

**ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM**

ĐỖ THỊ LAN HƯƠNG

**TÍNH CHÍNH QUI CỦA HÀM
GREEN ĐA PHỨC VỚI NHIỀU CỰC**

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN – 2013

**ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM**

ĐỖ THỊ LAN HƯƠNG

**TÍNH CHÍNH QUI CỦA HÀM
GREEN ĐA PHỨC VỚI NHIỀU CỰC**

**Chuyên ngành: GIẢI TÍCH
Mã số: 60.46.01.02**

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: PGS.TS PHẠM HIỀN BẰNG

THÁI NGUYÊN – 2013

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi. Các tài liệu tham khảo trong luận văn là trung thực. Luận văn chưa từng được công bố trong bất cứ công trình nào.

Tác giả

Đỗ Thị Lan Hương

LỜI CẢM ƠN

Bản luận văn được hoàn thành tại Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn của PGS.TS. Phạm Hiến Bằng. Nhân dịp này tôi xin bày tỏ lòng biết ơn Thầy về sự hướng dẫn tận tình, hiệu quả với những kinh nghiệm trong quá trình nghiên cứu để hoàn thành luận văn.

Xin cảm ơn Ban chủ nhiệm Khoa Sau Đại học, Ban chủ nhiệm Khoa Toán, các thầy cô giáo Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên, Viện Toán học và Trường Đại học Sư phạm Hà Nội đã giảng dạy và tạo điều kiện thuận lợi cho tôi trong quá trình học tập và nghiên cứu khoa học.

Xin chân thành cảm ơn Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên, Trường THPT Kháng Nhật - Tuyên Quang cùng các đồng nghiệp đã tạo điều kiện giúp đỡ tôi về mọi mặt trong quá trình học tập và hoàn thành bản luận văn này.

Bản luận văn chắc chắn sẽ không tránh khỏi những khiếm khuyết vì vậy rất mong nhận được sự đóng góp ý kiến của các thầy cô giáo và các bạn học viên để luận văn này được hoàn chỉnh hơn.

Cuối cùng xin cảm ơn gia đình và bạn bè đã động viên, khích lệ tôi trong thời gian học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Thái Nguyên, tháng 6 năm 2013
Tác giả

Đỗ Thị Lan Hương

MỤC LỤC

Lời cam đoan.....	i
Lời cảm ơn.....	ii
Mục lục.....	iii
MỞ ĐẦU	1
Chương 1: TÍNH $C^{1,1}$ - CHÍNH QUY CỦA HÀM GREEN ĐA PHỨC VỚI MỘT CỰC	3
1.1. Hàm đa điều hoà dưới	3
1.2. Hàm đa điều hoà dưới cực đại	6
1.3. Hàm cực trị tương đối	7
1.4. Tính $C^{1,1}$ - chính quy của hàm Green đa phức với một cực	11
Chương 2: TÍNH CHÍNH QUY CỦA HÀM GREEN ĐA PHỨC VỚI NHIỀU CỰC	16
2.1. Các ước lượng cơ bản	17
2.2. Các ước lượng Gradient	22
2.3. Các ước lượng của đạo hàm cấp hai	25
KẾT LUẬN	35
TÀI LIỆU THAM KHẢO	36

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Hàm Green đa phức đóng một vai trò rất quan trọng trong lý thuyết thế vị phức, nó đã được nhiều nhà toán học trong và ngoài nước quan tâm nghiên cứu như: Siciak, Zaharjuta, Lelong, Klimek, Zeriahi, Dan Coman,...và đạt được nhiều kết quả sâu sắc về hàm Green đa phức và xấp xỉ các hàm chỉnh hình. Đó là sự tổng quát hoá kết quả của Siciak - Zaharjuta trong $\mathbb{C}^n$ và trong trường hợp đại số. Một số kết quả về hàm Green đa phức với cực logarit trên đa tạp siêu lồi, đó là sự tổng quát hoá của hàm Green đa phức với cực hữu hạn, đã được nghiên cứu bởi Lelong, Klimek, Demailly, Zaharjuta, E. Amar, P.J. Thomas, Dan Coman,...

Tuy nhiên những cấu trúc của hàm Green đa phức với nhiều cực vẫn còn được biết rất ít. Ở đây chúng tôi chọn đề tài "*Tính chính qui của hàm Green đa phức với nhiều cực*". Cụ thể, chúng tôi sẽ nghiên cứu tính $C^{1,1}$ - chính qui của hàm Green đa phức với một cực, từ đó nghiên cứu tính chính qui của hàm Green đa phức với nhiều cực. Đề tài có tính thời sự, đã và đang được nhiều nhà toán học trong và ngoài nước quan tâm nghiên cứu.

2. Mục đích và nhiệm vụ nghiên cứu

2.1. Mục đích nghiên cứu

Mục đích chính của luận văn là trình bày một số kết quả trong việc nghiên cứu tính chính qui của hàm Green đa phức với một cực và nhiều cực.

2.2. Nhiệm vụ nghiên cứu

Luận văn tập trung vào các nhiệm vụ chính sau đây:

- Trình bày tổng quan và hệ thống các kết quả về các tính chất của hàm đa điều hoà dưới, hàm đa điều hoà dưới cực đại, hàm cực trị tương đối, tính $C^{1,1}$ - chính qui của hàm Green đa phức với một cực.

- Trình bày một số kết quả của Z. Blocki năm 2001 về tính chính quy của hàm Green đa phức với nhiều cực.

3. Phương pháp nghiên cứu

- Sử dụng các phương pháp của giải tích phức kết hợp với các phương pháp của lý thuyết đa thể vị phức.

- Sử dụng phương pháp và kết quả của Zbigniew Blocki.

4. Bố cục của luận văn

Nội dung luận văn gồm 37 trang, trong đó có phần mở đầu, hai chương nội dung, phần kết luận và danh mục tài liệu tham khảo.

Chương 1: Trình bày tổng quan và hệ thống các kết quả về các tính chất của hàm đa điều hoà dưới, hàm đa điều hoà dưới cực đại, hàm cực trị tương đối, tính $C^{1,1}$ - chính qui của hàm Green đa phức với một cực.

Chương 2 và phần 1.4 của chương 1 là nội dung chính của luận văn, trình bày các kết quả nghiên cứu về tính chính quy của hàm Green đa phức với nhiều cực.

Cuối cùng là phần kết luận trình bày tóm tắt kết quả đạt được.

Chương 1

TÍNH $C^{1,1}$ - CHÍNH QUY

CỦA HÀM GREEN ĐA PHỨC VỚI MỘT CỰC

1.1. Hàm đa điều hoà dưới

1.1.1. Định nghĩa. Cho W là một tập con mở của $\mathbb{C}^n$ và $u : W \rightarrow [-\infty, \infty)$ là một hàm nửa liên tục trên và không trùng với $-\infty$ trên bất kỳ thành phần liên thông nào của W . Hàm u được gọi là đa điều hoà dưới nếu với mỗi $a \in W$ và $b \in \mathbb{C}^n$, hàm $l \mapsto u(a + lb)$ là điều hoà dưới hoặc trùng $-\infty$ trên mỗi thành phần liên thông của tập hợp $\{l \in \mathbb{C} : a + lb \in W\}$. Trong trường hợp đó, ta viết $u \in \text{PSH}(W)$ (ở đây $\text{PSH}(W)$ là lớp các hàm đa điều hoà dưới trong W).

Tính đa điều hoà dưới có thể được đặc trưng dưới dạng đạo hàm suy rộng (hay theo nghĩa phân bố).

Nhắc lại, nếu $u \in C^2(W)$, $a \in W$, $b \in \mathbb{C}^n$ thì $\langle Lu(a)b, b \rangle = D_l(u(a + lb))|_{l=0}$.

Ta có định lý sau:

1.1.2. Định lý. Giả sử $W \subset \mathbb{C}^n$ là tập mở và $u \in \text{PSH}(W)$. Khi đó với mọi $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{C}^n$ ta có

$$\sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} b_j \bar{b}_k \geq 0$$

tại mọi $z \in W$ theo nghĩa suy rộng, tức là với mọi hàm không âm $\varphi \in C_0^\infty(W)$

$$\int_W u(z) \Delta \varphi(z) b_j \bar{b}_k \Delta \varphi(z) \geq 0$$

Ngược lại, nếu $v \in L_{loc}^1(W)$ sao cho với mọi $z \in W$, mọi $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{C}^n$

$$\sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 v}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} b_j \bar{b}_k \geq 0 \quad (1.1)$$

theo nghĩa suy rộng thì hàm $u = \lim_{e \rightarrow 0} (v * c_e)$ là hàm đa điều hoà dưới trong W và bằng v hầu khắp nơi trong W .

Chứng minh. Cho $u \in \text{PSH}(W)$ và $u_e = u * c_e$ với $e > 0$. Lấy một hàm không âm $j \in C_0^\infty(W)$ và một vectơ $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$. Định lý hội tụ chặn Lebesgue kết hợp với tích phân từng phần suy ra

$$\begin{aligned} \int_W u(z) \langle Lj(z)b, b \rangle dl(z) &= \lim_{e \rightarrow 0} \int_W u_e(z) \langle Lj(z)b, b \rangle dl(z) \\ &= \lim_{e \rightarrow 0} \int_W \Delta u_e(z) b, b j(z) dl(z) \geq 0. \end{aligned}$$

Phần đầu tiên của định lý được chứng minh.

Giả sử $v \in L_{loc}^1(W)$ và (1.1) được thoả mãn. Đặt $v_e = v * c_e$ với $e > 0$. Khi đó $Dv \neq 0$ trong W , theo nghĩa suy rộng. Theo Định lý 2.5.8 [13], tồn tại duy nhất hàm điều hoà dưới u trên W trùng với v hầu khắp nơi và $u = \lim_{e \rightarrow 0} v_e$.

Định lý Fubini và (1.1) suy ra

$$\int_W \langle Lv_e(z)b, b \rangle j(z) dl(z) \geq 0,$$

với mọi $b \in \mathbb{R}^n$, $j \in C_0^\infty(W_e)$, $j \geq 0$. Bởi vậy $\langle Lv_e(z)b, b \rangle \geq 0$, với mọi $z \in W_e$, $b \in \mathbb{R}^n$, và do đó $v_e \in \text{PSH}(W_e)$. Khi $v_{e_1} < v_{e_2}$ nếu $e_1 < e_2$, thì hàm giới hạn u là đa điều hoà dưới.

