

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

PHẠM HÙNG KHÁNH

**TOÁN TỬ CHIẾU VÀ ÁP DỤNG GIẢI BÀI TOÁN
CÂN BẰNG**

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên – 2013

**ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM**

PHẠM HÙNG KHÁNH

**TOÁN TỬ CHIẾU VÀ ÁP DỤNG
GIẢI BÀI TOÁN CÂN BẰNG**

**Chuyên ngành: TOÁN GIẢI TÍCH
Mã số: 60.46.01.02**

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: GS.TSKH. LÊ DŨNG MƯU

Thái Nguyên – 2013

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi, các kết quả trình bày trong luận văn là hoàn toàn trung thực, được các tác giả cho phép sử dụng và luận văn hoàn toàn không trùng lặp với bất kì tài liệu nào khác.

Tác giả

Phạm Hùng Khánh

Mục Lục

Mục lục	i
Lời cảm ơn.....	ii
Mở đầu	1
Chương 1. Tập lồi và hàm lồi trong không gian Hilbert	3
1.1. Không gian Hilbert.....	3
1.1.1. Không gian tiền Hilbert	3
1.1.2. Không gian Hilbert	4
1.1.3. Các ví dụ.....	4
1.1.4. Một số tính chất cơ bản	5
1.2. Tập lồi và hàm lồi trong không gian Hilbert	10
1.2.1. Tập lồi.....	10
1.2.2. Hàm lồi	14
Chương 2. Phép chiếu trong không gian Hilbert.....	19
2.1. Định nghĩa và ví dụ.....	19
2.2. Các tính chất cơ bản.....	26
2.3. Một số trường hợp cụ thể.....	28
Chương 3. Áp dụng giải bài toán cân bằng.....	32
3.1. Bài toán cân bằng	32
3.1.1. Phát biểu bài toán cân bằng.....	32
3.1.2. Những trường hợp đặc biệt của bài toán cân bằng.....	35
3.2. Phương pháp chiếu giải bài toán cân bằng	48
Kết luận.....	56
Tài liệu tham khảo	57

LỜI CẢM ƠN

Trước khi trình bày nội dung chính của khóa luận, tác giả xin gửi lời cảm ơn sâu sắc tới GS.TSKH. Lê Dũng Mưu người thầy đã luôn tận tình hướng dẫn, chỉ bảo và giúp đỡ tác giả trong quá trình làm khóa luận để tác giả hoàn thành được khóa luận này.

Tác giả cũng xin gửi lời cảm ơn trân thành và sâu sắc tới các thầy, cô trong khoa Toán – Trường Đại Học Sư Phạm – Đại Học Thái Nguyên đã giảng dạy và giúp đỡ tác giả trong suốt quá trình học tập tại trường.

Qua đây tác giả xin trân thành cảm ơn tới người thân trong gia đình đã luôn động viên tạo điều kiện giúp đỡ tôi về mọi mặt trong suốt quá trình học tập và thực hiện khóa luận tốt nghiệp này.

Mặc dù đã có nhiều cố gắng, tuy nhiên luận văn khó tránh khỏi những thiếu sót. Tác giả rất mong được sự đóng góp ý kiến của các quý thầy, cô để luận văn được hoàn thiện hơn.

Xin trân trọng cảm ơn!

Thái Nguyên, tháng 03 năm 2013

Tác giả

Phạm Hùng Khánh

MỞ ĐẦU

Giải tích lồi là môn học cơ bản của giải tích hiện đại, nghiên cứu về tập lồi, hàm lồi và các vấn đề liên quan. Bộ môn này có vai trò quan trọng trong nhiều lĩnh vực khác của toán học ứng dụng, đặc biệt là trong tối ưu hóa, bất đẳng thức biến phân, các bài toán cân bằng,...v.v..có thể nói giải tích lồi là một trong những bộ môn quan trọng nhất làm cơ sở toán học của tối ưu hóa.

