

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

VŨ HUY BÌNH

PHƯƠNG PHÁP RUNGE-KUTTA GIẢI GẦN ĐÚNG HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN ĐẠI SỐ

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành : TOÁN ỨNG DỤNG

Mã số : 60 .46 .01 .12

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC: TS. NGUYỄN VĂN MINH

THÁI NGUYÊN - 2012

Công trình được hoàn thành tại
Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên

Người hướng dẫn khoa học: TS. Nguyễn Văn Minh

Phản biên 1: TS. Nguyễn Anh Tuấn

Phản biên 2: TS. Nguyễn Thị Thu Thủy

Luận văn sẽ được bảo vệ trước hội đồng chấm luận văn họp tại:

Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên

Ngày 18 tháng 11 năm 2012

Có thể tìm hiểu luận văn tại
Thư viện Đại học Thái Nguyên

Mục lục

1	CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN VỀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN ĐẠI SỐ	5
1.1	Một số khái niệm về phương trình vi phân thường cấp 1 . . .	5
1.1.1	Vài mô hình đơn giản	5
1.1.2	Một số khái niệm	6
1.1.3	Bài toán Cauchy	7
1.1.4	Sự tồn tại và duy nhất nghiệm	8
1.1.5	Phân loại nghiệm của phương trình vi phân	10
1.2	Một số khái niệm về hệ phương trình vi phân đại số	11
1.3	Phân loại hệ phương trình vi phân đại số ([4])	14
1.3.1	Các hệ phương trình vi phân đại số phi tuyến	14
1.3.2	Các hệ phương trình vi phân đại số tuyến tính	14
1.3.3	Các hệ phương trình vi phân đại số bán tường minh	14
1.3.4	Hệ phương trình vi phân đại số ẩn hoàn toàn	14
1.3.5	Ví dụ	15
1.4	Chỉ số của hệ phương trình vi phân đại số ([2],[11])	16
2	PHƯƠNG PHÁP RUNGE-KUTTA GIẢI GẦN ĐÚNG HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN ĐẠI SỐ	21
2.1	Phương pháp số giải gần đúng phương trình vi phân thường ([1])	21
2.1.1	Phương pháp Runge - Kutta	21
2.1.2	Phương pháp Euler	22
2.1.3	Phương pháp Euler cải tiến	22
2.1.4	Công thức RK4	23
2.2	Phương pháp số cho các hệ phương trình vi phân đại số	24
2.2.1	Nhận xét	24

2.2.2	Công thức lấy vi ngược (BDF) cho các hệ phương trình vi phân đại số	25
2.3	Phương pháp Runge-Kutta cho hệ phương trình vi phân đại số	26
2.3.1	Phương pháp Runge-Kutta cơ bản	26
2.3.2	Các phương pháp Runge-Kutta ẩn ([8],[9])	28
2.3.3	Tóm tắt các kết quả hội tụ	29
2.3.4	Các phương pháp nhiều đơn	31
2.3.5	Các phương pháp bán tường minh	34
2.4	Sự hội tụ đối với các bài toán chỉ số 1	35
2.4.1	Giải phương trình vi phân thường tương đương	35
2.4.2	Phương pháp tiếp cận trực tiếp	36
2.4.3	Sự hội tụ	37
2.4.4	Khai triển tiệm cận của sai số toàn cục	38
2.5	Phương pháp Runge-Kutta cho hệ phương trình vi phân đại số một cách tiếp cận mới	40
2.5.1	Giới thiệu	40
2.5.2	Cách tiếp cận mới	43
2.5.3	Sự hội tụ đối với các hệ phương trình vi phân đại số có thể chuyển sang hệ số hằng	48
2.5.4	Sự co	51
3	ỨNG DỤNG PHƯƠNG PHÁP RUNGE - KUTTA GIẢI GẦN ĐÚNG HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN ĐẠI SỐ	52
3.1	Ví dụ giải gần đúng phương trình vi phân thường (ODE)	52
3.2	Ví dụ giải gần đúng hệ phương trình vi phân đại số (DAE) cài đặt bằng Matlab	55
	Kết luận	57
	Tài liệu tham khảo	58

MỞ ĐẦU

Hệ phương trình vi phân đại số là lớp phương trình có ý nghĩa ứng dụng thực tế cao, xuất hiện trong lý thuyết điều khiển, mô phỏng mạch điện, phản ứng hóa học những vấn đề trong điều khiển đòi hỏi chúng ta phải quan tâm giải quyết những hệ phương trình dạng:

$A(t)x' + B(t)x + f(t) = 0$ trong đó A, B là những ma trận hằng hoặc ma trận hàm liên tục cấp n , $\det A(t) = 0$, gọi là hệ phương trình vi phân đại số (chú ý rằng nếu $\det A(t) \neq 0$ thì đưa về dạng: $x' = -A^{-1}B(x)$ là phương trình vi phân thường). Lý thuyết phương trình vi phân thường đã được Newton-Leibnitz xây dựng vào cuối thế kỷ 17 đã được nghiên cứu, phát triển mở rộng theo nhiều hướng và thu được nhiều kết quả hoàn chỉnh.

Hệ phương trình vi phân đại số đóng vai trò rất quan trọng trong các lĩnh vực như: Toán học, kỹ thuật, vật lý, kinh tế và một số ngành khác. Nội dung của luận văn nhằm giải quyết hai vấn đề chính:

Vấn đề 1: Những khái niệm cơ bản của hệ phương trình vi phân đại số.

Vấn đề 2: Đưa ra phương pháp Runge-Kutta giải gần đúng phương trình vi phân đại số và ứng dụng của phương pháp này giải bài toán cụ thể.

Luận văn này được chia làm ba chương.

Chương 1: Các khái niệm cơ bản về hệ phương trình vi phân đại số.

Nội dung chương 1 trình bày tóm tắt một số kết quả đã biết của phương trình vi phân thường, một số khái niệm về hệ phương trình vi phân đại số: Chỉ số, nghiệm, phân loại, bài toán cơ bản dẫn đến hệ phương trình vi phân đại số.

Chương 2: Phương pháp Runge-Kutta giải gần đúng hệ phương trình vi phân đại số.

Nội dung chương 2 nhắc lại phương pháp số để giải gần đúng phương trình vi phân thường, phương pháp số cho hệ phương trình vi phân đại số trong đó có phương pháp Runge-Kutta cho hệ phương trình vi phân đại số, cách tiếp cận mới của phương pháp Runge-Kutta cho hệ phương trình vi phân đại số.

Chương 3: Thực hiện với ví dụ cụ thể.

Luận văn này được hoàn thành dưới sự hướng dẫn khoa học của TS Nguyễn Văn Minh. Tác giả xin được tỏ lòng cảm ơn chân thành nhất tới thầy về sự giúp đỡ nhiệt tình từ khi xây dựng đề cương, viết và hoàn thành luận văn. Tác giả cũng xin chân thành cảm ơn các thầy cô giáo phản biện đã đọc và góp ý để tác giả hoàn thiện luận văn của mình. Tác giả xin trân trọng cảm ơn tới Ban Giám hiệu, các thầy cô giáo trường Đại học Khoa học- Đại học Thái Nguyên. Những thầy cô đã tận tình dạy bảo cho tác giả trong suốt thời gian học. Đã trang bị cho tác giả và tập thể lớp những kiến thức và tạo mọi điều kiện cho lớp học tập tại trường.

Dù đã rất cố gắng, nhưng chắc chắn nội dung được trình bày trong luận văn không tránh khỏi thiếu sót nhất định, tác giả rất mong nhận được sự góp ý của các thầy cô giáo và các bạn.

Thái Nguyên, ngày 20 tháng 09 năm 2012

Tác giả

Vũ Huy Bình

Chương 1

CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN VỀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN ĐẠI SỐ

1.1 Một số khái niệm về phương trình vi phân thường cấp 1

1.1.1 Vài mô hình đơn giản

Sự rơi tự do: Xét một vật có khối lượng m được thả rơi tự do trong khí quyển gần mặt đất. Theo định luật II Newton, chuyển động của vật thể đó có thể mô tả bởi phương trình

$$F = ma \quad (1.1.1)$$

Trong đó F là hợp lực tác động lên vật và a là gia tốc chuyển động. Hợp lực F có thể giả thiết chỉ bao gồm lực hấp dẫn (tỷ lệ với khối lượng của vật và hướng xuống) và lực cản (tỷ lệ với vận tốc chuyển động và hướng lên trên). Ngoài ra do gia tốc chuyển động $a = \frac{dv}{dt}$ nên (1.1.1) có thể viết dưới dạng

$$m \frac{dv}{dt} = mg - \alpha v. \quad (1.1.2)$$

Trong đó $g \approx 9,8 m/s^2$ là gia tốc trọng trường, còn α là hệ số cản. Vậy vận tốc v của vật rơi tự do thỏa mãn phương trình (1.1.2) với sự xuất hiện của đạo hàm của v . Những phương trình như vậy gọi là phương trình vi phân.

Dung dịch hóa học: Giả sử tại thời điểm ban đầu $t = t_0$ một thùng chứa x_0 kg muối hòa tan trong 1000 lít nước. Ta cho chảy vào thùng một loại nước muối nồng độ a (kg/lít) với lưu lượng r (lít/phút) và khuấy đều. Đồng thời cho hỗn hợp đó chảy ra khỏi thùng cũng với tốc độ như trên. Gọi $x = x(t)$ là lượng muối trong thùng tại thời điểm bất kỳ. Rõ ràng tỷ lệ thay đổi lượng muối trong thùng $\frac{dx}{dt}$ bằng hiệu của tỷ lệ muối chảy vào (kg/phút) trừ đi tỷ lệ muối chảy ra tại thời điểm đang xét $\frac{rx}{1000}$ (kg/phút). Vậy ta có phương trình vi phân

$$\frac{dx}{dt} = ar - \frac{rx}{1000} \quad (1.1.3)$$

với dữ kiện ban đầu $x(t_0) = x_0$

1.1.2 Một số khái niệm

Phương trình vi phân là phương trình có dạng

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (1.1.4)$$

Trong đó $y = y(x)$ là ẩn hàm cần tìm và nhất thiết phải có sự tham gia của đạo hàm (đến cấp nào đó) của ẩn.

Trong trường hợp ẩn hàm cần tìm là hàm nhiều biến (xuất hiện các đạo hàm riêng) thì phương trình vi phân còn gọi là phương trình đạo hàm riêng. Để phân biệt người ta thường gọi phương trình với ẩn hàm là hàm một biến là phương trình vi phân thường là đối tượng chính được nói trong mục này.

Thông thường ta xét các phương trình với ẩn hàm là hàm số một biến thực $y = y(x)$ xác định trên khoảng mở $I \subset \mathbb{R}$, khi đó hàm F trong đẳng thức trên xác định trong một tập mở G của $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+1}$.

Trong trường hợp ẩn hàm cần tìm là véc tơ hàm (hàm với giá trị véc tơ) $y(x) = (y_1(x), \dots, y_m(x))^T \in \mathbb{R}^m$, F là một ánh xạ nhận giá trị trong $\mathbb{R}^m$ và (1.1.4) được hiểu là hệ phương trình vi phân.

Ta nói một phương trình vi phân có cấp n nếu n là cấp lớn nhất của đạo hàm ẩn xuất hiện trong phương trình.

Phương trình vi phân thường cấp I có dạng tổng quát $F(x, y, y') = 0$ trong đó $F(x, y, y')$ được giả thiết là liên tục với các đạo hàm riêng của nó trên miền $G \subset \mathbb{R}^3$. Với một số giả thiết thích hợp, phương trình vi phân

thường cấp I có thể viết được dưới dạng sau (gọi là dạng giải ra đối với đạo hàm)

$$y' = f(x, y) \quad (1.1.5)$$

với f liên tục trong một miền $D \subset \mathbb{R}^2$.

Ví dụ: Các phương trình

$$\begin{aligned} e^y + e^{y'} \cos x &= 1 \\ (y''')^2 - 2xy &= \ln x \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0 \end{aligned}$$

lần lượt là các phương trình vi phân thường cấp I, cấp III và phương trình đạo hàm riêng cấp II.

1.1.3 Bài toán Cauchy

Nghiệm của một phương trình vi phân nói chung phụ thuộc vào một hay nhiều hằng số tùy ý nào đó. Để xác định một nghiệm cụ thể, ta cần thêm một hay vài dữ kiện nào đó về nghiệm (tùy theo cấp của phương trình vi phân). Chẳng hạn, $y = \frac{x^3}{3} + C$ là nghiệm tổng quát của phương trình

$y' = x^2$. Dễ thấy $y = \frac{x^3}{3} + 1$ là nghiệm (duy nhất) thỏa mãn $y(0) = 1$.

Ta xét bài toán sau đây đặt ra đối với phương trình $F(x, y, y') = 0$, gọi là bài toán Cauchy (hay bài toán giá trị ban đầu):

$$\text{Bài toán } y(x) \text{ thỏa } \begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (1.1.6)$$

trong đó $(x_0, y_0) \in D$ được gọi là điều kiện ban đầu.

Chú ý: Không phải lúc nào bài toán Cauchy cũng có nghiệm, và khi có nghiệm cũng không nhất thiết có duy nhất nghiệm. Chẳng hạn phương trình $y' = x^2, y(0) = 0$ có duy nhất một nghiệm là $y = \frac{x^3}{3}$ phương trình $xy' = y, y(0) = 1$ không có nghiệm nào, phương trình $y' = y^{1/3}, y(0) = 0$ có ít nhất hai nghiệm là $y \equiv 0$ và $y^2 = \frac{8}{27}x^3$.

1.1.4 Sự tồn tại và duy nhất nghiệm

Định nghĩa 1.1.1. Cho hàm $f(x, y)$ xác định trên miền $D \subset \mathbb{R}^2$ ta nói hàm f thỏa mãn điều kiện Lipschitz theo biến y trên D nếu tồn tại số dương L (gọi là hằng số Lipschitz) sao cho:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L |y_1 - y_2| \text{ với mọi } (x, y_1), (x, y_2) \in D$$

Nhận xét: Điều kiện Lipschitz là yếu hơn so với điều kiện giới nội của đạo hàm riêng $\frac{\partial f}{\partial y}$ trên D . Thật vậy giả sử $\frac{\partial f}{\partial y}$ liên tục và $\left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \leq L$.

Khi đó áp dụng định lý Lagrange cho hàm $f(x, y)$ theo biến y ta được

$$f(x, y_1) - f(x, y_2) = (y_1 - y_2) \frac{\partial f}{\partial y} [x, y_1 + \theta(y_2 - y_1)]$$

Định lý 1.1.2 (3). (Định lý tồn tại và duy nhất nghiệm).

Giả sử hàm số $f(x, y)$ trong (1.1.6) liên tục và thỏa mãn điều kiện Lipschitz theo biến y trên hình chữ nhật

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$$

Khi đó nghiệm của bài toán Cauchy(1.1.6) là tồn tại và duy nhất trong đoạn $I := [x_0 - h, x_0 + h]$, với $h := \min(a, \frac{b}{M})$ và $M := \max_{(x,y) \in D} |f(x, y)|$.

Chứng minh. Sự tồn tại Chứng minh rằng phép lặp Picard hội tụ đều trên I đến một nghiệm của bài toán Cauchy.

Trước tiên ta chứng minh quy nạp rằng

$$|y_{k+1}(x) - y_k(x)| \leq ML^k \frac{|x - x_0|^{k+1}}{(k+1)!}, \text{ với mọi } x \in I$$

với $k=0$, bất đẳng thức trên chính là $\left| \int_{x_0}^x f(t, y_0(t)) dt \right| \leq M |x - x_0|$

bất đẳng thức này đúng.

Giả sử ta có điều đó với $k - 1$, khi đó với $x_0 - h \leq x \leq x_0 + h$ ta có

$$\begin{aligned}
 |y_{k+1}(x) - y_k(x)| &= \left| \int_{x_0}^x [f(t, y_k(t)) - f(t, y_{k-1}(t))] dt \right| \\
 &\leq \int_{x_0}^x |f(t, y_k(t)) - f(t, y_{k-1}(t))| dt \\
 &\leq L \int_{x_0}^x |y_k(t) - y_{k-1}(t)| dt \\
 &\leq ML^k \int_{x_0}^x \frac{|x - x_0|^k}{k!} dt = ML^k \frac{|x - x_0|^{k+1}}{(k+1)!}
 \end{aligned}$$

(với $x_0 - h \leq x \leq x_0 + h$ ta đánh giá tương tự).

Xét dãy hàm trên I, ta có

$$\begin{aligned}
 |y_{k+p}(x) - y_k(x)| &\leq |y_{k+p}(x) - y_{k+p-1}(x)| + |y_{k+p-1}(x) - y_{k+p-2}(x)| \\
 &\quad \dots + |y_{k+1}(x) - y_k(x)| \\
 &\leq \frac{M}{L} \left\{ \frac{(L|x - x_0|)^{k+p}}{(k+p)!} + \dots + \frac{(L|x - x_0|)^{k+1}}{(k+1)!} \right\} \\
 &\leq \frac{M}{L} \sum_{j \geq k+1} \frac{(Lh)^j}{j!}
 \end{aligned}$$

Chuỗi số $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(Lh)^j}{j!}$ là hội tụ, nên phần dư của nó (xuất hiện trong biểu thức cuối cùng) có thể làm cho bé tùy ý khi k đủ lớn. Theo tiêu chuẩn Cauchy, dãy $\{y_k(x)\}$ hội tụ đều đến hàm $y(x)$. Để chứng minh $y(x)$ là nghiệm ta chỉ cần qua giới hạn trong đẳng thức

$$y_{k+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_k(t)) dt$$

Vì dãy hàm $\{y_k(x)\}$ hội tụ đều, f liên tục đều trên hình chữ nhật D nên dãy hàm $\{f(t, y_k(t))\}$ hội tụ đều trên I đến hàm $f(t, y(t))$. Do đó có thể chuyển giới hạn qua dấu tích phân để được đẳng thức $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$.

Vậy $y(x)$ chính là nghiệm của bài toán Cauchy.