1.1.3. Định lý. Cho W là một tập con mở trong $\mathbb{R}^n$. Khi đó

(i) Họ $\text{PSH}(W)$ là nón lồi, tức là nếu a, b là các số không âm và $u, v \in \text{PSH}(W)$, thì $au + bv \in \text{PSH}(W)$.

(ii) Nếu W là liên thông và $\{u_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \text{PSH}(W)$ là dãy giảm, thì

$$u = \lim_{j \rightarrow \infty} u_j \in \text{PSH}(W) \text{ hoặc } u \equiv -\infty.$$

(iii) Nếu $u : W \rightarrow \mathbb{R}$, và nếu $\{u_j\}_{j \in \mathbb{N}} \in \text{PSH}(W)$ hội tụ đều tới u trên các tập con compact của W , thì $u \in \text{PSH}(W)$.

(iv) Giả sử $\{u_a\}_{a \in A} \in \text{PSH}(W)$ sao cho bao trên của nó $u = \sup_{a \in A} u_a$ là bị chặn trên địa phương. Khi đó hàm chính qui nửa liên tục trên u^* là đa điều hoà dưới trong W .

1.1.4. Hệ quả. Cho W là một tập mở trong $\mathbb{C}^n$ và w là một tập con mở thực sự, khác rỗng của W . Nếu $u \in \text{PSH}(W)$, $v \in \text{PSH}(w)$, và $\limsup_{x \rightarrow y} u(x) \leq u(y)$ với mỗi $y \in \partial_w W$, thì hàm

$$w = \begin{cases} \max \{u, v\} & \text{trong } w \\ u & \text{trong } W \setminus w \end{cases}$$

là hàm đa điều hoà dưới trong W .

1.1.5. Định lý. Cho W là một tập con mở của $\mathbb{C}^n$.

(i) Cho u, v là các hàm đa điều hoà trong W và $v > 0$. Nếu $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ là lồi, thì $vf(u/v)$ là đa điều hoà dưới trong W .

(ii) Cho $u \in \text{PSH}(W)$, $v \in \text{PSH}(W)$, và $v > 0$ trong W . Nếu $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ là lồi và tăng dần, thì $vf(u/v)$ là đa điều hoà dưới trong W .

(iii) Cho $u, -v \in \text{PSH}(W)$, $u \geq 0$ trong W , và $v > 0$ trong W . Nếu $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ là lồi và $f(0) = 0$, thì $vf(u/v) \in \text{PSH}(W)$.

1.1.6. Định lý. Cho W là một tập con mở của $\mathbb{C}^n$ và $F = \{z \in W : v(z) = -\infty\}$ là một tập con đóng của W , ở đây $v \in \text{PSH}(W)$. Nếu $u \in \text{PSH}(W \setminus F)$ là bị chặn trên, thì hàm $\bar{u}$ xác định bởi

$$\bar{u}(z) = \begin{cases} u(z) & (z \in W \setminus F) \\ \limsup_{\substack{y \rightarrow z \\ y \in F}} u(y) & (z \in F) \end{cases}$$

là hàm đa điều hoà dưới trong W . Nếu u là đa điều hoà và bị chặn trong $W \setminus F$, thì $\bar{u}$ là đa điều hoà trong W . Nếu W là liên thông, thì $W \setminus F$ cũng liên thông.

1.2. Hàm đa điều hoà dưới cực đại

1.2.1. Định nghĩa. Cho W là một tập con mở của $\mathbb{R}^n$ và $u : W \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm đa điều hoà dưới. Ta nói rằng u là hàm đa điều hoà dưới cực đại trong W nếu với mỗi tập con mở compact tương đối G của W và với mỗi hàm v nửa liên tục trên $\bar{G}$ sao cho $v \in \text{PSH}(G)$ và $v \leq u$ trên ∂G thì $v \leq u$ trong G .

Sau đây ta sẽ xem xét một số tính chất tương đương của tính cực đại.

1.2.2. Mệnh đề. Cho $W \subset \mathbb{R}^n$ là mở và $u : W \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm đa điều hoà dưới. Khi đó các khẳng định sau là tương đương:

(i) Với mỗi tập con mở compact tương đối G của W và mỗi hàm $v \in \text{PSH}(G)$, nếu $\limsup_{z \rightarrow x} (u(z) - v(z)) \leq 0$ với mọi $x \in \partial G$ thì $u \leq v$ trong G ;

(ii) Nếu $v \in \text{PSH}(W)$ và với $\varepsilon > 0$ tồn tại một tập compact $K \subset W$ sao cho $u - v \leq -\varepsilon$ trong $W \setminus K$ thì $u \leq v$ trong W ;

(iii) Nếu $v \in \text{PSH}(W)$, G là tập con mở compact tương đối của W và $u \leq v$ trên ∂G thì $u \leq v$ trong G ;

(iv) Nếu $v \in \text{PSH}(W)$, G là tập con mở compact tương đối của W , và với mỗi $x \in \partial G$, $\liminf_{z \rightarrow x} (u(z) - v(z)) \leq 0$ thì $u \leq v$ trong G ;

(v) u là hàm đa điều hoà dưới cực đại.

Chứng minh. (i) $\Rightarrow$ (ii): Cho v là một hàm đa điều hoà dưới có tính chất: với mỗi $\varepsilon > 0$ tồn tại một tập compact $K \subset W$ sao cho $u - v \leq -\varepsilon$ trong $W \setminus K$.

Giả sử rằng $u(a) - v(a) = h < 0$ tại một điểm $a \in W$. Bao đóng của tập hợp

$$E = \left\{ z \in W : u(z) < v(z) + \frac{h}{2} \right\}$$

là tập con compact của W . Bởi vậy có thể tìm được tập mở G chứa E và

compact tương đối trong G . Theo (i) ta có $u \leq v + \frac{h}{2}$ trong G , điều đó mâu thuẫn với $a \in E$. Phần còn lại được suy ra từ khẳng định:

$$\text{hàm } w(z) = \begin{cases} \max \{u(z), v(z)\} & (z \in G) \\ u(z) & (z \in W \setminus G) \end{cases}$$

là đa điều hoà dưới trong W theo các giả thiết (iii), (iv), (v) và (i).

1.3. Hàm cực trị tương đối

1.3.1. Định nghĩa. Giả sử W là một tập con mở của $\mathbb{C}^n$ và E là tập con của W . Hàm cực trị tương đối của E đối với W được định nghĩa là :

$$u_{E,W}(z) = \sup \{v(z) : v \in \text{PSH}(W), v|_E \leq -1, v|_W \leq 0\} \quad (z \in W).$$

Hàm $u_{E,W}^*$ là đa điều hoà dưới trong W .

Xét trường hợp đặc biệt khi E là đóng trong W . Ta sẽ chứng minh $u_{E,W}$ trùng với hàm Perron - Bremermann $y_{W \setminus E, -c_E}$ (ở đây c_E là hàm đặc trưng của E).

Thực vậy, giả sử $u \in \text{PSH}(W \setminus E)$ âm sao cho:

$$\limsup_{\substack{z \rightarrow w \\ z \in W \setminus E}} u(z) \leq -1 \text{ với mỗi } w \in \partial E \cap W.$$

Khi đó hàm

$$v(z) = \begin{cases} -1 & (z \in E) \\ \max \{-1, u\} & (z \in W \setminus E) \end{cases}$$

âm và nửa liên tục trên trong W . Hơn nữa, nó là hàm đa điều hoà dưới trong W do Định lý 1.2.2 [13]. Như vậy $u \leq v \leq u_{E,W}$ trong $W \setminus E$.

Từ đó $y_{W \setminus E, -c_E} \leq u_{E,W}$ trong $W \setminus E$. Bất đẳng thức ngược lại là hiển nhiên.

Bây giờ chúng ta sẽ trình bày một vài tính chất cơ bản của hàm cực trị tương đối.

1.3.2. Mệnh đề. Nếu $E_1 \subset E_2 \subset W_1 \subset W_2$ thì $u_{E_1, W_1} \leq u_{E_2, W_1} \leq u_{E_2, W_2}$

1.3.3. Mệnh đề. Nếu W là miền siêu lồi và E là một tập con compact tương đối của W , thì với mỗi $w \in \mathbb{P}W$ bất kỳ ta có

$$\lim_{z \rightarrow w} u_{E,W}(z) = 0.$$

Chứng minh. Nếu $\rho < 0$ là một hàm vết cận đối với W , thì với số $M > 0$ nào đó, $Mr < -1$ trên E . Như vậy $Mr \notin u_{E,W}$ trong W . Rõ ràng, $\lim_{z \rightarrow w} r(z) = 0$ và mệnh đề được chứng minh.

1.3.4. Mệnh đề. Nếu $W \subset \mathbb{C}^n$ là miền siêu lồi và $K \subset W$ là một tập compact sao cho $u_{K,W}|_K = -1$ thì $u_{K,W}$ là hàm liên tục.

Chứng minh. Lấy $u = u_{E,W}$ và ký hiệu $F \subset \text{PSH}(W)$ là họ các hàm u . Giả sử ρ là hàm xác định của W sao cho $\rho < -1$ trên K . Khi đó $r \notin u$ trong W . Chỉ cần chứng minh rằng với mỗi $\varepsilon \in (0,1)$ tồn tại $v \in C(W) \cap F$. Sao cho $u - \varepsilon \notin v \notin u$ trong W . Thật vậy, lấy $\varepsilon \in (0,1)$ tồn tại $h > 0$ sao cho $u - \varepsilon < r$ trong $W \setminus W_h$ và $K \subset W_h$, trong đó

$$W_h = \{z \in W : \text{dist}(z, \mathbb{P}W) > h\}.$$

Theo định lý xấp xỉ chính đối với các hàm đa điều hoà dưới và định lý Dini (Royden 1963), có thể tìm được $s > 0$ sao cho $u * c_d - \varepsilon < r$ trên $\mathbb{P}W$ và $u * c_d - \varepsilon < -1$ trên K . Đặt

$$v_\varepsilon = \begin{cases} r & \text{trong } W \setminus W_h \\ \max\{u * c_d - \varepsilon, r\} & \text{trong } W_h \end{cases}.$$

Khi đó $v_\varepsilon \in C(\Omega) \cap F$ và như vậy

$$u - \varepsilon \notin \max\{u - \varepsilon, r\} \notin v_\varepsilon \notin u$$

tại mỗi điểm trong W .

