

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

PHẠM THỊ HẠNH

PHƯƠNG PHÁP HIỆU CHỈNH
BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN
VỚI P_0 ÁNH XẠ

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành : TOÁN ỨNG DỤNG
Mã số : 60 46 36

Người hướng dẫn khoa học:
GS.TS NGUYỄN BỪNG

THÁI NGUYÊN, 2012

Mục lục

Mở đầu	3
1 Bất đẳng thức biến phân	5
1.1 Một số khái niệm cơ bản	5
1.1.1 Toán tử đơn điệu	5
1.1.2 Bất đẳng thức biến phân	9
1.2 Bài toán đặt không chỉnh	10
1.2.1 Khái niệm về bài toán đặt chỉnh và đặt không chỉnh	10
1.2.2 Hiệu chỉnh bất đẳng thức biến phân với toán tử đơn điệu	11
2 Hiệu chỉnh bất đẳng thức biến phân với P_0 ánh xạ	14
2.1 Thuật toán hiệu chỉnh	14
2.2 Áp dụng	18
2.2.1 Áp dụng vào mô hình cân bằng Walrasian	18
2.2.2 Áp dụng vào mô hình cân bằng Oligopolistic	23
Kết Luận	28
Tài liệu tham khảo	29

Mở đầu

Bất đẳng thức biến phân là lớp bài toán nảy sinh từ nhiều vấn đề của toán học ứng dụng như phương trình vi phân, các bài toán vật lý toán, tối ưu hóa. Ngoài ra nhiều vấn đề thực tế như bài toán cân bằng mạng giao thông đô thị, mô hình cân bằng kinh tế...đều có thể mô tả được dưới dạng của một bất đẳng thức biến phân. Rất tiếc rằng bài toán bất đẳng thức biến phân, nói chung, lại là *bài toán đặt không chỉnh*, tức nghiệm của chúng không ổn định theo dữ kiện ban đầu. Vì thế đặt ra yêu cầu phải có những phương pháp giải ổn định các bài toán đặt không chỉnh, sao cho khi sai số của dữ kiện càng nhỏ thì nghiệm xấp xỉ tìm được lại càng gần với nghiệm đúng của bài toán xuất phát.

Cho K và V là những tập hợp lồi, khác rỗng trong không gian Euclid thực $\mathbb{R}^n$, $K \subseteq V$, cho $G : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ là một ánh xạ. Kí hiệu $\langle a, b \rangle$ là tích vô hướng của các phần tử a, b trong $\mathbb{R}^n$.

Xét bài toán bất đẳng thức biến phân: tìm $x^* \in K$ thỏa mãn

$$\langle G(x^*), x - x^* \rangle \geq 0, \forall x \in K. \quad (0.1)$$

Mục đích của luận văn nhằm trình bày phương pháp hiệu chỉnh bất đẳng thức biến phân (0.1) với P_0 ánh xạ, đồng thời trình bày áp dụng của kết quả trên cho hai mô hình kinh tế tổng quát đó là mô hình cân bằng Walrasian và mô hình cân bằng Oligopolistic.

Nội dung của luận văn được trình bày trong hai chương. Chương 1 giới thiệu về toán tử đơn điệu trong đó P_0 ánh xạ là một trường hợp đặc biệt nếu chúng ta xét trong không gian hữu hạn chiều. Đồng thời trình bày một số kiến thức cơ bản về bài toán đặt không chỉnh và phương pháp hiệu chỉnh bất đẳng thức biến phân với toán tử đơn điệu.

Trong chương 2 sẽ trình bày phương pháp hiệu chỉnh bất đẳng thức biến phân với P_0 ánh xạ, đồng thời trình bày áp dụng của kết quả trên cho hai mô hình kinh tế tổng quát đó là mô hình cân bằng Walrasian và mô hình cân bằng Oligopolistic.

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới GS. TS Nguyễn Bường-Viện Công nghệ Thông tin - Viện Khoa học và Công nghệ Việt Nam, người đã hướng dẫn, chỉ dạy tận tình để tôi hoàn thành luận văn này.

Tôi xin chân thành cảm ơn các thầy, cô giáo công tác tại trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, Viện Toán học, Viện Công nghệ Thông tin - Viện Khoa học và Công nghệ Việt Nam đã truyền thụ kiến thức cho tôi trong suốt quá trình học tập vừa qua.

Tôi cũng xin cảm ơn cơ quan, bạn bè đồng nghiệp, gia đình đã chia sẻ, giúp đỡ, động viên, tạo mọi điều kiện thuận lợi để tôi hoàn thành luận văn này.

Tác giả
Phạm Thị Hạnh

Chương 1

Bất đẳng thức biến phân

1.1 Một số khái niệm cơ bản

Trong chương này chúng tôi trình bày khái quát những kiến thức về toán tử đơn điệu, bất đẳng thức biến phân, bài toán đặt không chỉnh và phương pháp hiệu chỉnh bất đẳng thức biến phân với toán tử đơn điệu. Các kết quả chủ yếu được trích dẫn trong các tài liệu [1], [4], [5].

1.1.1 Toán tử đơn điệu

Cho X là không gian Banach phản xạ với không gian liên hợp của nó là X^* . Cả hai có chuẩn được ký hiệu là $\| \cdot \|$ và giá trị của phiếm hàm tuyến tính liên tục $x^* \in X^*$ tại điểm $x \in X$ được ký hiệu bởi $\langle x^*, x \rangle$. Cho toán tử A với miền xác định là $D(A) \subseteq X$ và miền ảnh $R(A) \subseteq X^*$.

Định nghĩa 1.1. Toán tử A được gọi là đơn điệu nếu

$$\langle A(x) - A(y), x - y \rangle \geq 0, \forall x, y \in D(A).$$

Toán tử A được gọi là đơn điệu chặt nếu dấu bằng chỉ đạt được khi $x = y$.

Ví dụ 1.1. Hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ là đơn điệu nếu nó đồng biến.

Định nghĩa 1.2. Tập hợp

$$Gr(A) = \{(x, A(x)) : x \in X\}$$

gọi là đồ thị của toán tử A .

Khái niệm về toán tử đơn điệu cũng có thể được mô tả dựa trên đồ thị $Gr(A)$ của toán tử A trong không gian tích $X \times X^*$.

Định nghĩa 1.3. Toán tử A được gọi là đơn điệu nếu

$$\langle x^* - y^*, x - y \rangle \geq 0, \forall x, y \in X, x^* = A(x), y^* = A(y).$$

Tập $Gr(A)$ được gọi là tập đơn điệu nếu nó thỏa mãn bất đẳng thức trên.

Định nghĩa 1.4. Nếu $Gr(A)$ không chứa trong một tập đơn điệu nào khác trong $X \times X^*$ thì toán tử A được gọi là toán tử đơn điệu cực đại.

Ví dụ 1.2. Toán tử $A : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ được xác định bởi ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 39 & 7 & 32 & -20 \\ 7 & 30 & 34 & 7 \\ 32 & 34 & 58 & -5 \\ -20 & 7 & -5 & 26 \end{pmatrix}$$

có định thức khác 0 là đơn điệu. Khi đó, A là toán tử đơn điệu cực đại.

Định nghĩa 1.5. Nếu với mọi $x \in X$ ta có $\langle Ax, x \rangle \geq 0$ thì A được gọi là toán tử xác định không âm, ký hiệu là $A \geq 0$.

Nhận xét 1.1. Nếu A là một toán tử tuyến tính trong không gian Banach X thì tính đơn điệu tương đương với tính xác định không âm của toán tử.

Ví dụ 1.3. Toán tử $A : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5$ được xác định bởi ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 9 & 5 & 28 \\ 4 & 6 & 5 & 5 & 20 \\ 9 & 5 & 10 & 4 & 28 \\ 5 & 5 & 4 & 6 & 20 \\ 28 & 20 & 28 & 20 & 96 \end{pmatrix}$$

là xác định không âm.