Tính duy nhất Giả sử bài toán Cauchy (1.1.6) còn có nghiệm $z(x)$,

$$\text{khi đó ta có } y(x) - z(x) = \int_{x_0}^x [f(t, y(t)) - f(t, z(t))] dt$$

$$\text{Suy ra } |y(x) - z(x)| = \left| \int_{x_0}^x [f(t, y(t)) - f(t, z(t))] dt \right|$$

$$\leq 2M |x - x_0|$$

$$\text{Từ đó } |y(x) - z(x)| = \left| \int_{x_0}^x [f(t, y(t)) - f(t, z(t))] dt \right|$$

$$\leq L \int_{x_0}^x |y(t) - z(t)| dt \leq 2ML \frac{|x - x_0|^2}{2}$$

Lặp lại quá trình trên, ta dễ dàng chứng minh được rằng với mọi số tự nhiên k :

$$|y(x) - z(x)| \leq 2ML^k \frac{|x - x_0|^{k+1}}{(k+1)!} \text{ với mọi } x \in I$$

Cho $k \rightarrow +\infty$ ta có $|y(x) - z(x)| = 0$ trên I . Như vậy một cách địa phương, nghiệm $y(x)$ là duy nhất. $\square$

1.1.5 Phân loại nghiệm của phương trình vi phân

Về mặt hình học, bài toán Cauchy cho phương trình vi phân cấp I có thể hiểu là tìm nghiệm $y(x)$ của $y' = f(x, y)$ mà đồ thị của hàm số $y = y(x)$ (còn gọi là đường cong tích phân của phương trình vi phân) đi qua điểm (x_0, y_0) . Nói cách khác, bài toán Cauchy là tìm đường cong tích phân của phương trình $y' = f(x, y)$ đi qua điểm $(x_0, y_0) \in D$ cho trước.

Định nghĩa 1.1.3. Giả sử $D \subset \mathbb{R}^2$ sao cho vế phải của phương trình $y' = f(x, y)$ xác định và liên tục trên D . Hàm số $y = y(x, C)$ phụ thuộc liên tục vào hằng số C được gọi là nghiệm tổng quát của $y' = f(x, y)$ nếu:

a) Với mỗi điều kiện ban đầu $(x_0, y_0) \in D$ ta luôn giải được C dưới dạng

$$C = \varphi(x_0, y_0) \quad (1.1.7)$$

trong đó φ là hàm liên tục.

b) Hàm $y = y(x, C)$ thỏa mãn phương trình $y' = f(x, y)$ với mỗi giá trị

của C cho bởi (1.1.7) khi (x_0, y_0) chạy khắp D

Khi đó hệ thức $\varphi(x, y) = C$ được gọi là tích phân tổng quát của phương trình $y' = f(x, y)$.

Định nghĩa 1.1.4. Nghiệm của phương trình (1.1.5) mà tại mỗi điểm (x_0, y_0) của nó tính duy nhất nghiệm của bài toán Cauchy được thỏa mãn được gọi là nghiệm riêng.

Ngược lại nghiệm của phương trình (1.1.5) mà tại mỗi điểm của nó tính chất duy nhất nghiệm của bài toán Cauchy bị vi phạm được gọi là nghiệm kỳ dị.

Nhận xét: Từ định nghĩa nghiệm tổng quát, ta suy ra rằng với mỗi điều kiện ban đầu $(x_0, y_0) \in D$, ta luôn tìm được $C_0 = \varphi(x_0, y_0)$ là nghiệm của bài toán Cauchy tương ứng. Nói cách khác, bằng cách chọn các giá trị thích hợp cho hằng số, ta có thể thu được các nghiệm riêng tùy ý của phương trình, không kể các nghiệm kỳ dị.

Giải (hay còn gọi là tích phân) một phương trình vi phân là tìm tất cả các nghiệm (biểu thức nghiệm tổng quát) của phương trình đó hoặc nghiệm của bài toán Cauchy với điều kiện ban đầu cho trước.

1.2 Một số khái niệm về hệ phương trình vi phân đại số

Định nghĩa 1.2.1. Hệ phương trình vi phân tuyến tính:

$$A(t)x'(t) + B(t)x(t) = q(t) \quad (1.2.8)$$

trong đó: $A, B \in C(I, L(R^n))$, q liên tục trên I , $\det A(t) \neq 0$ hay $A(t)$ suy biến (không khả nghịch) với mọi $t \in I$, là hệ phương trình vi phân đại số.

Chú ý rằng nếu $A(t)$ không suy biến thì (1.2.8) là phương trình vi phân thường

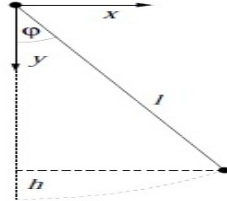
$$x'(t) = -A^{-1}(t)B(t)x + A^{-1}f(t), t \in I$$

Ví dụ 1.2.2. Về hệ phương trình vi phân đại số

Trong số nhiều phương pháp khác nhau, phương pháp mô hình hóa với các phương trình vi phân đại số đóng một vai trò quan trọng đối với các hệ cơ học có ràng buộc, các mạch điện và phản ứng hóa học. Trong phần này, chúng ta sẽ đưa ra ví dụ về mô hình hóa phương trình vi phân đại số đối với hệ cơ học có ràng buộc để thấy được các phương trình vi phân

đại số nảy sinh từ lĩnh vực này như thế nào. Chúng ta sẽ chỉ ra các đặc điểm quan trọng của phương trình vi phân đại số, phân biệt chúng với các phương trình vi phân thường.

Xét con lắc toán học trong hình 1.1. Đặt m là khối lượng của con lắc



Hình 1.1: Con lắc toán học

được gắn vào một thanh chiều dài l . Để mô tả con lắc trong hệ tọa độ Descartes, chúng ta viết ra thế năng

$$U(x, y) = mgh = mgl - mgy \quad (1.2.9)$$

Ở đây $(x(t), y(t))$ là vị trí của quả nặng tại thời điểm t . Gia tốc trọng trường của trái đất là g , chiều cao của con lắc là h . Nếu chúng ta kí hiệu đạo hàm của x và y là $\dot{x}$ và $\dot{y}$ thì động năng là

$$T(\dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \quad (1.2.10)$$

Số hạng $\dot{x}^2 + \dot{y}^2$ mô tả vận tốc của con lắc. Ràng buộc sẽ là

$$0 = g(x, y) = x^2 + y^2 - l^2 \quad (1.2.11)$$

(1.2.9) (1.2.11) được sử dụng để tạo thành hàm Lagrange

$$L(q, \dot{q}) = T(\dot{x}, \dot{y}) - U(x, y) - \lambda g(x, y)$$

Ở đây q kí hiệu cho vector $q = (x, y, \lambda)$ Lưu ý rằng λ đóng vai trò như một nhân tử Lagrange. Bây giờ, các phương trình chuyển động được cho bởi phương trình Euler

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, k = 1, 2, 3$$

Chúng ta được hệ

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + 2\lambda x &= 0, \\ m\ddot{y} - mg + 2\lambda y &= 0, \\ g(x, y) &= 0 \end{aligned} \quad (1.2.12)$$

Bằng cách đưa vào các biến bổ sung $u = \dot{x}$ và $v = \dot{y}$, chúng ta thấy rằng (1.2.12) là một hệ phương trình vi phân đại số.

Khi giải (1.2.12) như một bài toán giá trị ban đầu, chúng ta thấy rằng mỗi giá trị ban đầu $(x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0)$ phải thỏa mãn các ràng buộc (1.2.11) (khởi tạo phù hợp). Không có điều kiện ban đầu nào có thể được đặt ra cho λ , khi λ được ngầm xác định bởi (1.2.12).

Tất nhiên, con lắc có thể được mô hình hóa bởi phương trình vi phân thường bậc hai $\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l} \sin \varphi$

Khi góc φ được sử dụng như biến phụ thuộc. Tuy nhiên đối với các bài toán thực tế, phát biểu theo hệ phương trình vi phân thường không rõ ràng, nhiều khi là không thể.

Ví dụ 1.2.3. Hệ

$$\begin{aligned} x_1 - \dot{x}_1 + 1 &= 0 \\ \dot{x}_1 x_2 + 2 &= 0 \end{aligned} \quad (1.2.13)$$

là một hệ phương trình vi phân đại số dễ thấy được điều này chúng ta xác định Jacobian $\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}$ của $F(t, x, \dot{x}) = \begin{pmatrix} x_1 - \dot{x}_1 + 1 = 0 \\ \dot{x}_1 x_2 + 2 = 0 \end{pmatrix}$ với $\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}$

$$\text{sao cho } \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \dot{x}_1} & \frac{\partial F_1}{\partial \dot{x}_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial \dot{x}_1} & \frac{\partial F_2}{\partial \dot{x}_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ x_2 & 0 \end{pmatrix}$$

chúng ta thấy rằng $\det \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) = 0$

Vậy Jacobian là ma trận suy biến bất kể giá trị của x_2

Nhận xét: Trong ví dụ này đạo hàm $\dot{x}_2$ không xuất hiện chúng ta tìm $\dot{x}_1$ từ phương trình thứ nhất $x_1 - \dot{x}_1 + 1 = 0$ thu được kết quả $\dot{x}_1 = x_1 + 1$ thay $\dot{x}_1$ vào phương trình thứ hai $\dot{x}_1 x_2 + 2 = 0$ để viết ra một hệ phương trình vi phân đại số

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + 1 \\ (x_1 + 1) x_2 + 2 &= 0 \end{aligned}$$

Trong hệ phương trình vi phân đại số này:

Phương trình $\dot{x}_1 = x_1 + 1$ là phương trình vi phân.

Phương trình $(x_1 + 1) x_2 + 2 = 0$ là phương trình đại số.

1.3 Phân loại hệ phương trình vi phân đại số ([4])

Thông thường các hệ phương trình vi phân đại số có cấu trúc toán học nó tùy thuộc vào phạm vi ứng dụng nhất định do đó chúng ta có các hệ phương trình vi phân đại số phi tuyến, hệ phương trình vi phân đại số tuyến tính... Thực sự kiến thức về cấu trúc toán học của phương trình vi phân đại số giúp chúng ta dễ dàng chọn lựa một giải thuật cụ thể cho từng mô hình với phần mềm thích hợp.

1.3.1 Các hệ phương trình vi phân đại số phi tuyến

Trong hệ phương trình vi phân đại số $F(t, x(t), x'(t)) = 0$ nếu hàm F là phi tuyến so với bất kỳ một trong các biến t, x hoặc x' thì nó được gọi là một hệ phương trình vi phân đại số phi tuyến.

1.3.2 Các hệ phương trình vi phân đại số tuyến tính

Một hệ phương trình vi phân đại số có dạng $A(t)x'(t) + B(t)x(t) = q(t)$ Ở đây $A(t)$ và $B(t)$ là ma trận $n \times n$ tuyến tính nếu $A(t) \equiv A$ và $B(t) \equiv B$ thì chúng ta có hệ phương trình vi phân đại số tuyến tính.

1.3.3 Các hệ phương trình vi phân đại số bán tường minh

Một hệ phương trình vi phân đại số có dạng:

$$\begin{aligned} x' &= f(t, x, z) \\ 0 &= g(t, x, z) \end{aligned}$$

Chú ý rằng đạo hàm của biến z không xuất hiện trong hệ phương trình vi phân đại số, biến z như thế được gọi là biến đại số trong khi đó biến x được gọi là biến vi phân.

Phương trình $0 = g(t, x, z)$ được gọi là phương trình đại số hoặc một ràng buộc.

1.3.4 Hệ phương trình vi phân đại số ẩn hoàn toàn

Hệ phương trình vi phân đại số $F(t, x, x') = 0$ thuộc dạng ẩn hoàn toàn $F(t, x, x') = Ax' + Bx + b(t)$ là hệ phương trình vi phân đại số ẩn hoàn toàn.

Phương trình

$$\begin{aligned} x_1 - x_1' + 1 &= 0 \\ x_1' x_2 + 2 &= 0 \end{aligned}$$

Là hệ phương trình vi phân đại số ẩn hoàn toàn.

Bất kỳ một hệ phương trình vi phân đại số ẩn hoàn toàn nào cũng có thể được chuyển thành hệ phương trình vi phân đại số bán tường minh.

1.3.5 Ví dụ

Chuyển đổi hệ phương trình vi phân đại số ẩn hoàn toàn thành hệ phương trình vi phân đại số bán tường minh.

Bài giải. Xét hệ phương trình vi phân đại số tuyến tính không biến đổi theo thời gian tuyến tính $Ax' + Bx + B(t) = 0$ có $\lambda A + B$ không suy biến đối với λ vô hướng nào đó thì sẽ có các ma trận $n \times n$ không suy biến G và H sao cho.

$$GAH = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} \text{ và } GBH = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & I_{n-m} \end{pmatrix}$$

Ở đây I_m là ma trận đơn vị m hàng n cột $m \leq n$ lũy linh. N là một ma trận $(n-m) \times (n-m)$ tức là có một số nguyên dương p sao cho $N^p = 0$, $J \in \mathbb{R}^{m \times m}$ và I_{n-m} là ma trận đơn vị.

Bây giờ chúng ta có thể viết $Ax' + Bx + b(t) = 0$ đối với công thức

$$(GAH)(H^{-1})x' + (GBH)(H^{-1})x + Gb(t) = 0$$

Dùng phân tích khối để viết

$$\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} (H^{-1})x' + \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & I_{n-m} \end{pmatrix} (H^{-1})x + Gb(t) = 0$$

Dùng phép đổi biến $u(t) = H^{-1}x(t)$ để viết

$$\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} u' + \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & I_{n-m} \end{pmatrix} u + Gb(t) = 0$$

Phân tích véc tơ $u(t)$ như là $u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$ với $u_1(t) \in \mathbb{R}^n$ và

$u_2(t) \in \mathbb{R}^{n-m}$ và một cách tương ứng $Gb(t) = \begin{bmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{bmatrix}$ sao cho:

$$u_1'(t) + Ju_1(t) + b_1(t) = 0$$

$$Nu_1(t) + u_2(t) + b_2(t) = 0$$

Sử dụng tính chất lũy linh của ma trận N tức là nhân tập hợp phương trình thứ 2 với N^{p-1} để nhận được

$$u_1'(t) + Ju_1(t) + b_1(t) = 0$$

$$N^p u_1(t) + N^{p-1} u_2(t) + N^{p-1} b_2(t) = 0$$

Từ đây suy ra rằng $N^p u_1(t) = 0$

$$u_1'(t) = -Ju_1(t) - b_1(t)$$

$$0 = N^{p-1}u_2(t) - N^{p-1}b_2(t)$$

Do đó chúng ta đã chuyển hệ phương trình vi phân đại số ẩn hoàn toàn $Ax' + Bx + b(t) = 0$ thành dạng bán tường minh. $\square$

Tương tự dùng một số phép biến đổi toán học bất kỳ hệ phương trình vi phân đại số ẩn hoàn toàn phi tuyến nào cũng có thể chuyển được thành hệ bán tường minh.

1.4 Chỉ số của hệ phương trình vi phân đại số ([2],[11])

Người ta có thể phân lớp các hệ phương trình vi phân đại số nhờ khái niệm chỉ số của hệ phương trình vi phân loại này nói cách khác thì chỉ số là số đo độ lệch giữa phương trình vi phân đại số và phương trình vi phân thường đo độ phức tạp của phương trình vi phân đại số khái niệm chỉ số được đưa ra để nghiên cứu phương trình vi phân đại số. Ta đề cập đến khái niệm chỉ số của hệ phương trình vi phân đại số.

Xét hệ phương trình vi phân dạng:

$$F(t, x(t), x'(t)) = 0 \quad (1.4.14)$$

trong đó: $x : I \longrightarrow \mathbb{R}^n, I = (a; +\infty) \subset D$,

$$F : I \times D \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(t, x, y) \mapsto F(t, x, y)$$

D là tập mở trong $\mathbb{R}^n$, $F \in C(I \times D \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), F', F'_y \in C(I \times D \times \mathbb{R}^n, L(\mathbb{R}^n))$

$$\text{Ker} F'_{x'}(t, x, x') \neq 0 \text{ với mọi } (t, x, x') \in I \times D \times \mathbb{R}$$

Giả thiết $\text{Ker} F'_x(t, x, x')$ không phụ thuộc vào x và x' tức là:

$$\text{Ker} F'_{x'}(t, x, x') = N(t) \text{ với mọi } (t, x, x') \in I \times D \times \mathbb{R}^n.$$

Định nghĩa 1.4.1. Không gian hạch $N(t)$ được gọi là trơn trên I nếu có ma trận khả vi liên tục $Q \in C^1(I, L(\mathbb{R}^n))$ sao cho $(Q(t))^2 = Q(t)$, $\text{Im} Q(t) = N(t)$ với mọi $t \in I$

Khi đó $Q(t)$ là phép chiếu lên $N(t)$. Đặt $P(t) = I_n - Q(t)$ suy ra $P \in C^1(I, L(\mathbb{R}^n))$

Ta có:

$$F(t, x, y) - F(t, x, P(t)y) = \int_0^1 F'_{x'}(t, x, sy + (1-s)P(t)y)Q(t)y ds$$

$$Q(t)y \in \text{Im}Q(t) = N(t) = \text{Ker}F'_{x'}(t, x, x') \text{ suy ra } F'_{x'}(t, x, y)Q(t)y = 0$$

Từ đó ta suy ra:

$$F(t, x, y) - F(t, x, P(t)y) = \int_0^1 F'_{x'}(t, x, sy + (1-s)P(t)y)Q(t)y ds$$

hay $F(t, x, y) = F(t, x, P(t)y)$ Suy ra $F(t, x, x') = F(t, x, P(t)x') = F'(t, x, (Px)'(t) - P'(t)x(t))$.

Điều này cho thấy, để hàm $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ là nghiệm của (1.4.14) thì cần phải có $Px \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$, $Qx \in C(I, \mathbb{R}^n)$. Bây giờ ta quan tâm tới không gian hàm sau: $C_N^1(I, \mathbb{R}^n) = \{x \in C^1(I, \mathbb{R}^n) : Px \in C^k(I, \mathbb{R}^n)\}$

$$\text{Đặt } S(t, x, y) := z \in \mathbb{R}^n : F'_x(t, x, y)z \in \text{Im}F'_y(t, x, y)$$

$$G_1(t, x, y) := F'_y(t, x, y) + F'_x(t, x, y)Q(t)$$

$$A_1(t, x, y) := G_1(t, x, y) - F'_y(t, x, y)P'(t)Q(t)$$

$$N_1(t, x, y) := \text{Ker}A_1(t, x, y)$$

$$S_1(t, x, y) := z \in \mathbb{R}^n : F'_x(t, x, y)P(t)z \in \text{Im}A_1(t, x, y).$$

Định nghĩa 1.4.2. Hệ phương trình vi phân đại số (1.4.14) được gọi là có chỉ số 1 trên tập mở $G \subset I \times D \times \mathbb{R}^n$ nếu $N(t) \oplus S(t, x, y) = \mathbb{R}^n$ với mọi $(t, x, y) \in G$.

