

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM
-----❧  ❧-----

NGUYỄN THỊ PHƯƠNG LAN

**PHÂN PHỐI GIÁ TRỊ CỦA HÀM NGUYÊN
VÀ ĐẠO HÀM CỦA NÓ**

LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2009

**ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM**



NGUYỄN THỊ PHƯƠNG LAN

**PHÂN PHỐI GIÁ TRỊ CỦA HÀM NGUYÊN
VÀ ĐẠO HÀM CỦA NÓ**

**Chuyên ngành: GIẢI TÍCH
Mã số: 60.46.01**

LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học : GS.TSKH. HÀ HUY KHOÁI

Mục lục

trang

MỞ ĐẦU.....	4
Chương 1 - KIẾN THỨC CHUẨN BỊ	6
1.1. Công thức Poisson-Jensen	6
1.2. Các hàm đặc trưng Nevanlinna.....	7
1.3. Đồng nhất thức Cartan và tính lùi	14
1.4. Quan hệ số khuyết.....	14
1.5. Tập xác định duy nhất các hàm phân hình.....	17
Chương 2 - PHÂN PHỐI GIÁ TRỊ CỦA HÀM NGUYÊN VÀ	
ĐẠO HÀM CỦA NÓ.....	29
2.1. Sự xác định của hàm nguyên và tổ hợp tuyến tính của các đạo hàm của nó dựa vào tạo ảnh của hai điểm.....	31
2.2. Sự xác định của hàm nguyên và đạo hàm của nó dựa vào tạo ảnh của một tập gồm hai điểm.....	43
KẾT LUẬN.....	55
TÀI LIỆU THAM KHẢO.....	56

Lời cảm ơn

Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn và chỉ bảo tận tình của GS. TSKH Hà Huy Khoái. Em xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến thầy. Thầy không chỉ hướng dẫn em nghiên cứu khoa học mà thầy còn thông cảm tạo mọi điều kiện động viên trong suốt quá trình làm luận văn .

Em xin chân thành cảm ơn khoa Toán, khoa Sau Đại học trường Đại học Sư phạm Thái Nguyên, Viện Toán học Việt Nam đã giúp đỡ và tạo điều kiện để em hoàn thành luận văn này .

Cuối cùng, em xin chân thành cảm ơn Ban giám hiệu trường CĐSP Bắc Kạn, đặc biệt là các đồng nghiệp trong khoa TN, gia đình và bạn bè đã hết sức quan tâm và giúp đỡ em trong thời gian học và hoàn thành luận văn.

Trong quá trình viết luận văn cũng như trong việc xử lý văn bản chắc chắn không tránh khỏi những hạn chế và thiếu sót. Rất mong nhận được sự góp ý của Quý thầy cô, các bạn đồng nghiệp để luận văn được hoàn thiện hơn.

Thái Nguyên, tháng 11 năm 2009

TÁC GIẢ

Nguyễn Thị Phương Lan

MỞ ĐẦU

Trong toán học, lý thuyết phân bố giá trị là một phân ngành của phân tích toán học. Lý thuyết phân bố giá trị được nhà toán học R. Nevanlinna đưa ra năm 1926. Chính vì thế lý thuyết này còn được gọi là lý thuyết Nevanlinna. Mục đích chính của lý thuyết phân bố giá trị là thiết lập định lý cơ bản thứ nhất và định lý cơ bản thứ hai đối với các ánh xạ phân hình. Một trong những ứng dụng quan trọng bậc nhất của lý thuyết Nevanlinna chính là vấn đề duy nhất, tức là tìm điều kiện để hai ánh xạ phân hình f và g là trùng nhau. Như đã đề cập ở trên, năm 1926, Nevanlinna đã chứng minh được rằng: với hai hàm phân hình f và g trên mặt phẳng phức $\mathbb{C}$, nếu chúng có cùng ảnh ngược (không tính bội) của năm điểm phân biệt thì f trùng g . Có thể nói việc nghiên cứu vấn đề duy nhất đối với ánh xạ phân hình đòi hỏi cả hai phương diện: xây dựng Lý thuyết phân bố giá trị (mà cụ thể là định lý cơ bản thứ hai) và nghiên cứu ứng dụng của nó. Vấn đề duy nhất đối với ánh xạ phân hình còn được nghiên cứu dưới nhiều sắc thái nữa như đa thức duy nhất, tập duy nhất.

Cũng nghiên cứu về ứng dụng của lý thuyết Nevanlinna dựa theo bài báo của đồng tác giả người Trung Quốc là Ping Li và Chung- Chun Yang nói về phân phối giá trị của hàm nguyên và đạo hàm của nó trong [16], luận văn trình bày một số kết quả cơ bản của lý thuyết Nevanlinna và ứng dụng đối với phân phối giá trị của hàm nguyên và đạo hàm của nó trong trường số phức. Đây là một hướng nghiên cứu thời sự, thu hút sự quan tâm của nhiều nhà toán học trong những năm gần đây.

Nội dung luận văn gồm hai chương.

Chương 1: Một số kiến thức cơ bản về lý thuyết Nevanlinna, được trình bày với mục đích cung cấp các kiến thức cần thiết để cho người đọc dễ theo dõi chứng minh các kết quả của chương sau. Trong chương này, các

tính chất cơ bản của lý thuyết Nevanlinna được nhắc lại là: công thức Poisson-Jensen, các hàm đặc trưng Nevanlinna, hai định lý cơ bản, đồng nhất thức Cartan và tính lùi, quan hệ số khuyết, tập xác định duy nhất các hàm phân hình.

Chương 2: Một số kết quả về phân phối giá trị của hàm nguyên và đạo hàm của nó.

Kết quả chính được trình bày trong luận văn là hai định lý sau đây nói về sự xác định của hàm nguyên và tổ hợp tuyến tính của các đạo hàm của nó dựa vào tạo ảnh của hai điểm, sự xác định của hàm nguyên và đạo hàm của nó dựa vào tạo ảnh của một tập gồm hai điểm.

Định lý.2.1.7. *Giả sử f là một hàm nguyên khác hằng số và*

$$g = L(f) = b_{-1} + \sum_{i=0}^n b_i f^{(i)},$$

trong đó, b_i ($i = -1, 0, 1, \dots, n$) là các hàm phân hình nhỏ của f . Giả sử a_1 và a_2 là hai hằng số phân biệt trong $\mathbb{C}$. Nếu f và $g = L(f)$ cùng phân phối a_1 CM và a_2 IM thì $f \equiv g$ hoặc f và g có biểu thức như sau:

$$f = a_2 + (a_1 - a_2)(1 - e^\alpha)^2,$$

và

$$g = 2a_2 - a_1 + (a_1 - a_2)e^\alpha,$$

trong đó α là một hàm nguyên.

Định lý 2.2.3. *Giả sử f là một hàm nguyên khác hằng số và a_1, a_2 là hai số phức phân biệt. Nếu f và f' cùng phân phối tập $\{a_1, a_2\}$ CM thì một và chỉ một trong các khẳng định sau là đúng.*

$$(i) \quad f \equiv f'.$$

$$(ii) \quad f + f' \equiv a_1 + a_2.$$

$$(iii) \quad f \equiv c_1 e^{cz} + c_2 e^{-cz}, \text{ với } a_1 + a_2 = 0, \text{ trong đó } c, c_1 \text{ và } c_2 \text{ là}$$

các hằng số khác không, thỏa mãn $c^2 \neq 1$ và $c_1 c_2 = \frac{1}{4} a_1^2 (1 - c^{-2})$.

Để minh họa kết quả nêu trên, luận văn cũng đưa ra một vài ví dụ cụ

thể.

Chương 1. KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

1.1. Công thức Poisson-Jensen.

Giả sử $f(z)$ là hàm phân hình trong $\{z \mid |z| \leq R\}$, $f(0) \neq 0, \infty$. Giả sử $a_1, a_2, \dots, a_M$ là các 0-điểm của $f(z)$ trong $\{z \mid |z| \leq R\}$ (mỗi 0-điểm được kể một số lần bằng bội của nó), $b_1, b_2, \dots, b_N$ là các cực điểm (mỗi cực điểm được kể một số lần bằng bội của nó). Khi đó:

" $z = re^{iq}$ ($0 \leq r \leq R$), ta có:

$$\log |f(re^{iq})| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{ij})| \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(j - q) + r^2} dj + \\ + \sum_{m=1}^M \log \left| \frac{R(z - a_m)}{R^2 - \overline{a_m}z} \right| - \sum_{u=1}^N \log \left| \frac{R(z - b_u)}{R^2 - \overline{b_u}z} \right|.$$

Nhận xét: Hàm phân hình $f(z)$ chỉ có hữu hạn 0-điểm và cực điểm trong $\{z \mid |z| \leq R\}$.

1.1.1. Hệ quả.

Với các giả thiết như trong công thức Poisson-Jensen, ta có:

$$\log |f(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{ij})| dj + \sum_{m=1}^M \log \frac{|a_m|}{R} - \sum_{u=1}^N \log \frac{|b_u|}{R}.$$

• Nếu $f(0) = 0$ hoặc ∞ thì $f(z)$ có khai triển tại $z = 0$ dạng:

$$f(z) = c_l z^l + c_{l+1} z^{l+1} + \dots \quad (l > 0 \text{ nếu } f(0) = 0, \quad l < 0 \text{ nếu } f(0) = \infty).$$

• Xét hàm $y(z) = R^l f(z)/z^l = R^l (c_l + c_{l+1}z + \dots)$, $y(0) \neq 0, \infty$.

1.1.2. Hệ quả. Với các giả thiết như trong công thức Poisson-Jensen, ta có:

$$l \log R + \log |c_l| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{ij})| dj + \sum_{m=1}^M \log \frac{|a_m|}{R} - \sum_{u=1}^N \log \frac{|b_u|}{R}.$$

1.2. Các hàm đặc trưng Nevanlinna.

1.2.1. Định nghĩa. Với mỗi số thực a , đặt $\log^+ a = \max \{0, \log a\}$ (tức là, nếu $a \notin 1$ thì $\log^+ a = 0$, nếu $a \geq 1$ thì $\log^+ a = \log a$).

Ta có: $\log a = \log^+ a - \log^+ \frac{1}{a}$.

1.2.2. Định nghĩa.

Giả sử $f(z)$ là hàm phân hình ở trong $\{z \in \mathbb{R}\}$, có các 0-điểm là $a_1, a_2, \dots, a_M$, các cực điểm $b_1, b_2, \dots, b_N$ (mỗi 0-điểm, cực điểm được tính một số lần bằng bội của nó). Hàm đếm của hàm f được định nghĩa bởi công thức sau:

$$N(f, R) = \sum_{u=1}^N \log \frac{R}{|b_u|} \quad (N(f, R) \geq 0).$$

1.2.3. Định nghĩa. Hàm xấp xỉ $m(f, R)$

$$m(f, R) = \frac{1}{2p} \int_0^{2p} \log^+ |f(\operatorname{Re}^{ij})| dj.$$

Từ định nghĩa hàm xấp xỉ $m(f, R)$, ta có:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2p} \int_0^{2p} \log |f(\operatorname{Re}^{ij})| dj &= \frac{1}{2p} \int_0^{2p} \log^+ |f(\operatorname{Re}^{ij})| dj - \frac{1}{2p} \int_0^{2p} \log^+ \frac{1}{|f(\operatorname{Re}^{ij})|} dj \\ &= m(f, R) - m\left(\frac{1}{f}, R\right). \end{aligned}$$

Hàm f có 0-điểm tại $a_1, a_2, \dots, a_M$ suy ra hàm $\frac{1}{f}$ có cực điểm tại $a_1, a_2, \dots, a_M$.

Từ định nghĩa hàm $N(f, R)$, ta có $N\left(\frac{1}{f}, R\right) = \sum_{m=1}^M \log \frac{R}{|a_m|}$.

Hệ quả 1.1.1 có thể viết lại dưới dạng sau đây:

$$\begin{aligned}\log|f(0)| &= m(f, R) - m\left(\frac{1}{f}, R\right) - N\left(\frac{1}{f}, R\right) + N(f, R) \\ &= m(f, R) + N(f, R) - \left(m\left(\frac{1}{f}, R\right) + N\left(\frac{1}{f}, R\right)\right)\end{aligned}$$

1.2.4. Định nghĩa.

Hàm đặc trưng Nevanlinna $T(f, R) = m(f, R) + N(f, R)$.

Hệ quả 1.1.1 được viết lại dạng: $T(f, R) = T\left(\frac{1}{f}, R\right) + \log|f(0)|$.

Từ định nghĩa của các hàm $m(f, R)$, $N(f, R)$, $T(f, R)$, ta có các tính chất sau:

1.2.5. Định lý. Nếu $f_j, j = \overline{1, p}$ là các hàm phân hình, r là một số thực dương tùy ý, a là số phức bất kỳ thì ta có các tính chất sau:

$$1) \quad m\left(\prod_{j=1}^p f_j, r\right) \leq \sum_{j=1}^p m(f_j, r).$$

$$2) \quad m\left(\sum_{j=1}^p f_j, r\right) \leq \sum_{j=1}^p m(f_j, r).$$

$$3) \quad N\left(\prod_{j=1}^p f_j, r\right) \leq \sum_{j=1}^p N(f_j, r).$$

$$4) \quad N\left(\sum_{j=1}^p f_j, r\right) \leq \sum_{j=1}^p N(f_j, r).$$

$$5) \quad T\left(\prod_{j=1}^p f_j, r\right) \leq \sum_{j=1}^p T(f_j, r).$$

$$6) \quad T\left(\sum_{j=1}^p f_j, r\right) \leq \sum_{j=1}^p T(f_j, r).$$

$$7) \quad |T(f - a, r) - T(f, r)| \leq \log^+ |a| + \log 2.$$

Chứng minh:

7) Ta có :

$$\log^+ \left| \mathring{a}_{j=1}^p a_j \right| \leq \log^+ (p \max |a_j|) \leq \log^+ p + \log^+ \max |a_j| \leq \log^+ p + \mathring{a}_{j=1}^p \log^+ |a_j|.$$

Suy ra

$$m(\mathring{a}_{j=1}^p f_j, r) \leq \mathring{a}_{j=1}^p m(f_j, r) + \log p,$$

và

$$T(\mathring{a}_{j=1}^p f_j, r) \leq \mathring{a}_{j=1}^p T(f_j, r) + \log p.$$

Xét $f_1 = f, f_2 = -a, N(f_2, r) = 0, m(f_2, r) = \log^+ a$. Ta có:

$$T(f - a, r) \leq T(f, r) + \log^+ a + \log 2.$$

Tức là,

$$T(f - a, r) - T(f, r) \leq \log^+ a + \log 2. \quad (1)$$

Mặt khác,

$$T(f, r) = T(f - a + a, r) \leq T(f - a, r) + \log^+ a + \log 2.$$

Do đó,

$$T(f - a, r) - T(f, r) \leq -(\log^+ a + \log 2). \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$|T(f - a, r) - T(f, r)| \leq \log^+ |a| + \log 2. \quad W$$

1.2.6. Định lý cơ bản thứ nhất.