Sau các kết quả đầu tiên của H.Minkowski (1910) về tập lồi và hàm lồi, lý thuyết giải tích lồi đã thu hút được sự quan tâm nghiên cứu của nhiều nhà toán học, lý thuyết giải tích lồi được quan tâm nghiên cứu nhiều trong khoảng bốn mươi năm trở lại đây bởi các công trình nổi tiếng của H.Minkowski, C.Caratheodory, W.Fenchel, J.J.Moreau, R.T.Rockafellar, L.klee, A.Brondsted, W.V.Jensen, G.Choquet và nhiều tác giả khác.

Trong không gian Hilbert, phép chiếu xuống một tập lồi đóng có nhiều tính chất quan trọng. Việc tồn tại và tính duy nhất của hình chiếu xuống một tập lồi đóng là cơ sở để chứng minh sự tồn tại và duy nhất của nhiều bài toán khác nhau trong giải tích ứng dụng như lý thuyết xấp xỉ, tối ưu hóa, bất đẳng thức biến phân và trong các vấn đề khác. Trong toán học tính toán rất nhiều phương pháp giải dựa trên việc tìm hình chiếu của một điểm xuống một tập lồi. Trong trường hợp tổng quát, đây là bài toán khó giải. Tuy nhiên khi tập lồi có những cấu trúc riêng thì bài toán này có thể được giải một cách hiệu quả bởi những chương trình phần mềm hiện nay đã có sẵn. Thậm chí trong trường hợp đặc biệt, khi tập lồi là hình cầu, siêu hộp, đơn hình, nửa không gian...v.v...thì hình chiếu xuống các tập này có thể tính theo công thức tường minh.

Mục đích của luận văn này là để nghiên cứu về toán tử chiếu trong không gian Hilbert và việc giải bài toán cân bằng dựa vào các phương pháp chiếu. Luận văn bao gồm phần mở đầu, ba chương, phần kết luận và danh mục tài liệu tham khảo.

Chương 1: Trình bày các khái niệm và tính chất cơ bản về không gian Hilbert, tập lồi và hàm lồi trong không gian Hilbert, định lý tách, tính liên tục, dưới vi phân. Các kiến thức này sẽ được sử dụng trong các chương sau.

Chương 2: Xét phép chiếu trong không gian Hilbert về định nghĩa, ví dụ, các tính chất cơ bản và một số trường hợp cụ thể.

Chương 3: Giới thiệu bài toán cân bằng và một số vấn đề liên quan đến bài toán này như: Các trường hợp riêng quan trọng; sự tồn tại nghiệm; các dạng tương đương;...v...v....Cuối cùng là trình bày một thuật toán chiếu dưới gradient xấp xỉ để giải một lớp bài toán cân bằng.

Chương 1

TẬP LỜI VÀ HÀM LỜI TRONG KHÔNG GIAN HILBERT

Trong chương này, ta sẽ trình bày lại một số kết quả sẽ được dùng cho các chương sau. Đó là các kiến thức cơ bản về không gian Hilbert và giải tích lời. Nội dung trong chương được trích dẫn chủ yếu từ tài liệu tham khảo [1];[2];[3] và [4].

1.1. Không gian Hilbert

1.1.1. Không gian tiền Hilbert

Định nghĩa 1.1. Cho H là không gian trên trường $\mathbb{K}$. Tích vô hướng xác định trên H là một ánh xạ xác định như sau:

$\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{K}$, thỏa mãn các điều kiện sau đây:

a, $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ với mọi $x, y \in H$.

b, $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ với mọi $x, y, z \in H$.

c, $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$ với mọi $x, y \in H; \lambda \in \mathbb{K}$.

d, $\langle x, x \rangle \geq 0$ với mọi $x \in H$ và $\langle x, x \rangle = 0$ khi và chỉ khi $x = 0$.

Số $\langle x, y \rangle$ được gọi là tích vô hướng của hai vector x và y . Cặp $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ được gọi là không gian tiền Hilbert (Hay còn gọi là không gian Unita).

Từ định nghĩa ta thấy rằng tích vô hướng $\langle \cdot, \cdot \rangle$ chính là một dạng song tuyến tính xác định dương trên H . Khi đó H được gọi là không gian tiền Hilbert thực.