Định nghĩa 1.4.3. Hệ phương trình vi phân đại số (1.4.14) được gọi là có chỉ số 2 trên tập mở $G \subset I \times D \times \mathbb{R}^n$ nếu:

$\dim N_1(t, x, y) = \text{const} > 0$ và $N_1(t, x, y) \oplus S_1(t, x, y) = \mathbb{R}^n$ với mọi $(t, x, y) \in G$.

Cụ thể, đối với hệ phương trình vi phân đại số tuyến tính dạng:

$$A(t)x'(t) + B(t)x(t) = 0 \quad (1.4.15)$$

trong đó $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $A, B \in C(I, L(\mathbb{R}^n))$, $\det A(t) = 0$ với mọi $t \in I$.

$N(t) = \text{Ker} A(t)$ trơn trên I . Khi đó, có phép chiếu $Q(t)$ lên $N(t)$, khả vi liên tục.

$$\text{Đặt } P(t) := I - Q(t).$$

$$S(t) := \{z \in \mathbb{R}^n : B(t)z \in \text{Im} A(t)\}.$$

$$A_1(t) := A(t) + (B(t) - A(t)P'(t))Q(t).$$

$$N_1(t) := \text{Ker} A_1(t).$$

$$S_1(t) := \{z \in \mathbb{R}^n : B(t)P(t)z \in \text{Im} A_1(t)\}.$$

Gọi $Q_1(t)$ là phép chiếu khả vi liên tục lên $N_1(t)$ dọc theo $S_1(t)$

$$P_1(t) := I - Q_1(t).$$

$$B_1(t) := (B(t) - A_1(t)(PP_1)')P(t).$$

$$\text{Đặt } A_2(t) := A_1(t) + B_1(t)Q_1(t).$$

Hệ phương trình vi phân đại số tuyến tính (1.4.15) có chỉ số 1 trên I khi và chỉ khi $N(t) \oplus S(t) = \mathbb{R}^n$ với mọi $t \in I$ tức là $\det A_1(t) \neq 0$ với mọi $t \in I$

Hệ phương trình vi phân đại số tuyến tính (1.4.15) có chỉ số 2 trên I khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} \dim N_1(t) = \text{const} > 0 \\ N_1(t) \oplus S_1(t) = \mathbb{R}^n \end{cases} \quad \text{tức là: } \begin{cases} \det A_1(t) = 0 \text{ với mọi } t \in I \\ \det A_2(t) \neq 0 \text{ với mọi } t \in I \end{cases}$$

Đặc biệt, xét hệ phương trình vi phân đại số tuyến tính với hệ số hằng:

$$Ax'(t) + Bx(t) = 0 \quad (1.4.16)$$

trong đó: $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $A, B \in L(\mathbb{R}^n)$, $\det A = 0$. Khi đó:

$$N := \text{Ker} A$$

$$S := \{z \in \mathbb{R}^n : Bz \in \text{Im} A\}.$$

Gọi Q là phép chiếu lên N , đặt $P := I - Q$ (P là phép chiếu lên $\text{Im} A$).

$$A_1 := A + BQ, N_1 := \text{Ker} A_1, S_1 := \{z \in \mathbb{R}^n : B_1z \in \text{Im} A\}.$$

Gọi Q_1 là phép chiếu lên N_1 dọc S_1 , đặt $P_1 := I - Q_1$.

$$B_1 := BP, A_2 := A_1 + B_1Q_1 = A_1 + BPQ_1.$$

Hệ phương trình vi phân đại số tuyến tính (1.4.16) có chỉ số 1 khi và chỉ khi $N \oplus S = \mathbb{R}^n \iff \det A_1 \neq 0$.

Hệ phương trình vi phân đại số tuyến tính (1.4.16) có chỉ số 2 khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} \dim N_1 = \text{const} > 0 \\ N_1 \oplus S_1 = \mathbb{R}^n \end{cases} \quad \text{tức là: } \begin{cases} \dim N_1 = \text{const} > 0 \\ N_1 \oplus S_1 = \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Định nghĩa 1.4.4. Hệ phương trình vi phân đại số

$$f(t, x(t), x'(t)) = 0$$

Có chỉ số là μ nếu μ là số lần lấy vi phân tối thiểu

$$f(t, x(t), x'(t)) = 0, \frac{df(t, x(t), x'(t))}{dt} = 0, \dots, \frac{d^\mu f(t, x(t), x'(t))}{dt^\mu} = 0 \quad \text{Sao cho}$$

các phương trình trên cho phép rút ra một hệ phương trình vi phân thường $x'(t) = \varphi(x(t), t)$.

Định nghĩa 1.4.5. Số bước lấy vi phân tối thiểu cần thiết để chuyển phương trình vi phân đại số thành một phương trình vi phân thường được gọi là chỉ số vi phân của phương trình vi phân đại số.

Ví dụ 1.4.6. Xét hệ phương trình vi phân đại số

$$\begin{aligned} y' &= f(y, z) \\ 0 &= g(y, z) \\ g_z(\text{đạo hàm riêng } \frac{\partial g}{\partial z}) &\text{ là khả nghịch bị chặn} \\ &\text{trong lân cận của nghiệm} \end{aligned} \quad (1.4.17)$$

Lấy vi phân $g(y, z) = 0$ ta có

$$0 = \frac{dg(y, z)}{dt} = g_y(y, z)y' + g_z(y, z)z'$$

Nếu $g_z(y, z)$ không suy biến trong lân cận của nghiệm thì hệ phương trình đã cho được chuyển thành

$$\begin{aligned} y' &= f(y, z) \\ z' &= -g_z(y, z)^{-1}g_y(y, z)y' = -g_z(y, z)^{-1}g_y(y, z)f(y, z) \end{aligned}$$

Vậy chỉ 1 bước vi phân là cần thiết để mô tả z' vậy hệ đã cho có chỉ số 1.

Ví dụ 1.4.7. Xét hệ phương trình vi phân đại số

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + 1 \\ (x_1 + 1)x_2 + 2 &= 0 \end{aligned}$$

Lấy vi phân $g(x_1, x_2) = 0$ ta có

$$\begin{aligned} \frac{dg(x_1, x_2)}{dt} &= \frac{d}{dt}[0] \text{ suy ra } \frac{d}{dt}[(x_1 + 1)x_2 + 2] = 0 \\ \text{suy ra } \dot{x}_1 x_2 + (x_1 + 1)\dot{x}_2 &= 0 \\ \text{suy ra } \dot{x}_2 &= -\frac{\dot{x}_1 x_2}{(x_1 + 1)} = -\frac{(x_1 + 1)x_2}{(x_1 + 1)} = -x_2. \end{aligned}$$

Chỉ một bước vi phân là cần thiết để mô tả $\dot{x}_2$ vậy hệ đã cho có chỉ số 1.

Ví dụ 1.4.8. Xét hệ

$$\begin{aligned} y' &= f(y, z) \\ 0 &= g(y) \\ g_y f_z &\text{ là khả nghịch bị chặn trong lân cận của nghiệm} \end{aligned} \tag{1.4.18}$$

Được nghiên cứu bằng cách tương tự $0 = g(y)$ cho ta

$$0 = \frac{dg(y)}{dt} = g_y(y)y' = g_y(y)f(y, z) = h(y, z)$$

So sánh với ví dụ (1.4.6) chúng ta thấy rằng

$$\begin{aligned} y' &= f(y, z) \\ 0 &= h(y, z) \end{aligned}$$

Là hệ chỉ số 1 nếu $h_z(y, z)$ vẫn không suy biến trong một lân cận của nghiệm nếu điều kiện này đúng thì hệ

$$\begin{aligned} y' &= f(y, z) \\ 0 &= g(y, z) \end{aligned}$$

Là chỉ số 2 vì hai lần lấy vi phân tạo ra:

$$\begin{aligned} y' &= f(y, z) \\ z' &= -h_z(y, z)^{-1}h_y(y, z)f(y, z) \\ &= -(g_y(y)f_z(y, z))^{-1}(g_y(y)(f(y, z), f(y, z)) + (g_y(y)(f(y, z)f(y, z))). \end{aligned}$$

Chương 2

PHƯƠNG PHÁP RUNGE-KUTTA GIẢI GẦN ĐÚNG HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN ĐẠI SỐ

2.1 Phương pháp số giải gần đúng phương trình vi phân thường ([1])

2.1.1 Phương pháp Runge - Kutta

Bài toán Cauchy hay còn gọi là bài toán giá trị ban đầu: Tìm $y(x)$ thỏa mãn điều kiện:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) & x_0 \leq x \leq \bar{x} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (2.1.1)$$

Đặt $y_1 = y_0 + \Delta y_0$, trong đó

$$\Delta y_0 = p_{r1}k_1(h) + \dots + p_{rr}k_r(h)$$

$$k_i(h) = hf(\xi_i, \zeta_i); \quad \xi_i = x_0 + \alpha_i h; \quad \alpha_1 = 0; \quad i = 1, 2, \dots, r$$

$$\zeta_i = y_0 + \beta_{i1}k_1(h) + \dots + \beta_{i,i-1}k_{i-1}(h)$$

Gọi $\varphi_r(h) := y(x_0 + h) - y_1 = y(x_0 + h) - y(x_0) - \Delta y_0$

Nếu $\varphi_r^{(s+1)}(0) \neq 0$ thì

$$\varphi_r(h) = \sum_{i=0}^r \frac{\varphi_r^{(i)}(0)}{i!} h^i + O(h^{s+1})$$

Runge-Kutta chọn các hệ số $\alpha_i, \beta_{ij}, p_{rj}$ từ điều kiện $\varphi_r^{(i)}(0) = 0 \quad i = 0, 1, \dots, s;$
 $\varphi_r^{(s+1)}(0) \neq 0$ với s càng lớn càng tốt.

Như vậy $\varphi_r^{(i)}(0) = y_0^{(i)} - [p_{r1}k_1^{(i)}(0) + \dots + p_{rr}k_r^{(i)}(0)] = 0 (i = 0, 1, \dots, s),$

hay ta có hệ phương trình phi tuyến để xác định các hệ số $\alpha_i, \beta_{ij}, p_{rj}$ ta cần giải hệ phương trình phi tuyến

$$\begin{cases} p_{r1}k_1^{(i)}(0) + p_{r1}k_1^{(i)}(0) + \dots + p_{rr}k_r^{(i)}(0) = y_0^{(i)} \\ i = 0, 1, \dots, s \end{cases} \quad (2.1.2)$$

2.1.2 Phương pháp Euler

Ta xét trường hợp riêng của phương pháp Runge-Kutta khi $r = 1$. Ta có $\Delta y_0 = p_{11}k_1(h); k_1(h) = hf(x_0, y_0)$

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0 = y_0 + p_{11}k_1(h) = y_0 + p_{11}hf(x_0, y_0)$$

mà $\varphi_1(h) := y(x_0 + h) - y_1$ nên

$$\varphi_1(h) := y(x_0 + h) - y_0 - p_{11}hf(x_0, y_0); \quad \varphi_1(0) = 0;$$

$$\varphi_1'(0) = y_0' - p_{11}f(x_0, y_0) = f(x_0, y_0) - p_{11}f(x_0, y_0) = (1 - p_{11})f(x_0, y_0).$$

Để $\varphi_1'(0) = 0$ với mọi hàm f , ta phải có $p_{11} = 1$. Nói chung $\varphi_1''(0) = y_0'' \neq 0$ vậy $\Delta y_0 = p_{11}k_1(h) = hf(x_0, y_0)$ Ta nhận được công thức Euler:

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) \quad (2.1.3)$$

Nói chung $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n), x_n = x_0 + nh$

Sai số địa phương: Xét sai số mắc phải trên một bước với giả thiết bước trước đó tính đúng. Tại bước thứ i ta xét hàm $\bar{y}(x)$ là nghiệm của bài toán

$$\begin{cases} \bar{y}' = f(x, \bar{y}(x)) \\ \bar{y}(x_i) = y_i \end{cases}$$

Nghiệm đúng của bài toán này

$$\bar{y}(x_{i+1}) = \bar{y}(x_i) + \frac{hf(x_i, \bar{y}(x_i))}{1!} + o(h^2)$$

Bởi $\bar{y}(x_i) = y_i$ và $y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$ nên

$$\bar{y}(x_{i+1}) = y_i + hf(x_i, y_i) + o(h^2) = y_{i+1} + o(h^2)$$

Từ đó suy ra

$$\bar{y}(x_{i+1}) - y_{i+1} = o(h^2)$$

2.1.3 Phương pháp Euler cải tiến

Trong phương pháp Runge -Kutta (RK), ta xét trường hợp $r = 2$

$$\Delta y_0 = p_{21}k_1(h) + p_{22}k_2(h)$$

Phương trình (2.1.2) trong trường hợp này có dạng:

$$y_0^{(l)} = p_{21}k_1^{(l)}(0) + p_{22}k_2^{(l)}(0) \quad (l = 1, 2) \quad (2.1.4)$$

Vì $k_1(h) = hf(x_0, y_0)$ nên $k_1(0) = 0$; $k'_1(0) = f(x_0, y_0)$ và $k''_1(0) = 0$ tiếp theo $k_2(h) = hf(\xi_2, \zeta_2)$ trong đó $\xi_2 = x_0 + \alpha_2 h$; $\zeta_2 = y_0 + \beta_{21}k_1(h)$ ta có

$$k'_2(h) = h'f(\xi_2, \zeta_2) + h \left[\frac{\partial f}{\partial x} \alpha_2 + \frac{\partial f}{\partial y} \beta_{21} k'_1(h) \right] \equiv f(\xi_2, \zeta_2) + h \left[\frac{\partial f}{\partial x} \alpha_2 + \frac{\partial f}{\partial y} \beta_{21} k'_1(h) \right]$$

Để thấy $k_2(0) = 0$; $k'_2(0) = f(x_0, y_0)$. Tiếp theo

$$k''_2(h) = \left[\frac{\partial f}{\partial x} \alpha_2 + \frac{\partial f}{\partial y} \beta_{21} k'_1(h) \right] + \left[\frac{\partial f}{\partial x} \alpha_2 + \frac{\partial f}{\partial y} \beta_{21} k'_1(h) \right] + h \left[\frac{\partial f}{\partial x} \alpha_2 + \frac{\partial f}{\partial y} \beta_{21} k'_1(h) \right]'$$

nên

$$k''_2(0) = 2 \left[\frac{\partial f}{\partial x} \alpha_2 + \frac{\partial f}{\partial y} \beta_{21} k'_1(h) \right] \Big|_{h=0} = 2 \left(\alpha_2 \frac{\partial f_0}{\partial x} + \beta_{21} f_0 \frac{\partial f_0}{\partial y} \right).$$

Ở đây chúng ta dùng ký hiệu $f_0 := f(x_0, y_0)$; $\frac{\partial f_0}{\partial x}$, $\frac{\partial f_0}{\partial y}$ là đạo hàm $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ tương ứng tính tại điểm (x_0, y_0) .

Từ hệ thức (2.1.4) ta suy ra

$$\begin{cases} y'_0 = f_0 = p_{21}f_0 + p_{22}f_0 \\ y''_0 = p_{21}k''_1(0) + p_{22}k''_2(0) = 2p_{22}(\alpha_2 \frac{\partial f_0}{\partial x} + \beta_{21}f_0 \frac{\partial f_0}{\partial y}) \end{cases} \quad (2.1.5)$$

Từ phương trình đầu của (2.1.5) suy ra $p_{21} + p_{22} = 1$.

Biến đổi phương trình thứ hai của hệ (2.1.5) ta được

$$(1 - 2\alpha_2 p_{22}) \frac{\partial f_0}{\partial x} + (1 - 2p_{22} \beta_{21}) f_0 \frac{\partial f_0}{\partial y} = 0 \quad (2.1.6)$$

Vì công thức RK2 (ứng với $r = 2$) đúng cho mọi hàm f nên để (2.1.6) nghiệm đúng, cần $1 - 2\alpha_2 p_{22} = 1 - 2p_{22} \beta_{21} = 0$.

Như vậy $\alpha_2 = \beta_{21} = 1$; $p_{21} = p_{22} = \frac{1}{2}$ và

$$\Delta y_0 = \frac{1}{2}h \{f(x_0, y_0) + f(x_0 + h, y_0 + hf(x_0, y_0))\}$$

Ta nhận được công thức RK2, còn gọi là công thức Euler cải tiến.

$$\begin{cases} \bar{y}_0 := y_0 + hf(x_0, y_0) \\ y_1 = y_0 + \frac{1}{2}h [f(x_0, y_0) + f(x_1, \bar{y}_0)] \end{cases} \quad (2.1.7)$$

2.1.4 Công thức RK4

Khi $r = 4$, $\varphi_4(h) = y(x_0 + h) - y(x_0) - \sum_{i=1}^4 p_{4i}k_i(h)$.

Để thấy $\varphi_4(0) = 0$; $\varphi'_4(0) = y'_0 - \sum_{i=1}^4 p_{4i}k'_i(0) = (1 - \sum_{i=1}^4 p_{4i})f_0 = 0$.

Từ đây suy ra $\sum_{i=1}^4 p_{4i} = 1$

Ngoài ra ta còn đòi hỏi $\varphi_4''(0) = \varphi_4'''(0) = \varphi_4^{(4)}(0) = 0$

Kết quả là có 11 phương trình đối với 13 ẩn $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta_{21}, \beta_{31}, \beta_{32}, \beta_{41}, \beta_{42}, \beta_{43}, p_{4i}$ ($i = 1, 4$).