Giả sử $f(z)$ là hàm phân hình trong $\{z \in R\}$, $a \in \mathbb{C}$ tùy ý. Khi đó, ta có:

$$m(R, \frac{1}{f-a}) + N(R, \frac{1}{f-a}) = T(R, f) - \log |f(0) - a| + e(a, R),$$

trong đó,

$$|e(a, R)| \leq \log^+ |a| + \log 2.$$

Ý nghĩa của định lý cơ bản thứ nhất: $m(R, \frac{1}{f-a}) = \frac{1}{2p} \sum_0^{2p} \log^+ \frac{1}{|f(\text{Re}^{ij}) - a|} dj$.

$N(R, \frac{1}{f-a}) = \sum \log \frac{R}{|b|}$, trong đó b là các cực điểm của hàm $\frac{1}{f-a}$. Như vậy,

tổng trên lấy theo các 0-điểm của hàm $f-a$, tức là, tổng lấy theo các nghiệm của phương trình $f-a=0$. Do đó, $N(R, \frac{1}{f-a})$ “đo độ lớn” của tập hợp nghiệm của phương trình $f-a=0$ ($f(z)=a$).

$m(R, \frac{1}{f-a})$ lớn nếu $f(\text{Re}^{ij}): a$ suy ra $m(R, \frac{1}{f-a})$ “đo độ lớn” tập hợp z tại

đó $f(z): a$. Do đó, $m(R, \frac{1}{f-a}) + N(R, \frac{1}{f-a})$ “đo độ lớn” tập hợp z tại đó

$f(z)=a$ hoặc $f(z): a$. Về phải có thể xem là không phụ thuộc a nên định lý cơ bản thứ nhất cho ta thấy hàm phân hình $f(z)$ “nhận giá trị a và giá trị gần a một số lần như nhau với mọi a ”. (Tương tự, định lý cơ bản của đại số nói rằng đa thức f “nhận mọi giá trị a một số lần như nhau”).

Trong sự tương tự này, hàm đặc trưng Nevanlinna đóng vai trò như bậc của đa thức.

Để thuận tiện, nếu f là hàm cố định, ta dùng các kí hiệu sau:

$$m(R, \frac{1}{f-a}) = m(R, a).$$

$$N(R, \frac{1}{f-a}) = N(R, a).$$

$$m(R, f) = m(R, \infty)$$

$$N(R, f) = N(R, \infty).$$

$$N(R, a) = \frac{1}{b} \log \frac{R}{|b|}, \quad b \text{ là } 0\text{-điểm của } f - a.$$

Nhận xét: $T(R, f)$ được định nghĩa cho các hàm phân hình. Tuy nhiên trong trường hợp f chỉnh hình thì hàm $T(R, f)$ vẫn cho nhiều thông tin hơn hàm $\max |f|$.

1.2.7. Định lý. Giả sử $f(z)$ là hàm chỉnh hình trong $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$. Khi đó, với $0 < r < R$, ta có:

$$T(r, f) \leq \log^+ M(r, f) \leq \frac{R+r}{R-r} T(R, f),$$

trong đó, $M(r, f) = \max_{|z| \leq r} |f(z)|$.

1.2.8. Mệnh đề: Giả sử f là hàm phân hình, $g(z) = \frac{af(z) + b}{cf(z) + d}$, $ad - bc \neq 0$. Khi đó, ta có:

$$T(r, g) = T(r, f) + O(1).$$

Chúng minh: Xét

$$g = \frac{af + b}{cf + d}.$$

• $c = 0$.

$$g = \frac{a}{d} f + \frac{b}{d} \Rightarrow T(r, g) = T(r, \frac{a}{d} f + \frac{b}{d}) = T(r, \frac{a}{d} f) + O(1) = T(r, f) + O(1).$$

• $c \neq 0, a \neq 0$.

$$g = \frac{af + b}{cf + d} = \frac{a}{c} \frac{f + \frac{b}{a}}{f + \frac{d}{c}} = \frac{a}{c} \frac{(f + \frac{d}{c}) + \frac{b}{a} - \frac{d}{c}}{f + \frac{d}{c}} = \frac{a}{c} (1 + \frac{bc - ad}{ac(f + \frac{d}{c})}).$$

$$\begin{aligned}
T(r, g) &= T(r, 1 + \frac{bc - ad}{ac(f + \frac{d}{c})}) + O(1) = T(r, \frac{bc - ad}{ac(f + \frac{d}{c})}) + O(1) \\
&= T(r, \frac{ac(f + \frac{d}{c})}{bc - ad}) + O(1) = T(r, f + \frac{d}{c}) + O(1) = T(r, f) + O(1).
\end{aligned}$$

• $c \neq 0, a \neq 0$.

$$g = \frac{b}{cf + d} \Rightarrow T(r, g) = T(r, \frac{cf + d}{b}) + O(1) = T(r, cf + d) + O(1)$$

$$= T(r, cf) + O(1) = T(r, f) + O(1).$$

W

1.2.9. Bất đẳng thức cơ bản. Giả sử f là hàm phân hình, $q \geq 2$, $a_1, a_2, \dots, a_q$ là các số phức phân biệt. Khi đó, ta có:

$$m(r, f) + \sum_{u=1}^q m(r, a_u) \leq 2T(r, f) - N_1(r) + S(r),$$

trong đó,

$$N_1(r) = N(r, \frac{1}{f}) + 2N(r, f) - N(r, f').$$

$$S(r) = m(r, \frac{f'}{f}) + m(r, \sum_{u=1}^q \frac{f'}{f - a_u}) + q \log^+ \frac{3q}{d} + \log 2 + \log \frac{1}{|f'(0)|}, \quad d = \min_{1 \leq u \leq q} |a_u - a_m|.$$

Có thể chứng minh rằng

$$N_1(r) \geq 0.$$

$$S(r) = o(T(r, f')).$$

1.2.9.1. Bổ đề. Với giả thiết như trong bất đẳng thức cơ bản, ta có:

$$m(r, f) \leq \sum_{u=1}^q m(r, a_u) - q \log^+ \frac{3q}{d} - \log 2.$$

1.2.9.2. Bổ đề. Với mọi hàm phân hình g , ta luôn có:

$$N(r, g) - N(r, \frac{1}{g}) = \frac{1}{2p} \int_0^{2p} \log \frac{1}{|g(re^{ij})|} dj + \log |g(0)|.$$

1.2.9.3. Mệnh đề. Nếu $S(r)$ có dạng như trong bất đẳng thức cơ bản thì

$$S(r) = o(\log T(r, f)) + o(\log r).$$

1.2.9.4. Mệnh đề. Nếu $N_1(r)$ có dạng như trong bất đẳng thức cơ bản thì

$$N_1(r) \leq 0.$$

1.2.10. Định lý cơ bản thứ hai của Nevanlinna. Giả sử $f(z)$ là hàm phân hình trên $\mathbb{C}$; $a_1, a_2, \dots, a_q$ ($q \geq 2$) là các số phức phân biệt. Khi đó, ta có:

$$(q-1)T(r, f) \leq \sum_{u=1}^q N(r, a_u) + N(r, \frac{1}{f}) - N_1(r) + S(r),$$

trong đó,

$$N_1(r) = N(r, \frac{1}{f}) + 2N(r, f) - N(r, f'),$$

$$S(r) = o(\log T(r, f)) + o(\log r).$$

Chứng minh: Theo bất đẳng thức cơ bản:

$$m(r, \frac{1}{f}) + \sum_{u=1}^q m(r, a_u) \leq 2T(r, f) - N_1(r) + S(r).$$

Cộng vào hai vế đại lượng $N(r, \frac{1}{f}) + \sum_{u=1}^q N(r, a_u)$

$$\{m(r, \frac{1}{f}) + N(r, \frac{1}{f})\} + \sum_{u=1}^q \{m(r, a_u) + N(r, a_u)\}$$

$$\leq 2T(r, f) + N(r, \frac{1}{f}) + \sum_{u=1}^q N(r, a_u) - N_1(r) + S(r).$$

Theo định lý cơ bản thứ nhất, ta có:

$$T(r, f) + \sum_{u=1}^q \{T(r, f) + O(1)\} \leq 2T(r, f) + N(r, \frac{1}{f}) + \sum_{u=1}^q N(r, a_u) - N_1(r) + S(r).$$

Suy ra

$$(q-1)T(r, f) \leq \sum_{u=1}^q N(r, a_u) + N(r, \infty) - N_1(r) + S(r). \quad (O(1) \text{ là đại lượng giới nội}).$$

W

1.3. Đồng nhất thức Cartan và tính lùi.

1.3.1. Bổ đề. Với mọi $a \in \mathbb{C}$, ta có:

$$\frac{1}{2p} \int_0^{2p} \log |a - e^{iq}| dq = \log^+ |a|.$$

1.3.2. Định lý Cartan (H. Cartan). Giả sử $f(z)$ là hàm phân hình trong $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$. Khi đó, ta có:

$$T(R, f) = \frac{1}{2p} \int_0^{2p} N(R, e^{iq}) dq + \log^+ |f(0)|.$$

1.3.3. Hệ quả. $T(R, f)$ là hàm lùi, tăng của R .

1.3.4. Hệ quả. Với giả thiết như trong định lý 1.3.2, ta có:

$$\frac{1}{2p} \int_0^{2p} m(R, e^{iq}) dq \leq \log 2.$$

$\frac{1}{2p} \int_0^{2p} m(R, e^{iq}) dq$ có thể xem như “trung bình” của giá trị $m(R, a)$ khi a chạy trên vòng tròn.

Hệ quả 1.3.4 cho thấy trung bình của $m(R, a)$ nói chung rất nhỏ.

1.4. Quan hệ số khuyết.

1.4.1. Định nghĩa.

• $\bar{N}(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \frac{r}{|b|}$, trong đó, tổng lấy theo các cực điểm của f trong

$\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$, mỗi cực điểm chỉ lấy một lần.

• $d(a) = d(a, f) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{m(r, a)}{T(r, f)}$: Số khuyết của hàm f tại giá trị a .

$$d(a) = 1 - \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{N(r, a)}{T(r, f)}.$$

• $Q(a) = Q(a, f) = 1 - \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\overline{N}(r, a)}{T(r, f)}$.

• $q(a) = q(a, f) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{N(r, a) - \overline{N}(r, a)}{T(r, f)}$.

Ý nghĩa:

$m(r, a) + N(r, a)$ “đo độ lớn” của tập hợp z , tại đó, $f(z) = a$ hoặc $f(z) : a$.

Nếu $d(a)$ càng lớn thì phương trình $f(z) = a$ càng “thiếu” nghiệm. Do đó, $d(a)$ gọi là “số khuyết”.

$q(a)$: chỉ số bội của hàm tại giá trị a . $q(a)$ lớn khi các nghiệm của $f(z) = a$ có bội cao.

$N(r, a)$: “đo độ lớn” tập hợp nghiệm của phương trình $f(z) = a$, mỗi nghiệm kể một số lần bằng bội của nó.

$\overline{N}(r, a)$: chỉ tính theo các nghiệm phân biệt (không tính bội).

$d(a) + q(a) \leq Q(a)$.

1.4.2. Định lý. Giả sử $f(z)$ là hàm phân hình khác hằng số trên $\mathbb{C}$. Khi đó, ta có:

$$\sum_{a \in \mathbb{C}} \{q(a) + d(a)\} \leq \sum_{a \in \mathbb{C}} Q(a) \leq 2.$$

Tổng trên chứng tỏ chỉ tồn tại không quá đếm được giá trị a để $Q(a) > 0$, còn hầu hết là 0, đồng thời tổng của chuỗi $\sum_{a \in \mathbb{C}} Q(a) \leq 2$.

1.4.2.1. Bổ đề. Với giả thiết như trong định lý 1.4.2, ta có:

$$\sum_{u=1}^q N(r, a_u) - N(r, \frac{1}{f}) \leq \sum_{u=1}^q \overline{N}(r, a_u).$$

1.4.2.2. Hệ quả (định lý Picard). *Hàm phân hình khác hằng số nhận mọi giá trị trừ ra cùng lắm là hai giá trị. [Nếu f là hàm phân hình không nhận ba giá trị thì f là hằng số].*

1.4.2.3. Hệ quả (bổ đề Borel). *Giả sử f_1, f_2, f_3 là các hàm chỉnh hình, khác không và thỏa mãn $f_1 + f_2 + f_3 = 0$. Khi đó, f_1, f_2, f_3 chỉ sai khác một hằng số nhân.*

1.4.3. Mệnh đề. *Nếu u, v là các hàm chỉnh hình không có 0- điểm và thỏa mãn $u + v \neq 1$ thì u, v là hằng số.*

Chứng minh: u, v là các hàm chỉnh hình $\Rightarrow u(z), v(z) \neq 0, \forall z$. Mặt khác, $u(z) \neq 0, v(z) \neq 0, \forall z$ và $u + v \neq 1$ nên $u(z), v(z) \neq 1, \forall z$.

Vậy, ta có: với mọi $z \in \mathbb{C}$,

$$\frac{u(z), v(z)}{1} \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}. \text{ Do đó, theo định lý Picard, } u, v = \text{const}. \quad \text{W}$$

1.4.4. Mệnh đề. *Giả sử $f(z)$ là hàm phân hình khác hằng số. Khi đó, tồn tại không quá bốn giá trị a sao cho mọi nghiệm của phương trình $f = a$ đều là nghiệm bội.*

Chứng minh: Giả sử mọi nghiệm của phương trình $f(z) = a$ đều là nghiệm bội. Khi đó,

$$N(r, a) \geq 2\overline{N}(r, a).$$

Suy ra $Q(a) = 1 - \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\overline{N}(r, a)}{T(r, a)} \geq 1 - \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\overline{N}(r, a)}{N(r, a)} \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Vậy, tồn tại không

quá bốn giá trị a_j để mọi nghiệm của phương trình $f = a_j$ đều là nghiệm bội.