Định nghĩa 1.6. Toán tử A được gọi là d -đơn điệu, nếu tồn tại một hàm không âm $d(t)$, không giảm với $t \geq 0$, $d(0) = 0$ và thỏa mãn tính chất

$$\langle A(x) - A(y), x - y \rangle \geq [d(\|x\|) - d(\|y\|)](\|x\| - \|y\|), \forall x, y \in D(A).$$

Định nghĩa 1.7. Toán tử A được gọi là đơn điệu đều nếu tồn tại một hàm không âm $\delta(t)$, không giảm với $t \geq 0, \delta(0) = 0$ và

$$\langle A(x) - A(y), x - y \rangle \geq \delta(\|x - y\|), \forall x, y \in D(A).$$

Nếu $\delta(t) = C_A t^2$ với C_A là một hằng số dương thì toán tử A được gọi là đơn điệu mạnh.

Nhận xét 1.2. Nếu toán tử A có tính chất tuyến tính thì A được gọi là đơn điệu mạnh nếu

$$\langle Ax, x \rangle \geq m_A \|x\|^2, \quad m_A > 0, \forall x \in D(A).$$

Ví dụ 1.4. Hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ được xác định bởi $f(x) = 2012x$ là toán tử tuyến tính đơn điệu mạnh.

Cho L là tập con nào đó của $N = \{1, \dots, n\}$. A_L là ma trận đường chéo cấp $n \times n$ trong đó các phần tử trên đường chéo được cho bởi $a_{ii} = \begin{cases} > 0 \text{ nếu } i \in L, \\ = 0 \text{ nếu } i \notin L. \end{cases}$

Khi đó A_N là một ma trận đường chéo xác định dương. Nếu $a_{ii} = 1 \quad \forall i$, thì $A_N = I_n$ là ma trận đơn vị trong $\mathbb{R}^n$.

Định nghĩa 1.8. Ma trận A cỡ $n \times n$ được gọi là

- a) P -ma trận nếu nó có các định thức con chính dương;
- b) P_0 -ma trận nếu nó có các định thức con chính không âm;
- c) Z -ma trận nếu nó có các phần tử ngoài đường chéo không dương;
- d) M -ma trận nếu nó có các phần tử ngoài đường chéo không dương và tồn tại ma trận nghịch đảo A^{-1} có các phần tử không âm;
- e) M_0 -ma trận nếu nó là P_0 -ma trận và một Z -ma trận.

Nhận xét 1.3. A là M -ma trận khi và chỉ khi $A \in P \cap Z$. Suy ra, mỗi M -ma trận là một P -ma trận, nhưng khẳng định ngược lại là không đúng trong trường hợp tổng quát.

Mệnh đề sau đưa ra tiêu chuẩn cho một ma trận A là một M -ma trận hoặc M_0 -ma trận.

Mệnh đề 1.1. *Giả sử rằng A là một Z -ma trận. Nếu tồn tại một véc tơ $x > 0$ thỏa mãn $Ax > 0$ (hoặc $Ax \geq 0$) thì A là một M -ma trận (hoặc một M_0 ma trận).*

Định nghĩa 1.9. *Cho U là một tập con lồi của $\mathbb{R}^n$. Ánh xạ $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ được gọi là*

- a) *P -ánh xạ nếu $\max_{1 \leq i \leq n} (x_i - y_i)(F_i(x) - F_i(y)) > 0$ với mọi $x, y \in U, x \neq y$;*
- b) *P -ánh xạ chặt nếu tồn tại $\gamma > 0$ thỏa mãn $F - \gamma I_n$ là một P -ánh xạ;*
- c) *P -ánh xạ đều nếu tồn tại $\tau > 0$ thỏa mãn*

$$\max_{1 \leq i \leq n} (x_i - y_i)(F_i(x) - F_i(y)) \geq \tau \|x - y\|^2$$

với mọi $x, y \in U$;

- d) *P_0 -ánh xạ nếu với mọi $x, y \in U, x \neq y$ tồn tại một chỉ số i thỏa mãn $x_i \neq y_i$ và $(x_i - y_i)(F_i(x) - F_i(y)) \geq 0$.*

Thực tế, nếu ánh xạ F affin, tức là $F(x) = Ax + b$ thì F là một P -ánh xạ (P_0 -ánh xạ) nếu và chỉ nếu Jacobi $\nabla F(x) = A$ là một P -ma trận (P_0 -ma trận). Trong trường hợp không tuyến tính, nếu Jacobi $\nabla F(x)$ là một P -ma trận thì F là một P -ánh xạ, tuy nhiên điều khẳng định ngược lại là không đúng trong trường hợp tổng quát. Ngoài ra, Nếu F là một P -ánh xạ chặt thì Jacobi $\nabla F(x)$ là một P -ma trận.

Tiếp theo, chúng tôi sẽ trình bày thêm về mối quan hệ giữa P_0 và P -ánh xạ chặt.

Bổ đề 1.1. *Nếu $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ là một P_0 -ánh xạ và $\varepsilon > 0$ thì $F + \varepsilon I_n$ là một P -ánh xạ chặt.*

Chú ý rằng, mỗi P -ánh xạ đều là một P -ánh xạ chặt nhưng điều khẳng định ngược lại là không đúng trong trường hợp tổng quát.

1.1.2 Bất đẳng thức biến phân

Cho K và V là những tập hợp lồi, khác rỗng trong không gian Euclid thực $\mathbb{R}^n$, $K \subseteq V$, cho $G : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ là một ánh xạ. Kí hiệu $\langle a, b \rangle$ là tích vô hướng của các phần tử a, b trong $\mathbb{R}^n$.

Xét bài toán bất đẳng thức biến phân: tìm $x^* \in K$ thỏa mãn

$$\langle G(x^*), x - x^* \rangle \geq 0, \forall x \in K. \quad (1.1)$$

Ký hiệu K^* là tập nghiệm của bài toán (1.1). Chúng ta sẽ xét bài toán (1.1) với các giả thiết:

(A₁) $G : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ là một ánh xạ liên tục và V là một tập con lồi, khác rỗng của $\mathbb{R}^n$.

(A₂) Cho K là một hợp, tức là,

$$K = \prod_{i=1}^n K_i \subseteq V,$$

trong đó $K_i = [\alpha_i, \beta_i] \subseteq [-\infty, +\infty]$, $\forall i = 1, \dots, n$.

Nhận thấy rằng K hiển nhiên là một tập đóng, lồi, khác rỗng. Nếu thêm điều kiện $\beta_i < +\infty, \forall i \in N$ thì K cũng là một tập bị chặn.

Mệnh đề 1.2. Cho (A₁) và (A₂) là đúng và cho G là một P -ánh xạ chặt. Khi ấy, bài toán (1.1) có duy nhất nghiệm.

Mệnh đề 1.3. Cho (A₁) và (A₂) là đúng. Nếu G là một P -ánh xạ và K là một tập hợp bị chặn thì bài toán (1.1) có duy nhất nghiệm.

Chúng ta sẽ xét thêm giả thiết sau:

(A₃) Giả sử rằng tồn tại những tập hợp $\tilde{D} \subset D \subset \mathbb{R}^n$ sao cho với mỗi điểm $y \in K \setminus D$ tồn tại một điểm $x \in \tilde{D} \cap K$ thỏa mãn

$$\max_{i=1, \dots, n} G_i(y)(y_i - x_i) > 0. \quad (1.2)$$

Từ định nghĩa này chúng ta sẽ nhận ngay được tập nghiệm đặc trưng sau:

Bổ đề 1.2. Nếu (A₁)-(A₃) thỏa mãn và $K^* \neq \emptyset$ thì $K^* \subseteq K \cap D$.