Như vậy sẽ có một họ các công thức RK4. Công thức thông dụng nhất có dạng:

$$\begin{cases} \Delta y_0 = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ k_1 = hf(x_0, y_0) \\ k_2 = hf(x_0 + h/2, y_0 + k_1/2) \\ k_3 = hf(x_0 + h/2, y_0 + k_2/2) \\ k_4 = hf(x_0 + h, y_0 + k_3) \end{cases} \quad (2.1.8)$$

2.2 Phương pháp số cho các hệ phương trình vi phân đại số

2.2.1 Nhận xét

Các hệ phương trình vi phân đại số thường rất phức tạp và khó giải về mặt giải tích vì khi giải các hệ phương trình vi phân đại số cần phải chú ý đến hai vấn đề quan trọng.

1. Nghiệm của các hệ phương trình vi phân đại số chỉ số thấp sẽ không là nghiệm của hệ phương trình vi phân đại số ban đầu.

2. Tìm các điều kiện ban đầu thỏa mãn cả phần vi phân và phần đại số của một hệ phương trình vi phân đại số là một công việc khó khăn, được gọi là sự phù hợp của điều kiện ban đầu. Nên hệ phương trình vi phân đại số thường được giải bằng phương pháp số.

Ý tưởng: Cố gắng chuyển hệ phương trình vi phân đại số thành một phương trình vi phân thường điều này có thể đạt được qua việc lấy đạo hàm lặp đi lặp lại các phương trình đại số $g(t, x, z) = 0$ theo thời gian t .

Dùng các nguyên tắc toán học và phép đổi biến các hệ phương trình vi phân đại số ẩn hoàn toàn có thể được chuyển thành hệ phương trình vi phân đại số bán tường minh chú ý rằng trong các hệ phương trình vi phân đại số

bán tường minh nếu ma trận Jacobian $\left[\frac{\partial g}{\partial z} \right]$ suy biến không khả nghịch thì hệ phương trình vi phân đại số là chỉ số cao, bởi vì nhiều ứng dụng có các mô hình là các hệ phương trình vi phân đại số bán tường minh.

Trong hệ phương trình vi phân đại số ở trên nếu cả f và g không phụ thuộc tường minh vào thời gian t tức là $f(t, x, z) = f(x, z)$ và $g(t, x, z) = g(x, z)$ thì mô hình là một hệ phương trình vi phân đại số tự quản.

Các phương pháp BDF (Backward Differentiation Formula) và phương pháp kết hợp là hai phương pháp được sử dụng phổ biến nhất để tìm nghiệm số của hệ phương trình vi phân đại số.

2.2.2 Công thức lấy vi ngược (BDF) cho các hệ phương trình vi phân đại số

Xét hệ phương trình vi phân đại số giá trị ban đầu

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x, z) \\ x(t_0) &= x_0 \\ 0 &= g(t, x, z) \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

Ý tưởng của BDF: Chọn bước thời gian h sao cho $t_{i+1} = t_{i+h}$, $i = 0, 1, 2, \dots$ cho trước $x_i = x(t_i)$ và $z_i = z(t_i)$ xác định giá trị $x_{i+1} = x(t_{i+1})$ bằng cách dùng các giá trị hoặc ngoại suy các giá trị $x_i, x_{i-1}, \dots, x_{i-m+1}$ của các trường hợp ở thời điểm hiện tại hoặc thời điểm trước đó của $x(t)$. Đồng thời tính toán $z_{i+1} = z(t_{i+1})$.

Có một đa thức bậc m duy nhất P nội suy $m+1$ điểm

$(t_{i+1}, x_{i+1}), (t_i, x_i), (t_{i-1}, x_{i-1}), \dots, (t_{i+1-m}, x_{i+1-m})$.

Đa thức nội suy này có thể được viết là

$$P(t) = \sum_{j=0}^m x_{i+1-j} L_j(t).$$

Với đa thức Lagrange $L_j(t) = \prod_{l=0, l \neq j}^m \left[\frac{t - t_{i+1-l}}{t_{i+1-j} - t_{i+1-l}} \right]$, $j=0, 1, \dots, m$.

Chúng ta thấy rằng $P(t_{i+1-j}) = x_{i+1-j}$, $j = 0, 1, \dots, m$.

Đặc biệt $P(t_{i+1}) = x_{i+1}$ vì thế $\dot{x}_{i+1} = \dot{P}(t_{i+1})$ để thu được

$$\dot{P}(t_{i+1}) = f(t_{i+1}, x_{i+1}) \quad (2.2.10)$$

nhưng $\dot{P}(t_{i+1}) = \sum_{j=0}^m x_{i+1-j} L'_j(t_{i+1}) = x_{i+1} L'_0(t_{i+1}) + \sum_{j=1}^m x_{i+1-j} L'_j(t)$ đặt

biểu thức này vào (2.2.10) chúng ta thu được:

$$x_{i+1} = - \sum_{j=1}^m x_{i+1-j} \frac{L'_j(t_{i+1})}{L'_0(t_{i+1})} + \frac{1}{L'_0(t_{i+1})} f(t_{i+1}, x_{i+1}).$$

Định nghĩa $a_j = \frac{L'_j(t_{i+1})}{L'_0(t_{i+1})}$, $b_m = \frac{1}{hL'_0(t_{i+1})}$ các giá trị $a_j, j = 1, \dots, m$ và b_m có thể thu được từ các bảng tra cứu.

Giải thuật BDF m bước (BDF m) cho hệ phương trình vi phân đại số

Cho trước $a_1, \dots, a_m, b_m$

$$x_{i+1} = - \sum_{j=1}^m a_j x_{i+1-j} + b_m h f(t_{i+1}, x_{i+1}, z_{i+1}) \quad (2.2.11)$$

$$0 = g(t_{i+1}, x_{i+1}, z_{i+1}). \quad (2.2.12)$$

Mỗi bước lặp của BDF đòi hỏi một giải thuật Newton để tìm nghiệm của một hệ phương trình phi tuyến. Vì thế Jacobian $\frac{\partial g}{\partial \omega}$ cần phải được đặt điều kiện tốt với $\omega = (t, x, z)$.

Cho trước $x_0 = x(t_0)$ BDF đòi hỏi các điều kiện ban đầu phù hợp thu được bằng cách giải $g(t_0, x_0, z_0) = 0$ để xác định $z_0 = z(t_0)$.

Giải thuật BDF m bước hội tụ nếu $m \leq 6$ tức là $x_i - x(t_i) \leq O(h^m)$, $z_i - z(t_i) \leq O(h^m)$ đối với các điều kiện ban đầu phù hợp. BDF thường được sử dụng để giải các hệ phương trình vi phân đại số chỉ số 1 hoặc 2.

2.3 Phương pháp Runge-Kutta cho hệ phương trình vi phân đại số

2.3.1 Phương pháp Runge-Kutta cơ bản

Phương pháp Runge-Kutta có ưu điểm là phương pháp một bước, có thể có bậc cao và tính chất ổn định tốt do đó chúng (và các phương pháp liên quan khác phổ biến) Khi giải hệ phương trình vi phân đại số bằng cách dùng các phương pháp Runge-Kutta, vấn đề kết hợp các phương trình đại số vào phương pháp đã có phần này tập chung vào tìm hiểu các thuật toán và kết quả hội tụ cho phương pháp Runge-Kutta.

Ở đây chúng ta nhắc lại một số phương pháp Runge-Kutta quan trọng và trình bày cách áp dụng chúng cho các hệ phương trình vi phân đại số chúng ta cũng tóm tắt các kết quả hội tụ đã được chứng minh.

Ban đầu các phương pháp Runge-Kutta được áp dụng để tìm nghiệm số của các phương trình vi phân thường $y' = f(y)$. Từ gần đúng y_n của nghiệm tại x_n các phương pháp một bước này xây dựng nên gần đúng

y_{n+1} tại $x_{n+1} = x_n + h$ thông qua công thức

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^s b_i Y'_{ni} \quad (2.3.13)$$

Ở đây Y'_{ni} được định nghĩa là $Y'_{ni} = f(Y_{ni})$ với các giai đoạn bên trong Y_{ni} là

$$Y_{ni} = y_n + h \sum_{j=1}^s a_{ij} Y'_{nj} \text{ với } i = 1, \dots, s \quad (2.3.14)$$

Ở đây a_{ij}, b_i là các hệ số xác định phương pháp với s là số giai đoạn nếu $a_{ij} = 0$ khi $i \leq j$ thì chúng ta có thể tính các giai đoạn bên trong $Y_{n1}, \dots, Y_{ns}$ lần lượt cái này theo cái kia từ công thức (2.3.14) qua việc đánh giá các hàm tường minh các phương pháp như thế được gọi là phương pháp tường minh. Ngược lại (2.3.14) hình thành nên một hệ phi tuyến đối với các giai đoạn bên trong và phương pháp được gọi là ẩn ví dụ về các phương pháp Runge-Kutta chẳng hạn như Euler thuận và ngược, các phương pháp hình thang, các phương pháp bậc 4 cổ điển của Kutta có thể tìm thấy trong bất kỳ tài liệu nào về giải tích số.

Mở rộng cho các bài toán vi phân đại số.

Chúng ta thấy rằng công thức $Y'_{ni} = f(Y_{ni})$ ở trên có dạng tương tự như chính phương trình vi phân $y' = f(y)$ trong khi đó hệ thức (2.3.13) và (2.3.14) phụ thuộc vào các hệ số của phương pháp và kích thước bước h nhưng không phụ thuộc vào dạng đặc biệt của phương trình vi phân điều này có nghĩa là chúng ta có thể mở rộng phương pháp Runge-Kutta cho các phương trình vi phân đại số $F(y', y) = 0$ Bằng cách định nghĩa y_{n+1} như một hàm của hệ (2.3.13) và (2.3.14) và

$$F(Y'_{ni}, Y_{ni}) = 0. \quad (2.3.15)$$

Sẽ nảy sinh một số câu hỏi chẳng hạn như hệ các phương trình (2.3.13), (2.3.14), (2.3.15) có nghiệm duy nhất hay không việc tính toán nó thì sẽ như thế nào nó bị ảnh hưởng như thế nào do nhiễu loạn.

Các phương pháp Runge-Kutta tường minh không thích hợp trực tiếp cho cách tiếp cận (2.3.13), (2.3.14), (2.3.15) bởi vì đối với các phương trình vi phân đại số một số thành phần của Y'_{ni} phải được xác định từ hệ thức (2.3.14) chẳng hạn như xét hệ $y' = z, 0 = y$ đòi hỏi ma trận hệ số $A = (a_{ij})$

khả nghịch tuy nhiên dùng một phương pháp mở rộng khác có thể áp dụng các phương pháp Runge-Kutta tường minh cho các hệ chỉ số 1 và chỉ số 2 bán tường minh có dạng (1.4.17) và (1.4.18).

2.3.2 Các phương pháp Runge-Kutta ẩn ([8],[9])

Để mô tả phương pháp thì chúng ta phải đưa về công thức

$$c_i = \sum_{j=1}^s a_{ij} \quad (i = 1, \dots, s) \quad (2.3.16)$$

và các điều kiện

$$B(p) : \sum_{i=1}^s b_i c_i^{k-1} = \frac{1}{k} \quad \text{với } k=1, \dots, p \quad (2.3.17)$$

$$C(q) : \sum_{j=1}^s a_{ij} c_j^{k-1} = \frac{c_i^k}{k} \quad \text{với } k=1, \dots, q \text{ và với mọi } i \quad (2.3.18)$$

$$D(r) : \sum_{i=1}^s b_i c_i^{k-1} a_{ij} = \frac{c_j^k}{k} \quad \text{với } k=1, \dots, r \text{ và với mọi } j \quad (2.3.19)$$

Điều kiện $B(p)$ có nghĩa là công thức cầu phương với các trọng số $b_1, \dots, b_s$ và các nút $c_1, \dots, c_s$ lấy tích phân đa thức chính xác đến bậc $p-1$ trên khoảng $[0, 1]$ và điều kiện $C(q)$ có nghĩa là đa thức ít nhất là đến bậc $q-1$ được lấy tích phân chính xác trên khoảng $[0, c_i]$ với mọi i qua công thức cầu phương với các trọng số $a_{i1}, \dots, a_{is}$. Chúng ta sẽ xét các phương pháp cổ điển tiếp theo dựa trên cầu phương Gauss, Radau và Lobatto các hệ số của chúng được xây dựng duy nhất qua các điều kiện được liệt kê như sau

Gauss: $B(2s), C(s), D(s)$

Radau IA: $B(2s-1), C(s-1), D(s), c_1 = 0$

Radau IIA: $B(2s-1), C(s), D(s-1), c_s = 1$

Lobatto IIIA: $B(2s-2), C(s), D(s-2), c_1 = 0, c_s = 1,$

Lobatto IIIC: $B(2s-2), C(s-1), D(s-1), c_1 = 0, c_s = 1, b_i = a_{si}.$

Điều kiện $b_i = a_{si}$ đối với mọi i có nghĩa là $y_{n+1} = Y_{ns}$ và đây là một tính chất có lợi đối với phương pháp Lobatto IIIA (đáng chú ý là phương pháp hình thang).

Hàng thứ nhất của ma trận $A = (a_{ij})$ đều bằng 0 vì vậy A không khả

ngịch. Bởi vì ma trận $(a_{ij})_{i,j=2}^s$ khả nghịch và $b_i = a_{si}$ đối với mọi i .

Các phương pháp Lobatto IIIB không thích hợp cho các phương trình vi phân đại số bởi vì chúng không có ma trận hệ số khả nghịch cũng không thỏa mãn $b_i = a_{si}$. Các hệ số

$$\begin{array}{c|c} c_i & a_{ij} \\ \hline & b_j \end{array}$$

Các phương pháp Radau IIA được cho đối với $s = 1, 2$ và 3 trong bảng 2.1 và 2.2 phương pháp đối với $s = 1$ chính là phương pháp Euler ẩn.

Các phương pháp Runge-Kutta ẩn chéo hóa đơn được đặc trưng bởi tính chất $a_{ij} = 0$ khi $i < j$ với tất cả các yếu tố đường chéo a_{ij} bằng nhau. Chúng chỉ thỏa mãn $C(1)$. Sự ngoại suy nảy sinh thêm các loại phương pháp Runge-Kutta chúng ta xét thêm công thức Euler ẩn.

$$F\left(\frac{y_{n+1} - y_n}{h}, y_{n+1}\right) = 0 \quad (2.3.20)$$

Khi một sự rời rạc hóa cơ bản đối với ngoại suy h chúng ta ký hiệu $y_h(x) = y_n$ đối với $x = x_0 + nh$ cho một chuỗi các số nguyên dương $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ và định nghĩa kích thước bước $h_1 > h_2 > h_3 > \dots$ qua $h_j = h/n_j$ ở đây $H > 0$ là kích thước bước cơ bản. Bảng ngoại suy h được cho bởi công thức

$$\begin{aligned} T_{j1} &= y_{hj}(x_0 + H) \\ T_{j,k+1} &= T_{j,k} + \frac{T_{j,k} - T_{j-1,k}}{(n_j/n_j n_{j-k}) - 1}. \end{aligned} \quad (2.3.21)$$

Mỗi đầu vào T_{jk} trong bảng có thể được viết lại như kết quả của phương pháp Runge-Kutta(2.1.1) với kích thước bước H Phương pháp này chỉ thỏa mãn $C(1)$.

2.3.3 Tóm tắt các kết quả hội tụ

Tất nhiên bậc hội tụ không phải là toàn bộ vấn đề trong phương pháp Runge-Kutta tuy nhiên chúng rất dễ để tóm tắt và rất khó để thu được hơn các vấn đề khác vì vậy ở đây tổng hợp các kết quả hội tụ trong bảng

1	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{12}$	$-\frac{1}{12}$
		1	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$
			$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

Bảng 2.1: Phương pháp Radau IIA bậc 1 và 3

$\frac{4 - \sqrt{6}}{10}$	$\frac{88 - 7\sqrt{6}}{360}$	$\frac{296 - 169\sqrt{6}}{1800}$	$\frac{-2 + 3\sqrt{6}}{225}$
$\frac{4 + \sqrt{6}}{10}$	$\frac{296 + 169\sqrt{6}}{1800}$	$\frac{88 + 7\sqrt{6}}{360}$	$\frac{-2 - 3\sqrt{6}}{225}$
1	$\frac{16 - \sqrt{6}}{36}$	$\frac{16 + \sqrt{6}}{36}$	$\frac{1}{9}$
	$\frac{16 - \sqrt{6}}{36}$	$\frac{16 + \sqrt{6}}{36}$	$\frac{1}{9}$

Bảng 2.2: Phương pháp Radau IIA bậc 5

Phương pháp	Giai đoạn	Chỉ số 1(1.14)		Chỉ số 2(1.15)	
		y	z	y	z
Gauss	$s \begin{Bmatrix} L \\ Chẵn \end{Bmatrix}$	2s	$\begin{Bmatrix} s+1 \\ s \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} s+1 \\ s \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} s-1 \\ s-2 \end{Bmatrix}$
Radau IA	s	2s-1	s	s	s-1
Radau IIA	s	2s-1	2s-1	2s-1	s
Lobatto IIIA	$s \begin{Bmatrix} L \\ Chẵn \end{Bmatrix}$	2s-2	2s-2	2s-2*	$\begin{Bmatrix} s-1 \\ s \end{Bmatrix}$
LobattoIIIC	s	2s-2	2s-2	2s-2	s-1
SDIRK (Alexander)	3	3	3	2	1
SDIRK (N&T)	3	3	2	2	1
Extrap. Euler T _{jk}		k	k	k	k

Bảng 2.3: Bậc hội tụ

(2.3) các đầu vào đối với bài toán chỉ số 1 được xác nhận trong phần (2.4) cần chú ý rằng bậc hội tụ cao thu được trong những bảng này cho thấy sự phức tạp trong tính toán đối với các bài toán chỉ số cao chẳng hạn như sự hội tụ của phép lặp Newton đối với hệ phi tuyến (2.3.13) đến (2.3.15).

Chúng ta nhớ là bậc hội tụ là p nếu sai số tức là sự chênh lệch giữa nghiệm chính xác và nghiệm số bị chặn bởi một hằng số nhân h^p đồng đều trên các khoảng có cận đối với kích thước bước đủ nhỏ h bảng (2.3) cho thấy rằng bậc hội tụ có thể khác nhau đối với các thành phần khác nhau của hệ.