Nhận xét: Giả sử $f(z)$ là hàm chỉnh hình. Khi đó, $f(z) = \infty$ vô nghiệm. Suy ra $Q(\infty) = 1$, do vậy, $\lim_{a \rightarrow \infty} Q(a) \leq 1$. Vậy, hàm chỉnh hình khác hằng nhận mọi giá trị, trừ ra cùng lắm là một giá trị. Tồn tại không quá hai giá trị a sao cho mọi nghiệm của phương trình $f(z) = a$ đều là nghiệm bội.

1.4.5. Định nghĩa. Điểm a được gọi là có bội ít nhất là m nếu mọi nghiệm của phương trình $f(z) = a$ đều có bội ít nhất là m .

Nhận xét: Giả sử a là điểm bội lớn hơn hoặc bằng m thì $m\overline{N}(r, a) \leq N(r, a)$.

Khi đó $\frac{\overline{N}(r, a)}{T(r, a)} \leq \frac{\overline{N}(r, a)}{N(r, a)} \leq \frac{1}{m}$ nên $Q(a) \geq 1 - \frac{1}{m}$.

Nếu f là hàm phân hình, khác hằng số thì tồn tại không quá bốn giá trị a_1, a_2, a_3, a_4 để $f(z) = a_j$ gồm toàn nghiệm bội. $Q(a_j) = \frac{1}{2}, j = \overline{1, 4}$.

1.5. Tập xác định duy nhất các hàm phân hình.

1.5.1. Định lý 5 điểm của Nevanlinna.

Giả sử f, g là hai hàm phân hình và tồn tại năm giá trị $a_j, j = \overline{1, 5}$ sao cho $f^{-1}(a_j) = g^{-1}(a_j)$. Khi đó, $f \circ g$ hoặc f, g là hằng số.

Theo định lý 5 điểm, $f^{-1}(a_j) = g^{-1}(a_j), j = \overline{1, 5} \Rightarrow f \circ g$.

$$S = \{a_1, a_2, \dots, a_5\}.$$

Nếu không xét nghịch ảnh từng điểm mà xét nghịch ảnh cả tập hợp, thì những tập hợp nào xác định duy nhất hàm phân hình, tức là, khi nào

$$f^{-1}(S) = g^{-1}(S) \Rightarrow f = g?$$

1.5.2. Định nghĩa. Giả sử $S \subseteq \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, f là hàm phân hình.

$$E_S(f) = \bigcup_{a \in S} \{ (z, k) \in \mathbb{C} \times \mathbb{N} \mid f(z) = a \text{ bội } k \}.$$

$$\overline{E}_S(f) = \bigcup_{a \in S} \{ z \in \mathbb{C} \mid f(z) = a \} = f^{-1}(S).$$

1.5.3. Định nghĩa. Nếu với mọi hàm phân hình $f, g \in F$ sao cho $E_S(f) = E_S(g)$, ta có $f \circ g$ thì tập S được gọi là tập xác định duy nhất của họ hàm F .

1.5.4. Định lý.

Giả sử $m \geq 2$, $n > 4m + 10$, $(m, n) = 1$. Giả sử $a, b \in \mathbb{C}$ sao cho đa thức $z^n + az^{n-m} + b$ không có nghiệm bội. Khi đó, tập $S = \{z \mid z^n + az^{n-m} + b = 0\}$ là tập xác định duy nhất các hàm phân hình.

Giả sử $S = \{r_1, \dots, r_n\}$ gồm n điểm phân biệt. Đa thức kết hợp với S :

$$P_S(z) = (z - r_1) \cdots (z - r_n).$$

1.5.4.1. Bổ đề. Giả sử f, g là các hàm phân hình thỏa mãn $f^{-1}(S) = g^{-1}(S)$, trong đó $S = \{a_1, \dots, a_n\}$, Khi đó, ta có:

$$T(r, f) \leq \frac{n}{n-2} T(r, g) + S(r, f),$$

$$T(r, g) \leq \frac{n}{n-2} T(r, f) + S(r, g).$$

Chứng minh: Từ $f^{-1}(S) = g^{-1}(S)$, ta có:

Với mỗi $a_i \in \{a_1, \dots, a_n\}$, tồn tại $a_j \in \{a_1, \dots, a_n\}$ để $f^{-1}(a_i) = g^{-1}(a_j)$, tức là $f(z) = a_i \Leftrightarrow g(z) = a_j$. Hơn nữa, tương ứng trên là tương ứng 1-1. do đó,

$$\overline{N}\left(r, \frac{1}{f - a_i}\right) = \overline{N}\left(r, \frac{1}{g - a_j}\right) \text{ và } \sum_{i=1}^n \overline{N}\left(r, \frac{1}{f - a_i}\right) = \sum_{i=1}^n \overline{N}\left(r, \frac{1}{g - a_i}\right). \quad (*)$$

Theo bất đẳng thức cơ bản, áp dụng cho $a_1, \dots, a_n$, ta có: (đối với f)

$$m(r, \infty) + \sum_{u=1}^n m(r, a_u) \leq 2T(r, f) - \sum_{i=1}^n N\left(r, \frac{1}{f - a_i}\right) + 2N(r, f) - N(r, f') + S(r, f).$$

Cộng thêm hai vế đại lượng $N(r, \infty) + \sum_{u=1}^n N(r, a_u)$:

$$\begin{aligned} & \{m(r, \infty) + N(r, \infty)\} + \sum_{u=1}^n \{m(r, a_u) + N(r, a_u)\} \\ & \leq 2T(r, f) + \sum_{u=1}^n N(r, a_u) + N(r, \infty) - N\left(r, \frac{1}{f}\right) - 2N(r, f) + N(r, f') + S(r, f). \end{aligned}$$

Dùng định lý cơ bản thứ nhất:

$$T(r, f) + nT(r, f) \leq 2T(r, f) + \sum_{u=1}^n N(r, a_u) - N\left(r, \frac{1}{f}\right) + N(r, f') - N(r, f) + S(r, f)$$

Suy ra

$$(n-1)T(r, f) \leq \sum_{u=1}^n N(r, a_u) - N\left(r, \frac{1}{f}\right) + N(r, f') - N(r, f) + S(r, f).$$

Ta có:

$$\sum_{u=1}^n N(r, a_u) - N\left(r, \frac{1}{f}\right) \leq \sum_{u=1}^n \overline{N}(r, a_u),$$

và

$$N(r, f') - N(r, f) \leq \overline{N}(r, f).$$

$$\text{Do đó } (n-1)T(r, f) \leq \sum_{u=1}^n \overline{N}\left(r, \frac{1}{f - a_u}\right) + \overline{N}(r, f) + S(r, f)$$

$$\sum_{u=1}^n \overline{N}\left(r, \frac{1}{f - a_u}\right) + T(r, f) + S(r, f) .$$

$$\sum_{u=1}^n \overline{N}\left(r, \frac{1}{g - a_u}\right) + T(r, f) + S(r, f)$$

Suy ra

$$(n-2)T(r, f) \sum_{u=1}^n \overline{N}\left(r, \frac{1}{g - a_u}\right) + S(r, f) .$$

Do vậy

$$(n-2)T(r, f) \sum_{u=1}^n T\left(r, \frac{1}{g - a_u}\right) + S(r, f) .$$

Dẫn đến,

$$(n-2)T(r, f) \leq nT(r, g) + S(r, f) .$$

Vậy

$$T(r, f) \leq \frac{n}{n-2} T(r, g) + S(r, f) .$$

Chúng minh tương tự, ta có:

$$T(r, g) \leq \frac{n}{n-2} T(r, f) + S(r, g) . \quad W$$

1.5.4.2. Bổ đề.

Giả sử $S = \{r_1, L, r_n\}$ gồm n điểm phân biệt, f, g là các hàm phân hình thoả

mãn $E_S(f) = E_S(g)$, $f = \frac{s_1}{s_2}$, $g = \frac{l_1}{l_2}$, trong đó, (s_1, s_2) , (l_1, l_2) là các cặp hàm chỉnh

hình không có 0 - điểm chung). Khi đó, ta có:

$$y = \frac{P_S(f)}{P_S(g)} = e^{h(z)} \cdot \frac{l_2^n}{s_2^n}, \text{ trong đó } h \text{ là hàm chỉnh hình.}$$

$$\begin{aligned}\text{Chúng minh: } y &= \frac{P_s(f)}{P_s(g)} = \frac{(f - r_1)L(f - r_n)}{(g - r_1)L(g - r_n)} = \frac{\left(\frac{s_1}{s_2} - r_1\right)L\left(\frac{s_1}{s_2} - r_n\right)}{\left(\frac{l_1}{l_2} - r_1\right)L\left(\frac{l_1}{l_2} - r_n\right)} \\ &= \frac{(s_1 - s_2 r_1)L(s_1 - s_2 r_n)}{(l_1 - l_2 r_1)L(l_1 - l_2 r_n)} \frac{l_2^n}{s_2^n}.\end{aligned}$$

Xét hàm

$$\frac{(s_1 - s_2 r_1)L(s_1 - s_2 r_n)}{(l_1 - l_2 r_1)L(l_1 - l_2 r_n)} = j(z).$$

Nếu z_0 là 0-điểm bội k của hàm $j(z)$ thì $s_1(z_0) = r_j s_2(z_0)$ với j nào đó. Suy ra $f(z_0) = r_j$ bội k . Vì $E_s(f) = E_s(g)$ và $g(z_0) = r_m$ nào đó, bội k . Suy ra $(z - z_0)$ bị giản ước nên $j(z)$ không có 0-điểm.

Tương tự, hàm $j(z)$ không có cực điểm nên $j(z)$ chỉnh hình, không có 0-điểm. Do đó, $h(z) = \log j(z)$ chỉnh hình, $j(z) = e^{h(z)}$

Vậy

$$y = e^{h(z)} \times \frac{l_2^n}{s_2^n}. \quad \text{W}$$

1.5.4.3. Bổ đề. Nếu g, ψ là các hàm phân hình có dạng như trên thì

$$\overline{N}\left(r, \frac{1}{y}\right) \leq \overline{N}(r, g) \leq T(r, g).$$

1.5.4.4. Bổ đề. Nếu f, ψ là các hàm phân hình có dạng như trên thì

$$\overline{N}(r, y) \leq \overline{N}(r, f).$$

1.5.4.5. Bổ đề. Nếu f là hàm phân hình, $a_i, i = \overline{0, n}$ là các số phức, $a_0 \neq 0$ và

$$Q(f) = a_0 f^n + a_1 f^{n-1} + \dots + a_n$$

thì

$$T(r, Q(f)) = nT(r, f) + S(r, f).$$

1.5.4.6. Bổ đề.

Nếu f, g là các hàm phân hình khác hằng, c_1, c_2, c_3 là các số phức khác

không thỏa mãn: $c_1 f + c_2 g = c_3$ thì $T(r, f) < \overline{N}(r, \frac{1}{f}) + \overline{N}(r, \frac{1}{g}) + \overline{N}(r, f) + S(r, f)$.

1.5.4.7. Bổ đề.

Nếu f_1, f_2, f_3 là các hàm phân hình khác hằng và thỏa mãn (f_1, f_2, f_3) độc lập

tuyến tính và $f_1 + f_2 + f_3 = 1$ thì $T(r, f_i) < 2 \sum_{i=1}^3 \overline{N}(r, \frac{1}{f_i}) + \sum_{i=1}^3 \overline{N}(r, f_i) + S(r, f_i)$.

- Đặt $S = \{z \mid z^n + az^{n-m} + b = 0\}$, $m^3 \nmid 2, n > 4m + 10, (n, m) = 1$.

$$y = \frac{P_S(f)}{P_S(g)} = \frac{f^n + af^{n-m} + b}{g^n + ag^{n-m} + b} \cdot f_1, f_2, f_3 \text{ định nghĩa như sau:}$$

$$f_1 = -\frac{1}{b} f^{n-m}(f^m + a),$$

$$f_2 = \frac{1}{b} y g^{n-m}(g^m + a),$$

$$f_3 = y.$$

Ta có:

$f_1 + f_2 + f_3 = 1$. Giả sử $y \neq \text{const}$ ($f_3 \neq \text{const}$). Khi đó ta có hai bổ đề 1.5.4.8.

và 1.5.4.10. sau đây:

1.5.4.8. Bổ đề.

Nếu f_1, f_2 là các hàm phân hình có dạng trên thì f_1, f_2 độc lập tuyến tính.

1.5.4.9. Mệnh đề.

Giả sử f, g là các hàm phân hình thoả mãn $E_s(f) = E_s(g)$,

$$S = \{z \mid z^n + az^{n-m} + b = 0\}, P_s(z) = \tilde{O}_{c \in S}(z - c), y = \frac{P_s(f)}{P_s(g)}, a, b = \text{const},$$

$$f_2 = \frac{1}{b} y g^{n-m} (g^m + a). \text{ Khi đó:}$$

$$\overline{N}(r, \frac{1}{f_2}) \leq (m+1)T(r, g),$$

$$\overline{N}(r, f_2) \leq T(r, f).$$

Chúng minh: Giả sử f, g là các hàm phân hình có dạng $f = \frac{s_1}{s_2}, g = \frac{l_1}{l_2}$, trong

đó, $(s_1, s_2), (l_1, l_2)$ là các cặp hàm chỉnh hình không có 0 - điểm chung). Theo bổ đề 1.5.4.2, ta có:

$$y = \frac{P_s(f)}{P_s(g)} = e^{h(z)} \frac{l_2^n}{s_2^n},$$

trong đó, h là hàm chỉnh hình.

Khi đó

$$f_2 = \frac{1}{b} e^h \frac{l_2^n}{s_2^n} g^{n-m} (g^m + a). \quad (1)$$

$$\overline{N}(r, \frac{1}{f_2}) = \frac{1}{b} \log \frac{r}{|b|}, \text{ trong đó } b \text{ là 0-điểm của } f_2, \text{ mỗi 0-điểm tính một lần.}$$

Nếu z_0 là 0-điểm của y thì z_0 là 0-điểm của $l_2 \nmid l_1(z_0) \neq 0$. Từ (1), ta có:

$$f_2 = \frac{1}{b} \frac{e^h}{s_2^n} (l_1^n + a l_1^{n-m} l_2^m) \nmid f_2(z_0) \neq 0.$$

Do đó, mọi 0-điểm của f_2 đều là 0-điểm của g hoặc $g^m + a$.

$$\begin{aligned} \overline{N}(r, \frac{1}{f_2}) &\leq \overline{N}(r, \frac{1}{g}) + \overline{N}(r, \frac{1}{g^m + a}) \leq T(r, g) + T(r, g^m + a) + O(1) \\ &\leq T(r, g) + mT(r, g) + O(1) \leq (m+1)T(r, g). \end{aligned}$$

$\overline{N}(r, f_2) = \frac{1}{b} \log \frac{r}{|b|}$, trong đó b là cực điểm của f_2 , mỗi cực điểm tính một lần.