Mệnh đề 1.4. Giả sử rằng $(A_1)-(A_3)$ thỏa mãn với $D = K^*$, $\tilde{K}^*$ là tập nghiệm của bài toán (1.1), ở đó K được thay thế bởi tập hợp $\tilde{K} = \prod_{i=1}^n \tilde{K}_i$, $\tilde{K}_i$ là một tập đóng, lồi, khác rỗng với mỗi $i = 1, \dots, n$. Nếu $\tilde{D} \cap K \subseteq \tilde{K} \subseteq K$ thì $K^* = \tilde{K} \cap K^*$.

Chứng minh

Rõ ràng, $\tilde{K} \cap K^* \subseteq \tilde{K}^*$. Giả sử rằng tồn tại một điểm $y \in \tilde{K}^* \setminus K^*$ thì $y \in \tilde{K} \setminus D$. Áp dụng (A_3) , suy ra tồn tại một điểm $x \in \tilde{D} \cap K \subseteq \tilde{K}$ sao cho (1.2) đúng, nghĩa là $y \notin \tilde{K}^*$, mâu thuẫn với giả thiết, từ đây suy ra điều phải chứng minh.

Mệnh đề 1.5. Giả sử rằng $(A_1)-(A_3)$ thỏa mãn và D trong (A_3) bị chặn. Khi ấy

- i) Bài toán (1.1) là giải được, và $K^* \subseteq K \cap D$;
- ii) Nếu thêm điều kiện G là một P -ánh xạ thì K^* là tập hợp có một phần tử.

1.2 Bài toán đặt không chỉnh

1.2.1 Khái niệm về bài toán đặt chỉnh và đặt không chỉnh

Khái niệm về bài toán đặt chỉnh được J. Hadamard đưa ra khi nghiên cứu về ảnh hưởng của các điều kiện biên lên nghiệm của các phương trình elliptic cũng như parabolic.

Việc tìm nghiệm x của bất kì một bài toán nào cũng phải dựa vào dữ kiện ban đầu f , có nghĩa là $x = R(f)$. Ta sẽ coi nghiệm cũng như các dữ kiện đó là các phần tử thuộc không gian X và Y với các khoảng cách tương ứng là $\rho_X(x_1, x_2)$ và $\rho_Y(f_1, f_2)$, $x_1, x_2 \in X$, $f_1, f_2 \in Y$.

Định nghĩa 1.10. Giả sử ta đã có khái niệm thế nào là nghiệm của một bài toán. Khi đó, bài toán tìm nghiệm $x = R(f)$ được gọi là ổn định trên cặp không gian (X, Y) , nếu với mỗi số $\varepsilon > 0$ có thể tìm được một

số $\delta(\varepsilon) > 0$, sao cho từ $\rho_Y(f_1, f_2) \leq \delta(\varepsilon)$ ta có $\rho_X(x_1, x_2) \leq \varepsilon$, ở đây $x_1 = R(f_1), x_2 = R(f_2)$, $f_1, f_2 \in Y, x_1, x_2 \in X$.

Định nghĩa 1.11. Bài toán tìm nghiệm $x \in X$ theo dữ kiện $f \in Y$ được gọi là bài toán đặt chỉnh trên cặp không gian metric (X, Y) , nếu có:

- i) Với mỗi $f \in Y$ tồn tại nghiệm $x \in X$;
- ii) Nghiệm x đó được xác định một cách duy nhất;
- iii) Bài toán này ổn định trên cặp không gian (X, Y) .

Nếu ít nhất một trong ba điều kiện trên không thỏa mãn thì bài toán tìm nghiệm $x \in X$ theo dữ kiện $f \in Y$ được gọi là bài toán đặt không chỉnh. Đôi khi người ta còn gọi là bài toán đặt không chính quy hoặc bài toán thiết lập không đúng đắn.

Cũng cần lưu ý rằng một bài toán có thể đặt chỉnh trên cặp không gian metric này, nhưng lại đặt không chỉnh trên cặp không gian metric khác.

Ví dụ 1.5. Hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 2 \\ 2x_1 + 1,01x_2 = 2,01 \end{cases}$$

có nghiệm là $x_1 = \frac{1}{2}$ và $x_2 = 1$, trong khi đó hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 2 \\ 2,01x_1 + x_2 = 2,05 \end{cases}$$

có nghiệm là $x_1 = 5$ và $x_2 = -8$. Ta thấy một sự thay đổi nhỏ của hệ số và vế phải trong phương trình thứ hai kéo theo những thay đổi đáng kể của nghiệm. Đây là một bài toán đặt không chỉnh.

1.2.2 Hiệu chỉnh bất đẳng thức biến phân với toán tử đơn điệu

Xét bài toán bất đẳng thức biến phân tổng quát: Tìm $x \in K$ và $x^* \in F(x)$ thỏa mãn

$$\langle x^*, y - x \rangle \geq 0, \forall y \in K, \quad (1.3)$$

ở đó K là một tập lồi, đóng, khác rỗng trong $\mathbb{R}^n$, $F : K \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ là một ánh xạ với các giá trị khác rỗng, I là ánh xạ đơn vị. Ký hiệu $GVIP(F, K)$ và $SOL(F, K)$ tương ứng là bài toán (1.3) và tập nghiệm của nó.

Định nghĩa 1.12. Ánh xạ $F : K \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ được gọi là

- (i) đơn điệu trên K nếu với mỗi $x, y \in K$ và với mọi $x^* \in F(x), y^* \in F(y)$ thì $\langle y^* - x^*, y - x \rangle \geq 0$;
- (ii) đơn điệu cực đại trên K nếu với $u \in K$ bất kỳ, $\langle \xi - x^*, u - x \rangle \geq 0$ với mọi $x \in K$ và $x^* \in F(x)$ suy ra $\xi \in F(u)$;
- (iii) tựa đơn điệu trên K nếu với mỗi $x, y \in K$ và với mọi $x^* \in F(x), y^* \in F(y)$, $\langle x^*, y - x \rangle > 0$ suy ra $\langle y^*, y - x \rangle \geq 0$;
- (iv) nửa liên tục trên tại $x \in K$ nếu với mỗi tập mở $V \supseteq F(x)$ có một tập mở $U \ni x$ thỏa mãn $F(y) \subset V$ với mọi $y \in K \cap U$; nếu F nửa liên tục trên tại mọi $x \in K$ thì ta nói rằng F nửa liên tục trên trong tập hợp K .

Với $r > 0$, $K_r := \{x \in K : \|x\| \leq r\}$. Xét giả thiết:

(A) Tồn tại $r > 0$ sao cho với mỗi $x \in K \setminus K_r$, có $y \in K$ với $\|y\| < \|x\|$ thỏa mãn $\inf_{x^* \in F(x)} \langle x^*, x - y \rangle \geq 0$.

Định lý 1.1. Cho K là một tập lồi, đóng, khác rỗng trong $\mathbb{R}^n$ và $F : K \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ là ánh xạ nửa liên tục trên với tập giá trị lồi, compact, khác rỗng. Nếu giả thiết (A) đúng thì với mỗi $\varepsilon > 0$,

- (i) $GVIP(F + \varepsilon I, K)$ có một nghiệm;
- (ii) Tập hợp $\{SOL(F + tI, K) : t \in (0, \varepsilon]\}$ bị chặn.

