(1-s^2)g' + 2s^2g = 0. \quad (2.16)$$

Do đó, để chứng minh Định lí 1, ta cần nghiên cứu tất cả những nghiệm không chính quy $(f, g, h, k)(s)$ của hệ phương trình vi phân thường (2.11) và (2.14) – (2.16). Để đạt được mục đích, ta sẽ biến đổi hệ trên thành một hệ khả tích đơn giản theo các bước sau:

Bước 1. Nhân (2.14) với s và trừ vế với vế của (2.11), ta có:

$$\left(h - sf - (1-s^2)g\right)' = -sk^2 + g(f - sg), \quad (2.17)$$

Ta đặt

$$h = H + sF + G, \quad f = F + sG, \quad g = G, \quad k = K. \quad (2.18)$$

Khi đó (2.17), (2.16) và (2.14) – (2.15) được biến đổi tương ứng

$$H' = -sK^2 + GF, \quad (2.19)$$

$$(1-s^2)F' = sF - G, \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} &\left((1-s^2)G\right)'' + 2s(FG) - (1-s^2)G'F + G^2 + 2G + sG' + 2sF + s(sF)' + 2H + \\ &+ sH' + K^2 = 0, \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\left((1-s^2)K\right)'' + 2s(KG) - (s^2-1)K'F = 0. \quad (2.22)$$

Sử dụng lặp lại phương trình (2.19) – (2.20) ta có thể giản lược (2.21) và (2.22) lần lượt thành

$$\left((1-s^2)(G-H-sF) \right)'' + \left(s(s^2-1)K^2 \right)' + (s^2+1)K^2 = 0, \quad (2.23)$$

$$\left((1-s^2)K \right)'' + \left((s^2-1)KF \right)' + (sF-G)K = 0, \quad (2.24)$$

Bây giờ chúng ta tiến hành giải hệ (2.19) – (2.20) và (2.23) – (2.24).

Bước 2. Ta chỉ ra rằng nếu $(f, g, h, k)(s)$ là nghiệm chính quy trong $C^2([-1, 1])$ của (2.11) và (2.14) – (2.16), khi đó:

$$K(s) \equiv 0, \quad \forall s \in [-1, 1]. \quad (2.25)$$

Thật vậy, nếu $(f, g, h, k) \in C^2([-1, 1])$ là nghiệm của (2.11) và (2.14) – (2.16) thì $(F, G, H, K) \in C^2([-1, 1])$ là nghiệm của (2.19) – (2.20) và (2.23) – (2.25). Từ (2.24) và (2.20), ta có

$$\left((1-s^2)K \right)'' - \left(\left((1-s^2)K \right)F \right)' + (1-s^2)KF' = 0. \quad (2.26)$$

Đặt $\mu(s) = (1-s^2)K(s)$. Khi đó $\mu(s)$ là nghiệm của

$$\mu''(s) - \mu'(s)F(s) = 0, \quad \mu(-1) = \mu(1) = 0. \quad (2.27)$$

Tuy nhiên, bài toán (2.27) chỉ cho ta nghiệm trơn là nghiệm tầm thường. Do đó $\mu(s) \equiv 0$, từ đó $K(s) \equiv 0$. Do đó ta còn phải giải hệ sau:

$$H' = GF, \quad (2.28)$$

$$(1-s^2)F' = sF - G, \quad (2.29)$$

$$\left((1-s^2)(G-H-sF) \right)'' = 0. \quad (2.30)$$

Bước 3. Ta tích hợp (2.28) – (2.30). Nhân (2.29) với F và sử dụng (2.28), ta có:

$$\left(H(s) + \frac{1}{2}(1-s^2)F^2(s) \right)' = 0$$

Do đó, tồn tại hằng số C_1 sao cho:

$$H(s) + \frac{1}{2}(1-s^2)F^2(s) = C_1. \quad (2.31)$$

Từ (2.30), cho ta thấy còn tồn tại 2 hằng số C_2 và C_3 sao cho:

$$(1-s^2)(G-H-sF) = C_2 + C_3s, \quad s \in [-1,1]. \quad (2.32)$$

Do $(G, H, F) \in C^2([-1, 1])$ nên $C_2 = C_3 = 0$, từ đó:

$$G(s) = H(s) + sF(s), \quad \forall s \in [-1,1]. \quad (2.33)$$

Cuối cùng, từ (2.29), (2.33) và (2.31) suy ra:

$$(1-s^2)F'(s) = \frac{1}{2}(1-s^2)F^2(s) - C_1, \quad s \in [-1,1]. \quad (2.34)$$