1.3.5. Mệnh đề. Cho $W \subset \mathbb{C}^n$ là tập mở liên thông, và $E \subset W$. Khi đó các

điều kiện sau tương đương:

$$(i) \quad u_{E,W}^* \circ 0;$$

$$(ii) \quad \text{Tồn tại hàm } v \in \text{PSH}(W) \text{ sao cho } E \in \{z \in W: v(z) = -\infty\}$$

Chứng minh. (ii) $\Leftrightarrow$ (i) là hiển nhiên. Thật vậy, nếu v như ở trên (ii), thì $ev \in u_{E,W}$ với mọi $e > 0$, từ đó $u_{E,W} = 0$ hầu khắp nơi trong W . Như vậy $u_{E,W}^* \circ 0$. Bây giờ giả sử $u_{E,W}^* \circ 0$. Theo Mệnh đề 2.6.2 [13], tồn tại một điểm $a \in W$ sao cho $u_{E,W}(a) = 0$. Bởi vậy, với mỗi $j \in \mathbb{N}$, có thể chọn một $v_j \in \text{PSH}(W)$ sao cho

$$v_j < 0, v_j|_E < -1 \text{ và } v_j(a) > -2^{-j}.$$

Đặt

$$v(z) = \inf_{j=1}^{\infty} v_j(z), \quad z \in W$$

Chú ý rằng $v(a) > -1$, v âm trong W , và $v|_E = -\infty$.

Đồng thời v là giới hạn của dãy giảm của các tổng riêng của các hàm đa điều hoà dưới. Vì $v \in -\infty$ nên ta kết luận $v \in \text{PSH}(W)$.

1.3.6. Mệnh đề. Cho W là tập con mở liên thông của $\mathbb{C}^n$. Giả sử $E = \bigcup_j E_j$,

trong đó $E_j \in W$ với $j = 1, 2, \dots$. Nếu $u_{E_j,W}^* \circ 0$ với mỗi j , thì $u_{E,W}^* \circ 0$.

Chứng minh. Sử dụng Mệnh đề 2.2.5 [13], chọn $v_j \in \text{PSH}(W)$ sao cho

$$v_j < 0 \text{ và } v_j|_{E_j} = -\infty.$$

Lấy điểm $a \in \bigcap_{j=1}^{\infty} W \setminus \bigcup_j v_j^{-1}(\{-\infty\})$. Bằng cách mở rộng mỗi hàm v_j bởi một

hằng số dương thích hợp, ta có thể giả thiết $v_j(a) > -2^{-j}$.

Khi đó
$$v = \bigwedge_j v_j \in \text{PSH}(W), \quad v < 0 \text{ và } v|_E = -\infty.$$

Suy ra $u_{E,W}^* \equiv 0$.

1.3.7. Mệnh đề. Cho W là tập con siêu lồi của $\mathbb{C}^n$ và K là một tập con compact của W . Giả thiết rằng $\{W_j\}$ là một dãy tăng những tập con mở của W sao cho $W = \bigcup_{j=1}^{\infty} W_j$ và $K \cap W_1 \neq \emptyset$. Khi đó

$$\lim_{j \rightarrow \infty} u_{K,W_j}(z) = u_{K,W}(z), \quad z \in W$$

Chứng minh. Lấy điểm $z_0 \in W$. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử rằng $K \cap \{z_0\} \subset W_1$. Giả sử $\rho < 0$ là một hàm vết cận đối với W sao cho $\rho < -1$ trên K .

Lấy $\varepsilon \in (0, 1)$ sao cho $\rho(z_0) < -\varepsilon$. Khi đó tồn tại $j_0 \in \mathbb{N}$ sao cho tập mở $w = \rho^{-1}((-\varepsilon, -1))$ là tập compact tương đối trong W_{j_0} .

Lấy $u \in \text{PSH}(W_{j_0})$ sao cho $u \leq 0$ trên W_{j_0} và $u \leq -1$ trên K . Khi đó

$$v(z) = \begin{cases} \max\{u(z) - \varepsilon, \rho(z)\}, & z \in w \\ \rho(z), & z \in W \setminus w \end{cases}$$

xác định một hàm đa điều hoà dưới; hơn nữa $v|_K \leq -1$ và $v \leq 0$. Như vậy

$v(z_0) \leq u_{K,W}(z_0)$. Vì u là một phần tử tùy ý của họ $u_{K,W_{j_0}}$, nên ta có

$$u_{K,W_{j_0}}(z_0) - \varepsilon \leq u_{K,W}(z_0)$$

Do đó ta có $u_{K,W_j}(z_0) - \varepsilon \leq u_{K,W}(z_0) \leq u_{K,W_j}(z_0)$ với mọi $j \geq j_0$ và ε nhỏ tùy

ý, suy ra điều phải chứng minh.

1.4. Tính $C^{1,1}$ - chính qui của hàm Green đa phức với một cực

Nếu W là một miền trong $\mathbb{C}^n$ và $z \in W$, thì hàm Green đa phức trong W với cực tại z được định nghĩa là

$$g = \sup \left\{ u \in \text{PSH}(W) : u < 0, \limsup_{z \rightarrow z_0} (u(z) - \log |z - z_0|) < \infty \right\}$$

1.4.1. Bổ đề. Giả sử $0 < e_0 < r_1 < r_2$ và $R > 0$. Khi đó tồn tại $d > 0$ và C^∞ - ánh xạ trơn

$$T : [0, e_0] \times (\bar{B}_{r_2} \setminus B_{r_1}) \rightarrow \bar{B}_d \subset \bar{B}_R \subset \mathbb{C}^n$$

(B_r là hình cầu mở tâm ở gốc với bán kính r) sao cho

$$T(e, a, h, \cdot) \text{ là chỉnh hình trong } B_R,$$

$$T(e, a, h, \cdot) \text{ là ánh xạ } \mathbb{C}^n \text{ lên } \mathbb{C}^n, \quad (1.2)$$

$$T(e, a, h, a) = a + h,$$

$$T(e, a, 0, z) = z.$$

Chứng minh. Giả sử $T(e, a, h, \cdot)$ là tự đẳng cấu chỉnh hình của B_e (được xác định trên B_R) của dạng $U \circ P$, trong đó

$$P(z) = e^{-\frac{\langle z, b \rangle}{|b|^2} b + \sqrt{1 - |b|^2} \frac{z}{|b|} - \frac{\langle z, b \rangle}{|b|^2} \frac{\bar{z}}{\bar{b}} - eb},$$

$|b| < R/e$ (xem [15]), và U là ánh xạ trực giao tuyến tính với

$$P(a) = \frac{|a + h|}{|a|} a, \quad U \frac{|a + h|}{|a|} a = a + h.$$

Ta có thể kiểm tra điều kiện đầu tiên được thỏa mãn nếu $b = eaa$, trong đó

$$a = \frac{|a+h| - |a|}{|a|(|a+h| - e^2)}.$$

Điều này chứng tỏ

$$P(z) = \frac{\frac{\langle z, a \rangle}{|a|^2} a + \sqrt{1 - e^2 |a|^2} \frac{\langle z, a \rangle}{|a|^2} a - \frac{\langle z, a \rangle}{|a|^2} a}{1 - a \langle z, a \rangle}.$$

Sự tồn tại một lân cận U , phụ thuộc vào a và h , không phụ thuộc e là rõ ràng. $\square$

1.4.2. Định lý. Giả sử W là C^∞ - miền giả lồi chặt trong $\mathbb{C}^n$ và g là hàm Green đa phức của W với cực tại $z \in W$. Khi đó g là $C^{1,1}$ - chính qui trong $\bar{W} \setminus \{z\}$ (tức là, g là $C^{1,1}$ - chính qui trong $W \setminus \{z\}$ và đạo hàm cấp hai của g bị chặn gần ∂W).

Chứng minh. Ta có thể giả thiết rằng $z = 0$. Chọn $e > 0$ sao cho $B_e \Subset W$ và đặt $W_e = W \setminus \bar{B}_e$. Theo [12], có một dãy các hàm $u^e \in \text{PSH}(W_e) \cap C^\infty(\bar{W}_e)$ tăng đều địa phương tới g trên $\bar{W} \setminus \{0\}$ khi $e \rightarrow 0$ và thỏa mãn $u^e = 0$ trên ∂W và $u^e = \log|z| + y$ trên ∂B_e , trong đó y trơn trong $\bar{W}$ và $\det(u^e_{i\bar{j}}) = e$.

Suy ra đạo hàm cấp hai của u^e hạn chế trên ∂B_e bị chặn, tức là

$$\|\tilde{N}^2(u^e|_{\partial B_e})\| \leq C_1 \quad (1.3)$$

Thêm vào đó, trong [12] đã chỉ ra u^e thỏa mãn

$$\|\tilde{N}u^e\|_{\partial W}, \|\tilde{N}^2u^e\|_{\partial W} \leq C_2 \quad (1.4)$$

ở đây C_1 và C_2 là các hằng số chỉ phụ thuộc vào W .

Cố định $K \Subset W \setminus \{0\}$. Ký hiệu $C_3, C_4, \dots$ là các hằng số dương chỉ phụ thuộc

vào W và K . Ta cần phải chứng minh

$$\|\tilde{N}^2 u^e\|_K \leq C_3 \quad (1.5)$$

Với $z \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ sao cho $|z| = 1$, ký hiệu $\mathfrak{P}_z$ là đạo hàm theo hướng z . Vì u^e là đa điều hoà dưới, nên ta có

$$\mathfrak{P}_z^2 u^e + \mathfrak{P}_{iz}^2 u^e \geq 0.$$

Điều này chứng tỏ

$$|\tilde{N}^2 u^e(a)| = \sup_{|z|=1} \mathfrak{P}_z^2 u^e(a) = \limsup_{h \rightarrow 0} \frac{u^e(a+h) + u^e(a-h) - 2u^e(a)}{|h|^2} \quad (1.6)$$

với $a \in K$.