Định lý 1.2. Cho K là một tập lồi, đóng, khác rỗng trong $\mathbb{R}^n$ và $F : K \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ là ánh xạ nửa liên tục trên với tập giá trị lồi, compact, khác rỗng. Giả sử có một tập lồi, đóng, bị chặn, khác rỗng $D \subset K$ thỏa mãn

$$\{x \in K : \sup_{y \in D} \inf_{x^* \in F(x)} \langle x^*, x - y \rangle < 0\}$$

bị chặn nếu khác rỗng. Khi đó với mỗi $\varepsilon > 0$, $GVIP(F + \varepsilon I, K)$ có một nghiệm và tập hợp $\{SOL(F + tI, K) : t \in (0, \varepsilon]\}$ bị chặn.

Với mỗi $\varepsilon > 0$ lấy $A_\varepsilon \subset \mathbb{R}^n$, định nghĩa

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0+} A_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^n : \exists \varepsilon_n \rightarrow 0+ \text{ và } x_n \in A_{\varepsilon_n} \text{ thỏa mãn } x_n \rightarrow x\}.$$

Định lý 1.3. *Cho K là một tập lồi, đóng, khác rỗng trong $\mathbb{R}^n$ và $F : K \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ là ánh xạ nửa liên tục trên với tập giá trị lồi, compact, khác rỗng. Nếu giả thiết (A) đúng thì*

$$\emptyset \neq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0+} SOL(F + \varepsilon I, K) \subset SOL(F, K).$$

Chương 2

Hiệu chỉnh bất đẳng thức biến phân với P_0 ánh xạ

Trong chương này chúng tôi trình bày phương pháp hiệu chỉnh Browder-Tikhonov cho các bài toán bất đẳng thức biến phân với P_0 ánh xạ trên những tập hợp ràng buộc. Chúng tôi cũng xét một lớp các bài toán cân bằng kinh tế thỏa mãn những giả thiết và điều kiện của phương pháp hiệu chỉnh cho những bài toán này. Các kiến thức của chương này chúng tôi tham khảo trong [5].

2.1 Thuật toán hiệu chỉnh

Chúng ta sẽ xấp xỉ bài toán (1.1) bởi bài toán sau: Tìm $x^\varepsilon \in K$ thỏa mãn

$$\langle G(x^\varepsilon) + \varepsilon A_L x^\varepsilon, x - x^\varepsilon \rangle \geq 0, \forall x \in K, \quad (2.1)$$

ở đó $\varepsilon > 0$ là một tham số, L là một tập con khác rỗng của $N = \{1, \dots, n\}$.

Đầu tiên chúng ta xét sự hội tụ của dãy $\{x^\varepsilon\}$ trong trường hợp bị chặn.

Định lý 2.1. *Giả sử rằng (A_1) và (A_2) là thỏa mãn. Giả sử bài toán (2.1) có duy nhất nghiệm x^ε và cho $[\alpha_i, \beta_i] \subset (-\infty, +\infty)$ với mỗi $i \in N$. Khi ấy, dãy $\{x^{\varepsilon_k}\}$, ở đó $\{\varepsilon_k\} \searrow 0$ có những điểm giới hạn nào đó và tất cả những điểm này chứa trong tập nghiệm của bài toán (1.1).*

Chứng minh

Do dãy $\{x^\varepsilon\}$ nằm trong tập hợp bị chặn K nên tồn tại những điểm giới hạn. Nếu x^* là một điểm giới hạn tùy ý của $\{x^\varepsilon\}$ thì lấy giới hạn trong (2.1) ta được

$$\langle G(x^*), x - x^* \rangle \geq 0, \forall x \in K,$$

nghĩa là x^* là nghiệm của bài toán (1.1).

Mệnh đề 2.1. Cho (A_1) và (A_2) là đúng, G là một P_0 -ánh xạ, và $L = \{1, \dots, n\}$. Khi ấy, bài toán (2.1) có duy nhất nghiệm.

Chứng minh

Theo Bổ đề 1.1 thì $G + \varepsilon I_n$ là một P -ánh xạ chặt. Theo Mệnh đề 1.2 thì bài toán (2.1) có duy nhất nghiệm.

Với mỗi tập chỉ số L , chúng ta sẽ viết $x_L = (x_i)_{i \in L}$ và $Q_L(x) = \nabla_{x_L} G(x_L)$. Suy ra $Q_N(x) = \nabla G(x)$.

Mệnh đề 2.2. Cho (A_1) và (A_2) là đúng, G là một P_0 -ánh xạ, và $[\alpha_i, \beta_i] \subset (-\infty, +\infty)$ với mỗi $i \in N$. Giả sử rằng, với mỗi $x \in K$, $\nabla G(x)$ là một Z -ma trận và tồn tại $J \subseteq N$ thỏa mãn $Q_J(x)$ là một P -ma trận. Nếu $L = N \setminus J$ thì bài toán (2.1) có duy nhất nghiệm.

Chứng minh

Không mất tính tổng quát, ta giả sử rằng $J = \{1, \dots, k\}$. Suy ra $L = \{k+1, \dots, n\}$. Khi ấy

$$\nabla G(x) = \begin{pmatrix} Q_J(x) & B'_k \\ B''_k & C_k \end{pmatrix},$$

ở đó B'_k là một ma trận chữ nhật với k hàng và $n-k$ cột, B''_k là một ma trận chữ nhật với $n-k$ hàng và k cột và C_k là một ma trận $(n-k) \times (n-k)$. Do $\nabla G(x)$ là một Z -ma trận theo giả thiết, $Q_J(x)$ là một M -ma trận.

Xét ánh xạ $\tilde{G} : V \rightarrow \mathbb{R}^n$, các thành phần được định nghĩa bởi

$$\tilde{G}_i(x) = \begin{cases} G_i(x) & \text{nếu } 1 \leq i \leq k, \\ G_i(x) + \varepsilon a_{ii}x_i & \text{nếu } k \leq i \leq n, \end{cases}$$

với $\varepsilon > 0$. Rõ ràng Jacobi của nó

$$\nabla \tilde{G}(x) = \begin{pmatrix} Q_J(x) & B'_k \\ B''_k & C_k \end{pmatrix} + \varepsilon A_L$$

là một M -ma trận. Theo định nghĩa $\tilde{G}$ là một P -ma trận. Theo Mệnh đề 1.3 thì bài toán: Tìm $x^* \in K$ thỏa mãn

$$\langle \tilde{G}(x^*), x - x^* \rangle \geq 0, \forall x \in K,$$

có duy nhất nghiệm và bài toán này tương đương với bài toán (2.1). Từ đây ta suy ra điều phải chứng minh.

Tiếp theo chúng ta sẽ xét bài toán xấp xỉ khác dựa trên tính bị chặn.

Ta định nghĩa

$$\tilde{K} = \prod_{i=1}^n \tilde{K}_i, \tilde{K}_i = [\tilde{\alpha}_i, \tilde{\beta}_i] \subset (-\infty, +\infty), \quad (2.2)$$

ở đó $\tilde{\alpha}_i < \tilde{\beta}_i$,

$\tilde{\alpha}_i = \alpha_i$ nếu $\alpha_i > -\infty$ và

$\tilde{\beta}_i = \beta_i$ nếu $\beta_i < +\infty$ với $i = 1, \dots, n$. (2.3)

Từ đây suy ra $\tilde{K} \subseteq K$ và $\tilde{K}$ bị chặn. Do đó chúng ta có thể xét bài toán : Tìm $\tilde{x} \in \tilde{K}$ thỏa mãn

$$\langle G(\tilde{x}), x - \tilde{x} \rangle \geq 0, \forall x \in \tilde{K}, \quad (2.4)$$

và bài toán hiệu chỉnh tương ứng: Tìm $z^\varepsilon \in \tilde{K}$ thỏa mãn

$$\langle G(z^\varepsilon) + \varepsilon A_L z^\varepsilon, x - z^\varepsilon \rangle \geq 0, \forall x \in \tilde{K}. \quad (2.5)$$

Theo Định lý 2.1 thì tất cả những điểm giới hạn của dãy $\{z^\varepsilon\}$ sẽ thuộc tập nghiệm $\tilde{K}^*$ của bài toán (2.4) với những giả thiết tương ứng. Mặc dù vậy, bao hàm thức chặt $K^* \cap \tilde{K} \subset \tilde{K}^*$ có thể cản trở sự hội tụ tới một nghiệm của bài toán ban đầu. Bây giờ chúng tôi sẽ trình bày hai điều kiện đủ dựa trên (A_3) cho sự hội tụ này.