Định lý 1.1. Cho H là không gian tiền Hilbert với $x, y \in H$, ta luôn có bất đẳng thức sau

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle.$$

Chú ý 1.1. Bất đẳng thức ở định lý 1.1 được gọi là bất đẳng thức Schwarz, trong bất đẳng thức Schwarz dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi x, y phụ thuộc tuyến tính.

Định lý 1.2. Cho H là không gian tiền Hilbert. Khi đó $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}, x \in H$ xác định một chuẩn trên H .

1.1.2. Không gian Hilbert

Một không gian tiền Hilbert, xem như không gian định chuẩn, có thể đầy đủ hoặc không đầy đủ.

Định nghĩa 1.2. Nếu H là một không gian tiền Hilbert và đầy đủ đối với chuẩn cảm sinh từ tích vô hướng thì được gọi là không gian Hilbert.

Cũng tương tự như trường hợp không gian tiền Hilbert, với trường $\mathbb{K}$ thì ta có không gian Hilbert thực.

1.1.3. Các ví dụ

1) $\mathbb{K}^n$ là không gian Hilbert thực với tích vô hướng $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$,

trong đó:

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n.$$

2) Xét không gian:

$$l^2 = \left\{ x = (x_n)_n \subset K \mid \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < +\infty \right\}.$$

Ta đã biết l^2 là không gian Banach với chuẩn $\|x\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2}$. (1.1)

Với $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^2$, nhờ bất đẳng thức Buniakowski ta có:

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n \right|^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2 < +\infty.$$

Để kiểm tra rằng: $\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ xác định một tích vô hướng trong l^2 và nó cảm sinh (1.1). Vậy l^2 là một không gian Hilbert.

3) Cho $(X, \mathcal{A}, \mu)$ là một không gian độ đo và $E \in \mathcal{A}$. Xét không gian

$$L^2(E, \mu) = \left\{ f : E \rightarrow \mathbb{K} \mid \int_E |f|^2 d\mu < \infty \right\}$$

ta đã biết $L^2(E, \mu)$ là một không gian Banach với chuẩn:

$$\|f\| = \left(\int_E |f|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Hơn nữa, với $f, g \in L^2(E, \mu)$, từ bất đẳng thức Holder về tích phân, ta có:

$$\int_E |fg| d\mu \leq \left(\int_E |f|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_E |g|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty.$$

Ta dễ dàng kiểm tra được

$$\langle f, g \rangle = \int_E fg d\mu,$$

xác định một tích vô hướng trong $L^2(E, \mu)$ và $L^2(E, \mu)$ là không gian Hilbert thực.

1.1.4. Một số tính chất cơ bản

Định lí 1.3: Cho H là một không gian Hilbert. Khi đó: $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm liên tục.

Chứng minh: Cho $\{x_n\}, \{y_n\}$ là hai dãy trong không gian Hilbert H lần lượt hội tụ về x_0, y_0 . Khi đó, ta có:

$$\begin{aligned} |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x_0, y_0 \rangle| &\leq |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x_n, y_0 \rangle| + |\langle x_n, y_0 \rangle - \langle x_0, y_0 \rangle| \\ &= |\langle x_n, y_n - y_0 \rangle| + |\langle x_n - x_0, y_0 \rangle| \\ &\leq \|x_n\| \|y_n - y_0\| + \|x_n - x_0\| \|y_0\|. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Theo giả thiết (x_n) hội tụ trong H nên nó bị chặn, nghĩa là tồn tại số $M > 0$ sao cho: $\|x_n\| \leq M$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Vì vậy, ta có:

$$|\langle x_n, y_n \rangle - \langle x_0, y_0 \rangle| \leq M \|y_n - y_0\| + \|x_n - x_0\| \|y_0\|.$$

Cho $n \rightarrow \infty$, theo giả thiết ta có:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x_0, y_0 \rangle| = 0 \text{ hay } \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, y_n \rangle = \langle x_0, y_0 \rangle.$$

Suy ra tích vô hướng là một hàm liên tục. □

Định lí 1.4: Với mọi x, y thuộc không gian tiền Hilbert H ta luôn có đẳng thức hình bình hành sau đây:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2). \quad (1.3)$$

Chứng minh: Với $x, y \in H$, ta có:

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \|x\|^2 + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \|y\|^2, \quad (1.4)$$

$$\|x - y\|^2 = \langle x - y, x - y \rangle = \|x\|^2 - \langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle + \|y\|^2. \quad (1.5)$$

Cộng (1.4) và (1.5) ta thu được đẳng thức (1.3). Suy ra điều phải chứng minh. $\square$

Hệ quả 1.1: Giả sử H là một không gian tiền Hilbert và $x, y, z \in H$. Khi đó ta có đẳng thức Apollonius:

$$2(\|x - y\|^2 + \|x - z\|^2) = 4\left\|x - \frac{y + z}{2}\right\|^2 + \|y - z\|^2.$$

Chứng minh. Áp dụng đẳng thức hình bình hành cho hai vectơ $x - y$ và $x - z$ ta có điều phải chứng minh.

Định lí 1.5. Giả sử $(H, \|\cdot\|)$ là một không gian định chuẩn trên trường $\square$ trong đó đẳng thức hình bình hành nghiệm đúng với mọi $x, y \in H$:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Khi đó, với trường $\square$ ta đặt

$$\langle x, y \rangle = p(x, y) = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2),$$

thì $\langle \cdot, \cdot \rangle$ là một tích vô hướng trên H và ta có

$$\langle x, x \rangle = \|x\|^2, \forall x \in H.$$

Định lí 1.6. Với mọi không gian tiền Hilbert H đều tồn tại một không gian Hilbert $\tilde{H}$ chứa H sao cho H là một không gian con trù mật trong $\tilde{H}$.

Định nghĩa 1.3. Cho $D \neq \emptyset$ và y là một vec tơ bất kì, đặt:

$$d_D(y) := \inf_{x \in D} \|x - y\|.$$

Ta nói $d_D(y)$ là khoảng cách từ y tới D . Nếu tồn tại $\pi \in D$ sao cho

$d_D(y) := \|y - \pi\|$, thì ta nói π là hình chiếu (khoảng cách) của y trên D và kí hiệu $\pi = P_D(y)$.

Định lí 1.7. Cho M là một tập lồi, đóng và khác rỗng trong không gian Hilbert H . Khi đó mỗi $x \in H$ tồn tại duy nhất một phần tử y thuộc M sao cho $\|x - y\| = d(x, M)$.

Định nghĩa 1.4. Hai phần tử x, y trong không gian tiền Hilbert H được gọi là trực giao nếu $\langle x, y \rangle = 0$, kí hiệu $x \perp y$.

Định lí 1.8. Giả sử M là một không gian con đóng của không gian Hilbert H . Khi đó mỗi phần tử $x \in H$ được biểu diễn một cách duy nhất dưới dạng $x = y + z$ trong đó $y \in M$ và $z \in M^\perp$ được gọi là hình chiếu trực giao của x lên M .

Định nghĩa 1.5. Ánh xạ $P: H \rightarrow M$ xác định bởi $P(x) = y$ trong biểu diễn của Định lí 1.8 được gọi là phép chiếu trực giao từ H lên M .

Định lí 1.9. Phép chiếu trực giao P của không gian Hilbert H lên không gian con đóng $M \neq \{0\}$ là một toán tử tuyến tính liên tục và có $\|P\| = 1$.

Chứng minh. Với mọi $x_1, x_2 \in H, \alpha \in K$, theo Định lí 1.8 ta có

$$x_1 = Px_1 + z_1, x_2 = Px_2 + z_2,$$

trong đó

$$z_1, z_2 \in M^\perp.$$

Vì vậy

$$x_1 + x_2 = Px_1 + Px_2 + z_1 + z_2,$$

trong đó

$$Px_1 + Px_2 \in M, z_1 + z_2 \in M^\perp.$$

Từ tính duy nhất của sự biểu diễn trong Định lí 1.8 suy ra

$$P(x_1 + x_2) = Px_1 + Px_2.$$

Tương tự, ta có

$$P(\alpha x_1) = \alpha P(x_1).$$

Vậy P tuyến tính.