Giả sử W_1 và W_2 là những miền sao cho $K \subset W_1 \subset W_2 \subset W$. Ta sẽ sử dụng Bổ đề 1.4.1 với r_1, r_2 và R sao cho $K \subset \bar{B}_{r_2} \setminus B_{r_1}$ và $W \subset B_R$. Với $z \in \bar{W}_2$ và h, e đủ nhỏ, đặt

$$v(z) := u^e(T(e, a, h, z)) + u^e(T(e, a, -h, z))$$

$$\text{và} \quad v(a) = u^e(a+h) + u^e(a-h).$$

Khai triển Taylor quanh gốc đối với hàm f tron tùy ý, ta được

$$f(h) + f(-h) = 2f(0) + \frac{1}{2}(\tilde{N}^2 f(h) + \tilde{N}^2 f(-h))h^2$$

với $h \in [0, h]$ và $h \in [0, -h]$ nào đó.

Bởi vậy, theo (1.3) và (1.4)

$$v(z) \leq 2u^e(z) + C_4 |h|^2, \quad z \in \mathfrak{P}B_e \quad (1.7)$$

Mặt khác,

$$v(z) \leq 2u^e(z) + C_4 |h|^2, \quad z \in \mathfrak{P}W_2 \quad (1.8)$$

trong đó

$$C_4 = \sup_{|h| \leq |h|, z \in \mathfrak{P}W_2} |\tilde{N}_h^2 (u^e \circ T)(e, a, h, z)|.$$

Suy ra

$$C_5 \left(\|\tilde{N}^2 u^e\|_{\bar{W} \setminus W} + \|\tilde{N} u^e\|_{\bar{W} \setminus W}^2 \right) \quad (1.9)$$

với h đủ nhỏ. Vì ánh xạ $A \mapsto (\det A)^{1/n}$ là siêu cộng tính trên tập các ma trận Hermite dương, nên ta có

$$\begin{aligned} & \left| \det \left(v_{i\bar{j}} \right) \right|^{1/n} \leq e^{1/n} \left(\left| \text{Jac} T(e, a, h, \cdot) \right|^{2/n} + \left| \text{Jac} T(e, a, -h, \cdot) \right|^{2/n} \right)^{1/2} \\ & \leq e^{1/n} (2 - C_6 |h|^2) \end{aligned} \quad (1.10)$$

Giả sử $M > 0$ sao cho $|z|^2 - M \leq 0$ với $z \in \bar{W}$, và định nghĩa

$$w(z) = v(z) - \max \{ C_4, C_5 \} |h|^2 + e^{1/n} C_6 |h|^2 (|z|^2 - M).$$

Khi đó w đã điều hoà dưới trong $\bar{W}$, $w \leq 2u^e$ trên $\bar{B}_e \cap \bar{W}$ theo (1.7) và (1.8), và $\det(w_{i\bar{j}})^{1/n} \leq 2^n e$ trong $\bar{W}$ theo (1.10). Theo nguyên lý so sánh (xem trong [1]) ta có $w \leq 2u^e$ trong $\bar{W}$. Đặc biệt, $w(a) \leq 2u^e(a)$, và kết hợp với (1.6) và (1.9), ta được

$$|\tilde{N}^2 u^e(a)| \leq C_7 \left(\|\tilde{N}^2 u^e\|_{\bar{W} \setminus W} + \|\tilde{N} u^e\|_{\bar{W} \setminus W}^2 \right) + C_8.$$

Do $\bar{W}$ có thể chọn là tập đóng tùy ý gần W , nên từ (1.5) suy ra (1.4). W

1.4.3. Định lý. *Giả sử W là miền siêu lồi bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ và giả sử g là hàm Green của W với cực tại $z \in \bar{W}$. Khi đó $g \in C^{0,1}(\bar{W} \setminus \{z\})$ khi và chỉ khi tồn tại $y \in \text{PSH}(W)$ sao cho*

$$-C \text{dist}(z, \bar{W}) \leq y(z) < 0, \quad z \in \bar{W}, \quad \text{với } C > 0 \text{ nào đó.}$$

Chứng minh. Phần “chỉ khi” là hiển nhiên. Lại giả thiết rằng $z = 0$ và cố định $K \Subset W \setminus \{0\}$. Giả sử $r > 0$ sao cho $B_r \Subset W$. Với $0 < \varepsilon < r$, định nghĩa

$$u^\varepsilon := \sup \{ v \in \text{PSH}(W) : v < 0, v|_{B_\varepsilon} \leq \log(\varepsilon/r) \}.$$

Khi đó dễ dàng chứng minh $u^e \in PSH(W) \cap C(\bar{W})$, $u^e = 0$ trên ∂W , $u^e = \log(e/r)$ trên $\bar{B}_e$, và $u^e \rightarrow g$ khi $e \rightarrow 0$ (xem [13]). Do g là hàm đa điều hoà dưới cực đại gần ∂W , ta có thể giả thiết rằng

$$u^e \geq g \text{ gần } \partial W \quad (1.11)$$

Với $a \in K$, e cho trước, và h đủ nhỏ, định nghĩa

$$W_e = \{z \in W : T(e, a, h, z) \in W\}.$$

Theo (1.11) và điều giả định trên y ta có

$$u^e(z) \geq y(z) - C \text{dist}(z, \partial W) \geq -C|h|, \quad z \in W_e,$$

trong đó C chỉ phụ thuộc vào K và W . Do đó, với $z \in W_e$ ta có

$$u^e(T(e, a, h, z)) \leq 0 \leq u^e(z) + C|h|.$$

Do u^e là cực đại trên $W_e \setminus \bar{B}_e$, từ (1.3) suy ra

$$u^e(T(e, a, h, z)) \leq u^e(z) + C|h|, \quad z \in W_e.$$

Vì vậy, nếu $z = a$ với $a \in K$ và $|h| < d$, trong đó d chỉ phụ thuộc vào K và W , ta có

$$u^e(a + h) \leq u^e(a) + C|h|$$

và định lý được chứng minh. $\square$

Chương 2

TÍNH CHÍNH QUY CỦA HÀM GREEN ĐA PHỨC VỚI NHIỀU CỰC

Trong chương này ta chứng minh rằng nếu W là miền $C^{2,1}$ trơn, giả lồi chặt trong $\mathbb{C}^n$, thì hàm Green đa phức của W với nhiều cực cố định và trọng số dương là $C^{1,1}$ - chính quy. Trước tiên chúng ta nhắc lại:

Nếu W là miền bị chặn trong $\mathbb{C}^n, p^1, \dots, p^k \in W$ phân biệt, và $m_1, \dots, m_k > 0$, thì hàm Green đa phức tương ứng được định nghĩa là

$$g = \sup \left\{ u \in \text{PSH}(W) \mid u < 0, \limsup_{z \rightarrow p^i} (u(z) - m_i \log |z - p^i|) < \infty, i = 1, \dots, k \right\}$$

Có thể chỉ ra g là hàm đa điều hoà dưới cực đại trong $W \setminus \{p^1, \dots, p^k\}$, và

$$Mg = \frac{p^n}{n! 2^n} \sum_i m_i d_{p^i}$$

(xem [14]), trong đó M là toán tử Monge-Ampère phức. Với u là hàm trơn

$$Mu = \det \frac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial \bar{z}_j},$$

và theo [10] Mu là độ đo Borel không âm nếu $u \in \text{PSH}(W)$ và u bị chặn địa phương gần ∂W .

Ta nhắc lại một vài ký hiệu:

Nếu $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, thì $x_i = \text{Re } z_i, y_i = \text{Im } z_i$.

Nếu $z \in \mathbb{C}^n, |z| = 1$, thì ký hiệu $\mathbb{P}_z^m u(z)$ là đạo hàm cấp m của u theo hướng z tại z .

Với các đạo hàm riêng chúng ta sẽ dùng ký hiệu

$$u_{x_i} = \frac{\mathbb{P} u}{\mathbb{P} x_i}, \quad u_{y_i} = \frac{\mathbb{P} u}{\mathbb{P} y_i}, \quad u_i = \frac{\mathbb{P} u}{\mathbb{P} z_i}, \quad u_{\bar{i}} = \frac{\mathbb{P} u}{\mathbb{P} \bar{z}_i}.$$

Nếu viết $|\tilde{N}u| \leq f$ trong tập mở $D \subset \mathbb{C}^n$, trong đó f là bị chặn địa phương, không âm trong D , thì có nghĩa u là Lipschitz địa phương và bất đẳng thức xảy ra hầu khắp nơi ($|\tilde{N}u|$ hiểu theo nghĩa của Định lý Rademacher).

Nếu viết $dd^c u \leq dd^c |z|^2$, thì có nghĩa là $u - |z|^2$ là đa điều hoà dưới.

2.1. Các ước lượng cơ bản

Cho W là một miền bị chặn trong $\mathbb{C}^n$, các cực phân biệt $p^1, \dots, p^k \in W$ và các trọng số $m_1, \dots, m_k > 0$, cố định các số dương R, r, m và M sao cho với $i, j = 1, \dots, k$

$$W \cap B(p^i, R)$$

$$\bar{B}(p^i, r) \subset W \text{ và } \bar{B}(p^i, r) \cap \bar{B}(p^j, r) = \emptyset$$

$$m \leq m_i \leq M.$$

Có thể kiểm tra được ước lượng sau đây đối với g :

$$\inf_i m_i \log \frac{|z - p^i|}{R} \leq g(z) < 0, \quad z \in W$$

$$m_i \log \frac{|z - p^i|}{R} - (k-1)M \log \frac{R}{r} \leq g(z) \leq m_i \log \frac{|z - p^i|}{r}, \quad z \in \bar{B}(p^i, r).$$

Với e mà $0 < e < r$, định nghĩa

$$W^e := W \setminus \bigcup_i \bar{B}(p^i, e),$$

$$\text{và } g^e := \sup \{v \in \text{PSH}(W) \mid v < 0, v|_{\bar{B}(p^i, e)} \leq m_i \log \frac{e}{r}, i = 1, \dots, k\}.$$

Ta có đánh giá

$$g^e(z) \leq m_i \log \frac{\max\{|z - p^i|, e\}}{r}, \quad z \in \bar{B}(p^i, r), \quad g^e \in \text{PSH}(W) \quad (2.1)$$

$$g \leq g^e \leq \frac{\log(r/e)}{\log(R/e) + (k-1)(M/m)\log(R/r)} g \quad \text{trong } W^e \quad (2.2)$$

$g^e - g^0 := g$ khi $e = 0$, và hội tụ đều địa phương trong $W \setminus \{p^1, \dots, p^k\}$.