Định lý 2.2. Giả sử rằng $(A_1) - (A_3)$ thỏa mãn, trong đó $D = K^*$ và $\tilde{D} \subseteq K^* \cap \tilde{K}$, $\tilde{D} \neq \emptyset$. Nếu bài toán (2.5) có duy nhất nghiệm z^ε thì dãy $\{z^{\varepsilon_k}\}$, ở đó $\{\varepsilon_k\} \searrow 0$ có những điểm giới hạn nào đó và tất cả những điểm này chứa trong tập nghiệm của bài toán (1.1).

Chứng minh

Áp dụng Định lý 2.1 cho bài toán (2.4), chúng ta thấy rằng $\{z^{\varepsilon_k}\}$ có những điểm giới hạn nào đó và tất cả những điểm này thuộc $\tilde{K}^*$. Do giả thiết của Mệnh đề 1.4 là đúng nên $K^* \cap \tilde{K} = \tilde{K}^*$, từ đây ta suy ra điều phải chứng minh.

Định lý 2.3. Giả sử rằng $(A_1) - (A_3)$ thỏa mãn, trong đó $\tilde{D} = D$ và D bị chặn. Chọn $\tilde{K}$ sao cho

$$\forall d \in D \cap K, d_i \begin{cases} \geq \tilde{\alpha}_i & \text{nếu } \alpha_i > -\infty, \\ > \tilde{\alpha}_i & \text{nếu } \alpha_i = -\infty, \\ \leq \tilde{\beta}_i & \text{nếu } \beta_i < +\infty, \\ < \tilde{\beta}_i & \text{nếu } \beta_i = +\infty, \end{cases}$$

với $i = 1, \dots, n$.

Nếu bài toán (2.5) có nghiệm duy nhất z^ε thì dãy $\{z^{\varepsilon_k}\}$, ở đó $\{\varepsilon_k\} \searrow 0$ có những điểm giới hạn nào đó và tất cả những điểm này chứa trong tập nghiệm của bài toán (1.1).

Chứng minh

Lại áp dụng Định lý 2.1 cho bài toán (2.4), chúng ta thấy rằng $\{z^{\varepsilon_k}\}$ có những điểm giới hạn nào đó và tất cả những điểm này thuộc $\tilde{K}^*$. Theo Bổ đề 1.2, $K^* \subseteq K \cap D \subseteq \tilde{K}$ suy ra $K^* \subseteq \tilde{K}^*$. Giả sử tồn tại một điểm $\tilde{x} \in \tilde{K}^* \setminus K^*$. Từ $K \cap D \subseteq \tilde{K}$ ta có $\tilde{x} \in K \cap D$. Hơn nữa, có một điểm $y \in K \setminus \tilde{K}$ và một chỉ số i thỏa mãn

$$G_i(\tilde{x})(y_i - \tilde{x}_i) < 0.$$

Suy ra , hoặc $y_i < \tilde{\alpha}_i < \tilde{x}_i$ với $\alpha_i = -\infty$ hoặc $y_i > \tilde{\beta}_i > \tilde{x}_i$ với $\beta_i = +\infty$ từ $\tilde{x} \in K \cap D$. Khi ấy, tồn tại một số $\lambda \in (0, 1)$ thỏa mãn $\lambda y_i + (1 - \lambda) \tilde{x}_i \in \tilde{K}_i$, suy ra

$$G_i(\tilde{x})[\lambda y_i + (1 - \lambda) \tilde{x}_i - \tilde{x}_i] \geq 0,$$

nghĩa là,

$$\lambda G_i(\tilde{x})(y_i - \tilde{x}_i) \geq 0.$$

Điều này mâu thuẫn với giả thiết, do đó $K^* = \tilde{K}^*$, suy ra điều phải chứng minh.

2.2 Áp dụng

Với mỗi véc tơ $x \in \mathbb{R}^n$ ta đặt

$$\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n | x \geq 0\}$$

và

$$\mathbb{R}_{>}^n = \{x \in \mathbb{R}^n | x > 0\}.$$

2.2.1 Áp dụng vào mô hình cân bằng Walrasian

Trong mục này, chúng ta áp dụng những kết quả ở mục trên cho một lớp các bài toán cân bằng kinh tế tổng quát.

Xét một bài toán kinh tế với n hàng hóa, cho trước một véc tơ giá cả $p \in \mathbb{R}_+^n$. Giá trị $E(p)$ của hàm chênh lệch giữa cầu và cung $E : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (hàm này được giả sử đơn giá trị) được biểu diễn như sau $E(p) = B(p) - S(p)$, ở đó B và S lần lượt là hàm cầu và hàm cung (rõ ràng hai hàm này là đơn giá trị). Một véc tơ $p^* \in \mathbb{R}^n$ được gọi là véc tơ giá cả cân bằng nếu nó giải quyết bài toán bổ xung sau:

$$p^* \geq 0, \quad E(p^*) \leq 0, \quad \langle p^*, E(p^*) \rangle = 0,$$

hoặc, bài toán: Tìm $p^* \geq 0$ thỏa mãn

$$\langle -E(p^*), p - p^* \rangle \geq 0, \forall p \geq 0. \quad (2.6)$$

Chúng ta ký hiệu E^* là tập nghiệm của bài toán này. Giả sử mọi giá cả được chứa trong tập hợp

$$K = \prod_{i=1}^n K_i,$$

$$K_i = \{t \in \mathbb{R} | 0 < \tau_i' < t < \tau_i'' < +\infty, i = 1, \dots, n\}. \quad (2.7)$$

Khi ấy, bài toán tìm một giá cả cân bằng được phát biểu như sau: Tìm $p^* \in K$ thỏa mãn

$$\langle G(p^*), p - p^* \rangle \geq 0, \forall p \in K, \quad (2.8)$$

ở đó $G = -E$. Ký hiệu K^* là tập nghiệm của bài toán này.

Định nghĩa 2.1. Ánh xạ $Q : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ được gọi là

- a) thỏa mãn tính chất tăng theo biến khác nếu $\partial Q_j / \partial P_i \geq 0, j \neq i$;
- b) thuần nhất dương bậc m nếu $Q(\alpha x) = \alpha^m Q(x)$ với mọi $\alpha \geq 0$.

Tiếp theo, ta xét giả thiết

(B_1) : Hàm chênh lệch giữa cầu và cung $E : \mathbb{R}_{>}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ là khả vi liên tục trên $V = \mathbb{R}_{>}^n$, thuần nhất dương bậc 0, và có tính chất tăng theo biến khác.

Từ tính chất tăng theo biến khác của E suy ra

$$\frac{\partial G_i(p)}{\partial p_j} \leq 0, i \neq j.$$

Suy ra $\nabla G(p)$ là một Z -ma trận. Lại do $G_i(p)$ là thuần nhất bậc 0 nên theo định lý Euler ta có

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial G_i(p)}{\partial p_j} p_j = 0, \forall i = 1, \dots, n. \quad (2.9)$$

Áp dụng Mệnh đề 1.1, suy ra $\nabla G(p)$ là một M_0 -ma trận và G là một P_0 -ánh xạ. Vì vậy chúng ta có khẳng định sau:

Bổ đề 2.1. Nếu (B_1) thỏa mãn thì G là P_0 -ánh xạ và $\nabla G(p)$ là một M_0 -ma trận với mỗi $p \in \mathbb{R}_{>}^n$.