Ta có: $f_2 = \frac{1}{b} \frac{e^h}{s_2^n} (l_1^n + a l_1^{n-m} l_2^m)$. Giả sử z_1 là cực điểm của g . Khi đó,

$l_2(z_1) = 0, l_1(z_1) \neq 0$. Suy ra $f_2(z) \neq \infty$ và $s_2(z) = 0$. Do đó, mỗi cực điểm của f_2 đều là 0-điểm của s_2 , do đó đều là cực điểm của hàm f .

Vậy

$$\overline{N}(r, f_2) \leq \overline{N}(r, f) \leq T(r, f) + O(1). \quad \text{W}$$

1.5.4.10. Bổ đề.

Nếu f_1, f_2, f_3 là các hàm phân hình có dạng trên thì f_1, f_2, f_3 phụ thuộc tuyến tính.

Chứng minh: Giả sử f_1, f_2, f_3 độc lập tuyến tính, $f_2 \neq \text{const}$, $f_1 + f_2 + f_3 = 1$.

Áp dụng bổ đề 1.5.4.7:

$$T(r, f_1) \leq 2\overline{N}(r, \frac{1}{f_1}) + 2\overline{N}(r, \frac{1}{f_2}) + 2\overline{N}(r, \frac{1}{f_3}) + \overline{N}(r, f_1) + \overline{N}(r, f_2) + \overline{N}(r, f_3) + S(r).$$

Ta có:

$$T(r, f_1) = nT(r, f) + O(1) \text{ (theo bổ đề 1.5.4.5).}$$

$$\overline{N}(r, \frac{1}{f_1}) \leq \overline{N}(r, \frac{1}{f}) + \overline{N}(r, \frac{1}{f^m + a})$$

$$\leq T(r, \frac{1}{f}) + T(r, \frac{1}{f^m + a}) = T(r, f) + T(r, f^m + a) + O(1)$$

$$= (m+1)T(r, f) + S(r).$$

$$\overline{N}(r, \frac{1}{f_2}) \leq \overline{N}(r, \frac{1}{g}) + \overline{N}(r, \frac{1}{g^m + a}) \leq T(r, g) + mT(r, g) + S(r) = (m+1)T(r, g) + S(r).$$

$$\overline{N}(r, \frac{1}{f_3}) = \overline{N}(r, \frac{1}{y}) \leq \overline{N}(r, g) \leq T(r, g).$$

$$\overline{N}(r, f_1) = \overline{N}(r, f) \leq T(r, f).$$

$$\overline{N}(r, f_2) \leq \overline{N}(r, y) = \overline{N}(r, f) \leq T(r, f).$$

$$\overline{N}(r, f_3) = \overline{N}(r, y) = \overline{N}(r, f) \leq T(r, f).$$

$$\text{Do đó, } nT(r, f) < (2m+2)T(r, f) + (2m+2)T(r, g) + 2T(r, g)$$

$$+ T(r, f) + T(r, f) + T(r, f) + S(r).$$

$$= (2m+5)T(r, f) + (2m+4)T(r, g) + S(r).$$

$$\leq (2m+5 + \frac{n}{n-2}(2m+4))T(r, f) + S(r). \quad (2)$$

Mặt khác,

$$n > 4m+10 \text{ và } n-2 > 4m+8 \quad (3)$$

Suy ra

$$(2m+5 + \frac{n}{n-2}(2m+4)) = 4m+9 + \frac{4m+8}{n-2} < 4m+9 + \frac{4m+8}{4m+8} = 4m+10 < n, \text{ mâu}$$

thuẫn với (2).

Suy ra giả sử trên là sai. Vậy f_1, f_2, f_3 phụ thuộc tuyến tính.

W

Nhận xét:

Để chứng minh S là một tập xác định duy nhất, ta thực hiện 3 bước:

$$\text{Đặt } y = \frac{P_s(f)}{P_s(g)}.$$

Chúng minh rằng $y = \text{const.}$

$$y = 1.$$

$$P_S(f) = P_S(g) \text{ và } f = g.$$

1.5.5. Định nghĩa.

• Đa thức $P(z)$ được gọi là đa thức xác định duy nhất các hàm phân hình nếu từ đẳng thức $P(f) = P(g) \text{ và } f = g$.

(f, g phân hình, khác hằng số).

• Đa thức $P(z)$ được gọi là đa thức xác định duy nhất theo nghĩa rộng nếu từ $P(f) = cP(g), c \neq 0 \text{ và } f = g$.

(f, g là các hàm phân hình, khác hằng số).

Để chứng minh S xác định duy nhất:

1 $P_S(z)$ là đa thức xác định duy nhất theo nghĩa rộng.

2 Từ $E_S(f) = E_S(g) \text{ và } P_S(f) = cP_S(g)$.

1.5.6. Mệnh đề. Cho f, j là các hàm nguyên, $a \neq 0$, m, n là các số nguyên thỏa mãn: $m \geq 2, n > 2m, f^{n-m}(f^m + a) = j^n$. Khi đó:

$$f, j = \text{const}.$$

Chứng minh: Giả sử z_0 là 0-điểm của f . Khi đó $f(z_0) = 0 \text{ và } j(z_0) = 0 \text{ và } z_0$ là nghiệm bội ít nhất là n của $j^n \text{ và } z_0$ là nghiệm bội ít nhất là 2 của f . Do đó,

mọi nghiệm của phương trình $f = 0$ đều có bội $\geq 2 \text{ và } Q(0) \geq \frac{1}{2}$. Xét

$x_j^m = -a, j = 1, \dots, m$. Ta thấy phương trình $f(z) = x_j$ có các nghiệm đều với bội lớn hơn hoặc bằng n . Suy ra $Q(x_j) \geq 1 - \frac{1}{n}$. Do đó,

$$Q(a) \geq \frac{1}{2} + m(1 - \frac{1}{n}) = m + \frac{1}{2} - \frac{m}{n} > m \geq 2, \text{ mâu thuẫn.}$$

Suy ra f không có 0-điểm. Do đó, $f = \text{const}$, vì vậy $j = \text{const}$.

W

1.5.7. Mệnh đề. Không tồn tại hàm phân hình f^{-1} const thoả mãn:

$$f' = f(f^2 - 1). \quad (1)$$

Chứng minh: Nếu mọi nghiệm của phương trình $f = a$ đều là nghiệm bội thì $\overline{N}(r, a) \leq \frac{1}{2}N(r, a) \leq \frac{1}{2}T(r, f)$. Suy ra $Q(a) = 1 - \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\overline{N}(r, a)}{T(r, f)} \leq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Ta có: f không có cực điểm, vì nếu z_0 là cực điểm cấp k của f thì z_0 là cực điểm cấp $3k$ của $f(f^2 - 1)$, và z_0 là cực điểm cấp $k+1$ của f' , nhưng phương trình $k+1 = 3k$ vô nghiệm, tức là $k+1 \neq 3k$.

Do đó, f là hàm chỉnh hình.

Từ (1) ta thấy, với $a = 0$ hoặc $a = \pm 1$ thì phương trình $f = a$ có mọi nghiệm đều là nghiệm bội. Suy ra $Q(0) \leq \frac{1}{2}$, $Q(1) \leq \frac{1}{2}$, $Q(-1) \leq \frac{1}{2}$. Do đó, $\bigcup_{a \in \mathbb{C}} Q(a) \leq 1,5$, mâu thuẫn với f chỉnh hình, tức là $\bigcup_{a \in \mathbb{C}} Q(a) \leq 1$.

Vậy $\S$ hàm phân hình f^{-1} const thoả mãn: $f' = f(f^2 - 1)$. W

1.5.8. Mệnh đề. Không tồn tại hàm phân hình f^{-1} const thoả mãn:

$$f' = f(f^2 - 1)(f^2 + 1).$$

Chứng minh: Với mỗi $a = 0, \pm 1, \pm i$, ta đều có từ phương trình $f(z) = a$ dẫn đến $f'(z) = 0$. Do đó, mọi nghiệm của phương trình $f(z) = a$ đều là nghiệm bội.

$\bigcup_{a \in \mathbb{C} \setminus \{0, \pm 1, \pm i\}} Q(a) \leq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, $\bigcup_{a \in \mathbb{C} \setminus \{0, \pm 1, \pm i\}} Q(a) \leq 2,5$, mâu thuẫn.

Vậy Không tồn tại hàm phân hình f^{-1} const thoả mãn:

$$f' = f(f^2 - 1)(f^2 + 1). \quad \text{W}$$

1.5.9. Mệnh đề. Nếu f và g là các hàm phân hình thoả mãn:

$$f^n + af^{n-m} = g^n + ag^{n-m},$$

$$\text{với } a \in \mathbb{C}^*, m, n \in \mathbb{N}^*, (m, n) = 1, n > m^3 - 3, n - m^3 \geq 2 \quad (1)$$

thì $f, g = \text{const}$ hoặc $f \circ g$.

$$\text{Chúng minh: } f^n + af^{n-m} = g^n + ag^{n-m} \Leftrightarrow \frac{f^n}{g^n} + a \frac{f^{n-m}}{g^n} = 1 + a \frac{1}{g^m}. \quad (2)$$

Nếu $f \neq g$, ta đặt:

$$h = \frac{f}{g}.$$

$$\text{Khi đó, } h \neq 1, (2) \text{ có dạng } h^n + a \frac{h^{n-m}}{g^m} = 1 + \frac{a}{g^m} \Leftrightarrow g^m h^n + ah^{n-m} = g^m + a.$$

$$\Leftrightarrow g^m(h^n - 1) = -a(h^{n-m} - 1).$$

Gọi $1 \neq x_j, j = 1, L, n-1$ là các căn bậc n của 1, tức là

$$x_j^n = 1, x_j^{n-1} \neq 1 \Leftrightarrow x_j^{n-m-1} \neq 1, j = 1, L, n-1.$$

$$\text{Do } (n, m) = 1 \Leftrightarrow (n, n-m) = 1 \Leftrightarrow x_j^{n-m-1} \neq 1.$$

$$h(z_0) = x_j \Leftrightarrow h^{n-m}(z_0) - 1 \neq 0 \Leftrightarrow g(z_0) \neq 1, z_0 \text{ là cực điểm cấp } \geq m \text{ của } g^m.$$

Suy ra

$$g^m = \frac{c_m}{(z - z_0)^m} + \frac{c_{m+1}}{(z - z_0)^{m+1}} + L \Leftrightarrow h(z) = x_j + (z - z_0)^m + (z - z_0)^{m+1} + L$$

" $j = 1, L, n-1$ nghiệm tùy ý của phương trình $h(z) = x_j$ có bội ít nhất là m .

$$\text{Suy ra } Q(x_j)^3 \leq 1 - \frac{1}{m} \leq \sum_{j=1}^{n-1} Q(x_j)^3 \leq (n-1)(1 - \frac{1}{m})^3 \leq \frac{8}{3} \text{ (đối với hàm } h).$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n-1} Q(a)^3 \leq \frac{8}{3}, \text{ mâu thuẫn với } \sum_{j=1}^{n-1} Q(a)^3 \geq 2.$$

$$\text{Vậy } h = \text{const} \neq 1, g^m = -a \frac{h^{n-m} - 1}{h^n - 1}. \text{ Suy ra } g = \text{const}, \text{ do đó } f = \text{const}. \quad \square$$

Chương II: PHÂN PHỐI GIÁ TRỊ CỦA HÀM NGUYÊN VÀ ĐẠO HÀM CỦA NÓ.

Trong chương này, ta nghiên cứu hàm nguyên f và tổ hợp tuyến tính của các đạo hàm của nó $L(f)$ với hệ số là các hàm nhỏ thỏa mãn điều kiện f và $L(f)$ cùng phân phối một giá trị CM và giá trị khác là IM . Ta cũng giải quyết vấn đề tương tự khi hàm nguyên f và đạo hàm f' của nó cùng phân phối đồng thời hai giá trị CM . Một số kết quả vẫn đúng nếu f là hàm phân hình và thỏa mãn $N(r, f) = o(T(r, f))$ khi $r \rightarrow \infty$ và những giá trị a, b được thay bởi các hàm nhỏ của $f(z)$.

Giả sử f và g là hai hàm phân hình khác hằng số và b là một số phức. Ta nói rằng f và g cùng phân phối giá trị b CM (IM) nếu $f(z) - b$ và $g(z) - b$ có cùng không điểm kể cả bội (không kể bội). Năm 1929, R.Nevanlinna chứng minh rằng:

- (i) nếu f và g cùng phân phối 5 giá trị IM thì $f \equiv g$,
- (ii) nếu f và g cùng phân phối bốn giá trị CM thì f là một phép ánh xạ Mobius của g .

Đặc biệt, nếu f và g là các hàm nguyên thì $f \equiv g$, với điều kiện f và g cùng phân phối bốn giá trị hữu hạn CM .

Sau đó, các nghiên cứu về phân phối giá trị được mở rộng thành nghiên cứu về phân phối các hàm nhỏ của f , xem [2], [3], [4], [5] và [6].

Định nghĩa: Hàm phân hình $a(z)$ được gọi là một hàm nhỏ của $f(z)$ nếu $T(r, a(z)) = o(T(r, f))$ khi $r \rightarrow \infty$, ngoài một tập hợp có độ đo hữu hạn của $r \in (0, \infty)$.