2.1.1. Mệnh đề. Giả sử W là C^∞ trơn và giả lồi chặt. Khi đó tồn tại r_0 chỉ phụ thuộc vào k, r, R, m và M , $0 < r_0 \leq r$, sao cho với e mà $0 < e < r_0$ ta có thể tìm được $v \in \text{PSH}(W) \cap C^\infty(\bar{W})$ với $dd^c v \leq dd^c |z|^2$ trong W , $v = 0$ trên ∂W , và với $i = 1, \dots, k$ ta có

$$m \log \frac{e}{r} \leq v(z) \leq m \log \frac{|z - p^i|}{r} \quad \text{nếu } e \leq |z - p^i| \leq r.$$

Chứng minh. Đặt

$$w(z) := \sum_i m \log \frac{|z - p^i|}{R} + |z - p^1|^2 - R^2,$$

sao cho $w < 0$ trên $\bar{W}$, $dd^c v \leq dd^c |z|^2$, và $w < m \log(e/r)$ trên $\mathbb{B}(p^i, e)$.

Mặt khác, với $z \in \mathbb{B}(p^i, r)$ ta có

$$w(z) \leq kM \log \frac{r}{R} + r^2 - R^2 > m \log \frac{e}{r} + |z - p^i|^2 - e^2,$$

lấy e sao cho

$$m \log \frac{e}{r} - e^2 < kM \log \frac{r}{R} - R^2.$$

Tương tự như trong [5], giả sử $c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ là C^∞ trơn và thỏa mãn

$$c(t) = 0, \quad t \in [0, 1],$$

$$c(t) = t, \quad t \in [1, 2],$$

$$0 \leq c(t) \leq 1 = 0, \quad t \in [2, 3],$$

$$c(t) \leq 0, \quad t \in [3, 4].$$

Với $x, y \in \mathbb{C}$ đặt

$$f_j(x, y) := x + \frac{1}{j} c(j(y - x)),$$

sao cho

$$f_j(x, y) = \max\{x, y\} \text{ nếu } |x - y|^3 \leq \frac{1}{j}.$$

Nếu u, v các hàm đa điều hoà dưới với $dd^c u, dd^c v \leq dd^c |z|^2$, thì

$$dd^c f_j(u, v) \leq (1 - c(j(v - u)))dd^c u + c(j(v - u))dd^c v \leq dd^c |z|^2.$$

Giả sử y là hàm xác định đối với W . Nếu chọn j, A đủ lớn, thì hàm

$$v(z) = \begin{cases} f_j(w(z), m_1 \log \frac{e}{r} + |z - p^i|^2 - e^{\frac{2}{j}}) & z \in \bigcup_i \bar{B}(p^i, r) \\ f_j(w(z), Ay(z)), & z \in W \setminus \bigcup_i \bar{B}(p^i, r) \end{cases}$$

có tất cả các tính chất đòi hỏi. W

Chú ý rằng nếu $k = 1$ thì ta có thể chọn $r_0 = r$ trong Mệnh đề 2.1.1.

2.1.2. Định lý. Nếu W là miền siêu lồi, thì g là hàm liên tục được xác định trên tập

$$\{(z, p^1, \dots, p^k, m_1, \dots, m_k) \in \bar{W} \times W^k \times (\mathbb{R}_+)^k \mid |z - p^{i-1} - p^j| \leq 2e, i-1 \leq j\}, \quad (2.3)$$

trong đó với $z \in \mathbb{C} \setminus W$ ta đặt $g := 0$

(W gọi là miền siêu lồi nếu tồn tại $y \in \text{PSH}(W)$ với $y < 0$ và $\lim_{z \rightarrow \mathbb{C} \setminus W} y(z) = 0$).

Chứng minh. Theo (2.2) $g^e \in g$ đều địa phương trên tập (2.3) khi $e > 0$.

Như vậy chỉ cần chứng tỏ rằng với e đủ bé cố định, g^e là liên tục như hàm được xác định trên

$$\bar{W} \setminus \{(p^1, \dots, p^k) \in W^k \mid \text{dist}(p^i, \mathbb{C} \setminus W) > e, |p^i - p^j| > 2e, i-1 \leq j\} \times (\mathbb{R}_+)^k.$$

Giả sử $p^{i,j} \in p^i$, $m_{i,j} \in m_i$ khi $j \in \mathbb{N}$, $i = 1, \dots, k$, và

$$g_j^e := \sup \left\{ v \in \text{PSH}(W) \mid v < 0, v|_{\bar{B}(p^{i,j}, e)} \leq m_{i,j} \log \frac{e}{r} \right\}.$$

Chú ý rằng nếu $0 < e < r_0$ và j đủ lớn, thì theo mệnh đề 2.1.1 áp dụng cho hình cầu chứa W ta có

$$\lim_{z \in \bar{B}(p^i, e)} g_j^e(z) = m_i \log(e/r).$$

Hơn nữa, $\lim_{z \in \bar{W}} g_j^e(z) = 0$, vì W là miền siêu lồi. Bởi vậy, theo một kết quả của Blocki [4, Định lý 1.5], g_j^e liên tục trên $\bar{W}$.

Để kết thúc việc chứng minh, chỉ cần chứng tỏ rằng $g_j^e \in g^e$ đều khi $j \in \mathbb{N}$ trong $\bar{W}$. Cố định $c > 0$. Với $z \in \bar{B}(p^i, e)$ và j đủ lớn, theo (2.1) ta có

$$g_j^e(z) \leq m_{i,j} \log \frac{\max \{|z - p^{i,j}|, e\}}{r} \leq m_{i,j} \log \frac{e + |p^i - p^{i,j}|}{r} \leq m_i \log \frac{e}{r} + c,$$

Với $z \in \bar{B}(p^{i,j}, e)$

$$g^e(z) \leq m_i \log \frac{\max \{|z - p^i|, e\}}{r} \leq m_i \log \frac{e + |p^i - p^{i,j}|}{r} \leq m_{i,j} \log \frac{e}{r} + c.$$

Vì vậy với j như thế ta có

$$g^e - c \leq g_j^e \leq g^e + c \text{ trên } \bar{W},$$

và từ đó suy ra định lý được chứng minh. $\square$

Trong chứng minh của Định lý 2.3.3 ta cần xấp xỉ g^e . Nếu $0 \leq e < r$ và $0 \leq d \leq 1$, thì định nghĩa

$$g^{e,d} := \sup \{ v \in \text{PSH} \cap L^\infty(W) \mid v \leq g^e, Mv \leq d \text{ trong } W^e \}$$

Chú ý rằng $g^{e,d}$ tăng theo e và giảm theo d . Ta có

$$g^e + d(|z - p^1|^2 - R^2) \leq g^{e,d} \leq g^e \quad (2.4)$$

2.1.3. Mệnh đề. Giả sử $g^{e,d} \in \text{PSH}(W)$, $Mg^{e,d} = d$ trong W . Khi đó nếu W là siêu lồi và $0 < e < r_0$, thì $g^{e,d} \in C(\bar{W})$. Nếu W là C^∞ trơn và giả lồi chặt, $0 < e < r_0$ và $0 < d \leq 1$, thì $g^{e,d} \in C^\infty(\bar{W})$.

Chứng minh. Giả sử

$$B = \{v \in \text{PSH}(W) \mid v \leq g^e, Mv \geq d \text{ trong } W\}$$

Theo Bổ đề Choquet tồn tại một dãy $v_j \in B$ sao cho $(g^{e,d})^* = (\sup_j v_j)^* \cdot (u^*$ ký hiệu là chính quy hoá nửa liên tục trên của u). Nếu $w_j = \max\{v_1, \dots, v_j\}$, thì $Mw_j \geq d$ trong W ([5]) và như vậy $w_j \in B$. Bởi vậy $w_j - (g^{e,d})^*$ hầu khắp nơi, và theo định lý xấp xỉ trong [5] $M(g^{e,d})^* \geq d$ trong W . Ta kết luận rằng $g^{e,d} \in \text{PSH}(W)$ và $Mg^{e,d} \geq d$ trong W . Từ đó $Mg^{e,d} = d$ trong W .

Bây giờ giả sử W là miền siêu lồi và $0 < e < r_0$. Theo [4] tồn tại $y \in \text{PSH}(W) \cap C(\bar{W})$ với $y = 0$ trên ∂W và $My \geq 1$ trong W . Với A đủ lớn ta có

$$Ay \leq g^{e,d} \leq 0 \text{ trong } W \quad (2.5)$$

Giả sử v được cho như trong Mệnh đề 2.1.1 áp dụng cho một hình cầu chứa W . Khi đó

$$v(z) \leq g^{e,d}(z) \leq m \log \frac{|z - p^i|}{r} \text{ nếu } e \leq |z - p^i| \leq r \quad (2.6)$$

Với $h \in \mathbb{C}^n$ nhỏ và $z \in W$ với $|h| < \text{dist}(z, \partial W) < 2|h|$ ta có

$$|g^{e,d}(z+h) - g^{e,d}(z)| \leq C(|h|).$$

Theo nguyên lý so sánh (xem [5]) áp dụng cho $g^{e,d}$ và $g^{e,d}(\cdot + h)$, bất đẳng thức trên xảy ra với mọi z mà $\text{dist}(z, \partial W) > |h|$. Theo (2.5) và (2.6) ta có

$$\lim_{h \rightarrow 0} C(|h|) = 0.$$

Vậy $g^{e,d}$ là hàm liên tục.

Phần sau của mệnh đề được suy ra từ Mệnh đề 2.1.1 và Định lý 1.1 [12].