Trong (2.9), G có thể không là một P -ánh xạ. Sau đây ta sẽ áp dụng phép xấp xỉ trong mục 2.1 đối với bài toán (2.8): Tìm $p^\varepsilon \in K$ thỏa mãn

$$\langle G(p^\varepsilon) + \varepsilon A_L p^\varepsilon, p - p^\varepsilon \rangle \geq 0, \forall p \in K, \quad (2.10)$$

ở đó $\varepsilon > 0$ là một tham số, L là một tập con của N .

Nếu $\tau_i'' < +\infty, \forall i = 1, \dots, n$ và $L = N$ thì theo Bổ đề 2.1 và Mệnh đề 2.1 bài toán (2.10) có duy nhất nghiệm. Hơn nữa, theo Định lý 2.1 dãy $\{p^\varepsilon\}$ có những điểm giới hạn nào đó và tất cả những điểm này là nghiệm của bài toán (2.7) và (2.8).

Định lý 2.4. *Giả sử rằng $\tau_i'' < +\infty$ với mỗi $i = 1, \dots, n$, (B_1) thỏa mãn và tồn tại một tập chỉ số $J \subseteq N$ thỏa mãn với mỗi $p \in K$*

$$\sum_{j \in N \setminus J} \frac{\partial G_i(p)}{\partial p_j} < 0, \text{ với } i \in J. \quad (2.11)$$

Khi ấy, bài toán (2.10) với $L = N \setminus J$ có nghiệm duy nhất p^ε , vì thế dãy $\{p^\varepsilon\}$ với $\{\varepsilon_k\} \searrow 0$ có những điểm giới hạn nào đó và tất cả những điểm này là nghiệm của bài toán (2.7), (2.8).

Chứng minh

Theo Mệnh đề 1.1, kết hợp (2.9) và (2.11) suy ra $Q_J(p)$ là một M -ma trận. Từ Mệnh đề 2.2 và Định lý 2.1 ta suy ra điều phải chứng minh.

Tiếp theo, ta xét giả thiết:

- (B'_1) a) Với mỗi $i = 1, \dots, n$, hàm $E_i : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$ là bị chặn dưới;
b) Nếu $\{p_k\} \rightarrow p \in \mathbb{R}_+^n \setminus \mathbb{R}_+^n$ thì tồn tại một chỉ số i thỏa mãn $\lim_{k \rightarrow \infty} E_i(p^k) = +\infty$;
c) (quy tắc Walras) Với mỗi $p \in \mathbb{R}_+^n$ ta có

$$\langle p, E(p) \rangle = 0.$$

Mệnh đề 2.3. *Nếu (B_1) và (B'_1) thỏa mãn thì bài toán (2.6) giải được. Hơn nữa,*

$$\langle p^*, E(p) \rangle > 0,$$

ở đó p^ là nghiệm của bài toán (2.6) và p là một điểm tùy ý trong $\mathbb{R}_+^n \setminus E^*$.*

Tiếp theo chúng ta xét bài toán sau: Tìm $\tilde{p} \in \tilde{K}$ thỏa mãn

$$\langle G(\tilde{p}), p - \tilde{p} \rangle \geq 0, \forall \tilde{p} \in \tilde{K}, \quad (2.12)$$

ở đó

$$\tilde{K} = \prod_{i=1}^n \tilde{K}_i, \quad \tilde{K}_i = [\tau_i', \tilde{\tau}_i] \subset (0, +\infty) \quad (2.13)$$

với $\tau_i' < \tilde{\tau}_i$ và $\tilde{\tau}_i = \tau_i''$ nếu $\tau_i'' < +\infty$ với $i = 1, \dots, n$.

Rõ ràng, bài toán (2.12), (2.13) tương tự với bài toán (2.2)-(2.4). Tương tự, chúng ta có thể định nghĩa sự hiệu chỉnh trong (2.5) trong đó $\tilde{K}$ được định nghĩa trong (2.13).

Định lý 2.5. *Giả sử rằng (B_1) và (B_1') thỏa mãn và tồn tại một tập chỉ số $J \subseteq N$ thỏa mãn với mỗi $p \in \tilde{K}$, (2.11) đúng. Khi ấy, bài toán (2.5), (2.13) với $L = N \setminus J$ có nghiệm duy nhất z^ε , vì thế dãy $\{z^{\varepsilon_k}\}$ với $\{\varepsilon_k\} \searrow 0$ có những điểm giới hạn nào đó và tất cả những điểm này là nghiệm của bài toán (2.7), (2.8).*

Chứng minh

Sử dụng lý luận tương tự như trong chứng minh của Định lý 2.4, ta thấy rằng $\{z^{\varepsilon_k}\}$ có những điểm giới hạn nào đó và tất cả những điểm này là nghiệm của bài toán (2.12), (2.13). Ký hiệu $\tilde{K}^*$ là tập nghiệm của bài toán này. Do E là thuần nhất dương bậc 0, E^* là một nón lồi, khác rỗng theo Mệnh đề 2.3. Hơn nữa, $E^* \cap \tilde{K} \neq \emptyset$ và điều kiện (A_3) thỏa mãn cho bài toán (2.6), ở đó $D = E^*$. Suy ra, nó cũng thỏa mãn cho bài toán (2.7), (2.8) với $D = E^*$ và $\tilde{D} = K^*$, và cho bài toán (2.12), (2.13) với $D = E^*$ và $\tilde{D} = \tilde{K}^*$. Theo Mệnh đề 1.4 suy ra $K^* = E^* \cap K$ và $\tilde{K}^* = E^* \cap \tilde{K} = K^* \cap \tilde{K}$. Từ đây ta suy ra điều phải chứng minh.

Ta xét giả thiết

(B_2) Hàm cầu $B : \mathbb{R}_{>}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ là khả vi liên tục, thuần nhất dương bậc 0 và có tính chất tăng theo biến khác. Các hàm cung $S_i : \mathbb{R}_{>} \rightarrow \mathbb{R}_+, i = 1, \dots, n$ là đơn điệu và khả vi liên tục.

Bổ đề 2.2. Nếu (B_2) đúng thì $-\nabla B(p)$ và $\nabla G(p)$ là M_0 -ma trận với mỗi $p \in \mathbb{R}_{>}^n$.

Hệ quả 2.1. Giả sử rằng $\tau_i'' < +\infty$ với $i = 1, \dots, n$, (B_2) đúng và tồn tại một tập chỉ số $J \subseteq N$ thỏa mãn với mỗi $p \in K$,

$$\sum_{j \in N \setminus J} \frac{\partial B_i(p)}{\partial p_j} > 0 \text{ với } i \in J.$$

Khi ấy, bài toán (2.10) với $L = N \setminus J$ có duy nhất nghiệm p^ε , vì thế dãy $\{p^{\varepsilon_k}\}$ với $\{\varepsilon_k\} \searrow 0$ có những điểm giới hạn nào đó và tất cả những điểm này là nghiệm của bài toán (2.7), (2.8).

Định lý 2.6. Giả sử rằng $\tau_i'' < +\infty$ với $i = 1, \dots, n$, (B_2) đúng, tồn tại một tập chỉ số $J' \subseteq N$ thỏa mãn với mỗi $p \in K$,

$$\sum_{j \in N \setminus J'} \frac{\partial B_i(p)}{\partial p_j} > 0 \text{ với } i \in J', \quad (2.14)$$

và tồn tại một tập chỉ số $J'' \subseteq N$ thỏa mãn $S'_i(p_i) > 0$ với $p_i \in [\tau'_i, \tau''_i]$, $i \in J''$. Khi ấy, bài toán (2.10) với $L = N \setminus J$, $J = J' \cup J''$ có nghiệm duy nhất p^ε , vì thế dãy $\{p^{\varepsilon_k}\}$ với $\{\varepsilon_k\} \searrow 0$ có những điểm giới hạn nào đó và tất cả những điểm này là nghiệm của bài toán (2.7), (2.8).