Bậc của thành phần y đối với bài toán chỉ số 1 (1.4.17) giống hệt như bậc đối với các phương trình vi phân thường (chỉ số 0).

Bởi vì các phương pháp Runge-kutta bất biến dưới phép biến đổi của bài toán $B(y)y' = a(y)$ trong (1.4.18) bậc hội tụ đối với thành phần y của bài toán chỉ số 2 (1.4.18) cũng có thể thu được đối với nghiệm số của $B(y)y' = a(y)$ trong điều kiện $B = S \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T$.

2.3.4 Các phương pháp nhiều đơn

Một loạt các hệ phương trình vi phân đại số có chỉ số cao tùy ý nảy sinh trong các hệ nhiều loạn suy biến:

$$\begin{aligned} y' &= f(y, z) \\ \varepsilon z' &= g(y, z), 0 < \varepsilon \ll 1 \end{aligned} \quad (2.3.22)$$

ở đây người ta giả sử rằng

$$\langle g_z v, v \rangle \leq -\|v\|^2 \text{ đối với mọi véc tơ } v \quad (2.3.23)$$

Đúng đối với một số tích vô hướng trong lân cận của nghiệm. Ở bất kỳ một khoảng xác định nào có cận cách xa 0 nghiệm được gọi là có một khai triển ε

$$\begin{aligned} y(x) &= y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \varepsilon^2 y_2(x) + \dots + \varepsilon^N y_N(x) + O(\varepsilon^{N+1}) \\ z(x) &= z_0(x) + \varepsilon z_1(x) + \varepsilon^2 z_2(x) + \dots + \varepsilon^N z_N(x) + O(\varepsilon^{N+1}) \end{aligned} \quad (2.3.24)$$

Các bài toán nhiều đơn (2.3.22), (2.3.23) cho thấy rằng sai số của nghiệm số có khai triển ε trong đó hệ số của nó luôn lớn hơn bậc ε^k là sai số của phương pháp áp dụng cho phương trình vi phân đại số sau

$$\begin{aligned} y'_0 &= f(y_0, z_0) \\ 0 &= g(y_0, z_0) \end{aligned} \quad (2.3.25)$$

$$\begin{aligned} y'_1 &= f_y(y_0, z_0)y_1 + f_z(y_0, z_0)z_1 \\ z'_0 &= g_y(y_0, z_0)y_1 + g_z(y_0, z_0)z_1 \end{aligned} \quad (2.3.26)$$

và nói chung

$$\begin{aligned} y'_k &= f_y(y_0, z_0)y_k + f_z(y_0, z_0)z_k + \varphi_k(y_0, z_0, \dots, y_{k-1}, z_{k-1}) \\ z'_0 &= g_y(y_0, z_0)y_1 + g_z(y_0, z_0)z_1 + \theta_k(y_0, z_0, \dots, y_{k-1}, z_{k-1}). \end{aligned} \quad (2.3.27)$$

Để phát biểu kết quả này chúng ta cần nhớ lại khái niệm ổn định A việc áp dụng phương pháp Runge-Kutta cho các phương trình vô hướng $y' = \lambda y$ mang lại $y_{n+1} = R(h\lambda)y_n$ ở đây hàm ổn định $R(w)$ là công thức

$$R(w) = 1 + wb^T(I - wA)^{-1}1. \quad (2.3.28)$$

Ở đây $A = (a_{ij})$ là ma trận Runge-Kutta $b^T = (b_1, \dots, b_s)$ và $1 = (1, \dots, 1)^T$ Phương pháp Runge-Kutta được gọi là ổn định A nếu

$$|R(w)| \leq 1 \text{ đối với } \operatorname{Re} w \leq 0 \quad (2.3.29)$$

Định lý 2.3.1. Xét hệ nhiều loạn đơn (2.3.22), (2.3.23) với các giá trị ban đầu $y(0), z(0)$ có một nghiệm trên (2.3.24) giả sử rằng phương pháp Runge-Kutta thỏa mãn các điều kiện $B(q+1)$ và $C(q)$ xem (2.3.17) và (2.3.18) đó là ổn định A và các giá trị riêng của ma trận Runge-Kutta (A) có phần thực dương và $|R(\infty)| < 1$ thế thì nghiệm số (y_n, z_n) thỏa mãn

Phương pháp	Thành phần y	Thành phần z
Radau IA	$h^{2s-1} + \varepsilon h^s$	h^s
Radau IIA	$h^{2s-1} + \varepsilon^2 h^s$	$h^{2s-1} + \varepsilon h^s$
Lobatto IIIC	$h^{2s-2} + \varepsilon^2 h^{s-1}$	$h^{2s-1} + \varepsilon h^{s-1}$
SDIRK (Alexander)	h^3	$h^3 + \varepsilon h$
SDIRK (N&T)	h^3	h^2

Bảng 2.4: Độ lớn sai số đối với bài toán nhiễu loạn đơn đối với $\varepsilon \leq h$

đối với $\varepsilon \leq h$

$$y_n - y(x_n) = [\Delta y_0]_n + \varepsilon [\Delta y_1]_n + O(\varepsilon^2 h^q) \quad (2.3.30)$$

$$z_n - z(x_n) = [\Delta z_0]_n + \varepsilon [\Delta z_1]_n + O(\varepsilon^2 h^{q-1}). \quad (2.3.31)$$

Ở đây $[\Delta y_0]_n, [\Delta z_0]_n, [\Delta y_1]_n, [\Delta z_1]_n$ là các sai số toàn cục của phương pháp Runge-Kutta được áp dụng cho hệ vi phân đại số (2.3.26) đã ước lượng đúng một cách đồng đều đối với $h \leq h_0$ và $x_n = nh \leq \text{const}$

Các sai số $[\Delta y_0]_n, [\Delta z_0]_n$ thực sự là các sai số toàn cục của phương pháp Runge-Kutta áp dụng cho hệ chỉ số 1 (2.3.25) bởi vì hệ này không phụ thuộc vào y_1 và z_1 do đó bậc của sai số trong các thành phần y_0, z_0, y_1, z_1 tương ứng chính xác với 4 cột trong bảng (2.3) theo cùng một thứ tự. Kết hợp định lý (2.3.1) và bảng (2.3) chúng ta thu được kết quả của bảng (2.4)

Đối với bài toán nhiễu loạn đơn kỳ dị $M(y)y'' = f(y, y') - \frac{1}{\varepsilon^2}(\frac{\partial U}{\partial y})^T(y)$ chúng ta có thể thu được khai triển ε^2 của sai số trong thành phần y và $z = y'$ dưới dạng

$$y_n - y(x_n) = [\Delta y_0]_n + O(\varepsilon^2 h^{q-2}) \quad (2.3.32)$$

$$z_n - z(x_n) = [\Delta z_0]_n + O(\varepsilon^2 h^{q-2}) \quad (2.3.33)$$

Ở đây $[\Delta y_0]_n, [\Delta z_0]_n$ là các sai số của phương pháp Runge-Kutta áp dụng cho hệ chỉ số 3

$$\begin{aligned} y' &= z_0 \\ M(y_0)z'_0 &= f(y_0, z_0) - g_y^T(y_0)\lambda_0 \\ 0 &= g(y_0) \end{aligned}$$

ở đây k tuyến tính theo u .

2.3.5 Các phương pháp bán tường minh

Các bài toán có dạng

$$\begin{aligned} y' &= f(y, z) \\ 0 &= g(y, z) \end{aligned} \quad (2.3.34)$$

Phương pháp Runge-Kutta tường minh có thể áp dụng như sau:

$$Y_{ni} = y_n + h \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} f(Y_{nj}, Z_{nj}), i = 1, \dots, s \quad (2.3.35)$$

$$0 = g(Y_{ni}, Z_{ni}), i = 1, \dots, s \quad (2.3.36)$$

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^s b_i f(Y_{ni}, Z_{ni}), \quad (2.3.37)$$

$$0 = g(y_{n+1}, z_{n+1}) \quad (2.3.38)$$

Chúng ta xét trường hợp hệ có chỉ số 1 (1.4.17) ở đây g_z khả nghịch bắt đầu từ $Y_{n1} = y_n$ giá trị Z_{n1} có thể được tính từ (2.3.36) thế Z_{n1} vào (2.3.35) thì chúng ta sẽ tính được Y_{n2} trong một bước tường minh thế thì điều này sẽ cho chúng ta Z_{n2} từ công thức (2.3.36). Trong trường hợp này bậc hội tụ đối với cả hai thành phần giống nhau đối với các phương trình vi phân thường điều này được giải thích ở (2.4)

Trong trường hợp hệ có chỉ số 2 (1.4.18) ở đây g không phụ thuộc vào z và $g_y f_z$ khả nghịch các công thức ở trên vẫn còn có thể áp dụng được một lần nữa chúng ta bắt đầu với $Y_{n1} = y_n$ thế công thức (2.3.35) với $i = 2$ vào (2.3.36) cho phép tính toán Z_{n1} do đó Y_{n2} thu được từ bước tường minh (2.3.35) theo cách này chúng ta tiếp tục đến Z_{ns} và y_{n+1} nhưng chúng ta không thể xác định z_{n+1} để thu được một gần đúng của $z(x_{n+1})$ thì việc xét các phương pháp với $c_s = 1$ và chọn

$$z_{n+1} = Z_{ns} \quad (2.3.39)$$

là điều hợp lý tuy nhiên đối với cả hai thành phần nói chung bậc nhỏ hơn nhiều đối với các phương trình vi phân thường một ngoại lệ được cho bởi sự mở rộng của phương pháp ngoại suy h^2 tổng quát đối với phương pháp này bậc đầy đủ được giữ nguyên nếu f tuyến tính theo z .

2.4 Sự hội tụ đối với các bài toán chỉ số 1

Chúng ta xét hệ phương trình vi phân đại số

$$\begin{aligned} y' &= f(y, z) \\ 0 &= g(y, z). \end{aligned} \quad (2.4.40)$$

Ở đây f và g là khả vi đầy đủ (2.4.40) là bài toán chỉ số 1 chúng ta giả sử rằng

$$\|(g_z(y, z))^{-1}\| \leq M. \quad (2.4.41)$$

Trong lân cận không chính xác $g_z(y, z)$ ký hiệu đạo hàm của g theo z khi đó chúng ta giả sử rằng các giá trị ban đầu y_0, z_0 phù hợp với (2.4.40) tức là $g(y_0, z_0) = 0$.

2.4.1 Giải phương trình vi phân thường tương đương

Chú ý rằng phương trình (2.4.41) cho chúng ta biết rằng trong lân cận của nghiệm phương trình thứ 2 trong (2.4.40) về mặt hình thức có thể được chuyển thành $z = G(y)$ qua định lý hàm ẩn vì thế (2.4.40) trở thành công thức

$$y' = f(y, G(y)) \quad (2.4.42)$$

Có thể áp dụng phương pháp Runge-Kutta (tường minh hoặc ẩn) cho (2.4.42) và xác định thành phần z qua công thức $z_n = G(y_n)$ điều này tương đương với công thức

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^s b_i Y'_{ni} \quad Y_{ni} = y_n + h \sum_{i=1}^s a_{ij} Y'_{nj} \quad (2.4.43)$$

ở đây

$$\begin{aligned} Y'_{ni} &= f(Y_{ni}, Z_{ni}) \\ 0 &= g(Y_{ni}, Z_{ni}) \end{aligned} \quad (2.4.44)$$

và z_{n+1} là

$$0 = g(y_{n+1}, z_{n+1}). \quad (2.4.45)$$

Trong trường hợp này tất cả các kết quả về bậc, sự hội tụ và tiệm cận mở rộng của phương pháp Runge-Kutta là đúng.

2.4.2 Phương pháp tiếp cận trực tiếp

Ta có (2.4.43) và (2.4.44) đúng nhưng ở đây (2.4.45) được thay thế bằng công thức

$$z_{n+1} = z_n + h \sum_{i=1}^s b_i Z'_{ni} \quad Z_{ni} = z_n + h \sum_{i=1}^s a_{ij} Z'_{nj} \quad (2.4.46)$$

Hệ thức thứ 2 của (2.4.46) định nghĩa Z'_{ni} duy nhất nếu ma trận Runge-Kutta $A = (a_{ij})$ khả nghịch và điều đó được giả sử kể từ bây giờ. Nếu các trọng số của phương pháp Runge-Kutta thỏa mãn công thức

$$b_i = a_{si} \text{ với } i=1, \dots, s \quad (2.4.47)$$

Thì $z_{n+1} = Z_{ns}$ và (2.4.45) đúng vì thế hai cách tiếp cận là tương đương. Vậy xem xét phương pháp trực tiếp

Phương pháp Runge-Kutta áp dụng cho bài toán nhiều loạn suy biến

$$\begin{aligned} y' &= f(y, z) \\ \varepsilon z' &= g(y, z) \end{aligned} \quad (2.4.48)$$

mang lại một nghiệm số phụ thuộc vào ε trong đó $\varepsilon \rightarrow 0$ trở thành một nghiệm số được cho bởi phương pháp tiếp cận trực tiếp.

Hệ có dạng

$$Bu' = a(u) \text{ với } B = S \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T \quad (2.4.49)$$

Ở đây S và T là các ma trận hằng khả nghịch có thể được chuyển thành (2.4.40) bằng cách nhân với S^{-1} và dùng phép biến đổi $Tu = (y, z)^T$ cách áp dụng trực tiếp áp dụng cho hệ được chuyển đổi tương đương với việc áp dụng phương pháp Runge-Kutta cho (2.4.49) theo công thức (2.3.13) và (2.3.14):

$$u_{n+1} = u_n + h \sum_{i=1}^s b_i U'_{ni} \quad U_{ni} = u_n + h \sum_{j=1}^s a_{ij} U'_{nj}$$

và $BU'_{ni} = a(U_{ni})$.

Việc phân tích B và đổi biến không cần được tính rõ ràng trong trường hợp này.

2.4.3 Sự hội tụ

Đối với cả hai phương pháp thành phần y của nghiệm số có thể được diễn giải như là kết quả số đối với phương trình vi phân thường (2.4.42) do đó chúng ta luôn luôn có công thức

$$y_n - y(x_n) = O(h^p) \quad (2.4.50)$$

Ở đây p là bậc cổ điển của phương pháp Runge-Kutta kết quả hội tụ tương tự cũng thu được đối với thành phần trong cách tiếp cận (2.4.45) bởi vì $z_n - z(x_n) = G(y_n) - G(y(x_n)) = O(h^p)$.

Đối với sự hội tụ của thành phần z trong phương pháp trực tiếp điều kiện $C(q)$ được định nghĩa trong (2.3.18) đều đúng như mong đợi thông thường q được gọi là bậc giai đoạn của phương pháp. Giới hạn của hàm ổn định tại ∞ đóng vai trò quyết định đối với các phương trình vi phân đại số đối với A khả nghịch đó là công thức

$$R(\infty) = 1 - b^T A^{-1} 1 \quad (2.4.51)$$

Bây giờ chúng ta có các kết quả hội tụ cho phương pháp trực tiếp

Định lý 2.4.1. *Giả sử rằng ước lượng (2.4.41) đúng trong lân cận của nghiệm $(y(x), z(x))$ của (2.4.40) và các giá trị ban đầu phù hợp xét phương pháp Runge-Kutta (2.4.43), (2.4.44), (2.4.46) bậc cổ điển thỏa mãn $C(q)$ xem (2.3.18) với $p \geq q + 1$ và có ma trận hệ số khả nghịch A .*

(a) *Nếu $b_i = a_{si}$ với mọi i thì sai số toàn cục đối với thành phần z thỏa mãn đối với $x_n = nh \leq \text{const}$, $z_n - z(x_n) = O(h^p)$.*

(b) *Nếu $-1 \leq R(\infty) < 1$ thì $z_n - z(x_n) = O(h^{q+1})$*

(c) *Nếu $R(\infty) = +1$ thì $z_n - z(x_n) = O(h^q)$*

(d) *Nếu $|R(\infty)| > 1$ thì nghiệm số phân kỳ*

Chú ý: Nếu A khả nghịch thì $b_i = a_{si}$ tức là $R(\infty) = 0$.

Chứng minh. Phần (a) Là hiển nhiên vì (2.4.47) cho ta biết $z_n = G(y_n)$. Để chứng minh các trường hợp còn lại chúng ta thế hệ thức thứ 2 của (2.4.46) vào hệ thức thứ nhất và thu được.

$$z_{n+1} = z_n + b^T A^{-1} (Z_n - 1z_n) = R(\infty)z_n + b^T A^{-1} Z_n \quad (2.4.52)$$

Ở đây $Z_n = (Z_{n1}, \dots, Z_{ns})^T$ bởi vì bậc của phương pháp Runge-Kutta là p và $C(q)$ được thỏa mãn nghiệm chính xác của (2.4.40) thỏa mãn công thức

$$z(x_{n+1}) = z(x_n) + h \sum_{i=1}^s b_i z'(x_n + c_i h) + O(h^{p+1}) \quad (2.4.53)$$

$$z(x_n + c_i h) = z(x_n) + h \sum_{j=1}^s a_{ij} z'(x_n + c_j h) + O(h^{q+1}). \quad (2.4.54)$$

Tính $z'(x_n + c_i h)$ từ (2.4.54) và thế nó vào trong (2.4.53) được.

$$z(x_{n+1}) = R(\infty)z(x_n) + b^T A^{-1} \hat{Z}n + O(h^{q+1}) + O(h^{p+1}) \quad (2.4.55)$$

ở đây $\hat{Z}n = (z(x_n + c_1 h), \dots, z(x_n + c_s h))^T$ Dùng ký hiệu $\Delta z_n = z_n - z(x_n)$, $\Delta Z_n = Z_n - \hat{Z}n$ và trừ (2.4.55) cho (2.4.52) thu được

$$\Delta z_{n+1} = R(\infty)\Delta z_n + b^T A^{-1} \Delta Z_n + O(h^{q+1}) + O(h^{p+1}). \quad (2.4.56)$$

Giá trị y trong (2.4.43), (2.4.44), (2.4.46) và các giá trị y của phương pháp Runge-Kutta áp dụng trong (2.4.42) là giống nhau vì thế chúng ta đã có $Y_{ni} - y(x_n + c_i h) = O(h^{q+1}) + O(h^p)$. Chúng ta có thể rút ra Z_{ni} từ (2.4.44) để thu được

$$\begin{aligned} Z_{ni} &= G(Y_{ni}) = G(y(x_n + c_i h)) + O(h^{q+1}) + O(h^p) \\ &= z(x_n + c_i h) + O(h^{q+1}) + O(h^p). \end{aligned} \quad (2.4.57)$$

Bởi vì $p \geq q + 1$ với $\rho = R(\infty)$ (3.14) bây giờ có dạng

$$\Delta z_{n+1} = \rho \Delta z_n + \delta_{n+1}; \delta_{n+1} = O(h^{q+1}) \quad (2.4.58)$$

Lặp lại phép thế công thức này cho chúng ta

$$\Delta z_n = \rho^n \Delta z_0 + \sum_{i=1}^n \rho^{n-i} \delta_i \quad (2.4.59)$$

Bây giờ các phát biểu của định lý được suy ra đối với $\rho \neq -1$ bởi vì $\Delta z_0 = 0$ kết quả đối với $\rho = -1$ thu được bằng cách xét khai triển tiệm cận của sai số toàn cục xem định lý (2.4.2) bên dưới. $\square$

2.4.4 Khai triển tiệm cận của sai số toàn cục

Bởi vì thành phần y của nghiệm số chỉ là kết quả số đối với (2.4.42) các kết quả cổ điển đối với các phương trình vi phân thường cho ta sự tồn tại

của khai triển tiệm cận

$$y_n - y(x_n) = h^p a_p(x_n) + h^{p+1} a_{p+1}(x_n) + \dots + h^N a_N(x_n) + O(h^{N+1})$$

Đối với $0 \leq nh \leq \text{const}, h \leq h_0$. trong cách tiếp cận (2.4.45) khai triển tiệm cận cùng loại cũng thu được đối với thành phần z bởi vì $z_n = G(y_n)$. Đối với cách tiếp cận (2.4.46) chúng ta có kết quả sau.