2.2. Các ước lượng Gradient

2.2.1 Định lý. Giả sử W là miền bị chặn trong $\mathbb{C}^n, p^1, \dots, p^k \in W$ phân biệt, $m_1, \dots, m_k > 0$,

$$g = \sup_{v \in \text{PSH}(W)} \left\{ v < 0, \limsup_{z \rightarrow p^i} (v(z) - m_i \log |z - p^i|) < \infty, i = 1, \dots, k \right\}$$

thỏa mãn

$$\limsup_{z \rightarrow W} \frac{|g(z)|}{\text{dist}(z, \partial W)} < \infty.$$

Khi đó

$$|\tilde{N}g(z)| \leq \frac{C}{\min_i |z - p^i|}, \quad z \in W \setminus \{p^1, \dots, p^k\},$$

trong đó C là hằng số chỉ phụ thuộc vào $W, p^1, \dots, p^k, m_1, \dots, m_k$.

Định lý 2.2.1 trực tiếp suy ra từ Định lý 2.2.3 áp dụng cho $d = 0$.

Trước tiên ta cần bổ đề sau:

2.2.2. Bổ đề. Tồn tại một hằng số $C = C(k, n)$ sao cho với

$$p^1, \dots, p^k \in \mathbb{C}^n, a \in \mathbb{C}^n \setminus \{p^1, \dots, p^k\}$$

ta có thể thay đổi trực chuẩn các biến trong $\mathbb{C}^n$ để

$$|a - p^i| \leq C |a_1 - p_1^i|, \quad i = 1, \dots, k.$$

Chứng minh. Ký hiệu S là mặt cầu đơn vị trong $\mathbb{C}^n$. Ta chứng minh rằng tồn tại $b \in S$ sao cho

$$|a - p^i| \leq C |\langle a - p^i, b \rangle|, \quad i = 1, \dots, k,$$

tức là,

$$\left| \left\langle \frac{a - p^i}{|a - p^i|}, b \right\rangle \right| \geq \frac{1}{C_0}.$$

Đặt

$$C_0 := \frac{1}{\min_{S^k} f},$$

trong đó

$$f(z^1, \dots, z^k) := \max_{b \in S} \min_i |\langle z^i, b \rangle|$$

là một hàm liên tục trên S^k . Phần còn lại ta chứng minh rằng $f > 0$ trên S^k .

Cố định $z^1, \dots, z^k \in S$ và đặt $K_i := \{b \in S \mid \langle b, z^i \rangle = 0\}$, $i = 1, \dots, k$. Khi đó

$\bigcup_i K_i \neq S$, và vì vậy với $b \in S \setminus \bigcup_i K_i$ ta có

$$f(z^1, \dots, z^k) \geq \min_i |\langle z^i, b \rangle| > 0. \quad \square$$

2.2.3. Định lý. Cố định 0 ≤ d ≤ 1. Giả sử

$$\limsup_{z \in \mathbb{R}^n \setminus W} \frac{|g^{0,d}(z)|}{\text{dist}(z, W)} \leq B < \infty.$$

Khi đó với ε thỏa mãn Mệnh đề 2.1.1 ta có

$$|\tilde{N}g^{e,d}(z)| \leq \frac{C}{\min_i |z - p^i|}, \quad z \in W^e,$$

trong đó C là hằng số chỉ phụ thuộc vào n, k, R, r, m, M , và B .

Chứng minh. Giả sử $r > 0$ sao cho

$$|g^{e,d}(z) - g^{0,d}(z)| \leq 2B \text{dist}(z, W) \quad \text{nếu } \text{dist}(z, W) \leq r.$$

với h đủ nhỏ ta có

$$g^{e,d}(z + h) - g^{e,d}(z) \leq 2B|h| \quad \text{nếu } \text{dist}(z, W) = |h|,$$

và do Mệnh đề 2.1.1

$$m_i \log \frac{e}{r} \leq g^{e,d}(z) \leq m_i \log \frac{|z - p^i|}{r} \text{ nếu } e \leq |z - p^i| \leq r,$$

ta có

$$g^{e,d}(z+h) - g^{e,d}(z) \leq m_i \log \frac{|z - p^i + h|}{e} \leq 2 \frac{m_i}{e} |h|,$$

nếu $z \in \mathbb{B}(p^i, e + |h|)$, $i = 1, \dots, k$.

Theo nguyên lý so sánh ta nhận được

$$g^{e,d}(z+h) - g^{e,d}(z) \leq 2 \max \left\{ B, \frac{M}{e} \right\} |h| \text{ nếu } |h| \leq \min \{r, \text{dist}(z, \mathbb{B}^e)\},$$

và như vậy

$$|\tilde{N}g^{e,d}| \leq \frac{C_1}{e} \text{ trong } W^e \quad (2.7)$$

Bây giờ cố định $a \in W^e$ và chọn biến như trong Bổ đề 2.2.2. Đặt

$$P(l) := (l - p_1^1) \dots (l - p_1^k),$$

$$\text{sao cho } \frac{|P(z_1)|}{|P(a_1)|} \leq C_2 \frac{\max_i |z - p^i|}{\min_i |a - p^i|} \leq \frac{C_3}{\min_i |a - p^i|}, \quad z \in W.$$

Với h đủ bé giả sử

$$W^e := \left\{ z \in W \left| z + \frac{P(z_1)}{P(a_1)} h \in W^e \right. \right\}$$

và

$$W^e := W^e \setminus \bigcup_i \bar{B}(p^i, e + e_0),$$

trong đó

$$e_0 = \min \{e, r - e, \text{dist}(a, \mathbb{B}^e), r\}.$$

Đặt

$$v(z) := g^{e,d}(z) + \frac{P(z_1)}{P(a_1)} h^{\frac{e}{d}} + \frac{C_4}{\min_i |a - p^i|} \left(|z - p^1|^2 - R^2 \right) |h|,$$

sao cho nếu C_4 đủ lớn thì

$$Mv^3 \left| 1 + \frac{P(z_1)}{P(a_1)} h_1 \right|^2 d + \frac{C_4}{\min_i |a - p^i|} |h|^3 d.$$

Với $z \in \mathbb{W}$ ta có

$$v(z) - g^{e,d}(z) \leq 2B \text{dist}(z, \mathbb{W}) \leq 2B \frac{C_3}{\min_i |a - p^i|} |h|,$$

trong khi với $z \in B(p^i, e + e^{\frac{1}{d}})$ ta có

$$v(z) - g^e(z) \leq \frac{C_1}{e} \frac{|P(z_1)|}{|P(a_1)|} |h| \leq C_1 C_2 \frac{e + e^{\frac{1}{d}}}{e \min_i |a - p^i|} \leq \frac{C_5}{\min_i |a - p^i|} |h|.$$

Do đó, theo nguyên lý so sánh ta được

$$g^e(a + h) - g^e(a) \leq \frac{C_6}{\min_i |a - p^i|} |h|$$

nếu

$$|h| \leq e^{\frac{1}{d}} \frac{\min_i |a - p^i|}{C_3},$$

và định lý được chứng minh. $\square$

2.3. Các ước lượng của đạo hàm cấp hai

Mục đích của chúng ta là ước lượng $|\tilde{N}^2 g^{e,d}|$ đối với e, d nhỏ. Trước hết, ta cần một ước lượng trên $\mathbb{W}$. Sử dụng phương pháp trong [8] (xem thêm [12]), ta chứng minh hai định lý sau đây và áp dụng chúng để chứng minh tính chính qui của hàm Green đa phức với nhiều cực (Định lý 2.3.3).

2.3.1. Định lý. Cho W là miền giả lồi chặt, bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ và y là C^∞ -hàm xác định đa điều hoà dưới đối với W . Giả sử $dd^c y \leq dd^c |z|^2$ và tồn tại các hằng số dương A, a sao cho

$$|y|, |\tilde{N}y|, |\tilde{N}^2y|, |\tilde{N}^3y| \leq A \text{ trên } \bar{W},$$

$$|\tilde{N}y|^3 \leq a \text{ trên } \mathbb{P}W.$$

Với $r > 0$ ký hiệu $U = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \text{dist}(z, \mathbb{P}W) < r\}$.

Giả sử $u \in \text{PSH}(W \setminus U) \cap C^\infty(\bar{W} \setminus U)$ sao cho $u = 0$ trên $\mathbb{P}W$ và $u < 0$, $\mu = d$ trong $W \setminus U$, trong đó $0 < d \leq d_0$. Giả thiết rằng cũng có các hằng số dương b, B sao cho

$$|\tilde{N}u|^3 \leq b \text{ trên } \mathbb{P}W$$

$$|\tilde{N}u| \leq B \text{ trên } \bar{W} \setminus U.$$

Khi đó tồn tại hằng số $C = C(n, r, a, A, b, B, d_0)$ sao cho

$$|\tilde{N}^2u| \leq C \text{ trên } \mathbb{P}W.$$

Chứng minh. Nếu $z_0 \in \mathbb{P}W$ thì ta sẽ ký hiệu chuẩn ngoài của $\mathbb{P}W$ tại z_0 là N_{z_0} . Với $z \in \bar{W}$ ta có

$$\mathbb{P}_{N_{z_0}} y(z) = \left\langle \tilde{N}y(z), \frac{\tilde{N}y(z_0)}{|\tilde{N}y(z_0)|} \right\rangle^3 = |\tilde{N}y(z_0)|^3 - A|z - z_0|^3.$$

Từ đó, tồn tại các hằng số dương δ, ρ sao cho

$$\mathbb{P}_{N_{z_0}} y(z) \geq \delta \rho z \in \mathbb{P}W, z \in \bar{W} \setminus B(z_0, \rho).$$

Cố định $z_0 \in \mathbb{P}W$.

Ta có thể giả thiết rằng $N_{z_0} = (0, \dots, 0, 1)$ sao cho $\mathbb{P}_{N_{z_0}} = \mathbb{P} / \mathbb{P}x_n$.