Chứng minh

Theo Bổ đề 2.2, $-\nabla B(p)$ là một M_0 -ma trận với mỗi $p \in \mathbb{R}_{>}^n$. Không mất tính tổng quát, giả sử $J = \{1, \dots, k\}$. Khi ấy

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial B_i(p)}{\partial p_j} p_j = 0, \text{ với } i = 1, \dots, k.$$

Suy ra

$$\sum_{j=1}^k \frac{\partial G_i(p)}{\partial p_j} p_j > 0, \text{ với } i = 1, \dots, k.$$

Theo Mệnh đề 1.1, suy ra $Q_J(p)$ là một M -ma trận. Lại áp dụng Mệnh đề 2.2 và Định lý 2.1 ta suy ra điều phải chứng minh.

Dựa trên kết quả của Định lý 2.3 chúng ta cũng có thể áp dụng phương pháp hiệu chỉnh trong trường hợp không bị chặn.

Định lý 2.7. Giả sử rằng (B_2) thỏa mãn, tồn tại một tập hợp bị chặn $W \subseteq K$ thỏa mãn với mỗi $p \in K \setminus W$ ta có

$$\max_{i=1, \dots, n} [S_i(p_i) - B_i(p)](p_i - \tau'_i) > 0. \quad (2.15)$$

Giả sử $\tilde{K}$ trong (2.13) được chọn sao cho $\forall i = 1, \dots, n, \forall w \in W, w_i < \tilde{\tau}_i$ nếu $\tau''_i = +\infty$, và tồn tại một tập chỉ số $J' \subseteq N$ thỏa mãn với mỗi $p \in \tilde{K}$, (2.14) đúng. Hơn nữa, tồn tại một tập chỉ số $J'' \subseteq N$ thỏa mãn $S'_i(p_i) > 0$ với $p_i \in [\tau'_i, \tilde{\tau}_i]$ và $i \in J''$. Khi ấy, bài toán (2.5), (2.13) với $L = N \setminus J; J = J' \cup J''$ có duy nhất nghiệm z^ε , vì thế dãy $\{z^{\varepsilon_k}\}$ với $\{\varepsilon_k\} \searrow 0$ có những điểm giới hạn nào đó và tất cả những điểm này là nghiệm của bài toán (2.7), (2.8).

Chứng minh

Tương tự như trong chứng minh Định lý 2.6, ta có bài toán bài toán (2.5), (2.13) có nghiệm duy nhất, dãy $\{z^{\varepsilon_k}\}$ có những điểm giới hạn nào đó và tất cả những điểm này là nghiệm của bài toán (2.12), (2.13). Theo chứng minh của Định lý 2.3, ta có $\tilde{K}^* = K^*$. Từ đây ta suy ra điều phải chứng minh.

2.2.2 Áp dụng vào mô hình cân bằng Oligopolistic

Trong mục này chúng ta sẽ xét một bài toán kinh tế Oligopolistic, trong đó n công ty cùng sản xuất một sản phẩm. Kí hiệu $p(\sigma)$ là nghịch đảo của hàm cầu, tức là giá cả mà người tiêu dùng phải trả khi mua một lượng σ . Nếu mỗi công ty thứ i cung cấp q_i sản phẩm thì lượng cung cấp toàn bộ trong bài toán kinh tế được định nghĩa là

$$\sigma_q = \sum_{i=1}^n q_i.$$

Nếu ký hiệu $f_i(q_i)$ là toàn bộ trị giá của q_i sản phẩm được cung cấp bởi công ty thứ i thì lợi nhuận của công ty thứ i được định nghĩa bởi

$$\varphi_i(q) = q_i p(\sigma_q) - f_i(q_i). \quad (2.16)$$

Thông thường, mỗi mức sản lượng là không âm, nghĩa là $q_i \geq 0$ với $i = 1, \dots, n$. Về nguyên tắc chúng ta có thể giả sử thêm chúng bị chặn trên, tức là tồn tại $\beta_i \in (0, +\infty]$ thỏa mãn $q_i \leq \beta_i$ với $i = 1, \dots, n$.

Định nghĩa 2.2. Một véc tơ cho phép của các mức sản lượng $q^* = (q_1^*, q_2^*, \dots, q_n^*)$ của các công ty $1, \dots, n$ được gọi là cấu thành một nghiệm cân bằng Nash-Cournot cho bài toán kinh tế nếu q_i^* làm cực đại hàm lợi nhuận φ_i của công ty thứ i trên $[0, \beta_i]$ cho trước. Các công ty khác sản xuất các sản lượng $q_j^*, j \neq i$, với mỗi $J = 1, \dots, n$.

Tức là, nếu $q^* = (q_1^*, q_2^*, \dots, q_n^*)$ là một cân bằng Nash-Cournot thì q_i^* phải là nghiệm tối ưu của bài toán

$$\max_{0 \leq q_i \leq \beta_i} \rightarrow \{q_i p(q_i + \sigma_i^*) - f_i(q_i)\}, \quad (2.17)$$

ở đó $\sigma_i^* = \sum_{j=1, j \neq i}^n q_j^*$ với $i = 1, \dots, n$.

Bài toán này có thể thay đổi sang một dạng tương đương của bài toán (1.1) nếu mỗi hàm lợi nhuận φ_i trong (2.16) là lõm trong q_i . Giả thiết này là phù hợp với thực tế và suy ra rằng (2.17) là một bài toán cực đại, lõm.

Trong suốt mục này, ta giả sử rằng hàm giá cả $p(\sigma)$ là không tăng và hai lần khả vi liên tục, hàm thu nhập công nghiệp hàng năm $\mu(\sigma) = \sigma p(\sigma)$ là lõm với $\sigma \geq 0$, $f_i(q_i)$ là hàm lồi và hai lần khả vi liên tục với $i = 1, \dots, n$. Những giả thiết này suy ra tính lõm trong q_i với mỗi hàm lợi nhuận $q_i p(\sigma_q) - f_i(q_i)$.

Đặt $V = \mathbb{R}_+^n$,

$$K = \sum_{i=1}^n K_i; K_i = \{t \in \mathbb{R} | 0 \leq t \leq \beta_i \leq +\infty\}, i = 1, \dots, n. \quad (2.18)$$

Với giả thiết ở trên, ta có thể định nghĩa ánh xạ đơn giá trị $G : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ và $F : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ với các thành phần tương ứng $G_i(q) = -p(\sigma_q) - q_i p'(\sigma_q)$ và $F_i(q_i) = f'_i(q_i)$. Khi ấy, bài toán tìm cân bằng Nash-Cournot trong bài toán kinh tế có thể được viết lại như sau: Tìm $q^* \in K$ thỏa mãn

$$\langle G(q^*) + F(q^*), q - q^* \rangle \geq 0, \forall q \in K. \quad (2.19)$$

Ký hiệu K^* là tập nghiệm của bài toán (2.19), (2.18).

Bổ đề 2.3. Điều khẳng định sau là đúng

$$\det Q_L(q) = [-(k+1)p'(\sigma_q) - (\sum_{i=1}^k q_i)p''(\sigma_q)](-p'(\sigma_q))^{k-1}$$

với $L = \{1, \dots, k\}$.