Do $F \in C^2([-1, 1])$, nên từ (2.14) ta có $C_1 = 0$, do đó:

$$H(s) + \frac{1}{2}(1-s^2)F^2(s) \equiv 0, \quad \forall s \in [-1,1], \quad (2.35)$$

và

$$F'(s) = \frac{1}{2}F^2(s), \quad s \in [-1,1]. \quad (2.36)$$

Tích hợp phương trình (2.36) ta được:

$$F(s) = \frac{2}{C-s}, \quad s \in [-1,1], \quad (2.37)$$

với C là hằng số bất kì. Kết hợp (2.37) với (2.35), ta có:

$$H(s) = \frac{2(s^2-1)}{(C-s)^2}, \quad s \in [-1,1]. \quad (2.38)$$

kết hợp với (2.33), ta lại có:

$$G(s) = \frac{2(Cs-1)}{(C-s)^2}, \quad s \in [-1, 1]. \quad (2.39)$$

Trở lại các biến ban đầu (f, g, h, k) (2.18), ta có:

$$f(s) = \frac{2}{(C-s)^2} (C - 2s + Cs^2), \quad (2.40)$$

$$g(s) = \frac{2(Cs-1)}{(C-s)^2}, \quad (2.41)$$

$$h(s) = \frac{4(Cs-1)}{(C-s)^2}, \quad (2.42)$$

$$k(s) \equiv 0, \quad (2.43)$$

và nghiệm sẽ chính quy khi và chỉ khi

$$|C| > 1. \quad (2.44)$$

Từ đó, công thức (2.1) – (2.3) được suy ra từ (2.5) – (2.6) và (2.40) – (2.44).

Định lí 1 được chứng minh. $\square$

Chúng ta kết thúc mục này với việc chỉ ra rằng các phương pháp trước đây cũng cho ta tất cả các nghiệm tự đồng dạng kì dị 1 điểm đối với các phương trình Navier – Stokes 3 chiều, chúng đối xứng và thuần nhất bậc -1. Thật vậy, nghiệm tự đồng dạng của phương trình Navier – Stokes có dạng (xem [Le], [NRS], [Ts])

$$\left(\bar{U}(\bar{x}', t), P(\bar{x}', t) \right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2a(T-t)}} \bar{u} \left(\frac{\bar{x}' - \bar{x}'_0}{\sqrt{2a(T-t)}} \right), \frac{1}{2a(T-t)} P \left(\frac{\bar{x}' - \bar{x}'_0}{\sqrt{2a(T-t)}} \right) \right), \quad (2.45)$$

với $T \in \mathbb{R}^1$, $\bar{x}'_0 \in \mathbb{R}^3$ là một điểm cố định, $a > 0$ ($a < 0$) nếu $t < T$ ($t > T$) và

$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ và p nằm trong $\mathbb{R}^3$. Ta đặt:

$$\vec{x} = \frac{\vec{x}' - \vec{x}'_0}{\sqrt{2a(T-t)}} \quad \text{là biến tự đồng dạng.} \quad (2.46)$$

Khi đó phương trình dẫn xuất của $(\vec{u}, p)(\vec{x})$ là:

$$a(\vec{u} + (\vec{x} \cdot \nabla) \vec{u}) + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} + \nabla p = \Delta \vec{u} \quad \text{trong } \mathbb{R}^3, \quad (2.47)$$

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0. \quad (2.48)$$

Dễ dàng kiểm tra rằng, nếu chúng ta đòi hỏi dòng chảy tự đồng dạng là đồng nhất bậc -1 và đối xứng theo trục (với trục x_1 là trục đối xứng) với điểm kì dị là gốc tọa độ, khi đó $(\vec{u}, p)(\vec{x})$ được cho bởi công thức (2.5) – (2.6) với (f, g, h, k) cho bởi (2.40) – (2.43). Như thế ta đã chứng minh được Định lí sau:

Định lí 2.1.2. *Nghiệm tự đồng dạng của phương trình Navier – Stokes đối xứng theo trục x'_1 và đồng nhất bậc -1 với điểm kì dị $\vec{x}'_0 = (x'_{10}, x'_{20}, x'_{30})$, được cho bởi công thức sau:*

$$\begin{aligned} \vec{u}(\vec{x}', t) = & \left(\frac{cr^2 - r(x'_1 - x'_{10}) + c(x'_1 - x'_{10})^2}{(cr - (x'_1 - x'_{10}))^2 r}, \frac{(x'_1 - x'_{20})(c(x'_1 - x'_{10}) - r)}{(cr - (x'_1 - x'_{10}))^2 r}, \right. \\ & \left. \frac{(x'_3 - x'_{30})(c(x'_1 - x'_{10}) - r)}{(cr - (x'_1 - x'_{10}))^2 r} \right), \\ p(\vec{x}', t) = & \frac{4(c(x'_1 - x'_{10}) - r)}{r(cr - (x'_1 - x'_{10}))^2}, \end{aligned}$$

Với $r = |\vec{x}' - \vec{x}'_0| = \sqrt{(x'_1 - x'_{10})^2 + (x'_2 - x'_{20})^2 + (x'_3 - x'_{30})^2}$, và c là hằng số bất kỳ thoả mãn $|c| > 1$.

2.2. Nghiệm kì dị cho dòng chảy không nhớt

Bây giờ chúng ta xét nghiệm ổn định, đối xứng theo trục, thuần nhất bậc -1 đối với phương trình Euler 3 chiều:

$$\partial_t \vec{u} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} + \nabla p = 0 \quad \text{trong } \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^n, \quad (2.49)$$

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0. \quad (2.50)$$

Chúng ta sẽ chỉ ra rằng, trái ngược với dòng chảy nhớt, phương trình Euler không nhớt không có nghiệm không tầm thường ổn định đối xứng theo trục, thuần nhất bậc -1, chính quy hầu khắp nơi ngoại trừ tại một điểm. Hơn nữa, ta chỉ ra rằng, với phương trình Euler không nhớt, (2.49) – (2.50), tất cả các nghiệm ổn định đối xứng theo trục không tầm thường, thuần nhất bậc -1 là kì dị khắp nơi dọc theo trục đối xứng. Ta có định lí sau:

Định lí 2.2.1. *Xét các nghiệm ổn định, thuần nhất bậc -1, đối xứng qua trục của phương trình Euler 3 chiều (2.49) – (2.50), khi đó:*

1. *Không tồn tại nghiệm không tầm thường chính quy (C^2) khắp nơi trừ tại một điểm, trừ khi đó là một nghiệm tầm thường;*

2. *Tất cả các nghiệm là kì dị dọc theo trục đối xứng, và được cho bởi công thức sau:*

$$\vec{u}(\vec{x}) = \frac{1}{r} \left(F(s) - sG(s), \frac{x_2}{r} G(s) + \frac{x_3}{r} \frac{C_1}{1-s^2}, \frac{x_3}{r} G(s) - \frac{x_2}{r} \frac{C_1}{1-s^2} \right), \quad (2.51)$$

$$p(\vec{x}) = \frac{1}{r^2} \frac{C_3 + C_2 s}{1-s^2}, \quad (2.52)$$

$$\text{với } s = \frac{x_1}{r}, \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2},$$

$$F(s) = \pm \sqrt{C_4(rs^2) - (C_1^2 + 2C_3 + 2C_2s) / (1-s^2)}, \quad (2.53)$$

$$G(s) = -sF(s) - \left((1-s^2)F(s) \right)',$$

với C_1, C_2, C_3 và C_4 là các hằng số bất kì thỏa mãn:

$$(C_4 - C_1^2 - 2C_3) - 2C_2s - C_4s^2 \geq 0, s \in (-1, 1], \quad (2.54)$$

ở đây giả sử trục x_1 là trục đối xứng.

3. *Tất cả các nghiệm khả tích gần trục đối xứng, được cho bởi:*

$$\vec{u}(\vec{x}) = \left(\frac{C_5}{\sqrt{x_2^2 + x_3^2}}, 0, 0 \right), \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^3, \quad (2.55)$$

$$p(\vec{x}) = 0. \quad (2.56)$$

Chứng minh. Như trong mục 2.1, tất cả các nghiệm ổn định của phương trình Euler (2.49) – (2.50) đối xứng quanh trục x_1 và thuần nhất bậc -1, có thể viết dưới dạng (2.5) – (2.6) với f, g, h, k xác định. Sử dụng (2.5) – (2.6) vào (2.49) – (2.50), tương tự như các phương trình (2.1), (2.14) – (2.16), ta có:

$$\left((1-s^2)h \right)' - (1-s^2)ff' - s(1-s^2)gf' - (1-s^2)fg - sf^2 = 0, \quad (2.57)$$

$$(1-s^2)fg' - s(1-s^2)gg' - 2sfg + (2s^2-1)g^2 - 2h - sh' - k^2 = 0, \quad (2.58)$$

$$(1-s^2)f' - s(1-s^2)g' - sf + 2s^2g = 0, \quad (2.59)$$

$$-2sfk + (1-s^2)fk' + 2s^2kg - s(1-s^2)gk' = 0. \quad (2.60)$$

Để giải (2.57) – (2.60), ta đặt:

$$F(s) = f(s) - sg(s), \quad G(s) = g(s), \quad H(s) = h(s), \quad K(s) = k(s). \quad (2.61)$$

Biến đổi (2.57) – (2.60), ta được:

$$H' = -sK^2 + GF, \quad (2.62)$$

$$(1-s^2)F' = sF - G, \quad (2.63)$$

$$(1-s^2)(FG)' = 4sFG + 2H + (1-s^2)K^2, \quad (2.64)$$

$$\left((1-s^2)K \right)' F = 0, \quad (2.65)$$

Tương tự (2.19) – (2.22), hệ (2.62) – (2.65) có thể giải qua các bước sau:

Bước 1. Ta chỉ ra:

$$K(s) = \frac{C_1}{1-s^2} \quad \forall s \in (-1, 1), \quad (2.66)$$

với một hằng số C_1 bất kì. Điều này suy ra từ:

$$\left((1-s^2)K(s) \right)' = 0, \quad \forall s \in (-1, 1). \quad (2.67)$$

(2.67) có thể kiểm tra như sau:

Nếu (2.67) sai, khi đó tồn tại đoạn con $[a, b] \subset (-1, 1)$ sao cho

$$\left((1-s^2)K(s) \right)' \neq 0, \quad \forall s \in [a, b]. \quad (2.68)$$

Điều này kết hợp với (2.65), ta có: $F(s) \equiv 0$ với mọi $s \in [a, b]$. Do đó, $G(s) \equiv 0$ trên $[a, b]$ theo (2.63). Khi đó, phương trình (2.62) và (2.64) trở thành

$$H'(s) = -sK^2(s), \quad s \in [a, b], \quad (2.69)$$

$$2H(s) + (1-s^2)K^2(s) = 0. \quad (2.70)$$

Từ (2.69) và (2.70) suy ra:

$$\left((1-s^2)H(s) \right)' = 0, \quad \forall s \in [a, b].$$

Do đó $(1-s^2)H(s) = C_0$ trên $[a, b]$, với C_0 là hằng số nào đó. Kết hợp với (2.69) ta có:

$$(1-s^2)K(s) = \sqrt{-2C_0}, \quad \forall s \in [a, b],$$

Từ đó
$$\left((1-s^2)K(s) \right)' = 0, \quad \forall s \in [a, b].$$

Điều này mâu thuẫn với (2.68). Do đó ta có (2.67) đúng, từ đó có (2.66) đúng.

Bước 2. Tồn tại 2 hằng số C_2 và C_3 sao cho:

$$H(s) = \frac{C_3 + C_2 s}{(1-s^2)}, \quad s \in (-1,1). \quad (2.71)$$

Thật vậy, ta viết lại (2.64), sử dụng (2.62), ta có:

$$(1-s^2)H''(s) - 4sH'(s) - 2H(s) = 2s(s^2-1)K(s)K'(s) + 4s^2K^2(s) \text{ trên } (-1,1). \quad (2.72)$$

Từ (2.66), ta có: $2s(s^2-1)K(s)K'(s) + 4s^2K^2(s) \equiv 0$ trên $(-1,1)$.

Do đó (2.72) trở thành: $(1-s^2)H''(s) \equiv 0$ trên $(-1,1)$. Điều này dẫn đến (2.71).