Vì cả y và u là các C^∞ -hàm xác định đối với W , nên tồn tại C^∞ -hàm v được xác định trong lân cận của $\mathbb{P}W$, sao cho $u = vy$ và $v > 0$ trên $\bar{W} \setminus U$. Do đó, nếu $t, s \in \{x_1, y_1, \dots, x_{n-1}, y_{n-1}, y_n\}$, thì

$$u_{ts}(z_0) = \frac{u_{x_n}(z_0)y_{ts}(z_0)}{y_{x_n}(z_0)} \quad (2.8)$$

và như vậy

$$|u_{ts}(z_0)| \leq C_1 \quad (2.9)$$

Bây giờ giả sử

$$|u_{tx_n}(z_0)| \leq C_2 \quad (2.10)$$

Ta sẽ ước lượng $|u_{x_n x_n}(z_0)|$. Ta có

$$u_{x_n x_n} = 4u_{n\bar{n}} - u_{y_n y_n}.$$

Theo (2.8), (2.9), (2.10) và do $dd^c y \wedge dd^c |z|^2$, nên ta có

$$d_0 \wedge d = \det(u_{i\bar{j}}(z_0)) \wedge u_{n\bar{n}}(z_0) \frac{\partial \bar{\partial}^{n-1}}{\partial A \partial \bar{\partial}} - C_3.$$

Phần còn lại ta chứng minh (2.10). Với $z \in \bar{W}$ ta có

$$y_{x_n}(z) = \operatorname{Re} \left\langle \tilde{N}y(z), \frac{\tilde{N}y(z_0)}{|\tilde{N}y(z_0)|} \right\rangle \\ \leq |\tilde{N}y(z_0)| - A|z - z_0| \leq a - A|z - z_0|.$$

Trên $\bar{W} \setminus \bar{B}(z_0, \rho)$ xác định

$$T := u_t - \frac{y_t}{y_{x_n}} u_{x_n}$$

sao cho

$$T = 0 \text{ trên } \mathbb{P}W \setminus \bar{B}(z_0, \rho) \quad (2.11)$$

Ta có

$$T_{x_n}(z_0) = u_{tx_n}(z_0) - \frac{y_{tx_n}(z_0)}{y_{x_n}(z_0)} u_{x_n}(z_0)$$

và như vậy chỉ cần chứng minh rằng

$$|T_{x_n}(z_0)| \leq C_4$$

Đặt $f := y_t / y_{x_n}$, khi đó

$$|\tilde{N}f|, |\tilde{N}^2 f| \leq C_5 \text{ trong } \bar{W}\zeta\bar{B}(z_0, \rho) \quad (2.12)$$

Vì $\det(u_{i\bar{j}})$ là hằng số, nên

$$u^{i\bar{j}} u_{i\bar{j}t} = u^{i\bar{j}} u_{i\bar{j}x_n} = 0.$$

(trong đó ký hiệu $(u^{i\bar{j}})$ là ma trận nghịch đảo của ma trận chuyển vị của $(u_{i\bar{j}})$). Từ đó, ta có

$$u^{i\bar{j}} T_{i\bar{j}} = -u_{x_n} u^{i\bar{j}} f_{i\bar{j}} - 2\operatorname{Re} u^{i\bar{j}} u_{ix_n} f_{\bar{j}} = -u_{x_n} u^{i\bar{j}} f_{i\bar{j}} - 2f_{x_n} - 2\operatorname{Im} u^{i\bar{j}} u_{iy_n} f_{\bar{j}}.$$

Vì

$$u^{i\bar{j}} (u_{y_n}^2)_{i\bar{j}} = 2u^{i\bar{j}} u_{iy_n} u_{j\bar{y}_n}$$

nên từ bất đẳng thức Schwarz và (2.12) suy ra

$$u^{i\bar{j}} (\pm T + \frac{1}{2} u_{y_n}^2)_{i\bar{j}} \leq \mu u_{x_n} u^{i\bar{j}} f_{i\bar{j}} + 2f_{x_n} - u^{i\bar{j}} f_i f_{\bar{j}} \leq C_6 \frac{\rho}{\delta} u^{i\bar{i}} + \frac{\rho}{\delta}.$$

Trên $\mathbb{W}$ ta có $u_{y_n} = u_{x_n} y_{y_n} / y_{x_n}$, và như vậy theo (2.11) ta có

$$\left| \pm T + \frac{1}{2} u_{y_n}^2 \right| \leq C_7 |z - z_0|^2, \quad z \in \mathbb{W}\zeta\bar{B}(z_0, \rho).$$

Hơn nữa,

$$\left| \pm T + \frac{1}{2} u_{y_n}^2 \right| \leq C_8 \text{ trong } \bar{W}\zeta\bar{B}(z_0, \rho).$$

Từ đó nếu $w = \pm T + \frac{1}{2}u_{y_n}^2 - C_9|z - z_0|^2$, trong đó C_9 đủ lớn, thì $w \neq 0$ trên $\mathbb{P}(W \setminus B(z_0, \rho))$ và

$$u^{i\bar{j}} w_{i\bar{j}}^3 - C_{10} \frac{a}{\delta} u^{i\bar{i}} + \frac{1}{\delta}.$$

Do đó, nếu C_{11} và C_{12} đủ lớn, thì $w + C_{11}y + C_{12}u \neq 0$ trên $\mathbb{P}(W \setminus B(z_0, \rho))$ và $u^{i\bar{j}}(w + C_{11}y + C_{12}u)_{i\bar{j}}^3 \neq 0$ trong $W \setminus B(z_0, \rho)$. Theo nguyên lý cực đại ta có

$$w + C_{11}y + C_{12}u \neq 0 \text{ trong } W \setminus B(z_0, \rho).$$

Suy ra $|T_{x_n}(z_0)| \leq C_{11}A + C_{12}B \cdot W$

2.3.2. Định lý. *Có định $a > 1$ và giả sử $W = \{z \in \mathbb{C}^n \mid 1 < |z| < a\}$. Giả sử*

$u \in \text{PSH}(W) \cap C^\infty(\bar{W})$ sao cho $u = 0$ trên $\mathbb{P}B_1$ ($B_a = B(0, a)$), $u > 0$, $Mu = d > 0$ trong W . Hơn nữa, giả sử có các hằng số dương b, b, B sao cho

$$u^3 \geq b \text{ trên } \mathbb{P}B_a,$$

$$|\tilde{N}u|^3 \geq b \text{ trên } \mathbb{P}B_1$$

$$|\tilde{N}u| \leq B \text{ trên } \bar{W}.$$

Khi đó tồn tại các hằng số dương $d_0 = d_0(n, a, b)$ và $C = C(n, a, b, b, B)$ sao cho nếu $0 < d \leq d_0$, ta có

$$|\tilde{N}^2 u| \leq C \text{ trên } \mathbb{P}B_1.$$

Chứng minh. Đặt

$$y(z) = l(|z|^2 - 1),$$

ở đó $l = b/(a^2 - 1)$, sao cho $y \leq u$ trong W với d đủ nhỏ. Bây giờ cố định $z_0 \in \mathbb{P}B_1$, ta có thể giả sử $z_0 = (0, \dots, 0, 1)$ và bài toán quy về ước lượng

$$|u_{tx_n}(z_0)| \leq C_1.$$

Tương tự như trên ta nhận được nếu $w = \pm T + \frac{1}{2}u_{y_n}^2 - C_2|z - z_0|^2$, trong đó C_2 đủ lớn, thì

$$u^{i\bar{j}} w_{i\bar{j}}^3 - C_3 \frac{1}{2} u^{i\bar{i}} + \frac{1}{2} \text{ trong } W \cap B(z_0, 1),$$

và $w \neq 0$ trên $\mathbb{P}(W \cap B(z_0, 1))$.

Theo bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân ta có

$$u^{i\bar{j}} (y - u)_{i\bar{j}}^3 \leq \frac{1}{2} u^{i\bar{i}} - n^3 \frac{1}{2} u^{i\bar{i}} + n \frac{1}{2d^{1/n}} - \frac{1}{2} \frac{1}{2} u^{i\bar{i}} + \frac{1}{2},$$

với d đủ nhỏ. Như vậy

$$u^{i\bar{j}} (w + C_4(y - u))_{i\bar{j}}^3 \geq 0 \text{ trong } W \cap B(z_0, 1)$$

nếu C_4 đủ lớn.

Theo nguyên lý cực đại ta có

$$|T_{x_n}(z_0)| \leq C_4 B \cdot W$$

2.3.3. Định lý. Giả sử W là $C^{2,1}$ trơn và giả lồi chặt. Khi đó

$$g \in C^{1,1}(W \setminus \{p^1, \dots, p^k\}),$$

và
$$|\tilde{N}^2 g(z)| \leq \frac{C}{\min_i |z - p^i|^2}, \quad z \in W \setminus \{p^1, \dots, p^k\}$$

trong đó C là hằng số chỉ phụ thuộc vào $W, p^1, \dots, p^k, m_1, \dots, m_k$.

Chứng minh. Giả sử y là $C^{2,1}$ - hàm xác định đối với W và $dd^c y \geq dd^c |z|^2$ trong W ,

$$|y|, |\tilde{N}y|, |\tilde{N}^2 y|, |\tilde{N}^3 y| \leq A \text{ trên } \bar{W},$$

$$|\tilde{N}y| > a \text{ trên } \mathbb{P}W,$$

với các số dương a và A . Ta có thể tìm được $\rho > 0$ sao cho với mọi $z_0 \in \mathbb{P}W$ tồn tại một hình cầu $B(z_1, 2\rho)$, chứa trong W và tiếp xúc với $\mathbb{P}W$ tại z_0 . Khi đó

$$g(z) \leq -\frac{g}{\log 2} \log \frac{|z - z_1|}{2\rho} \text{ nếu } \rho \leq |z - z_1| \leq 2\rho,$$

trong đó

$$g = \max_{\text{dist}(z, \mathbb{P}W) \leq \rho} g(z).$$

Bởi vậy ta tìm được b với

$$\liminf_{z \in \mathbb{P}W} \frac{|g(z)|}{\text{dist}(z, \mathbb{P}W)} > b > 0.$$

Giả sử $y_j = y * r_{1/j}$ là chính quy hóa tiêu chuẩn của y và giả sử $W_j = \{y_j < 0\}$. Nếu j đủ lớn, thì các hằng số A, a và b là đúng đối với y_j và W_j . Vì vậy, ta có thể giả thiết rằng y là C^∞ -hàm, suy ra hằng số trong Định lý 2.3.3 chỉ phụ thuộc vào n, k, r, R, m, M, A, a và b .