Ví dụ trong [7] chỉ ra rằng, tồn tại một tập đơn S với 15 phần tử để $f^{-1}(S) = g^{-1}(S)$ suy ra $f \equiv g$. Để hiểu rõ hơn, chúng ta tham khảo trong Yi [4] và Mues – Reinders [8]. Năm 1976, trong [10] chỉ ra rằng: nếu một hàm nguyên f và đạo hàm f' của nó có cùng phân phối hai giá trị $a, b \in \mathbb{C}$ thì $f \equiv f'$. Từ đó, lĩnh vực về phân phối giá trị giữa một hàm phân hình và các đạo hàm của nó đã được nhiều nhà toán học nghiên cứu. Ví dụ: G.Gundersen [10] chứng minh rằng, nếu f là hàm nguyên và cùng phân phối hai giá trị hữu hạn khác không IM với f' thì $f \equiv f'$. E. Mues và N.Steinmetz [17] chứng minh rằng, nếu f là hàm phân hình và cùng phân phối ba giá trị hữu hạn IM với f' thì $f \equiv f'$. Kết quả này được Frank và Schwick mở rộng tới trường hợp f cùng phân phối ba giá trị hữu hạn IM với $f^{(k)}$. Câu hỏi tương tự khi f cùng phân phối ba giá trị hữu hạn IM với đa thức vi phân $L(f)$ đã được nghiên cứu trong [11] và [12]. Khi một hàm phân hình f cùng phân phối hai giá trị hữu hạn CM với đa thức vi phân $L(f)$ mà các hệ số của nó là các đa thức, P. Russmann chứng minh rằng $f \equiv L(f)$, ngoại trừ sáu trường hợp riêng.

Gần đây hơn, Bernstein-Chang-Li [13] đã nghiên cứu các câu hỏi tương tự về hàm phân hình của biến số phức. Trong trường hợp đặc biệt, họ chứng minh rằng:

Định lý A: *Giả sử f là một hàm nguyên khác hằng số và*

$$L(f) = b_n f^{(n)} + b_{n-1} f^{(n-1)} + \dots + b_1 f' + b_0 f,$$

trong đó b_j là những hàm phân hình nhỏ của f . Nếu f và $L(f)$ cùng phân phối hai giá trị CM thì $f \equiv L(f)$.

Trong chương này, ta xét vấn đề khi điều kiện của định lý A được thay đổi bởi giả thiết rằng f (nguyên) và $L(f)$ có cùng phân phối một giá trị a_1 CM và một giá trị khác a_2 IM. Chúng ta cũng giải thích được vấn đề thú vị, đó là: Chuyện gì xảy ra nếu một hàm nguyên f và đạo hàm f' của nó có cùng phân phối một tập gồm hai giá trị hữu hạn a_1, a_2 CM, tức là $(f(z)-a_1)(f(z)-a_2)=0$ và $(f'(z)-a_1)(f'(z)-a_2)=0$ có cùng không điểm, kể cả bội?

2.1. Sự xác định của hàm nguyên và tổ hợp tuyến tính của các đạo hàm của nó dựa vào tạo ảnh của hai điểm.

Các bổ đề dưới đây được dùng để chứng minh định lý. Bổ đề 2.1.1 dễ dàng suy ra từ bổ đề về đạo hàm logarit vì: $m(r, \frac{f'}{f}) = S(r, f)$. Bổ đề 2.1.2 và bổ đề 2.1.3 dễ dàng chứng minh. Bổ đề 2.1.4 có thể dễ dàng suy ra từ bổ đề 2.1.2.

2.1.1. Bổ đề. *Giả sử f là một hàm phân hình siêu việt, $P_k(f)$ là một đa thức bậc k của f , và $a_i, i=1, 2, \dots, n$ là các hằng số hữu hạn phân biệt trong $\mathbb{C}$. Giả sử*

$$g = \frac{P_k(f)f'}{(f-a_1)\cdots(f-a_n)}.$$

Nếu $k < n$ thì $m(r, g) = S(r, f)$, trong đó, từ nay về sau, $S(r, f)$ sẽ được sử dụng để chỉ đại lượng $o(T(r, f)), r \rightarrow \infty$, ngoài một tập có độ đo hữu hạn của $r \in (0, \infty)$.

2.1.2. Bổ đề. *Giả sử $P_k(f)$ và $P_l(f)$ lần lượt là hai đa thức bậc k và l . Cụ thể:*

$$P_k(f) = a_0(z)f^k(z) + a_1(z)f^{k-1}(z) + \cdots + a_k(z),$$

và

$$P_l(f) = b_0(z)f^l(z) + b_1(z)f^{l-1}(z) + \cdots + b_l(z),$$

trong đó, $a_i(z), b_j(z), i = \overline{0, k}, j = \overline{0, l}$ là các hàm nhỏ của f sao cho không có đa thức bậc lớn hơn một nào của f có thể là nhân tử chung của $P_k(f)$ và $P_l(f)$. Giả sử

$$R(f) = \frac{P_k(f)}{P_l(f)}.$$

Khi đó

$$T(r, R(f)) = dT(r, f) + S(r, f),$$

trong đó $d = \max\{k, l\}$.

2.1.3. Bổ đề. Giả sử f là một hàm phân hình siêu việt và $b_i, i = 0, 1, \dots, n$ là các hàm phân hình nhỏ của f . Nếu

$$b_n f^n + b_{n-1} f^{n-1} + \dots + b_0 \equiv 0,$$

thì $b_i \equiv 0, i = 0, 1, \dots, n$.

2.1.4. Bổ đề. Giả sử:

$$f = \sum_{i=0}^n b_i e^{i\alpha},$$

trong đó α là một hàm nguyên khác hằng số và $b_i (i = 0, 1, \dots, n)$ là các hàm phân hình thoả mãn $T(r, b_i) = S(r, e^\alpha)$. Khi đó

$$T(r, f^{(k)}) = T(r, f) + S(r, f).$$

2.1.5. Bổ đề. Giả sử f là một hàm nguyên khác hằng số và

$$g = L(f) = b_{-1} + \sum_{i=0}^n b_i f^{(i)}, \quad (1)$$

trong đó $b_i (i = -1, 0, 1, \dots, n)$ là các hàm phân hình nhỏ của f . Giả sử a_1 và a_2 là hai hằng số phân biệt trong $\mathbb{C}$. Nếu f và g cùng phân phối a_1, a_2 IM, thì

$$T(r, f) = \overline{N}\left(r, \frac{1}{f - a_1}\right) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{f - a_2}\right) + S(r, f),$$

và

$$T(r, f) \leq 2T(r, g) + S(r, f)$$

với điều kiện là $f \neq g$.

Chúng minh: Giả sử

$$\phi = \frac{f'(f-g)}{(f-a_1)(f-a_2)}. \quad (2)$$

Từ bổ đề 2.1.1, dễ dàng thấy rằng $m(r, \phi) = S(r, f)$. Do f và g cùng phối a_1 và a_2 , ta có: $N(r, \phi) = S(r, f)$, vì vậy

$$T(r, \phi) = S(r, f). \quad (3)$$

Nếu $\phi \equiv 0$ thì $f \equiv g$. Giả sử rằng $\phi \not\equiv 0$, tức là $f \neq g$. Từ (2) ta suy ra

$$\begin{aligned} T(r, f-g) &= T(r, \frac{\phi(f-a_1)(f-a_2)}{f'}) \\ &= T(r, \frac{f'}{(f-a_1)(f-a_2)}) + S(r, f) \\ &= N(r, \frac{f'}{(f-a_1)(f-a_2)}) + S(r, f). \end{aligned}$$

Ta có:

$$T(r, f-g) = \bar{N}(r, \frac{1}{f-a_1}) + \bar{N}(r, \frac{1}{f-a_2}) + S(r, f).$$

Từ biểu thức của g , ta có $T(r, f-g) \leq T(r, f) + S(r, f)$. Vì vậy

$$\bar{N}(r, \frac{1}{f-a_1}) + \bar{N}(r, \frac{1}{f-a_2}) \leq T(r, f) + S(r, f).$$

Theo định lý cơ bản thứ hai của Nevanlinna và bất đẳng thức trên, ta có

$$\begin{aligned} T(r, f) &= \bar{N}(r, \frac{1}{f-a_1}) + \bar{N}(r, \frac{1}{f-a_2}) + S(r, f) \\ &\leq T(r, g) + T(r, g) + S(r, f), \end{aligned}$$

bởi vì f và g cùng phân phối a_1 và a_2 .

2.1.6. Bổ đề. Giả sử f và g như trong bổ đề 2.1.5. Hơn nữa, nếu f và g cùng phân phối a_1 CM, a_2 IM và $N(r, \frac{1}{f-a_2}) = S(r, f)$. Khi đó $f \equiv g$.

Chứng minh: Giả sử rằng $f \neq g$. Khi đó, hàm ϕ trong (2) không đồng nhất với không. Đặt

$$\beta = \frac{g'}{g-a_2} - \frac{f'}{f-a_2}. \quad (4)$$

Theo giả thiết của bổ đề 2.1.6, ta có $T(r, \beta) = S(r, f)$. Từ (2), ta có

$$\phi \frac{f-a_1}{f'} \equiv 1 - \frac{g-a_2}{f-a_2}.$$

Lấy đạo hàm và sử dụng (4), ta có:

$$\phi' \frac{f-a_1}{f'} + \phi \left(1 - \frac{(f-a_1)f''}{(f')^2} \right) \equiv \beta \left(\phi \frac{f-a_1}{f'} - 1 \right).$$

Ta có:

$$(\phi + \beta) \frac{f'}{f-a_1} - \phi \frac{f''}{f'} + \phi' - \beta \phi \equiv 0. \quad (5)$$

Do $N(r, \frac{1}{f-a_2}) = S(r, f)$, từ bổ đề 2.1.5, ta có:

$$\overline{N}(r, \frac{1}{f-a_1}) = T(r, f) + S(r, f) \neq S(r, f).$$

Do f, g cùng phân phối $a_1 CM$, từ (2) ta thấy hầu hết các a_1 -điểm của f đều là đơn. Và (5) suy ra rằng hầu hết các a_1 -điểm đơn của f là các 0 - điểm của $\phi + \beta$. Từ đó ta có $\phi + \beta \equiv 0$, và như vậy

$$-\frac{f''}{f'} + \frac{\phi'}{\phi} - \beta \equiv 0.$$

Ta có

$$\phi(f-a_2) \equiv c f'(g-a_2), \quad (6)$$

trong đó $c \neq 0$ là một hằng số. Từ (2) và (6), ta có:

$$f - g \equiv c(f-a_1)(g-a_2),$$

hay có thể được viết lại là

$$-c \left(g - \frac{1+ca_2}{c} \right) \equiv \frac{g-a_1}{f-a_1}.$$

Do f, g cùng phân phối a_1 CM, nên theo đồng nhất thức ở trên có:

$$N(r, \frac{1}{g-(1+ca_2)/c}) = S(r, f).$$

Do đó, theo định lý cơ bản thứ hai của Nevanlinna,

$$T(r, g) \leq \overline{N}(r, \frac{1}{g-a_2}) + \overline{N}(r, \frac{1}{g-(1+ca_2)/c}) + S(r, g) = S(r, f).$$

Như vậy, theo bổ đề 2.1.5,

$$T(r, f) \leq 2T(r, g) + S(r, f) = S(r, f), \text{ mâu thuẫn.}$$

W

2.1.7. Định lý. Giả sử f là một hàm nguyên khác hằng số và

$$g = L(f) = b_{-1} + \sum_{i=0}^n b_i f^{(i)},$$

trong đó, $b_i (i = -1, 0, 1, \dots, n)$ là các hàm phân hình nhỏ của f . Giả sử a_1 và a_2 là hai hằng số phân biệt trong $\mathbb{C}$. Nếu f và $g = L(f)$ cùng phân phối a_1 CM và a_2 IM thì $f \equiv g$ hoặc f và g có biểu thức như sau:

$$f = a_2 + (a_1 - a_2)(1 - e^\alpha)^2,$$

và

$$g = 2a_2 - a_1 + (a_1 - a_2)e^\alpha,$$

trong đó α là một hàm nguyên.

Chứng minh: Giả sử rằng $f \not\equiv g$. Đặt

$$\gamma = \frac{f'}{f-a_1} - \frac{g'}{g-a_1}. \quad (7)$$

Do f và g cùng phân phối a_1 CM, ta có $T(r, \gamma) = S(r, f)$. Từ (2)

$$\phi \frac{f-a_2}{f'} \equiv 1 - \frac{g-a_1}{f-a_1}.$$

Lấy đạo hàm hai vế đồng nhất thức trên và sử dụng nó lần nữa, ta suy ra

$$\phi' \frac{f-a_2}{f'} + \phi \left(1 - \frac{(f-a_2)f''}{(f')^2} \right) \equiv \gamma \frac{g-a_1}{f-a_1} \equiv \gamma \left(1 - \phi \frac{f-a_2}{f'} \right).$$

Ta có

$$(\phi - \gamma) \frac{f'}{f-a_2} - \phi \frac{f''}{f'} + \phi' + \gamma \phi \equiv 0. \quad (8)$$

Nếu $\phi - \gamma \equiv 0$ thì

$$-\frac{f''}{f'} + \frac{\phi'}{\phi} + \frac{f'}{f-a_1} - \frac{g'}{g-a_1} \equiv 0.$$

Từ (2) và phương trình trên, ta có:

$$\frac{f-g}{(f-a_2)(g-a_1)} \equiv c \text{ (hằng số khác không),}$$

dẫn đến kết quả f và g cùng phân phối a_1, a_2 CM. Và vì vậy, theo định lý A, ta có $f \equiv g$, mâu thuẫn.

Sau đây, ta giả thiết rằng $\phi - \gamma \neq 0$. Kí hiệu $N_k(r, \frac{1}{f-a})$ là hàm đếm theo các a -điểm của f mà số bội ít hơn hoặc bằng k và kí hiệu $N_{(k+1)}(r, \frac{1}{f-a})$ là hàm đếm theo các a -điểm của f mà số bội nhiều hơn k .

Giả sử z_0 là một a_2 -điểm của f , có số bội $k \geq 1$, nhưng không là 0-điểm của $\phi - \gamma$ và không là cực điểm của $\phi' + \gamma\phi$. Khi đó từ công thức (8) suy ra rằng $\phi(z_0) - k\gamma(z_0) = 0$. Nếu $\phi - k\gamma \neq 0$ với mỗi $k \geq 1$ thì

$$N_k(r, \frac{1}{f-a_2}) = S(r, f).$$

Giả sử z_1 là một a_2 -điểm của f với số bội $k \geq n+2$, nhưng không là 0 - điểm của $\phi - \gamma$ và không là cực điểm của $\phi' + \gamma\phi$ và b_i ($i = -1, 0, 1, \dots$). Khi đó từ (1), ta có $b_{-1}(z_1) + b_0(z_1)a_2 = a_2$. Nếu $b_{-1} + b_0a_2 \neq a_2$, thì ta có $N_{(n+2)}(r, \frac{1}{f-a_2}) = S(r, f)$.