Bước 3. Ta chỉ ra biểu thức tường minh của $F(s)$ và $G(s)$. Thật vậy, nhân (2.63) với $F(s)$ và sử dụng (2.62), ta có:

$$\left(\frac{1}{2}(1-s^2)F^2(s) + H(s) \right)' = sK^2(s) \text{ trên } (-1,1). \quad (2.73)$$

Điều này kết hợp với (2.66) và (2.71), ta có:

$(1-s^2)F^2(s) = C_4(1-s^2) - (C_1^2 + 2C_3 + 2C_2s)$ trên $(-1,1)$, với C_4 là hằng số bất kì. Do đó nếu điều kiện sau được thỏa mãn

$$C_4(1-s^2) - (C_1^2 + 2C_3 + 2C_2s) \geq 0 \text{ trên } [-1,1]. \quad (2.74)$$

thì ta có được công thức cho $F(s)$ như sau:

$$F(s) = \pm \frac{\sqrt{C_4(1-s^2) - (C_1^2 + 2C_3 + 2C_2s)}}{1-s^2}, \quad s \in (-1,1). \quad (2.75)$$

Từ (2.63), ta có công thức cho $G(s)$:

$$G(s) = sF + (s^2-1)F' = \left((s^2-1)F(s) \right)' - sF(s) \text{ trên } (-1,1). \quad (2.76)$$

Sử dụng (2.75), ta có:

$$G(s) = \pm \frac{s}{(s^2 - 1)} \sqrt{C_4(1 - s^2) - (C_1^2 + 2C_3 + 2Cs)} \\ \pm \frac{C_4s - C_2}{\sqrt{C_4(1 - s^2) - (C_1^2 + 2C_3 + 2C_2s)}}, \quad \text{với } s \in (-1, 1). \quad (2.77)$$

Ta kết thúc chứng minh Định lí 3 từ (2.74), (2.76), (2.66), (2.67). $\square$

KẾT LUẬN

Luận văn này trình bày về nghiệm tường minh cho phương trình Navier – Stokes trên $\mathbb{R}^3 \setminus p$, với p là một điểm bất kỳ. Qua đó giới thiệu một số kết quả chính sau:

Trình bày về cấu trúc nghiệm kì dị 1 điểm của phương trình Navier – Stokes;

Trình bày về cấu trúc các nghiệm tự đồng dạng của phương trình Navier – Stokes;

Trình bày về cấu trúc các nghiệm ổn định, thuần nhất bậc -1, đối xứng quanh trục của phương trình Euler.

Chắc chắn rằng luận văn này không tránh khỏi những thiếu sót. Vì vậy tôi rất mong nhận được những ý kiến đóng góp của các thầy cô giáo, bạn đồng nghiệp để luận văn được hoàn thiện hơn.

Cuối cùng, một lần nữa tôi xin được bày tỏ sự kính trọng và lòng biết ơn sâu sắc nhất tới người thầy PGS.TSKH Nguyễn Minh Trí, người đã tận tình hướng dẫn, tạo mọi điều kiện giúp đỡ để tôi hoàn thành luận văn này.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [GZ] G. Tian and Z. Xin, *One – point singular solutions to the Navier – Stokes*, Topological Methods in Nonlinear Analysis, Volume 11, (1998), 135 – 145.
- [TX] G. Tian and Z. Xin, *Gradient estimation on Navier – Stokes equation*, Comm. Anal. Geom. (1998) (to appear).
- [CKN] L. Caffarelli, R. Kohn and L. Nirenberg, *Partial regularity of suitable weak solution of the Navier – Stokes equations*, Comm. Pure Appl. Math. 35 (1982), 771 – 837.
- [CP] M. Cannone and F. Planchon, *Self – similar solutions for Navier – Stokes Equations in $\mathbb{R}^3$* , Comm. Patial Differential Equations 21 (1991), 179 – 193.
- [GK] Y. Giga and R. Kohn, *Characterizing blowup using similarity variables*, Indiana Univ. Mathematical J. 36 (1987), 1 – 40.
- [La] O. Ladyzhenskaya, *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow*, Gordon and Breach, 2nd ed., 1969.
- [LL] L. Landau and E. Lifschitz, *Fluid Mechanics*, Addisson – Wesley, New York, 1953.
- [Le] J. Leray, *Sur le mouvement d’un liquide visqueuse emplissant l’espace*, Acta Math. 63 (1994), 193 – 248.
- [NRS] J. Necăs, M. Ruzicka and V. Sverak, *On self – similar solutions of the Navier – Stokes equations*, IMA preprint, 1995.
- [RA] R. A. Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press, 1975.
- [CF] P. Constantin and C. Foias, *Navier – Stokes equations*, the University of Chicago Press, 1998.