Theo Mệnh đề 2.1.3, $g^{e,d} \in C^\infty(\overline{W^e})$ nếu $0 < e < r_0$, $0 < d \leq 1$. Với các số dương e và d đủ bé ta có

$$|\tilde{N}^2 g^{e,d}(z)| \leq \frac{C_1}{\min_i |z - p^i|^2}, \quad z \in W^e.$$

Vì $|\tilde{N}g^{e,d}| \geq b$ trên $\mathbb{P}W$, nên theo Định lý 2.2.3 và Định lý 2.3.1 ta có

$$|\tilde{N}^2 g^{e,d}| \leq C_2 \text{ trên } \mathbb{P}W \quad (2.13)$$

Với $|w| \geq 1$ và cố định $i = 1, \dots, k$, đặt

$$u(w) := g^{e,d}(p^i + ew) - m_i \log \frac{e}{r}.$$

Theo (2.2) và (2.4) ta có

$$u(w)^3 \leq m_i \log |w| - C_3.$$

Như vậy, nếu a đủ lớn mà $b := m \log a - C_3 > 0$, thì với e đủ bé ta có $u^3 \leq b$ trên $\mathbb{P}B_a$. Hơn nữa, $g^{e,d} \leq C_4$ trên $\mathbb{P}B(p^i, r)$. Vì vậy theo nguyên lý so sánh, với e đủ bé ta có

$$\frac{m_i}{2} \log \frac{|z - p^i|}{r} + \frac{m_i}{2} \log \frac{e}{r} + |z - p^i|^2 \leq e^2 \leq g^{e,d}(z)$$

nếu $e \leq |z - p^i| \leq r$.

Do đó

$$|\tilde{N}g^{e,d}|^3 \leq \frac{m_i}{2e} \text{ trên } \mathbb{P}B(p^i, e),$$

và $|\tilde{N}u|^3 \leq \frac{m_i}{2}$ trên $\mathbb{P}B_1$. Từ Định lý 2.3.2 suy ra với d đủ bé

$$|\tilde{N}^2 u| \leq C_5 \text{ trên } \mathbb{P}B_1,$$

suy ra

$$|\tilde{N}^2 g^{e,d}| \leq \frac{C_5}{e^2} \text{ trên } \mathbb{P}B(p^i, e) \quad (2.14)$$

Phần còn lại của chứng minh được thực hiện theo phương pháp của Blocki [6] và chứng minh của Định lý 2.2.3. Cố định $a \in W \setminus \{p^1, \dots, p^k\}$. Vì $g^{e,d}$ là đa điều hoà dưới nên suy ra

$$|\tilde{N}^2 g^{e,d}(a)| = \limsup_{h \rightarrow 0} \frac{g^{e,d}(a+h) + g^{e,d}(a-h) - 2g^{e,d}(a)}{|h|^2} \quad (2.15)$$

Giả sử P như trong chứng minh của Định lý 2.2.3 và giả sử $W \neq \emptyset$ và $e > 0$. Với $z \in \overline{W} \setminus \bigcup_i B(p^i, e)$ và h đủ bé, ta đặt

$$D(z, h) := g^{e,d} \left(\frac{z}{h} \right) + \frac{P(z_1)}{P(a_1)} h^{\frac{\alpha}{\beta}}$$

và

$$v(z, h) = D(z, h) + D(z, -h) + \frac{C_6}{|P(a_1)|^2} \left(|z - p^1|^2 - R^2 \right) |h|^2,$$

sao cho

$$D(z, 0) = g^{e,d}(z),$$

$$D(a, h) = g^{e,d}(a + h),$$

v là đa điều hoà dưới tại z và

$$v(a, h) \leq g^{e,d}(a + h) + g^{e,d}(a - h) - \frac{C_6 R^2}{|P(a_1)|^2} |h|^2 \quad (2.16)$$

Nếu C_6 đủ lớn và h đủ bé, thì

$$\begin{aligned} (Mv(\cdot, h))^{1/n} &\leq \left| 1 + \frac{P(z_1)}{P(a_1)} h_1 \right|^{2/n} + \left| 1 - \frac{P(z_1)}{P(a_1)} h_1 \right|^{2/n} \\ &\quad + \frac{C_6}{|P(a_1)|^2} |h|^2 \leq (2d)^{1/n}. \end{aligned}$$

Khai triển Taylor của $D(z, \cdot)$ quanh gốc ta được

$$v(z, h) \leq D(z, h) + D(z, -h) \leq 2g^{e,d}(z) + \|\tilde{N}^2(D(z, \cdot))\|_{\bar{B}(0, |h|)} |h|^2.$$

Vì

$$\left| \tilde{N}^2(D(z, \cdot))(h) \right| = \frac{|P(z_1)|^2}{|P(a_1)|^2} \left| \tilde{N}^2 g^{e,d} \left(\frac{P(z_1)}{P(a_1)} h \right) \right|,$$

nên ta nhận được

$$v(z, h) \leq 2g^{e,d}(z) + C |h|^2, \quad z \in \mathbb{P}^1 \setminus W$$

$$v(z, h) \leq 2g^{e,d}(z) + C_i |h|^2, \quad z \in \mathbb{P}^1 \setminus B(p^i, e + \varepsilon),$$

trong đó

$$C_{\ell} = C_7 \frac{\|\tilde{N}^2 g^{e,d}\|_{W(\overline{W_{\ell}})}}{|P(a_1)|^2},$$

$$C_i = C_8 \frac{(e + e_{\ell}) \|\tilde{N}^2 g^{e,d}\|_{B(p^i, e+2e_{\ell}) W_{\ell}}}{|P(a_1)|^2}$$

với h đủ bé.

Bây giờ áp dụng nguyên lý so sánh cho v và $2g^{e,d}$, ta nhận được

$$v(a, h) \leq 2g^{e,d}(a) + \max \{C_{\ell}, C_1, \dots, C_k\} |h|^2.$$

Theo (2.15) và (2.16) ta có

$$|\tilde{N}^2 g^{e,d}(a)| \leq \max \{C_{\ell}, C_1, \dots, C_k\} + \frac{C_6 R^2}{|P(a_1)|^2}.$$

Nếu cho $W_{\ell} \rightarrow 0$, và sử dụng (2.13), (2.14), thì ta nhận được ước lượng cần chứng minh. $\square$

KẾT LUẬN

Luận văn đã trình bày:

- Tổng quan và hệ thống các kết quả về các tính chất của hàm đa điều hoà dưới, hàm đa điều hoà dưới cực đại, hàm cực trị tương đối, tính $C^{1,1}$ - chính quy của hàm Green đa phức với một cực.

- Một số kết quả của Z. Blocki năm 2001 về tính chính quy của hàm Green đa phức với nhiều cực.

Cụ thể là đã chứng minh các kết quả chính sau đây:

1. Giả sử W là miền C^∞ giả lồi chặt trong $\mathbb{C}^n$ và giả sử g là hàm Green đa phức của W với cực tại $z \in W$. Khi đó g là $C^{1,1}$ trong $\bar{W} \setminus \{z\}$ (tức là, g là $C^{1,1}$ trong $W \setminus \{z\}$ và đạo hàm cấp hai của g bị chặn gần $\P W$).

2. Giả sử W là miền siêu lồi bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ và giả sử g là hàm Green của W với một cực tại $z \in W$. Khi đó $g \in C^{0,1}(\bar{W} \setminus \{z\})$ nếu và chỉ nếu tồn tại $y \in PSH(W)$ sao cho

$$-C \text{dist}(z, \P W) \leq y(z) < 0, z \in W$$

với $C > 0$ nào đó.

3. Giả thiết rằng W là $C^{2,1}$ trơn và giả lồi chặt. Khi đó

$$g \in C^{1,1}(W \setminus \{p^1, \dots, p^k\}),$$

$$\text{và} \quad |\tilde{N}^2 g(z)| \leq \frac{C}{\min_i |z - p^i|^2}, z \in W \setminus \{p^1, \dots, p^k\}$$

trong đó C là hằng số chỉ phụ thuộc vào $W, p^1, \dots, p^k, m_1, \dots, m_k$.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

I. Tiếng Việt:

[1] Nguyễn Quang Diệu và Lê Mậu Hải, *Cơ sở lý thuyết đa thế vị*, NXB Đại học sư phạm Hà Nội, (2009).

II. Tiếng Anh:

[2] E. Bedford, B.A. Taylor, *The Dirichlet problem for a complex Monge-Ampere equation*, Invent. Math. 37 (1976), 1-44.

[3] E. Bedford, B.A. Taylor, *A new capacity for plurisubharmonic functions*, Acta Math. 149 (1982), 1-41.

[4] Z. Blocki, *The complex Monge-Ampere operator in hyperconvex domains*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 23 (1996), 721-747.

[5] Z. Blocki, *Equilibrium measure of a product subset of $\mathbb{C}^n$* , Proc. Amer. Math. Soc. (to appear).

[6] Z. Blocki, *The $C^{1,1}$ regularity of the pluricomplex Green function*, Michigan Math. J. 47(2000), 211-215.

[7] Z. Blocki, *Regularity of the pluricomplex Green function with several poles*, Indiana Univ Math Jou. Vol.50, No.1(2001), 336-351.

[8] L. Caffarelli, J.J. Kohn, L. Nirenberg, J. Spruck, *The Dirichlet problem for non-linear second order elliptic equations II: Complex Monge-Ampere, and uniformly elliptic equations*, Comm.Pure Appl.Math. 38 (1985), 209-252.

[9] D. Coman, *The pluricomplex Green function with two poles of the unit ball of $\mathbb{C}^n$* , Pacific Jour of Math 194, No 2 (2000), 257-283.

[10] J.P. Demailly, *Mesures de Monge-Ampere et mesures plurisousharmoniques*, Math. Z.194 (1987), 519-564.

[11] A. Edigarian and W. Zwonek, *Invariance of the pluricomplex Green function under proper mappings with applications*, Complex Variables Theory Appl. 35 (1998), 367-380.

- [12] B. Guan, *The Dirichlet problem for complex Monge-Ampere equations and regularity of the pluri-complex Green function*, Comm. Anal. Geom. 6 (1998), 687-703.
- [13] M. Klimek, *Pluripotential theory*, Clarendon Press, Oxford, 1991.
- [14] P. Lelong, *Fonction de Green pluricomplexe et lemmes de Schwarz dans les espaces de Banach*, J. Math. Pures Appl. 68 (1989), 319-347.
- [15] W. Rudin, *Function theory in the unit ball of $\mathbb{C}^n$* , Grundlehren Math. Wiss., 241, Springer-Verlag, New York, 1980.