Nếu $b_{-1} + b_0a_2 \equiv a_2$, thì từ (1) có:

$$g - f \equiv (b_0 - 1)(f - a_2) + \sum_{i=1}^n b_i f^{(i)}.$$

Do đó, z_1 là một 0 - điểm bội của $g - f$ và vì vậy là một 0 - điểm của ϕ . Do đó $N_{(n+2)}(r, \frac{1}{f-a_2}) = S(r, f)$ vẫn đúng. Trong mỗi trường hợp, ta có thể kết luận rằng $N(r, \frac{1}{f-a_2}) = S(r, f)$. Do đó $f \equiv g$ theo bổ đề 2.1.6.

Bây giờ, ta giả sử rằng tồn tại một số nguyên $k \geq 1$ sao cho $\phi - k\gamma \equiv 0$ và $\phi \neq 0$. Khi đó theo (8) có:

$$(1 - \frac{1}{k}) \frac{f'}{f-a_2} - \frac{f''}{f'} + \frac{\phi'}{\phi} + \gamma \equiv 0 \quad (9)$$

Lấy tích phân, ta thu được:

$$(f - a_2)^{k-1} \equiv c \left[\frac{f'(g-a_1)}{\phi(f-a_1)} \right]^k,$$

trong đó, $c \neq 0$ là một hằng số. Từ đây và (2), bằng cách khử bỏ ϕ , ta có:

$$f \equiv a_2 + \frac{1}{c}(h-1)^k, \quad (10)$$

$$\text{trong đó,} \quad h \equiv \frac{f-a_1}{g-a_1}. \quad (11)$$

Rõ ràng, $h' \equiv \gamma h$, từ (1) và (10) ta thấy tồn tại các hàm nhỏ d_i ($i = 0, 1, \dots, k$) của f để

$$g \equiv \sum_{i=0}^k d_i h^i. \quad (12)$$

Từ (10), (11) và (12), ta có:

$$d_k h^{k+1} + \sum_{i=2}^k \left[d_{i-1} - \frac{(-1)^{k-i}}{c} C_k^i \right] h^i + \left[d_0 - a_1 - (-1)^{k-1} \frac{k}{c} \right] h + a_1 - a_2 - \frac{(-1)^k}{c} \equiv 0 \quad (13)$$

Từ đây và bổ đề 2.1.3, ta nhận được:

$$\begin{aligned} c &\equiv \frac{(-1)^k}{a_1 - a_2}, \\ d_0 &\equiv a_1 - k(a_1 - a_2), \\ d_{i-1} &\equiv (-1)^i C_k^i (a_1 - a_2), i = 2, \dots, k, \\ d_k &\equiv 0. \end{aligned}$$

Vì vậy, từ (10), (11) và (12) có:

$$\begin{aligned} f &\equiv a_2 + (a_1 - a_2)(1-h)^k, \\ g &\equiv a_1 + \frac{(a_1 - a_2)[(1-h)^k - 1]}{h}. \end{aligned}$$

Hai đồng nhất thức trên có thể viết lại là:

$$f - a_2 \equiv (a_1 - a_2)(1-h)^k, \quad (14)$$

$$g - a_2 \equiv (a_1 - a_2) \frac{h-1}{h} [1 - (1-h)^{k-1}]. \quad (15)$$

Do f và g phân phối a_1 CM, ta có $N(r, h) = S(r, f)$ và $N(r, \frac{1}{h}) = S(r, f)$. Mặt khác, từ (10) và bổ đề 2.1.2, ta có:

$$T(r, h) = \frac{1}{k} T(r, f) + S(r, f) \neq S(r, f).$$

Như vậy, h có thể lấy mỗi giá trị hữu hạn $b \neq 0, 1$. Vì vậy, khi $k > 2$, tồn tại một giá trị $b \neq 0, 1$ để $(1-b)^{k-1} = 1$. Để ý rằng f và g cùng phân phối a_2 , từ (14) và (15) ta có thể kết luận rằng $k = 2$. Vì vậy, $g \equiv 2a_2 - a_1 + (a_1 - a_2)h$ là một hàm nguyên. Như vậy, $h = \frac{f - a_1}{g - a_1} = e^\alpha$, trong đó α là một hàm nguyên. Cuối cùng, từ đây, (14) và (15), ta thu được:

$$f \equiv a_2 + (a_1 - a_2)(1 - e^\alpha)^2,$$

và

$$g \equiv 2a_2 - a_1 + (a_1 - a_2)e^\alpha.$$

Định lý 2.1.7 được chứng minh. W

2.1.8. Hệ quả. Giả sử f là một hàm nguyên và a_1, a_2 là hai số phân biệt trong $\mathbb{C}$. Nếu f và $f^{(k)}$ phân phối a_1 CM và a_2 IM thì $f \equiv f^{(k)}$.

Chứng minh: Nếu $f \equiv a_2 + (a_1 - a_2)(1 - e^\alpha)^2$ thì theo bổ đề 2.1.4, $f^{(k)}$ không thể có dạng $2a_2 - a_1 + (a_1 - a_2)e^\alpha$. Như vậy, hệ quả 2.1.8 có được từ định lý 2.1.7. W

Chú ý 1: (i) Có nhiều ví dụ cho thấy từ “hàm nguyên” trong định lý 2.1.7 không thể được thay đổi bởi “hàm phân hình”. (ii) Giả thiết “ f và $L(f)$ cùng phân phối a_1 CM” trong định lý 2.1.7 không thể được thay đổi bởi “ f và $L(f)$ cùng phân phối a_1 IM”.

Ví dụ 1: Giả sử $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$, $a_1 - a_2 = \sqrt{2}i$, w là một nghiệm khác hằng của phương trình Riccati sau:

$$w' = (w - a_1)(w - a_2).$$

Giả sử

$$f = (w - a_1)(w - a_2) - \frac{1}{3}.$$

Khi đó w và f là các hàm phân hình siêu việt và $w' \neq 0$. Dễ dàng thử lại rằng:

$$f'' = 6w'f, \quad f'' + \frac{1}{6} = 6\left(f + \frac{1}{6}\right)^2.$$

Như vậy, f và f'' cùng phân phối $0CM$ và $-\frac{1}{6}IM$. Trong khi, $f \neq f'$ và f cũng không có dạng $a_2 + (a_1 - a_2)(1 - e^\alpha)^2$.

Ví dụ 2: Giả sử $f = \frac{1}{2}e^z + \frac{1}{2}a^2e^{-z}$ và $L(f) = f'' + f' = e^z$, trong đó a là một hằng số khác không. Hiển nhiên là

$$(L(f) - f)^2 = (f - a)(f + a).$$

Như vậy, f và $L(f)$ cùng phân phối $-a, aIM$ mà không CM . Một lần nữa $f \neq L(f)$ và f cũng không có dạng $a_2 + (a_1 - a_2)(1 - e^\alpha)^2$.

Bây giờ, ta mở rộng định lý 2.1.7. Đầu tiên, ta mở rộng định nghĩa của CM và IM thành CM^* và IM^* .

Giả sử f và g là hai hàm phân hình. Ký hiệu $N_c(r, \frac{1}{f-a})$ là hàm đếm theo các a -điểm của f , mà f và g có cùng số bội, mỗi a -điểm đó được đếm một lần duy nhất không kể số bội, và $N_i(r, \frac{1}{f-a})$ là hàm đếm theo các a -điểm của f , mà f và g không kể bội, mỗi a -điểm đó được đếm duy nhất một lần. Ta nói rằng f và g phân phối giá trị aCM^* nếu

$$\overline{N}(r, \frac{1}{f-a}) - N_c(r, \frac{1}{f-a}) = S(r, f),$$

và

$$\overline{N}(r, \frac{1}{g-a}) - N_c(r, \frac{1}{g-a}) = S(r, f).$$

Tương tự, ta nói rằng f và g phân phối giá trị a IM^* nếu

$$\overline{N}(r, \frac{1}{f-a}) - N_i(r, \frac{1}{f-a}) = S(r, f),$$

và

$$\overline{N}(r, \frac{1}{g-a}) - N_i(r, \frac{1}{g-a}) = S(r, f).$$

Chú ý 2: Từ chứng minh của bổ đề 2.1.5, bổ đề 2.1.6 và định lý 2.1.7, ta có thể dễ dàng suy ra rằng: kết luận trong định lý 2.1.7 vẫn đúng cho một hàm phân hình khác hằng số f thỏa mãn $N(r, f) = S(r, f)$ và phân phối $a_1 CM^*$ và $a_2 IM^*$ với $g = L(f)$.

Khi a_1, a_2 là hai hàm nhỏ của f , ta có định lý sau:

2.1.9. Định lý (mở rộng của định lý 2.1.7). Giả sử f là một hàm phân hình khác hằng số thỏa mãn $N(r, f) = S(r, f)$, và

$$g = L(f) = b_{-1} + \sum_{i=0}^n b_i f^{(i)},$$

trong đó b_i ($i = -1, 0, 1, \dots, n$) là các hàm phân hình nhỏ của f . Giả sử a_1 và a_2 là hai hàm phân hình nhỏ phân biệt của f . Nếu f và g cùng phân phối $a_1 CM^*$ và $a_2 IM^*$ thì $f \equiv g$ hoặc

$$f \equiv a_2 + (a_1 - a_2)(1 - e^\alpha)^2,$$

và

$$g \equiv 2a_2 - a_1 + (a_1 - a_2)e^\alpha,$$

trong đó, α là một hàm nguyên.

Chứng minh: Giả sử

$$F = \frac{f - a_1}{a_2 - a_1}, \text{ và } G = \frac{g - a_1}{a_2 - a_1}.$$

Khi đó F và G cùng phân phối $0CM^*$ và $1IM^*$. Hiển nhiên, G vẫn có dạng $B_{-1} + \sum_{i=0}^n B_i F^{(i)}$, trong đó B_i ($i = -1, 0, 1, \dots, n$) là các hàm nhỏ của F . Theo chú ý 2, ta có thể kết luận rằng $F \equiv G$ hoặc

$$F \equiv 1 - (1 - e^\alpha)^2,$$

và

$$G \equiv 2 - e^\alpha,$$

trong đó α là một hàm nguyên. Như vậy, ta có $f \equiv g$ hoặc

$$f \equiv a_2 + (a_1 - a_2)(1 - e^\alpha)^2,$$

và

$$g \equiv 2a_2 - a_1 + (a_1 - a_2)e^\alpha. \quad W$$

2.1.10. Hệ quả. Giả sử f là một hàm phân hình thoả mãn $N(r, f) = S(r, f)$ và a_1, a_2 là hai hàm phân hình nhỏ phân biệt của f . Nếu f và $f^{(k)}$ cùng phân phối $a_1 CM^*$ và cùng phân phối $a_2 IM^*$, thì $f \equiv f^{(k)}$.

Như vậy, ta có lời giải đầy đủ cho câu hỏi: Điều gì xảy ra khi một hàm nguyên f và tổ hợp tuyến tính của các đạo hàm của nó $L(f)$ cùng phân phối một hàm nhỏ $a_1 CM$ và một hàm nhỏ khác $a_2 IM$? Tiếp theo, chúng ta hãy lý giải câu hỏi thú vị mới, đó là: Điều gì xảy ra khi một hàm nguyên f và đạo hàm f' của nó cùng phân phối đồng thời hai giá trị hữu hạn $a_1, a_2 CM$, tức là $f^{-1}\{a_1, a_2\} = (f')^{-1}\{a_1, a_2\}$ kể cả bội?

2.2. Sự xác định của hàm nguyên và đạo hàm của nó dựa vào tạo ảnh của một tập gồm hai điểm.

Trước hết, ta chứng minh hai bổ đề sau cần cho chứng minh của định lý.

2.2.1. Bổ đề. *Giả sử f là một hàm nguyên khác hằng số và a_1, a_2 là hai giá trị hữu hạn phân biệt khác không. Nếu f và f' cùng phân phối tập $\{a_1, a_2\}$ IM và $T(r, h) \neq S(r, f)$, trong đó*

$$h \equiv \frac{(f' - a_1)(f' - a_2)}{(f - a_1)(f - a_2)}, \quad (16)$$

thì các kết luận dưới đây là đúng:

(i) $T(r, \psi) = S(r, f)$, trong đó

$$\psi \equiv \frac{(f'h - f'')(f'h + f'')}{(f' - a_1)(f' - a_2)}. \quad (17)$$

(ii) $T(r, f') = N(r, \frac{1}{f' - a_i}) + S(r, f)$, $i = 1, 2$.

(iii) $m(r, \frac{1}{f - c}) = S(r, f)$, trong đó $c \neq a_1, a_2$ là một hằng số.

(iv) $T(r, h) = m(r, \frac{1}{f - a_1}) + m(r, \frac{1}{f - a_2}) + S(r, f) = m(r, \frac{1}{f'}) + S(r, f)$.

(v) $2T(r, f) - 2T(r, f') = m(r, \frac{1}{h}) + S(r, f)$.