Mặt khác, với $x \in H$, ta có

$$\|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|z\|^2 \geq \|Px\|^2.$$

Hơn nữa, với $x \in M$, ta có

$$\|Px\| = \|x\|.$$

Vì vậy: $\|P\| = 1$. Vậy định lý được chứng minh. $\square$

Định nghĩa 1.6. Một tập hợp $S = \{x_i\}_{i \in T}$ trong không gian tiền Hilbert H được gọi là hệ trực giao nếu các phần tử thuộc S trực giao với nhau từng đôi một. Nếu mọi phần tử của S có chuẩn bằng 1 thì S được gọi là hệ trực chuẩn.

Định lý 1.10. Nếu S là một hệ các phần tử trực giao trong không gian Hilbert H thì S là độc lập tuyến tính.

Định lý 1.11. (Đẳng thức Pythagore) Nếu $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ là một hệ trực giao trong H thì

$$\left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2.$$

Định lý 1.12. Giả sử $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ là một hệ gồm n phần tử trực chuẩn trong H .

Khi đó mỗi phần tử $x \in H$ có hình chiếu trực giao lên không gian con H sinh

$$\text{bởi hệ } \{e_1, e_2, \dots, e_n\} \text{ là } y = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i.$$

Chứng minh. Vì M là không gian con hữu hạn chiều nên M đóng trong H . Theo Định lý 1.8, với mỗi $x \in H$ được biểu diễn dưới dạng $x = y + z$, trong đó $y \in M, z \in M^\perp$.

Do $y \in M$, ta có :

$$y = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i.$$

Với mỗi $j = 1, 2, \dots, n$ ta có :

$$\langle x, e_j \rangle = \langle y + z, e_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i, e_j \right\rangle = \alpha_j \|e_j\| = \alpha_j.$$

Vậy:

$$y = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i. \quad \square$$

Định lí 1.13. Giả sử $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ là hệ trực giao trong không gian Hilbert H . Khi đó

chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ hội tụ khi và chỉ khi chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2$ hội tụ và $\left\| \sum_{n=1}^{\infty} x_n \right\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2$.

Chú ý. Nếu $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ là hệ trực chuẩn ta có

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n \right\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|\alpha_n\|^2.$$

Định lí 1.14. Giả sử $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ là hệ trực chuẩn trong không gian Hilbert H . Khi

đó với mọi $x \in H$ chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$ hội tụ và $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2$, chuỗi

$\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$ được gọi là chuỗi Fourier của x đối với hệ $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ và bất đẳng

thức trên được gọi là bất đẳng thức Bessel.

Định nghĩa 1.7. Hệ trực chuẩn $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ trong không gian Hilbert H được gọi là một cơ sở trực chuẩn nếu không gian con sinh bởi hệ này là trù mật trong H .

Định lí 1.15. (Định lí Riesz) Giả sử $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ là một cơ sở trực chuẩn trong

không gian Hilbert H . Nếu dãy số (ξ_n) thỏa mãn điều kiện $\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2 < \infty$ thì sẽ

tồn tại duy nhất $x \in H$ nhận ξ_n làm hệ số Fourier $\xi_n = \langle x, e_n \rangle$ và

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n, \|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2.$$

Định nghĩa 1.8. Cho H là một không gian Hilbert. Dãy $\{x_n\}$ trong H được gọi là hội tụ yếu đến phần tử x trong H nếu với mọi $y \in H$ ta có $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, y \rangle = \langle x, y \rangle$.

Kí hiệu: $x_n \xrightarrow{w} x$.

Định lý 1.16. Giả sử H là không gian Hilbert

- i) Nếu dãy $\{x_n\}$ hội tụ yếu đến $x \in H$ và dãy $\{y_n\}$ hội tụ mạnh đến $y \in H$ thì dãy số $\{\langle x_n, y_n \rangle\}$ hội tụ đến $\langle x, y \rangle$.
- ii) Nếu dãy $\{x_n\}$ hội tụ yếu đến $x \in H$ và dãy $\{\|x_n\|\}$ hội tụ đến $\|x\|$ thì dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh đến $x \in H$.