Định lý 2.4.2. Với các giả thiết giống như định lý (2.4.1) chúng ta có

(a) Nếu $b_i = a_{si}$ đối với mọi i thì tồn tại một khai triển h tiệm cận

$$z_n - z(x_n) = h^p b_p(x_n) + h^{p+1} b_{p+1}(x_n) + \dots + h^N b_N(x_n) + O(h^{N+1})$$

(b) Nếu $-1 \leq R(\infty) < 1$ thì tồn tại một khai triển tiệm cận nhiễu loạn

$$z_n - z(x_n) = h^{q+1} (b_{q+1}(x_n) + \beta_n^{q+1}) + \dots + h^N (b_N(x_n) + \beta_n^N) + O(h^{N+1})$$

với các nhiễu loạn phụ thuộc h , β_n^k thỏa mãn

$$\beta_n^k = 0 \text{ đối với } n \geq 1 \text{ nếu } R(\infty) = 0,$$

$$\beta_n^k = O(\alpha^n) \text{ với mọi } n \text{ và bất cứ } \alpha \text{ nào nằm trong khoảng } |R(\infty)| \text{ và } 1 \text{ nếu } |R(\infty)| < 1$$

$$\beta_n^k = (-1)^{n+1} b_k(0) \text{ đối với } n \geq 0 \text{ nếu } R(\infty) = -1$$

(c) Nếu $R(\infty) = +1$ thì tồn tại một khai triển tiệm cận

$$z_n - z(x_n) = h^p b_q(x_n) + h^{q+1} b_{q+1}(x_n) + \dots + h^N b_N(x_n) + O(h^{N+1})$$

Các khai triển ở trên đúng một cách đồng đều với $0 \leq nh \leq \text{const}, h \leq h_0$

Chứng minh. (a) Hiển nhiên bởi vì trong trường hợp này $z_n = G(y_n)$. Đối với các trường hợp khác chúng ta quay lại công thức (2.4.58) đối với δ_n thì chúng ta đã có một khai triển tiệm cận

$$\delta_n = h^{q+1} d_{q+1}(x_n) + \dots + h^N d_N(x_n) + O(h^{N+1}) \quad (2.4.60)$$

Điều này suy ra từ khai triển Taylor trong (2.4.54) và bằng cách dùng khai triển tiệm cận của thành phần y trong (2.4.57). Kết quả cho $R(\infty) = 0$ do đó ta có (2.4.58)

Kết quả cho $|R(\infty)| < 1$ suy ra từ (2.4.59) khai triển Taylor của $d_m(x_i)$ đối với $m = q + 1, \dots, N$ tại x_n và chúng ta thấy rằng

$$h^{m+k} \frac{d_m^{(k)}(x_n)}{k!} \sum_{i=1}^n \rho^{n-i} (n-i)^k = h^{m+k} \frac{d_m^{(k)}(x_n)}{k!} \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j J^k + h^{m+k} \gamma_n$$

Với $\gamma_n = O(\alpha^n)$ đối với mọi α với $|R(\infty)| < \alpha < 1$ kết quả đối với $R(\infty) = +1$ suy ra từ (2.4.59) và sử dụng khai triển tiệm cận

$$hd(x_1) + \dots + hd(x_n) = \int_0^{x_n} d(x)dx + he_1(x_n) + \dots + h^N e_N(x_n) + O(h^{N+1}) \quad (2.4.61)$$

với $d(x) = d_m(x)$ của (2.4.60) ta xét trường hợp $R(\infty) = -1$ một lần nữa quay lại (2.4.59), (2.4.60) và đối với $d(x) = d_m(x)$ chúng ta nhóm lại các số hạng là công thức

$$D_n = (d(x_n) - d(x_{n-1})) + (d(x_{n-2}) - d(x_{n-3})) + \dots + (d(x_2) - d(x_1))$$

Đối với n chẵn và

$$D_n = (d(x_n) - d(x_{n-1})) + (d(x_{n-2}) - d(x_{n-3})) + \dots + (d(x_3) - d(x_2)) + d(x_1)$$

Đối với n lẻ chúng ta khai triển mỗi số hạng $d(x_i) - d(x_{i-1})$ trong D_n thành chuỗi Taylor cộng và sử dụng hệ thức loại (2.4.61) chúng ta thu được một khai triển

$$D_n = \frac{1}{2}(d(x_n) - (-1)^n d(x_0)) + h(c_1(x_n) - (-1)^n(c_1(x_0))) + \dots + h^N(c_N(x_N) - (-1)^n(c_N(x_0))) + O(h^{N+1})$$

Nhóm lại các số hạng có lũy thừa h giống nhau chúng ta thu được kết quả. $\square$

2.5 Phương pháp Runge-Kutta cho hệ phương trình vi phân đại số một cách tiếp cận mới

2.5.1 Giới thiệu

Chúng ta xét các hệ có hệ số biến đổi

$$A(t)x'(t) + B(t)x(t) = f(t) \quad (2.5.62)$$

Với $A(t)$ suy biến. Nếu chúng ta ký hiệu $A_{ni} = A(t_n + c_{ih})$, $B_{ni} = B(t_n + c_{ih})$ và $f_{ni} = f(t_n + c_{ih})$ việc tìm nghiệm của (2.5.62) bằng cách sử dụng phương pháp Runge-Kutta ẩn được đề xuất trong [13] là

$$x_{n+1} = x_n + h \sum_{i=1}^s b_i X'_{ni} \quad (2.5.63)$$

Trong đó

$$A_{ni}X'_{ni} + B_{mi}X_{ni} = f_{ni}; x_{ni} = x_n + h \sum_{j=1}^s a_{ij}X'_{nj}, i = 1, \dots, s \quad (2.5.64)$$

Nếu chùm (A, B) chính quy và ma trận hệ số $\mathcal{A}$ không suy biến tồn tại một h_0 sao cho đối với $h \leq h_0$ hệ (2.5.64) có một nghiệm duy nhất. Với sự hỗ trợ của các giả thuyết đơn giản hóa $B(p), C(q)$ và $A_1(r)$, các kết quả hội tụ cho các sơ đồ này có thể được tìm thấy trong [9] cho các hệ phương trình vi phân đại số chỉ số 1. Trong phần sau đây chúng ta sẽ đề cập đến (2.5.63) và (2.5.64) như một phương pháp cổ điển

Khái niệm chuẩn logarit của ma trận $\mu[A]$ là một công cụ hữu ích trong việc phân tích nhiễu loạn của các phương trình vi phân phi tuyến [8]. Nếu $y_{n+1}, \tilde{y}_{n+1}$ là các nghiệm số thu được từ y_n và $\tilde{y}_{n+1}$ một cách tương ứng, bằng phương pháp Runge-Kutta, phương pháp được gọi là ổn định B nếu đối với bất kỳ kích thước bước $h > 0$ nào chúng ta có $\|y_{n+1} - \tilde{y}_{n+1}\| \leq \|y_n - \tilde{y}_n\|$. Nếu chúng ta ký hiệu $B = \text{diag}(b_1, \dots, b_s)$ và $M = BA + A^t B - bb^t$ phương pháp được gọi là ổn định đại số nếu các ma trận M và B không âm. Như chúng ta đã biết ổn định đại số là ổn định B và đối với một lớp các phương pháp bất khả quy S , những khái niệm này tương đương [8]. Một nghiên cứu tương tự có thể được thực hiện cho hệ phương trình vi phân đại số (2.5.62). Khi chuẩn được sử dụng như một tích trong chuẩn logarit của một chùm (A, B) được định nghĩa là $\mu_v[A, B] = \max_{x \in V, x \neq 0} \frac{\langle Ax, -Bx \rangle}{\langle Ax, Ax \rangle}$ với V là bất kỳ không gian con nào sao cho $V \cap \text{Ker}(A) = \{0\}$ trong [12] định lý sau đây được chứng minh.

Định lý 2.5.1. *Giả sử V là một không gian con sao cho $V \cap \text{Ker}(A(t)) = \{0\}$ và sao cho nghiệm $x(t)$ của hệ phương trình vi phân đại số thuần nhất (2.5.62) thuộc V thì*

$$\|A(t)x(t)\| \leq e^{\int_0^t \mu_v[A(u), B(u) - A'(u)] du} \|A(t_0)x(t_0)\|. \quad (2.5.65)$$

Và như vậy nếu $\mu_v[A(t), B(t) - A'(t)] \leq 0$ chúng ta tính được sự co của $\|A(t)x(t)\|$. Tính chất co này có thể được sử dụng để rút ra ổn định tiệm cận. Chúng ta muốn duy trì tính chất co này cho nghiệm số

$$\|A_{n+1}x_{n+1}\| \leq \|A_n x_n\| \quad (2.5.66)$$

Đối với hệ phương trình vi phân đại số chỉ số 1

$$\begin{pmatrix} 1 & (1+\varepsilon)t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x'(t) + \mu \begin{pmatrix} 1 & (1+\varepsilon)t \\ 1 & -\varepsilon + (1+\varepsilon)t \end{pmatrix} x(t) = 0 \quad (2.5.67)$$

được xét phương trình vi phân thường cơ bản là $z'(t) = ((1+\varepsilon)/\varepsilon - \mu)z(t)$ và do đó nghiệm ổn định tiệm cận đối với $\mu > (1+\varepsilon)/\varepsilon$. Đối với trường hợp chỉ số 1 chúng ta biết rằng nghiệm nằm trong $V = \{x | Bx \in \text{Im}g(A)\}$ và $V \oplus \text{Ker}(A) = \mathbb{R}^n$ chuẩn logarit $\mu_v[A, B - A']$ có thể được tính

$$\mu_v[A, B - A'] = \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} - \mu$$

và do đó đối với $\mu > (1+\varepsilon)/\varepsilon$ chúng ta có sự co của $\|A(t)x(t)\|$ để duy trì tính chất co (2.5.66) với phương pháp Eule ỏn, chúng ta nhận được

$$(2.5.66) \text{ đúng nếu và chỉ nếu } \left| \frac{1 - h((1+\varepsilon)/\varepsilon)}{1 + h\mu} \right| \leq 1$$

và do đó chúng ta có thể thu được ràng buộc về kích thước bước h cho phương pháp ổn định đại số này. Một sự khác biệt quan trọng giữa các phương trình vi phân thường và các hệ phương trình vi phân đại số được chỉ ra trong trường hợp hệ phương trình vi phân đại số chỉ số 1 trong [9] là các thành phần của $x'(t)$ chạy trong $\text{Ker}(A(t))$ không ảnh hưởng đến sự thỏa mãn phương trình. Trong thực tế không gian hàm được sử dụng trong [9] là $\{x(t) \in C | P(t)x(t) \in C^1\}$, với một phép chiếu $I - P(t)$ lên $\text{Ker}(A(t))$. Nhưng khi một phương pháp cho phương trình vi phân thường được đề xuất cho hệ phương trình vi phân đại số nó không được tính đến. Trong thực tế với cách tiếp cận Runge-Kutta thông thường cho các hệ phương trình vi phân đại số (2.5.63) và (2.5.64) chúng ta sử dụng phương pháp cho tất cả các "thành phần" của $x(t)$ và chúng ta tiến với tất cả các thành phần điều này có nghĩa bằng cách nào đó tất cả các thành phần được xem như lấy đạo hàm và điều này không đúng. việc áp dụng các phương pháp Runge - Kutta chính xác cứng cho các bài toán chỉ số 1 bán tường minh [10] trong đó bậc hội tụ của các phương trình vi phân thường được giữ nguyên, đạt kết quả tốt có thể là do thành phần vi phân được lấy tích phân với phương pháp cho phương trình vi phân thường và thành phần đại số thu được từ ràng buộc đại số. Do những khó khăn trong việc tìm kiếm các phương pháp duy trì tính chất co (2.5.66) và các phát biểu ở đoạn trên.

2.5.2 Cách tiếp cận mới

Để đưa ra cách tiếp cận mới cho các hệ phương trình vi phân đại số, chúng ta nhớ lại rằng nguồn gốc của công thức Runge-Kutta là công thức cầu phương chúng ta xét các giá trị $c \neq c_j$ đối với $[i \neq j, c_i \in [0, 1]$ và các công thức cầu phương

$$\int_0^1 \varphi(t) dt \approx \sum_{i=1}^s b_i \varphi(c_i), \quad \int_0^1 \varphi(t) dt \approx \sum_{j=1}^s a_{ij} \varphi(c_j) \quad (2.5.68)$$

Chúng ta có thể lấy tích phân $y'(t) = f(t, y(t))$ trong khoảng $[t_n, t_n + h]$ và $[t_n, t_n + c_i h]$ sử dụng (2.5.68) và thay thế $y(t_n + h), y(t_n)$ và $y(t_n + c_i h)$ bằng y_{n+1}, y_n và Y_{ni} một cách tương ứng, để thu được phương pháp Runge-Kutta thông thường. Chúng ta sẽ thực hiện theo phương pháp cầu phương được sử dụng để rút ra các phương pháp Runge-Kutta cho các phương trình vi phân thường để nhận được các phương pháp số mới cho các hệ phương trình vi phân đại số. Vì vậy chúng ta lấy tích phân hệ phương trình vi phân đại số (2.5.62) trong khoảng $[t_n, t_n + h]$ và $[t_n, t_n + c_i h]$ chúng ta lấy tích phân từng phần, và sử dụng công thức cầu phương (2.5.68) do đó phương pháp được đưa ra

$$A_{n+1}x_{n+1} - A_n x_n + h \sum_{i=1}^s b_i (B_{ni} - A'_{ni}) X_{ni} = h \sum_{i=1}^s b_i f_{ni} \quad (2.5.69)$$

với X_{ni} là nghiệm của

$$A_{ni} X_{ni} - A_n x_n + h \sum_{j=1}^s a_{ij} (B_{nj} - A'_{nj}) X_{nj} = h \sum_{i=1}^s a_{ij} f_{nj}, i = 1, \dots, s \quad (2.5.70)$$

Biểu thức $A_{n+1}x_{n+1}$ là giá trị gần đúng của $A(t_{n+1})x(t_{n+1})$ tùy thuộc vào hệ phương trình vi phân đại số và phương pháp, giá trị này thực sự nằm trong $\text{Im}A(t_{n+1})$. Nếu chúng ta ký hiệu $D_A = \text{diag}(A_{n1}, \dots, A_{ns})$ tương tự $D_{B-A'}$, $X = (X_{n1}^t, \dots, X_{ns}^t)$ và $F(T_n) = (f(t_{n1})^t, \dots, f(t_{ns})^t)^t$ dưới ma trận hệ (2.5.70) có thể được viết là

$$[D_A + h(A \otimes I)D_B - A']X = e \otimes A_n x_n + h(A \otimes I)F(T_n) \quad (2.5.71)$$

Định lý 2.5.2. Nếu ma trận $\mathcal{A}$ không suy biến và chùm $(A, B - A')$ chính quy thì tồn tại một h_0 sao cho khi $h \leq h_0$ hệ (2.5.71) có một nghiệm duy nhất

Chứng minh. Chúng ta phải chứng minh tính chính quy của ma trận $D_A + h(\mathcal{A} \otimes I)D_{B-A'}$ có thể được viết là $I_s \otimes A_n + h(\mathcal{A} \otimes (B_n - A'_n)) + v(h)$. Từ tính chính quy của chòm $(A, B - A')$ và ma trận hệ số $\mathcal{A}$, chúng ta có thể thu được tính chính quy của $I_s \otimes A_n + h(\mathcal{A} \otimes (B_n - A'_n))$ và do đó đạt được kết quả mong muốn. $\square$

Trong phần sau đây chúng ta sẽ giả sử rằng $\mathcal{A}$ không suy biến và chòm $(A, B - A')$ chính quy chúng ta thấy rằng đối với phương pháp tiếp cận cổ điển chúng ta cần sự chính quy của chòm (A, B) trong khi đó đối với cách tiếp cận mới chúng ta cần sự chính quy của chòm $(A, B - A')$ hai ví dụ đơn giản cho chúng ta thấy rằng chúng ta có thể có các hệ phương trình vi phân đại số trong đó chỉ có thể áp dụng một phương pháp và không thể áp dụng phương pháp kia.

Ví dụ 1: Trong hệ phương trình vi phân đại số:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -t \end{pmatrix} x'(t) + \begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x(t) = f(t)$$

Chòm (A, B) suy biến (nhớ rằng hệ phương trình vi phân đại số này có nghiệm duy nhất mặc dù chòm suy biến) nhưng chòm $(A, B - A')$ chính quy.