Chứng minh: (i) Do f, f' cùng phân phối a_i ($i = 1, 2$), mỗi a_i - điểm của f là đơn và vì vậy h là một hàm nguyên. Từ giả thiết $T(r, h) \neq S(r, f)$, suy ra $\psi \neq 0$. (16) được viết lại là:

$$(f' - a_1)(f' - a_2) \equiv (f - a_1)(f - a_2)h, \quad (18)$$

Đạo hàm hai vế của (18), ta có:

$$(2f' - a_1 - a_2)f'' \equiv [(2f - a_1 - a_2)f'h + (f - a_1)(f - a_2)h']. \quad (19)$$

Khi $z = z_0$, $(f'(z_0) - a_1)(f'(z_0) - a_2) \neq 0$, và như vậy $(f(z_0) - a_1)(f(z_0) - a_2) = 0$, ta có:

$$\frac{2f'(z_0) - a_1 - a_2}{2f(z_0) - a_1 - a_2} = \pm 1.$$

Suy ra

$$(f'(z_0)h(z_0) - f''(z_0))(f'(z_0)h(z_0) + f''(z_0)) = 0.$$

Như vậy, ta thấy rằng các a_i -điểm đơn của f' không là cực điểm của ψ . Nếu z_0 là một a_i -điểm của f' với số bội $m \geq 2$, vì vậy là một 0-điểm của f'' với số bội $m-1$, thì từ (16), z_0 cũng là một 0-điểm của h với số bội $m-1$. Như vậy, z_0 không là cực điểm của ψ . Ta kết luận rằng ψ là một hàm nguyên. Ngoài ra, do

$$\frac{f'h - f''}{f' - a_1} \equiv \frac{(f')^2 - a_2 f'}{(f - a_1)(f - a_2)} - \frac{f''}{f' - a_1}, \quad (20)$$

Theo bổ đề 2.1.1, ta có $m(r, \frac{f'h - f''}{f' - a_1}) = S(r, f)$. Tương tự, ta có

$$m(r, \frac{f'h + f''}{f' - a_2}) = S(r, f). \text{ Từ đây } m(r, \psi) = S(r, f), \text{ và vì vậy } T(r, \psi) = S(r, f).$$

(ii) (17) được viết lại là :

$$\frac{\psi}{f'h - f''} \equiv \frac{f'}{(f - a_1)(f - a_2)} + \frac{f''}{(f' - a_1)(f' - a_2)},$$

và theo bổ đề 2.1.1, ta suy ra $m(r, \frac{1}{f'h - f''}) = S(r, f)$. Tương tự, ta có

$$m(r, \frac{1}{f'h + f''}) = S(r, f). \text{ Do đó, theo (17) có } m(r, \frac{1}{(f' - a_1)(f' - a_2)}) = S(r, f). \text{ Suy ra}$$

$$T(r, f') = N(r, \frac{1}{f' - a_i}) + S(r, f), i = 1, 2.$$

(iii) Từ (17) và (20), ta có:

$$\frac{\psi}{f-c} \equiv \left[\frac{(f')^2 - a_2 f'}{(f-c)(f-a_1)(f-a_2)} - \frac{f'}{f-c} \frac{f''}{f'(f'-a_1)} \right] \frac{f'h + f''}{f'-a_2}.$$

Theo bổ đề 2.1.1, ta có $m(r, \frac{1}{f-c}) = S(r, f)$ với $c \neq a_1, a_2$.

(iv) Do hàm h trong (16) là nguyên và

$$h = \frac{f'}{f-a_1} \frac{f'}{f-a_2} - \frac{(a_1+a_2)f'}{(f-a_1)(f-a_2)} + \frac{a_1 a_2}{(f-a_1)(f-a_2)},$$

sử dụng bổ đề 2.1.1, dễ dàng nhận được:

$$\begin{aligned} T(r, h) &= m(r, \frac{1}{(f-a_1)(f-a_2)}) + S(r, f) \\ &= m(r, \frac{1}{f-a_1}) + m(r, \frac{1}{f-a_2}) + S(r, f) \\ &\leq m(r, \frac{1}{f'}) + S(r, f). \end{aligned}$$

Mặt khác, từ (16) và (17) khử bỏ h , ta có:

$$\frac{\psi}{f'} \equiv \frac{(f')^3 - (a_1+a_2)(f')^2}{(f-a_1)^2(f-a_2)^2} - \frac{(f'')^2}{f'(f'-a_1)(f'-a_2)} + \frac{a_1 a_2 f'}{(f-a_1)(f-a_2)} \frac{1}{(f-a_1)(f-a_2)},$$

vì vậy, theo bổ đề 2.1.1, ta có:

$$m(r, \frac{1}{f'}) \leq m(r, \frac{1}{f-a_1}) + m(r, \frac{1}{f-a_2}) + S(r, f).$$

Như vậy, ta thu được:

$$T(r, h) = m(r, \frac{1}{f-a_1}) + m(r, \frac{1}{f-a_2}) + S(r, f) = m(r, \frac{1}{f'}) + S(r, f).$$

(v) Sử dụng kết luận trong (ii), ta có:

$$2T(r, f') = N\left(r, \frac{1}{(f'-a_1)(f'-a_2)}\right) + S(r, f).$$

Từ (18) và kết luận trong (iv), ta có:

$$\begin{aligned}
 2T(r, f') &= N\left(r, \frac{1}{(f-a_1)(f-a_2)h}\right) + S(r, f) \\
 &= N\left(r, \frac{1}{(f-a_1)(f-a_2)}\right) + N(r, \frac{1}{h}) + S(r, f) \\
 &= 2T(r, f) - m(r, \frac{1}{f-a_1}) - m(r, \frac{1}{f-a_2}) + N(r, \frac{1}{h}) + S(r, f) \\
 &= 2T(r, f) - T(r, h) + N(r, \frac{1}{h}) + S(r, f).
 \end{aligned}$$

Ta có $2T(r, f) - 2T(r, f') = m(r, \frac{1}{h}) + S(r, f)$. Bổ đề 2.2.1 được chứng minh. W

2.2.2. Bổ đề. Giả sử f là một hàm nguyên khác hằng số và a_1, a_2 là hai giá trị hữu hạn phân biệt. Nếu f và f' cùng phân phối tập $\{a_1, a_2\}$ CM thì $T(r, h) = S(r, f)$, trong đó h như trong bổ đề 2.2.1.

Chứng minh: Để tiện lợi, ta viết $f_1 = f'$, $f_2 = f''$, và $f_3 = f'''$. Vì f và f_1 cùng phân phối tập $\{a_1, a_2\}$ CM, nên tồn tại một hàm nguyên α để $h \equiv e^\alpha$. Nếu $a_1 a_2 = 0$ thì từ (16)

$$h \equiv \frac{f_1^2}{(f-a_1)(f-a_2)} - \frac{(a_1+a_2)f_1}{(f-a_1)(f-a_2)}.$$

Từ đây, theo bổ đề 2.1.1, ta có $T(r, h) = S(r, f)$. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả thiết rằng $a_1 a_2 \neq 0$. Giả sử $T(r, h) \neq S(r, f)$.

Từ (17), (18) và (19), bằng cách khử bỏ h , ta có:

$$\frac{[(f-a_1)+(f-a_2)]f_1}{(f-a_1)(f-a_2)} \equiv \frac{(2f-a_1-a_2)f_1}{(f-a_1)(f-a_2)} \equiv \frac{(2f_1-a_1-a_2)f_2}{(f_1-a_1)(f_1-a_2)} - \beta, \quad (21)$$

trong đó, và trong đoạn tiếp $\beta \equiv \alpha'$, và

$$\frac{f_1^2}{(f-a_1)^2(f-a_2)^2} \equiv \frac{f_2^2}{(f_1-a_1)^2(f_1-a_2)^2} + \frac{\psi}{(f_1-a_1)(f_1-a_2)}. \quad (22)$$

Bình phương hai vế của (21), ta có:

$$\begin{aligned} & \frac{f_1^2}{(f-a_1)^2} + \frac{2f_1^2}{(f-a_1)(f-a_2)} + \frac{f_1^2}{(f-a_2)^2} \\ & \equiv \frac{(2f_1-a_1-a_2)^2 f_2^2}{(f_1-a_1)^2(f_1-a_2)^2} - \frac{2\beta(2f_1-a_1-a_2)f_2}{(f_1-a_1)(f_1-a_2)} + \beta^2. \end{aligned} \quad (23)$$

Bây giờ (22) có thể được viết:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{f_1^2}{(f-a_1)^2} - \frac{2f_1^2}{(f-a_1)(f-a_2)} + \frac{f_1^2}{(f-a_2)^2} \right] \\ & \equiv \frac{(a_1-a_2)^2 \psi (f_1-a_1)(f_1-a_2) + (a_1-a_2)^2 f_2^2}{(f_1-a_1)^2(f_1-a_2)^2}. \end{aligned} \quad (24)$$

Lấy hiệu số của (23) và (24), ta có:

$$\frac{4f_1^2}{(f-a_1)(f-a_2)} \equiv \frac{4f_2^2 - 2\beta(2f_1-a_1-a_2)f_2}{(f_1-a_1)(f_1-a_2)} + \frac{\beta^2(f_1-a_1)(f_1-a_2) - (a_1-a_2)^2 \psi}{(f_1-a_1)(f_1-a_2)}. \quad (25)$$

Khử bỏ f từ (22) và (25), ta có:

$$\frac{16\psi}{(f_1-a_1)(f_1-a_2)} + \frac{16f_2^2}{(f_1-a_1)^2(f_1-a_2)^2} \equiv \left[\frac{4f_2^2 - 2\beta(2f_1-a_1-a_2)f_2}{f_1(f_1-a_1)(f_1-a_2)} + H \right]^2, \quad (26)$$

trong đó,

$$H = \frac{\beta^2(f_1-a_1)(f_1-a_2) - (a_1-a_2)^2 \psi}{f_1(f_1-a_1)(f_1-a_2)}.$$

Từ bổ đề 2.2.1, $m(r, \frac{1}{f_1-a_1}) + m(r, \frac{1}{f_1-a_2}) = S(r, f)$. Như vậy, từ (26) và sử

dụng bổ đề 2.1.1, ta có:

$$m(r, H) = S(r, f). \quad (27)$$

Xét hai trường hợp: $a_1 a_2 \beta^2 - (a_1 - a_2)^2 \psi \neq 0$ và $a_1 a_2 \beta^2 - (a_1 - a_2)^2 \psi \equiv 0$.

Nếu $a_1 a_2 \beta^2 - (a_1 - a_2)^2 \psi \neq 0$ thì từ (27) và bổ đề 2.1.2, ta có thể suy ra rằng

$$3T(r, f_1) = N(r, \frac{1}{f_1}) + N(r, \frac{1}{f_1 - a_1}) + N(r, \frac{1}{f_1 - a_2}) + S(r, f)$$

Theo (ii) của bổ đề 2.2.1 và công thức trên, ta có:

$$m(r, \frac{1}{f_1}) = S(r, f). \quad (28)$$

Do đó, theo (iv) của bổ đề 2.2.1, ta có $T(r, h) = S(r, f)$.

Bây giờ, ta xét trường hợp:

$$a_1 a_2 \beta^2 - (a_1 - a_2)^2 \psi \equiv 0, \quad (29)$$

và viết lại (17) là:

$$\psi(f_1 - a_1)(f_1 - a_2) \equiv f_1^2 e^{2\alpha} - f_2^2. \quad (30)$$

Lấy đạo hàm hai vế của (30), ta có:

$$\psi'(f_1 - a_1)(f_1 - a_2) + \psi(2f_1 - a_1 - a_2)f_2 \equiv 2\alpha' f_1^2 e^{2\alpha} + 2f_1 f_2 e^{2\alpha} - 2f_2 f_3. \quad (31)$$

Giả sử z_0 là một 0 - điểm của f_1 . Từ (17), (18), (19) và (31), ta có thể thấy rằng

$$\psi(z_0) = -\frac{f_2^2(z_0)}{a_1 a_2}, \quad \beta(z_0) = -\frac{(a_1 + a_2)f_2(z_0)}{a_1 a_2}, \quad \beta^2(z_0) = -\frac{(a_1 - a_2)^2 f_2^2(z_0)}{a_1^2 a_2^2}$$

và

$$a_1 a_2 \psi'(z_0) - (a_1 + a_2)\psi(z_0)f_2(z_0) = -2f_2(z_0)f_3(z_0).$$

Vì vậy, sử dụng (29), ta có:

$$\left(\frac{\beta'(z_0)}{\beta(z_0)} + \frac{\beta(z_0)}{2} \right) f_2(z_0) - f_3(z_0) = 0.$$

Lại từ (17), ta thấy rằng mỗi 0 - điểm của f_1 và f_2 phải là 0 - điểm của ψ , vì vậy, hầu như các 0 - điểm của f_1 là đơn. Giả sử

$$\gamma \equiv \left(\frac{\beta'}{\beta} + \frac{\beta}{2} \right) \frac{f_2}{f_1} - \frac{f_3}{f_1}. \quad (32)$$

Khi đó, ta có $T(r, \gamma) = S(r, f)$. Nó cũng đúng khi f_1 khác không.

Nếu $\gamma \equiv 0$ thì ta có thể suy ra rằng $\frac{f_2'}{f_2} \equiv \frac{\beta'}{\beta} + \frac{\alpha'}{2}$, và vì thế, lấy tích phân, ta có: $f_2 \equiv c \frac{\beta}{2} \exp(\frac{\alpha}{2})$, và do đó $f_1 \equiv c \{ \exp(\frac{\alpha}{2}) + d \}$, trong đó $c \neq 0$ và d là các hằng số. Từ đó suy ra

$$m(r, \frac{1}{f_1}) = m(r, \frac{1}{\exp(\frac{\alpha}{2}) + d}) \leq \frac{1}{2} T(r, h) + S(r, f),$$

đưa đến kết quả $T(r, h) = S(r, f)$, theo bổ đề 2.2.1.

Sau đây, ta giả thiết rằng $\gamma \neq 0$. Từ (30), (31), khử bỏ $e^{2\alpha}$, ta có:

$$\begin{aligned} & (\psi' - 2\alpha'\psi) f_1 (f_1 - a_1)(f_1 - a_2) + \psi(2f_1 - a_1 - a_2) f_1 f_2 \\ & \equiv 2\alpha' f_1 f_2^2 + 2\psi(f_1 - a_1)(f_1 - a_2) f_2 + 2f_2^3 - 2f_1 f_2 f_3. \end{aligned} \quad (33)$$

Nếu $\psi' - 2\alpha'\psi \equiv 0$ thì ta có $e^{2\alpha} \equiv c\psi$, trong đó c là một hằng số. Từ đây $T(r, h) = T(r, e^\alpha) = S(r, f)$. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả thiết rằng $\psi' - 2\alpha'\psi \neq 0$. Do mỗi a_1 -điểm và mỗi a_2 -điểm của f_1 là đơn, từ (33) mỗi 0-điểm của f_2 nhưng không là 0-điểm của f_1 phải cũng là một 0-điểm của $\psi' - 2\alpha'\psi$.