Chứng minh

Để cho gọn, ta đặt $\alpha_i = -p'(\sigma_q) - q_i p''(\sigma_q)$ và $\beta = -p'(\sigma_q)$. Vì vậy

$$\begin{aligned} \det Q_L(q) &= \begin{vmatrix} \beta + \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 & \dots & \alpha_1 \\ \alpha_2 & \beta + \alpha_2 & \alpha_2 & \dots & \alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha_k & \alpha_k & \alpha_k & \dots & \beta + \alpha_k \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \beta + \sum_{i=1}^k \alpha_i & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_2 & \beta & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha_k & 0 & 0 & \dots & \beta \end{vmatrix} \\ &= \beta^{k-1} \left(\beta + \sum_{i=1}^k \alpha_i \right). \end{aligned}$$

Suy ra

$$\det Q_L(q) = [-(k+1)p'(\sigma_q) - \left(\sum_{i=1}^k q_i \right) p''(\sigma_q)] (-p'(\sigma_q))^{k-1}$$

với $L = \{1, \dots, k\}$.

Mệnh đề 2.4. $\nabla G(q)$ là một P_0 -ma trận với mọi $q \in V$.

Chứng minh

Theo giả thiết, $p'(\sigma) \leq 0$. Cố định $q \in K$. Nếu $p''(\sigma_q) \leq 0$ thì theo Bổ đề 2.3 suy ra $\det Q_L(q) \geq 0$. Mặt khác, nếu $p''(\sigma_q) \geq 0$ thì $\det Q_L(q) = (-p'(\sigma_q))^{k-1} [-(k-1)p'(\sigma_q) - \mu''(\sigma_q) + \left(\sum_{i=k+1}^n q_i \right) p''(\sigma_q)]$. Từ $\mu''(\sigma_q) \leq 0$ ta có $\det Q_L(q) \geq 0$ và suy ra điều phải chứng minh.

Vì vậy bài toán tìm cân bằng Nash-courtnot có thể được xấp xỉ với bài toán hiệu chỉnh: Tìm $q^* \in K$ thỏa mãn

$$\langle G(q^\varepsilon) + F(q^\varepsilon) + \varepsilon A_L q^\varepsilon, q - q^\varepsilon \rangle \geq 0, \forall q \in K, \quad (2.20)$$

ở đó $\varepsilon > 0$ là một tham số.

Định lý 2.8. Giả sử rằng $\beta_i < +\infty$ với $i = 1, \dots, n$ và tồn tại một tập chỉ số $J \subseteq N$ thỏa mãn $f_i''(q_i) > 0$ với $q_i \in [0, \beta_i]$ và $i \in J$. Khi ấy, bài toán (2.20) với $L = N \setminus J$ có duy nhất nghiệm q^ε , vì thế dãy $\{q^{\varepsilon_k}\}$ với $\{\varepsilon_k\} \searrow 0$ có những điểm giới hạn nào đó và tất cả những điểm này là nghiệm của bài toán (2.18), (2.19).

Chứng minh

Theo Mệnh đề 2.4, G là một P_0 -ánh xạ. Do $\nabla F(q) + \varepsilon A_L$ là một ma trận đường chéo xác định dương, $G + F + \varepsilon A_L$ là một P -ánh xạ và bài toán (2.20) có duy nhất nghiệm theo Mệnh đề 1.3. Áp dụng Định lý 2.1 ta suy ra điều phải chứng minh.

Định nghĩa 2.3. Một sản lượng công nghiệp được gọi là bị chặn nếu tồn tại một tập con compact P của $\mathbb{R}_+^n$ thỏa mãn với $\tilde{q} \in \mathbb{R}_+^n \setminus P$ ta có

$$G_i(\tilde{q}) + F_i(\tilde{q}) = f_i'(\tilde{q}_i) - p(\sigma_{\tilde{q}}) - \tilde{q}_i p'(\sigma_{\tilde{q}}) > 0, i = 1, \dots, n. \quad (2.21)$$

Không mất tính tổng quát ta giả sử rằng $0 \in P$. Xét bài toán: Tìm $\tilde{p} \in \tilde{K}$ thỏa mãn

$$\langle G(\tilde{p}) + F(\tilde{p}), p - \tilde{p} \rangle \geq 0, \forall p \in \tilde{K}, \quad (2.22)$$

$$\text{ở đó } \tilde{K} = \prod_{i=1}^n [0, \tilde{\beta}_i], 0 < \tilde{\beta}_i < +\infty \text{ và } \tilde{\beta}_i = \beta_i \text{ nếu } \beta_i < +\infty \quad (2.23)$$

với $i = 1, \dots, n$.

Ký hiệu $\tilde{K}^*$ là tập nghiệm của bài toán (2.22), (2.23). Tương tự, ta xét bài toán hiệu chỉnh tương ứng: Tìm $z^\varepsilon \in \tilde{K}$ thỏa mãn

$$\langle G(z^\varepsilon) + F(z^\varepsilon) + \varepsilon A_L z^\varepsilon, p - z^\varepsilon \rangle \geq 0, \forall p \in \tilde{K}. \quad (2.24)$$

Bây giờ chúng ta có thể xây dựng kết quả hội tụ cho phương pháp hiệu chỉnh dựa trên bài toán (2.24), (2.23).

Định lý 2.9. Giả sử rằng sản lượng công nghiệp là bị chặn vì thế $\forall i = 1, \dots, n, \forall p \in K \cap P, p_i < \tilde{\beta}_i$ nếu $\beta_i = +\infty$, và tồn tại một tập chỉ số $J \subseteq N$ thỏa mãn $f_i''(q_i) > 0$ với $q_i \in [0, \tilde{\beta}_i]$ và $i \in J$. Khi ấy, bài toán (2.23), (2.24) với $L = N \setminus J$ có duy nhất nghiệm z^ε , vì thế dãy $\{z^{\varepsilon_k}\}$ với $\{\varepsilon_k\} \searrow 0$ có những điểm giới hạn nào đó và tất cả những điểm này là nghiệm của bài toán (2.18), (2.19).

Chứng minh

Áp dụng Định lý 2.8, suy ra rằng bài toán (2.23), (2.24) có duy nhất nghiệm và $\{z^{\varepsilon_k}\}$ có những điểm giới hạn nào đó và tất cả những điểm này là nghiệm của bài toán (2.22), (2.23). Do sản lượng công nghiệp là bị chặn nên từ (2.21) suy ra (A_3) với $D = P$ và $\tilde{D} = \{0\}$. Áp dụng chứng minh của Định lý 2.3, ta được $K^* = \tilde{K}^*$. Từ đây suy ra điều phải chứng minh.

Kết Luận

Các kết quả chính của luận văn gồm có:

- Nghiên cứu phương pháp hiệu chỉnh bất đẳng thức biến phân với P_0 ánh xạ.
- Nghiên cứu ứng dụng của kết quả trên cho hai mô hình kinh tế tổng quát đó là mô hình cân bằng Walrasian và mô hình cân bằng Oligopolistic.

Tài liệu tham khảo

- [1] Phạm Kỳ Anh, Nguyễn Bường, *Bài toán đặt không chỉnh*, NXB Đại học Quốc Gia Hà Nội, 2005.
- [2] Nguyễn Bường, *Hiệu chỉnh bài toán phi tuyến bằng phương pháp toán tử đơn điệu*, NXB Đại học Quốc Gia Hà Nội, 2001.
- [3] Hoàng Tuy, *Hàm thực và giải tích hàm*, NXB Đại học Quốc Gia Hà Nội, 2003.
- [4] Yiran He, *Tikhonov regularization method for set-valued variational inequalities*, National Natural Science Foundation of China (No. 10701059) and Sichuan Youth Science and Technology Foundation (No. 06ZQ026-013).
- [5] Igor Konnov, Elena Mazurkevich, Mohamed Ali, *On a regularization method for variational inequalities with P_0 mappings*, Int. J. Appl. Math. Comput. Sci., 2005.