Ví dụ 2: Trong hệ phương trình vi phân đại số:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & t \end{pmatrix} x'(t) + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} x(t) = f(t)$$

Chòm $(A, B - A')$ chính quy nhưng chòm (A, B) suy biến.

Chúng ta biết rằng tính dễ xử lý với chỉ số 2 của chòm (A, B) , đảm bảo sự tồn tại và tính duy nhất của nghiệm với các điều kiện ban đầu phù hợp, tương đương với tính chính quy với chỉ số 2 của chòm cục bộ hiệu chỉnh $(A, B - AP')$ nhưng không tính đến tính chính quy của chòm (A, B) . Trường hợp trên không xảy ra cho chỉ số 1, Qua[9] chòm (A, B) chính quy với chỉ số 1 nếu và chỉ nếu chòm $(A, B - AP')$ chính quy với chỉ số 1 một tính toán đơn giản thiết lập mối liên hệ giữa chòm này với chòm $(A, B - A')$.

Định lý 2.5.3. *Chòm $(A, B - A')$ chính quy với chỉ số 1 nếu và chỉ nếu chòm $(A, B - AP')$ chính quy với chỉ số 1.*

Chứng minh. Có thể dễ dàng chứng minh được ma trận $A + (B - A')Q$ chính quy nếu và chỉ nếu ma trận $A + (B - AP')Q$ chính quy.

Từ $AQ = 0$ và $PQ = 0$ chúng ta được $A'Q = -AQ'$ và $P'Q = -PQ'$

vì vậy $A'Q = -AQ' = -APQ' = AP'Q$

và do đó $A + (B - A')Q = A + (B - AP')Q$ $\square$

Chúng ta thấy rằng với (2.5.69) và (2.5.70) chúng ta chỉ nhận được và sử dụng các xấp xỉ của một số thành phần cụ thể là chúng ta chỉ sử dụng $A_n x_n$ và chỉ nhận được $A_{n+1} x_{n+1}$ vì vậy chúng ta phải tính gần đúng $\tilde{x}_{n+1}$ từ $A_{n+1} x_{n+1}$ tại các điểm cần xét t_{n+1} tùy thuộc vào hệ phương trình vi phân đại số và vào phương pháp Runge-Kutta có những khả năng khác nhau. Nếu phương pháp chính xác chính xác, chúng ta có $A_{n+1} x_{n+1} = A_{n+1} X_s$ do đó một sự lựa chọn khả dĩ cho $\tilde{x}_{n+1}$ là X_s trong trường hợp này rất dễ thấy mối quan hệ giữa cách tiếp cận cổ điển và cách tiếp cận mới đối với các hệ tuyến tính với ma trận hằng A .

Định lý 2.5.4. *Chúng ta hãy xét một hệ phương trình vi phân đại số với A hằng số nếu chúng ta ký hiệu các giai đoạn bên trong của sơ đồ cổ điển và sơ đồ mới tương ứng là $\tilde{X}_{ni}$ và X_{ni} thì $\tilde{X}_{ni} = X_{ni}$.*

Chứng minh. Nếu chúng ta nhân 4 với A chúng ta được hệ (2.5.71) và do đó từ tính duy nhất của nghiệm các giai đoạn bên trong là như nhau $\tilde{X}_{ni} = X_{ni}$. Nếu chúng ta ký hiệu nghiệm số của phương pháp cổ điển là $\tilde{x}_{n+1}$ chúng ta cũng thu được $A\tilde{x}_{n+1} = Ax_{n+1} = A\bar{x}_{n+1}$ $\square$

Hệ quả 2.5.5. [13] *Chúng ta xét một hệ phương trình vi phân đại số với A không đổi nếu phương pháp chính xác nghiệm số thu được với phương pháp tiếp cận mới với $\bar{x}_{n+1} = X_s$ và phương pháp tiếp cận cổ điển là như nhau.*

Nếu phương pháp không chính xác chính xác chúng ta phải tính đến loại hệ phương trình vi phân đại số. Đối với các hệ phương trình vi phân đại số hệ số hằng và chỉ số 1 một số loại phép chiếu có thể được thực hiện để nhận được gần đúng mới từ Ax_{n+1} . Ở đây đưa ra một khía cạnh đối với trường hợp chỉ số 1. Đối với hệ phương trình vi phân đại số chỉ số 1, chúng ta có $\mathbb{R}^n = S(t) + \text{Ker}(A(t))$ với $S(t) = \{x | B(t)x \in \text{Im}(A(t))\}$ nếu $Q_s(t)$ ký hiệu một số phép chiếu chính tắc lên $\text{Ker}(A(t))$ dọc theo $S(t)$ và $P_s(t) = I - Q_s(t)$ chúng ta có $P_s(t) = [A(t) + B(t)Q_s(t)]^{-1}A(t)$

và nghiệm có thể được viết là

$$\begin{aligned} x(t) &= P_s(t)x(t) + Q_s(t)x(t) \\ &= [A(t) + B(t)Q_s(t)]^{-1}A(t)x(t) + Q_s(t)[A(t) + B(t)Q_s(t)]^{-1}f(t) \end{aligned}$$

Điều này có nghĩa là $P_s(t)x(t)$ có thể được tính từ $A(t)x(t)$ và $Q_s(t)x(t)$ có thể được tính từ số hạng không thuần nhất. Vì thế đối với nghiệm số chúng ta có thể tính

$$\bar{x}_{n+1} = u_{n+1} + v_{n+1} \quad (2.5.72)$$

với $u_{n+1} \in S(t)$ từ $A_{n+1}x_{n+1}$ là

$$u_{n+1} = (A_{n+1} + B_{n+1}Q_{s,n+1})^{-1}A_{n+1}x_{n+1} \quad (2.5.73)$$

và $v_{n+1} \in \text{Ker}(A(t_{n+1}))$ là

$$v_{n+1} = Q_s(t_{n+1})[A(t_{n+1}) + B(t_{n+1})Q_s(t_{n+1})]^{-1}f(t_{n+1}) \quad (2.5.74)$$

Nếu phương pháp chính xác cứng mà chúng ta chọn giai đoạn bên trong thứ s là gần đúng tại t_{n+1} , $\bar{x}_{n+1} = X_s$ một phần của nghiệm giống như (2.5.72)-(2.5.74).

Định lý 2.5.6. *Đối với các phương pháp chính xác cứng u_{n+1} trong (2.5.73) trùng với $P_{s,n+1}X_s$*

Chứng minh. Đối với các phương pháp chính xác cứng, thực sự

$$\begin{aligned} A_{n+1}x_{n+1} &= A_{n+1}x_s \\ \text{vì thế } u_{n+1} &= (A_{n+1} + B_{n+1}Q_{s,n+1})^{-1}A_{n+1}x_{n+1} \\ &= (A_{n+1} + B_{n+1}Q_{s,n+1})^{-1}A_{n+1}X_s \\ &= P_{s,n+1}X_s \end{aligned}$$

Đối với một hệ phương trình vi phân đại số chỉ số 1, $Q_{s,n+1}X_s$ và v_{n+1} trong (2.5.74) cũng trùng nhau. $\square$

Định lý 2.5.7. *Đối với phương pháp chính xác cứng và các hệ phương trình vi phân đại số chỉ số 1 với A hằng số thì phép chiếu (2.5.73) và (2.5.74) và $\bar{x}_{n+1} = X_s$, cho cùng một gần đúng.*

Chứng minh. Vì A là hằng số chúng ta có thể viết (2.5.71) là

$$D_B X = \frac{1}{h} D_A (\mathcal{A}^{-1} \otimes I)(e \otimes x_n - X) + F(T_n)$$

hoặc nếu chúng ta ký hiệu $A_1 = (A + BQ_s)$

$$D_{Q_s} X = -D_{A_1^{-1}BP_s} X = \frac{1}{h} D_{A_1^{-1}A} (\mathcal{A}^{-1} \otimes I)(e \otimes x_n - X) + D_{A_1^{-1}} F(T_n)$$

Chúng ta nhân với D_{Q_s} và sử dụng $A_1^{-1}A = P_s$, $Q_s A_1^{-1}A = Q_s$ để thu được $D_{Q_s} X = D_{Q_s} A_1^{-1} F(T_n)$ đặc biệt đối với giai đoạn cuối cùng điều đó muốn nói đến (2.5.74). $\square$

Nếu A không phải là hằng số đối với một hệ phương trình vi phân đại số thuần nhất, thì phép chiếu và $\bar{x}_{n+1} = X_s$ vẫn cho cùng một giá trị gần đúng.

Định lý 2.5.8. *Đối với phương pháp chính xác cứng và các hệ phương trình vi phân đại số thuần nhất nếu $\text{Img}(A(t)) = R$ không phụ thuộc t và $A'(t)P(t) = 0$ thì $X_s \in S(t_{n+1})$.*

Chứng minh. Thực sự (2.5.71) cho ta

$$D_{B-A'}X = \frac{1}{h}(\mathcal{A} \otimes I)^{-1}(e \otimes A_n x_n - D_A X)$$

Hoặc nếu chúng ta dùng

$$A'(t) = A'(t)P(t) + A'(t)Q(t) = A'(t)P(t) - A'(t)Q(t) \text{ và } A'(t)P(t) = 0$$

$$D_B X = -D_{AQ'}X + \frac{1}{h}(\mathcal{A} \otimes I)^{-1}(e \otimes A_n x_n - D_A X) \in R$$

và đặc biệt đối với giai đoạn bên trong cuối cùng $B_{n+1}X_s \in R$ và do đó $X_s \in S(t_{n+1})$. $\square$

Hệ quả 2.5.9. *Đối với phương pháp chính xác cứng và các hệ phương trình vi phân đại số thuần nhất nếu $\text{Img}(A(t)) = R$ không phụ thuộc vào t và $A'(t)P(t) = 0$ thì phép chiếu và $\bar{x}_{n+1} = X_s$ cho cùng một giá trị gần đúng.*

Chứng minh. Từ định lý trên $X_s \in S(t_{n+1})$ vì vậy $Q_{s,n+1}X_s = 0$ $\square$

Từ hệ quả (2.5.5) và công thức (2.4.53) đối với các phương pháp chính xác cứng, nếu ma trận A là hằng số, phương pháp tiếp cận mới $\bar{x}_{n+1} = X_s$ hoặc phép chiếu (2.5.73) và (2.5.74) và phương pháp tiếp cận cũ cho cùng một giá trị gần đúng. Đối với phương pháp chính xác không cứng, ngay cả khi A là hằng số, phương pháp cổ điển và phương pháp tiếp cận mới cho kết quả khác nhau. Nếu chúng ta sử dụng (2.5.72) và (2.5.73) để thu được cách tiếp cận mới, dưới dạng $A\tilde{x}_{n+1} = Ax_{n+1}$ chúng ta thu được $P_s(t_{n+1})x_{n+1} = P_s(t_{n+1})\tilde{x}_{n+1}$ một phần trong $S(t_{n+1})$ giống nhau trong cả hai cách tiếp cận. Tuy nhiên, nói chung.

$$Q_s(t_{n+1})x_{n+1} \neq Q_s(t_{n+1})\tilde{x}_{n+1} = Q_s(t_{n+1})[A + B(t_{n+1})Q_s(t_{n+1})]^{-1}f(t_{n+1})$$

Hãy xét ví dụ, trường hợp hệ số hằng chỉ số 1 bán tường minh. Cách tiếp cận mới chỉ đơn giản là tiếp cận gián tiếp cho các hệ phương trình vi phân đại số chỉ số 1 bán tường minh [8, p. 404]. Cách tiếp cận cổ điển tương ứng với phương pháp tiếp cận trực tiếp.

Chú ý: Đối với các phương pháp Lobatto IIIA, ma trận $\mathcal{A}$ suy biến nhưng

ma trận con $\mathcal{A} = (a_{ij})_{i,j \geq 2}$ khả nghịch và phương pháp chính xác cứng. Phương pháp mới này cũng có thể được áp dụng giống như được thực hiện cho các hệ phương trình vi phân đại số [10] bằng cách định nghĩa $X_{n1} = x_n$ và tính $X_{n+1} = X_{ns}$. Đối với phương pháp tiếp cận mới, đối với giai đoạn bên trong thứ nhất, chúng ta có $A_n X_{n1} - A_n x_n = 0$. Nếu A_n suy biến, có vô số vectơ thỏa mãn hệ thức này và có hai khả năng để tìm X_{n1} chúng ta có thể chọn $X_{n1} = x_n$ hoặc chúng ta có thể chiếu. Bởi vì phương pháp chính xác cứng, để thu được $\bar{x}_{n+1}$ chúng ta có thể chọn $\bar{x}_{n+1} = X_{ns}$ hoặc chúng ta có thể chiếu. Vì vậy, chúng ta có bốn khả năng:

- (1) $X_{n1} = x_n$ và $\bar{x}_{n+1} = X_{ns}$.
- (2) $X_{n1} = x_n$ và $\bar{x}_{n+1}$ được chiếu.
- (3) X_{n1} được chiếu và $\bar{x}_{n+1} = X_{ns}$.
- (4) X_{n1} được chiếu và $\bar{x}_{n+1}$ được chiếu.

Các tùy chọn (1) và (3) áp dụng cho các quy tắc hình thang (phương pháp gần đúng hình thang).

Nếu A là một ma trận hằng, chọn lựa $X_{n1} = x_n$ dẫn đến sơ đồ quy tắc hình thang được đưa ra trong [9]

2.5.3 Sự hội tụ đối với các hệ phương trình vi phân đại số có thể chuyển sang hệ số hằng

Đối với một phương pháp BDF k bước nhất định

$\sum_{j=0}^k \alpha_{kj} x_{n-j} = h f_n$ các phương pháp k bước cải biên được định nghĩa cho các hệ phương trình vi phân đại số hệ số biến đổi tuyến tính (2.5.62) là

$$[\alpha_{k,0} A_n + h(B_n - A'_n)] x_n + \sum_{j=1}^k \alpha_{kj} A_{n-j} x_{n-j} = h f_n$$

và do đó, phương pháp được đề xuất cho phương pháp Euler ẩn (BDF1) trùng hợp với cách tiếp cận mới cho các phương pháp Runge-Kutta với $\bar{x}_{n+1} = X_s$. Sự hội tụ được nghiên cứu cho các hệ phương trình vi phân đại số có thể chuyển sang hệ số hằng, tức là đối với các hệ phương trình vi phân đại số tồn tại một $L(t)$ khả vi không suy biến sao cho phép biến đổi $x = L(t)y$ chuyển (2.5.62) sang một hệ có hệ số hằng có thể giải được. Các hệ như thế được đặc trưng bởi định lý sau đây.

Định lý 2.5.10. *Hệ (2.5.62) có thể biến đổi sang các hệ số hằng khi và chỉ khi (1) $sA + B - A'$ khả nghịch trên I đối với s nào đó, và (2)*

$A(sA + B - A')^{-1}$ không đổi trên I . Nếu (1) và (2) đúng, chúng ta có thể chọn $L(t) = (sA + B - A')^{-1}$ để thu được hệ $Cy'(t) + (I - sC)y(t) = f(t)$ trong đó $C = AL$.

Vì vậy, nếu chúng ta kí hiệu $y_n = L_n^{-1}x_n, Y_{ni} = L_{ni}^{-1}X_{ni}$ và tính đến $B - A' = (I - sC)L^{-1}$ cho các hệ có thể chuyển được (2.5.69) và (2.5.70) là

$$Cy_{n+1} - Cy_n + h \sum_{i=1}^s b_i(I - sC)Y_{ni} = h \sum_{i=1}^s b_i f_{ni} \quad (2.5.75)$$

với Y_{ni} là nghiệm của

$$Cy_{ni} - Cy_n + h \sum_{j=1}^s a_{ij}(I - sC)Y_{nj} = h \sum_{j=1}^s a_{ij} f_{nj}, \quad i = 1, \dots, s \quad (2.5.76)$$

Tương ứng với việc lấy tích phân của hệ phương trình vi phân đại số hệ số hằng tuyến tính

$Cy'(t) + (I - sC)y(t) = f(t)$ với phương pháp mới. Trong trường hợp này, chúng ta thấy rằng nghiệm thu được trong (2.5.75) phù hợp với (2.5.76). Đối với trường hợp chỉ số 1, các hệ phương trình vi phân đại số hệ số hằng được chuyển đổi cũng có chỉ số 1. Nếu chúng ta tìm gần đúng số (nghiệm gần đúng bằng phương pháp số) $\bar{x}_{n+1}$ qua (2.5.73) và (2.5.74) quả thực

$$\begin{aligned} x(t_{n+1}) - \bar{x}_{n+1} &= (A_{n+1} + B_{n+1}Q_{s,n+1})^{-1} [A_{n+1}x(t_{n+1}) - A_{n+1}x_{n+1}] \\ &= (A_{n+1} + B_{n+1}Q_{s,n+1})^{-1} [Cy(t_{n+1}) - Cy_{n+1}]. \end{aligned} \quad (2.5.77)$$

Đối với bất kỳ hệ phương trình vi phân đại số nào, nếu phương pháp này chính xác cứng và chúng ta tìm được gần đúng số qua $\bar{x}_{n+1} = X_s$ chúng ta có

$$x(t_{n+1}) - \bar{x}_{n+1} = L(t_{n+1}) [y(t_{n+1}) - Y_s] \quad (2.5.78)$$

Chúng ta nghiên cứu bậc hội tụ cho các phương pháp mới áp dụng cho các hệ phương trình vi phân đại số có thể chuyển sang hệ số hằng. Đối với chòm (A, B) chỉ số v dạng chuẩn tắc Kronecker là $PAQ = \text{diag}(I, N), PBQ = \text{diag}(C, I)$ trong đó P và Q là các ma trận chính quy, và N là lũy linh với bậc lũy linh là v . Nếu chúng ta nhân với P và thực hiện phép đổi biến $x = Q(y^t, z^t)^t$ chúng ta tách hệ phương trình vi phân đại số tuyến tính hệ số hằng. Dạng chuẩn tắc Kronecker cho phép chúng ta tách (2.5.69) và (2.5.70) để thu được y_n là nghiệm số cho phương trình vi phân thường $y(t)' + Cy(t) = f(t)$ Vì vậy, nếu phương pháp có bậc p đối với các phương

trình vi phân thường, chúng ta có $y_n - y(t_n) = v(h^p)$.