Như vậy, ta có thể kết luận rằng $T(r, \frac{f_3}{f_2}) = S(r, f)$. Từ (32), ta có:

$$\psi \equiv \left(\frac{\beta'}{\beta} + \frac{\beta}{2} - \frac{f_3}{f_2} \right) \frac{f_2}{f_1}.$$

Vì vậy

$$T(r, \frac{f_2}{f_1}) = S(r, f). \quad (34)$$

Bây giờ, do (29) đúng, (26) có thể được viết lại là:

$$b_0 f_1^2 + b_1 f_1 + b_2 \equiv 0. \quad (35)$$

Trong đó,

$$b_0 \equiv -16\left(\frac{f_2}{f_1}\right)^4 + 32\left(\frac{f_2}{f_1}\right)^3 + (16 - 24\beta^2)\left(\frac{f_2}{f_1}\right)^2 + 8\beta^3\left(\frac{f_2}{f_1}\right) + 16\psi - \beta^4,$$

$$b_1 \equiv -16(a_1 + a_2)\beta\left(\frac{f_2}{f_1}\right)^3 + 24(a_1 + a_2)\beta^2\left(\frac{f_2}{f_1}\right)^2 - 12(a_1 + a_2)\beta^3\left(\frac{f_2}{f_1}\right)$$

$$+ 2(a_1 + a_2)\beta^4 - 16(a_1 + a_2)\psi,$$

$$b_2 \equiv -4(a_1 + a_2)^2 \beta^2 \left(\frac{f_2}{f_1}\right)^2 + 4(a_1 + a_2)^2 \beta^3 \left(\frac{f_2}{f_1}\right) + 16\psi a_1 a_2 - (a_1 + a_2)^2 \beta^4.$$

Hiển nhiên là $T(r, b_i) = S(r, f), i = 0, 1, 2$. Do

$$\begin{aligned} T(r, f) &< N(r, \frac{1}{f-a_1}) + N(r, \frac{1}{f-a_2}) + S(r, f) \\ &= N(r, \frac{1}{f_1-a_1}) + N(r, \frac{1}{f_1-a_2}) + S(r, f) \\ &\leq 2T(r, f_1) + S(r, f), \end{aligned}$$

Ta có $T(r, b_i) = S(r, f_1), i = 0, 1, 2$. Vì vậy, theo bổ đề 2.1.3, ta có:

$$b_i \equiv 0, i = 0, 1, 2. \quad (36)$$

Từ đây, (29) và (36), dễ dàng thấy rằng f_2 / f_1 là một hằng số. Do đó

$$f' \equiv c_1(f - c_2), \quad (37)$$

trong đó, $c_1 \neq 0$, và $c_2 \neq a_1, a_2$ là các hằng số. Từ (30) và (37), ta có:

$$N(r, \frac{1}{f-c_2}) = S(r, f). \text{ Mặt khác, từ (21), bổ đề 2.2.1 và bổ đề 2.1.1, ta có thể kết}$$

$$\text{luận rằng } m(r, \frac{\beta}{f-c_2}) = S(r, f). \text{ Vì vậy, } m(r, \frac{1}{f-c_2}) = S(r, f). \text{ Do đó,}$$

$$T(r, f) = S(r, f), \text{ mâu thuẫn.}$$

W

2.2.3. Định lý. Giả sử f là một hàm nguyên khác hằng số và a_1, a_2 là hai số phức phân biệt. Nếu f và f' cùng phân phối tập $\{a_1, a_2\}$ CM thì một và chỉ một trong các khẳng định sau là đúng.

$$(i) f \equiv f'.$$

$$(ii) f + f' \equiv a_1 + a_2.$$

$$(iii) f \equiv c_1 e^{cz} + c_2 e^{-cz}, \text{ với } a_1 + a_2 = 0,$$

trong đó c, c_1 và c_2 là các hằng số khác không, thoả mãn $c^2 \neq 1$ và $c_1 c_2 = \frac{1}{4} a_1^2 (1 - c^{-2})$.

Chứng minh: Theo giả thiết của định lý 2.2.3, tồn tại một hàm nguyên α thoả mãn $T(r, e^\alpha) = S(r, f)$ để $(f' - a_1)(f' - a_2) \equiv (f - a_1)(f - a_2)e^\alpha$, điều này có thể được biểu thị là:

$$\begin{aligned} & (e^{\frac{\alpha}{2}} f - \frac{a_1 + a_2}{2} e^{\frac{\alpha}{2}} + f' - \frac{a_1 + a_2}{2}) (e^{\frac{\alpha}{2}} f - \frac{a_1 + a_2}{2} e^{\frac{\alpha}{2}} - f' + \frac{a_1 + a_2}{2}) \\ & \equiv (\frac{a_1 - a_2}{2})^2 (e^\alpha - 1). \end{aligned} \quad (38)$$

Đặt

$$G \equiv e^{\frac{\alpha}{2}} f - \frac{a_1 + a_2}{2} e^{\frac{\alpha}{2}} + f' - \frac{a_1 + a_2}{2}, \quad (39)$$

và

$$H \equiv e^{\frac{\alpha}{2}} f - \frac{a_1 + a_2}{2} e^{\frac{\alpha}{2}} - f' + \frac{a_1 + a_2}{2}. \quad (40)$$

Khi đó, G và H là các hàm nguyên, và nếu $G.H \neq 0$,

$$N(r, \frac{1}{G}) + N(r, \frac{1}{H}) = S(r, f). \quad (41)$$

Vì vậy,

$$T(r, \frac{G'}{G}) + T(r, \frac{H'}{H}) = S(r, f). \quad (42)$$

Từ (38), (39) và (40), ta có:

$$G + H \equiv e^{\frac{\alpha}{2}} (2f - a_1 - a_2), \quad (43)$$

$$G - H \equiv 2f' - a_1 - a_2, \quad (44)$$

$$G.H \equiv (\frac{a_1 - a_2}{2})^2 (e^\alpha - 1). \quad (45)$$

Từ ba phương trình trên, ta dễ dàng suy ra

$$(\frac{\alpha'}{2} + e^{\frac{\alpha}{2}} - \frac{G'}{G})G + (\frac{\alpha'}{2} - e^{\frac{\alpha}{2}} - \frac{H'}{H})H + (a_1 + a_2)e^{\frac{\alpha}{2}} \equiv 0. \quad (46)$$

Nhân G vào hai vế của (46), ta có:

$$\phi_1 G^2 + \phi_2 G + \phi_3 \equiv 0, \quad (47)$$

trong đó,

$$\phi_1 \equiv \frac{\alpha'}{2} + e^{\frac{\alpha}{2}} - \frac{G'}{G},$$

$$\phi_2 \equiv (a_1 + a_2)e^{\frac{\alpha}{2}},$$

$$\phi_3 \equiv (\frac{a_1 - a_2}{2})^2 (e^\alpha - 1) (\frac{\alpha'}{2} - e^{\frac{\alpha}{2}} - \frac{H'}{H}).$$

Từ (42), ta thấy

$$T(r, \phi_i) = S(r, f), i = 1, 2, 3. \quad (48)$$

Khi $e^\alpha = h \equiv 1$, từ (16), ta dễ dàng thấy rằng:

hoặc $f \equiv f'$ hoặc $f + f' \equiv a_1 + a_2$.

Bây giờ, ta giả thiết rằng $e^\alpha \neq 1$. Nếu $T(r, G) = S(r, f)$, thì từ (45) ta có $T(r, H) = S(r, f)$. Vì vậy, từ (43) suy ra $T(r, f) = S(r, f)$. Điều này không thể được. Do đó, $T(r, G) \neq S(r, f)$. Nếu $\phi_1 \neq 0$ thì từ (47) và (48), ta có:

$$2T(r, G) = T(r, \frac{\phi_2}{\phi_1}G + \phi_3) \leq T(r, G) + S(r, f),$$

Và vì vậy, $T(r, G) = S(r, f)$, mâu thuẫn. Do đó, $\phi_1 \equiv 0$. Tương tự, ta có $\phi_i \equiv 0, i = 2, 3$, tức là:

$$\frac{\alpha'}{2} + e^{\frac{\alpha}{2}} - \frac{G'}{G} \equiv 0, \quad (49)$$

$$\frac{\alpha'}{2} - e^{\frac{\alpha}{2}} - \frac{H'}{H} \equiv 0, \quad (50)$$

$$a_1 + a_2 = 0. \quad (51)$$

Công thức (49) và (50) dẫn tới $\frac{G'}{G} + \frac{H'}{H} \equiv \alpha'$. Do đó,

$$GH \equiv c_0 e^\alpha, \quad (52)$$

trong đó, c_0 là một hằng số khác không. Kết hợp (45), (51) và (52) ta thấy rằng e^α và vì vậy α là một hằng số. Như vậy, (49) và (50) tương ứng trở thành $G' \equiv e^{\frac{\alpha}{2}}G$ và $H' \equiv -e^{\frac{\alpha}{2}}H$. Từ đây và (45) suy đến kết quả

$$G \equiv c_1 e^{c\alpha}, \quad H \equiv c_2 e^{-c\alpha}, \quad (53)$$

trong đó, $c = e^{\frac{\alpha}{2}} \neq \pm 1$, với c_1, c_2 là các hằng số thoả mãn

$$c_1 c_2 = \left(\frac{a_1 - a_2}{2}\right)^2 (e^\alpha - 1) = \left(\frac{a_1 - a_2}{2}\right)^2 (c^2 - 1). \quad (54)$$

Do đó, từ (43), (53) và (54), ta có:

$$f \equiv \frac{c_1}{2} e^{-\frac{\alpha}{2}} e^{c\alpha} + \frac{c_2}{2} e^{-\frac{\alpha}{2}} e^{-c\alpha}.$$

Biểu thức trên cũng có thể được viết lại là:

$$f \equiv \tilde{c}_1 e^{cz} + \tilde{c}_2 e^{-cz},$$

trong đó, $\tilde{c}_1 = \frac{c_1}{2} e^{\frac{\alpha}{2}}$, và $\tilde{c}_2 = \frac{c_2}{2} e^{-\frac{\alpha}{2}}$ thoả mãn

$$\tilde{c}_1 \tilde{c}_2 = \frac{1}{4} \left(\frac{a_1 - a_2}{2} \right)^2 (1 - c^{-2}).$$

Định lý 2.2.3 được chứng minh. W

Chú ý 3: chúng ta nghi ngờ rằng điều kiện “ f và f' cùng phân phối tập $\{a_1, a_2\}$ CM” trong định lý 2.2.3 có thể được thay thế bằng “ f và f' cùng phân phối tập $\{a_1, a_2\}$ IM”. Nhưng ta có thể chứng tỏ rằng đối với một hàm phân hình f , từ “CM” trong định lý 2.2.3 không thể được thay thế bởi “IM”. Ví dụ, nếu $f = \frac{e^{2z} - 1}{e^{2z} + 1}$ thì f và f' cùng lúc phân phối 0,1 IM. Dưới đây là một ví dụ phức tạp hơn.

Ví dụ 3: Lấy một hằng số $a, a \neq 0, -\frac{27}{32}$. Thế thì phương trình $z^3 - az^2 - a^2z + a^3 + a^2 = 0$ không có nghiệm bội. Giả sử f là hàm elliptic thoả mãn:

$$(f')^2 = f^3 - af^2 - a^2f + a^3 + a^2.$$

Khi đó

$$(f' - a)(f' + a) = (f - a)^2(f + a),$$

và f, f' cùng lúc phân phối $a, -a$ IM.

KẾT LUẬN

Như vậy, luận văn đã trình bày lại các khái niệm, các tính chất, các định lý cơ bản của lý thuyết Nevanlinna cho hàm phân hình và ứng dụng đối với phân phối giá trị của hàm nguyên và đạo hàm của nó trong trường số phức một cách hệ thống. Phân tích và chứng minh lại tỉ mỉ, cụ thể các bổ đề và kết quả trong bài báo của Ping Li và Chung-Chun Yang [16] về phân phối giá trị của hàm nguyên và đạo hàm của nó. Kết quả chính của luận văn là hai định lý: định lý 2.1.7 về sự xác định của hàm nguyên và tổ hợp tuyến tính của các đạo hàm của nó dựa vào tạo ảnh của hai điểm và định lý 2.2.3. nói về sự xác định của hàm nguyên và đạo hàm của nó dựa vào tạo ảnh của một tập gồm hai điểm.

Tài liệu tham khảo

Tiếng Việt

- [1] Hà Huy Khoái, *Lý thuyết Nevanlinna*, Bài giảng.

Tiếng Anh

[2] F. Gross, On the distribution of values of meromorphic functions, Trans. Amer. Math. Soc. 131(1968), 199-214.

[3] F. Gross, Complex analysis, Lecture Notes in Math., Vol. 599, Springer, 1977, 51- 69.

[4] Hongxun Yi, Uniqueness of meromorphic functions and a question of Gross, Science in China, (series A), 24(1994), 457- 466.

[5] Ping Li and C. C. Yang, On the unique range set of meromorphic functions, Proc. Amer. Math. Soc., Vol. 124, No. 1, 1996, 177-185.

[6] Qing-De Chang. A unicity theorem of slowly growing functions, Acta Math. Sinica, Vol. 36, No. 6, Nov., 1993, 826-833.

[7] Ping Li and C.C. Yang, Some further results on the unique range set of meromorphic functions, Kodai Math. J., 18(1995), 437-450.

[8] E. Mues and M. Reinders, Meromorphic functions sharing one value and unique range sets, Kodai Math. J., 18 (1995), 515-522.

[9] L. A. Rubel and C. C. Yang, Values shared by an entire function and its derivatives, Complex analysis (Proc. Conf. Univ. of Kentucky, Lexington, 1976), Lecture notes in Math., Vol. 599, Berlin: Springer 1977, 101-103.

[10] G. G. Gundersen, Meromorphic functions that share finite values with their derivative, J. Math. Analysis and Appl., 75(1980), 441-446.

- [11] Yongxing Gu, Uniqueness of an entire function and its differential polynomial, *Acta Math.Sinica*, Vol.37, No.6, Nov., 1994, 791-798.
- [12] G. Frank and Xinhua Hua, Differential polynomials that share three values with their generated meromorphic function, *Michigan Math. J.* 46(1999) N1, 175-186.
- [13] C. A. Bernstein, D. C. Chang and B. Q. Li, On uniqueness of entire functions in C^n and their partial differential polynomials, *Math* 8 (1996) N3, 379-396.
- [14] W. K. Hayman, *Meromorphic Functions*, Oxford University Press, Oxford, 1964.
- [15] Yu-Zan He and Xiu-Zhi Xiao, *Algebroid Functions and Ordinary Differential Equations*, Science Press, Beijing, 1988. (Chinese).
- [16] Ping Li and Chung-Chun Yang, Value Sharing of an Entire Function and Its Derivatives, *J. Math Soc. Japan* 51(1999) N4, 781-799.
- [17] E. Mues and N. Steinmetz, Meromorphe Funktionen, die mit ihrer Ableitung Werte teilen, *Manuscripta Math.* 29(1979), 195-206.