Nếu hệ phương trình vi phân đại số có chỉ số 1 và có thể chuyển sang hệ số hằng, hệ phương trình vi phân đại số mới cũng có chỉ số 1. Trong các định lý sau, chúng ta đưa ra bậc sai số $Cy(t_n) - Cy_n$ trong (2.5.77).

Định lý 2.5.11. Xét một hệ phương trình vi phân đại số hệ số hằng tuyến tính với chỉ số $v = 1$. Nếu phương pháp Runge-Kutta có bậc K_d đối các phương trình vi phân thường thì nghiệm số thu được với phương pháp mới thỏa mãn $Ax(t_n) - A\bar{x}_n = v(h^{K_d})$.

Chứng minh. Đối với bài toán chỉ số 1, chúng ta có, đối với ma trận chính quy P cho chúng ta dạng chuẩn tắc Kronecker

$$Ax(t_{n+1}) - Ax_{n+1} = P \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t_{n+1}) - y_{n+1} \\ z(t_{n+1}) - z_{n+1} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} y(t_{n+1}) - y_{n+1} \\ 0 \end{pmatrix} = v(h^p) \quad \square$$

Từ định lý này và công thức (2.5.77), chúng ta phát biểu định lý sau đây.

Định lý 2.5.12. Hãy xét một hệ phương trình vi phân đại số chỉ số 1 tuyến tính có thể chuyển sang hệ số hằng. Nếu phương pháp Runge-Kutta có bậc K_d đối với các phương trình vi phân thường, thì nghiệm số thu được với phương pháp mới qua phép chiếu (2.5.74) và (2.5.73) thỏa mãn $x(t_n) - \bar{x}_n = v(h^{K_d})$.

Đối với các hệ phương trình vi phân đại số chỉ số cao có thể chuyển sang hệ số hằng, chúng ta có kết quả sau.

Định lý 2.5.13. Chúng ta xét một hệ phương trình vi phân đại số (2.5.62) có thể chuyển sang hệ phương trình vi phân đại số hệ số hằng. Nếu phương pháp Runge-Kutta chính xác cứng và có bậc K_d đối với các phương trình vi phân thường, thì giá trị gần đúng tính bằng phương pháp số mới $\bar{x}_{n+1} = X_s$ cho thấy rằng $x(t_{n+1}) - X_s = v(h^{K_v})$ với

$K_v = \min_{2 \leq i \leq v} (p, K_{a,i} - i + 2)$ và $K_{a,l}$ số nguyên lớn nhất sao cho

$$b^t \mathcal{A}^{-i} e = \frac{b^t \mathcal{A}^{-l} c^{l-i}}{(l-i)!}, \quad i = 1, 2, \dots, l-1$$

$$b^t \mathcal{A}^{-i} c^i = i(i-1)\dots(i-l+2), \quad i = l, l+1, \dots, k_{al}.$$

Chứng minh. Hệ quả (2.5.5) phát biểu rằng phương pháp tiếp cận mới với $\bar{x}_{n+1} = X_s$ và phương pháp tiếp cận cổ điển cho cùng một gần đúng. Do đó $x(t_{n+1}) - X_s = v(h^{K_v})$ với K_v là bậc của phương pháp Runge-Kutta cho một hệ phương trình vi phân đại số hệ số hằng tuyến tính với chỉ số v [6]. Chúng ta thấy rằng $K_{a,l} = \infty$ đối với các phương pháp chính xác cứng. $\square$

2.5.4 Sự co

Mục tiêu của chúng ta là đưa ra những phương pháp tiếp cận mới để duy trì tính chất co của nghiệm số, và tương tự đối với nghiệm chính xác. Với cách tiếp cận mới được đưa ra, điều đó có thể được chứng minh dễ dàng.

Định lý 2.5.14. *Chúng ta xét hệ phương trình vi phân đại số thuần nhất (2.5.62) và giá trị gần đúng $A_{n+1}x_{n+1}$ thu được qua (2.5.69) và (2.5.70). Nếu phương pháp Runge-Kutta ổn định đại số, và $x_{ni} \in V_{ni}$ là một không gian con sao cho*

$$\mu V[A_{ni}, B_{ni} - A'_{ni}] \leq 0 \text{ Thì } \|A_{n+1}x_{n+1}\| \leq \|A_n x_n\|.$$

Chứng minh. Nếu chúng ta kí hiệu $W_{ni} = h(B_{ni} - A'_{ni})X_{ni}$, $M = BA + A^t B - bb^t$, $m_{i,j}$ là các yếu tố (i, j) của M , và theo [8] ta nhận được

$$\begin{aligned} \|A_{n+1}x_{n+1}\|^2 &= \|A_n x_n\|^2 + 2 \left\langle A_n x_n, \sum_{i=1}^s b_i W_{ni} \right\rangle + \left\langle \sum_{k=1}^s b_k W_{nk}, \sum_{i=1}^s b_i W_{ni} \right\rangle \\ &= \|A_n x_n\|^2 - \sum_{i,j=1}^s m_{ij} \langle W_{ni}, W_{nj} \rangle + 2h \sum_{i=1}^s b_i \langle A_{ni} X_{ni}, -(B_{ni} - A'_{ni}) X_{ni} \rangle \\ &\leq \|A_n x_n\|^2 - \sum_{i,j=1}^s m_{ij} \langle W_{ni}, W_{nj} \rangle + 2h \sum_{i=1}^s b_i \mu_{V_i}[A_{ni}, B_{ni} - A'_{ni}] \|A_{ni} x_{ni}\|^2 \\ &\leq \|A_n x_n\|. \quad \square \end{aligned}$$

Đối với trường hợp chỉ số 1, nếu $\text{Img}(A(t))$ là hằng số và $A'P = 0$, thì theo hệ quả (2.5.9), các giai đoạn bên trong X_{ni} và nghiệm chính xác tại điểm tni nằm trong cùng một không gian con $S(t_{ni})$. Vì thế, chúng ta có thể chọn $V_{ni} = S(t_{ni})$

Chương 3

ỨNG DỤNG PHƯƠNG PHÁP RUNGE - KUTTA GIẢI GẦN ĐÚNG HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN ĐẠI SỐ

3.1 Ví dụ giải gần đúng phương trình vi phân thường (ODE)

Ví dụ Dùng công thức Runge-Kutta tìm nghiệm gần đúng của bài toán Cauchy

$$\begin{aligned} y' &= y - x^2 + 1, \quad 0 \leq x \leq 1 \\ y(0) &= 0.5 \end{aligned} \quad \text{Với } n = 5$$

Tính sai số biết nghiệm chính xác là :

$$y(x) = (x + 1)^2 - 0.5e^x$$

Bai giải. Ta có $h = 0.2$

$$x_0 = 0, x_1 = 0.2, x_2 = 0.4, x_3 = 0.6, x_4 = 0.8, x_5 = 1$$

Công thức Runge-Kutta bậc 4

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6 \\ k_1 &= hf(x_k, y_k) \\ k_2 &= hf(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{k_1}{2}) \\ k_3 &= hf(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{k_2}{2}) \\ k_4 &= hf(x_k + h, y_k + k_3) \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

Áp dụng công thức Runge-Kutta bậc 4 ta có

$$k_1 = hf(x_k, y_k) = 0.2(y_k - x_k^2 + 1)$$

$$\begin{aligned}
k_2 &= hf\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{k_1}{2}\right) = 0.2 \left[y_k + 0.1(y_k - x_k^2 + 1) - (x_k + 0.1)^2 + 1 \right] \\
&= 0.2(1.1y_k - 1.1x_k^2 - 0.2x_k + 1.09) \\
k_3 &= hf\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{k_2}{2}\right) \\
&= 0.2 \left[y_k + 0.1(1.1y_k - 1.1x_k^2 - 0.2x_k + 1.09) - (x_k + 0.1)^2 + 1 \right] \\
&= 0.2(1.11y_k - 1.11x_k^2 - 0.22x_k + 1.099) \\
k_4 &= hf\left(x_k + h, y_k + k_3\right) \\
&= 0.2 \left[y_k + 0.2(1.11y_k - 1.11x_k^2 - 0.22x_k + 1.099) - (x_k + 0.2)^2 + 1 \right] \\
&= 0.2(1.222y_k - 1.222x_k^2 - 0.444x_k + 1.1798)
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} y_0 = 0.5 \\ y_{k+1} = y_k + 0.2(6.642y_k - 6.642x_k^2 - 1.284x_k + 6.5578)/6 \end{cases}$$

k	x_k	y_k	$y(x_k)$	$ y(x_k) - y_k $
0	0	0.5	0.5	0
1	0.2	0.8292933	0.8292986	0.0000053
2	0.4	1.2140762	1.2140877	0.0000115
3	0.6	1.6489220	1.6489406	0.0000186
4	0.8	2.1272027	2.1272295	0.0000269
5	1	2.6408227	2.6408591	0.0000364

Xây dựng hàm rk4 trong matlab để giải phương trình vi phân theo phương pháp trên.

```

function[x,y] = rk4(f,x0,x1,y0,h)
if nargin < 4,error('Vuilongnhapdudoiso!!'),end;
if nargin < 5,m = input('Nhapsodoanchian ='); , h = (x1 - x0)/m;
end;
x = []; x(1) = [x0]; n = (x1 - x0)/h;
for i = 1 : n, x(i + 1) = x(i) + h; end;
y = []; y(1) = [y0];
for i = 1 : n
K1 = h * f(x(i),y(i));
K2 = h * f(x(i) + h/2,y(i) + K1/2);
K3 = h * f(x(i) + h/2,y(i) + K2/2);
K4 = h * f(x(i) + h,y(i) + K3);
y(i + 1) = y(i) + (K1 + 2 * K2 + 2 * K3 + K4)/6;
end;

```

□

Ví dụ: Ta giải lại phương trình: $y' = y - x^2 + 1, 0 \leq x \leq 1, y(0) = 0.5$, với $n = 5$

Định nghĩa trực tiếp hàm f từ cửa sổ Command Windows:

```
>> [X, Y] = rk4(inline('y - x^2 + 1','x','y'), 0, 1, 0.5)
```

Định nghĩa hàm f trong cửa sổ Editor rồi lưu thành file f.m

```
function[dy] = f(a,b)
dy = b - a^2 + 1;
```

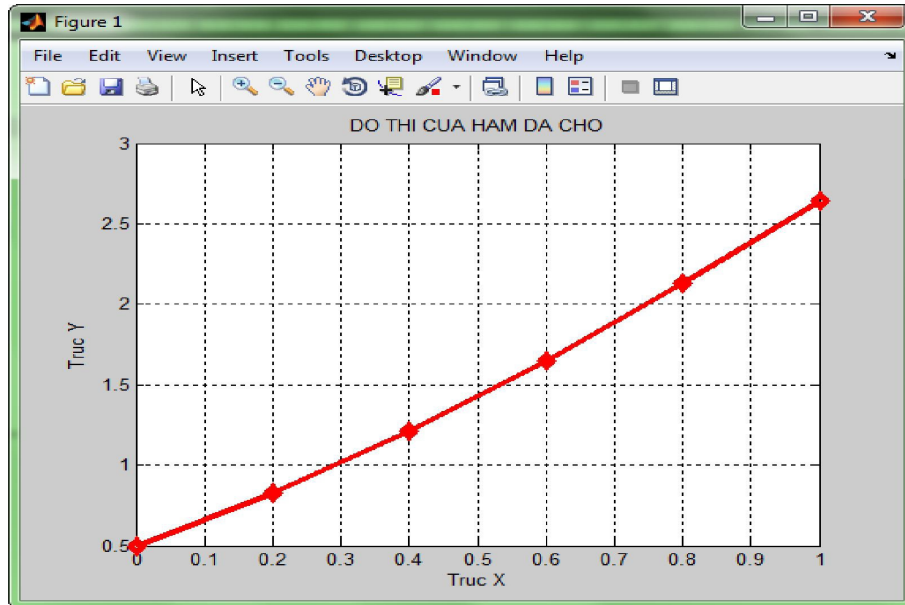
```
>> [X, Y] = rk4(@f, 0, 1, 0.5)
```

Vẽ đồ thị từ các giá trị xk,yk (giá trị trả về của hàm rk4):

```
plot(X, Y, 'rd-', 'LineWidth', 3)
xlabel('TrucX')
ylabel('TrucY')
title('DOTHICUAHAMDACHO')
gridon
```

Kết quả của cửa sổ Command Windows:

```
>> [X, Y] = rk4(inline('y - x^2 + 1','x','y'), 0, 1, 0.5)
Nhapsodoanchian = 5
n =
5
X =
00.20000.40000.60000.80001.0000
Y =
0.50000.82931.21411.64892.12722.6408
>> ve
>>
```

3.2 Ví dụ giải gần đúng hệ phương trình vi phân đại số (DAE) cài đặt bằng Matlab

$$\frac{dx}{dt} = \frac{F}{H}(x_F - x) - \frac{V}{H}(y - x)$$

$$0 = y - \frac{\alpha x}{1 + (\alpha - 1)x}$$

Mã matlab

Trong cửa sổ Editor tạo một tệp có tên **Vidu.m** như sau

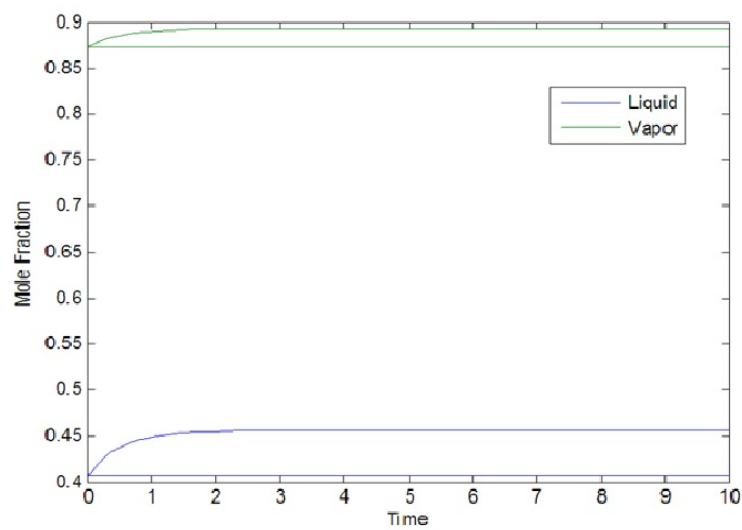
```
f = @(x)binary_flash(x);
xss = fsolve(f,[1 1],[])
df = @(t,x)binary_flash(x);
M = [1 0;0 0];
options = odeset('Mass',M);
[t1,y1] = ode15s(df,[0,10],xss,options);
[t2,y2] = ode15s(df,[0,10],xss,options);
t1 = t1
y1 = y1
t2 = t2
y2 = y2
```

Tương tự tạo một tệp thứ hai có tên **binary flash.m** như sau

```

function f = binary_flash(x);
H = 5; F = 10; xf = 0.5; V = 2; alpha = 10;
xv = x(1);
yv = x(2);
f(1) = F/H*(xf-xv)-V/H*(yv-xv);
f(2) = yv-alpha*xv/(1+(alpha-1)*xv);
f = f';

```



Kết luận

Luận văn này, được trình bày trên cơ sở tài liệu [4], [10],[11] về những vấn đề cơ bản trong lý thuyết hệ phương trình vi phân đại số và phương pháp số cho hệ phương trình vi phân đại số trong đó có phương pháp Runge-Kutta giải gần đúng hệ phương trình vi phân đại số và trên cơ sở bài báo [12] đưa ra cách tiếp cận mới của phương pháp Runge-Kutta giải gần đúng hệ phương trình vi phân đại số và đã sử dụng phương pháp Runge-Kutta thực hiện giải trên ví dụ cụ thể bằng cách sử dụng phần mềm matlab điều đó cho phép hiểu sâu sắc hơn về cơ sở của lý thuyết hệ phương trình vi phân đại số.

Tài liệu tham khảo

- [1] Phạm Kỳ Anh (1996), *Giải Tích Số*, Nxb Đại học Quốc gia Hà nội.
- [2] Lưu Thị Thu Hoài (2008), *Hệ phương trình vi phân đại số*, Luận văn thạc sĩ Toán học, Đại học Sư phạm Thái Nguyên -Đại học Thái Nguyên.
- [3] Trịnh Đức Tài (2008), *Phương trình vi phân*, Bài giảng tóm tắt, Khoa Toán – Tin, Đại học Đà Lạt.
- [4] Dr. Abebe Geletu 12 (2011), *Introduction to Differeltial Algebraic Equations*, IImenau University of Technology Department of Simulation and Optimal Processes (SOP).
- [5] Uri M. Ascher, Linda R. Petzold, *Computer Methods for Ordinary Differential Equations and Differential-Algebraic Equations*, University of British Columbia Vancouver, British Columbia, Canada.
- [6] K.E. Brenan, L.R Petzold (1989), *The numerical solution of higher index Differential-Algebraic Equations by implicit Runge-Kutta methods*, SIAM J, Numer, Anal, pp. 837-851.
- [7] J.C Butcher (1987), *The Numerica Analysis of Ordinary Differential Equations*, John Wilay Sons.
- [8] K. Dekker, J.D. Verwer (1984), *Stability of Runge-Kutta methods for Stiff Nonlinear Differential Equations*, North-Holland, Amsterdam.
- [9] E. Griepentrog, R. März (1986), *Differential Algebraic Equations and Their Numerical Treatment*, Teubner Texte zur Mathematik 88, Leipzig,
- [10] Ernrst Hairer, Michel Roche, Christian Lubich, (1989), *The Numerical Solution of Differeltial-Algebraic Systems by Runge-Kutta Methods*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1409, Springer, Berlin.

- [11] Steffen Schulz, june 13 (2003), *Four Lectures on Differential Algebraic Equations*, Humboldt Universität zu Berlin.
- [12] Inmaculada Higuera, Berta García-Celayete (1998) *Runge-Kutta methods for Differential-Algebraic Equations. A new approach*, preprint 1.
- [13] L.R. Petzold (1986), *Order results for implicit Runge-Kutta methods applied to differential/algebraic systems*, SIAM J, Numer, Anal., vol.23, pp. 837-851.