1.2. Tập lồi và hàm lồi trong không gian Hilbert

1.2.1. Tập lồi

Định nghĩa 1.9. Cho hai điểm $a, b \in H$.

i, Một đường thẳng đi qua a, b là tập hợp có dạng:

$$\{x \in H : x = \alpha a + \beta b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha + \beta = 1\}.$$

ii, Đoạn thẳng nối hai điểm a, b trong H có dạng:

$$\{x \in H : x = \alpha a + \beta b, \alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1\}.$$

Định nghĩa 1.10. Một tập D được gọi là tập affine nếu D chứa mọi đường thẳng đi qua hai điểm bất kì $x, y \in D$, tức là

$$\forall x, y \in D, \forall \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda x + (1 - \lambda)y \in D.$$

Mệnh đề 1.1. Tập $D \neq \emptyset$ là tập affine khi và chỉ khi nó có dạng $D = M + a$ với M là một không gian con của H và $a \in H$. Không gian M được xác định duy nhất và được gọi là không gian con song song của D .

Định nghĩa 1.11. Thứ nguyên (hay chiều) của một tập affine D là thứ nguyên của không gian con song song với D và được kí hiệu là $\dim D$.

Định nghĩa 1.12. Siêu phẳng trong không gian H là một tập hợp các điểm có dạng

$$\{x \in H : a^T x = \alpha\},$$

trong đó $a \in H$ là một vectơ khác 0 và $\alpha \in \mathbb{R}$.

Định nghĩa 1.13. Cho $a \in H$ là một vectơ khác 0 và $\alpha \in \mathbb{R}$. Tập $\{x : a^T x \geq \alpha\}$ được gọi là nửa không gian đóng và tập $\{x : a^T x > \alpha\}$ gọi là nửa không gian mở.

Định nghĩa 1.14. Một tập D được gọi là tập lồi nếu với mọi $a, b \in D$ và mọi $\lambda \in [0, 1]$, ta có:

$$\lambda a + (1 - \lambda)b \in D.$$

Ví dụ 1.1. Tập rỗng là tập lồi.

- + Toàn bộ không gian là tập lồi.
- + Các không gian con là các tập lồi.
- + Các tam giác, hình tròn trong mặt phẳng là các tập lồi.
- + Quả cầu $C = \{x : \|x\| \leq 1\}$ là tập lồi.

Định lý 1.17. Tập lồi đóng với phép giao, phép cộng, phép nhân với một số thực tức là, nếu C và D là hai tập lồi trong H thì $C \cap D, \lambda C + \beta D$ cũng là các tập lồi.

Định nghĩa 1.15. Ta nói x là tổ hợp lồi của các điểm (vectơ) $x_1, \dots, x_k$ nếu

$$x = \sum_{j=1}^k \lambda_j x_j, \lambda_j \geq 0 (j=1, \dots, k), \sum_{j=1}^k \lambda_j = 1.$$

Mệnh đề 1.2. Tập hợp D là lồi khi và chỉ khi nó chứa mọi tổ hợp lồi của các điểm của nó. Tức là D lồi khi và chỉ khi

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall \lambda_1, \dots, \lambda_k : \sum_{j=1}^k \lambda_j = 1, \forall x_1, \dots, x_k \in D \Rightarrow \sum_{j=1}^k \lambda_j x_j \in D.$$

Mệnh đề 1.3. Nếu A, B, C là các tập lồi đóng trong H , thì các tập sau là lồi

$$A \cap B := \{x \mid x \in A, x \in B\};$$

$$\lambda A + \lambda B := \{x \mid x = \alpha a + \beta b, a \in A, b \in B, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\};$$

$$A \times C := \{x \in H \mid x = (a, c) : a \in A, c \in C\}.$$

Định nghĩa 1.16. Một tập được gọi là tập lồi đa diện nếu nó là giao của một số hữu hạn các nửa không gian đóng.

Như vậy, theo định nghĩa tập lồi đa diện là tập hợp nghiệm của một hệ hữu hạn các bất phương trình tuyến tính. Dạng tường minh của tập lồi đa diện được cho như sau:

$$C := \{x \in H \mid \langle a^j, x \rangle \leq b_j, j \in I, |I| < +\infty\}.$$

Mệnh đề 1.4. Giao của một họ bất kì các tập lồi là một tập lồi.

Chứng minh:

Giả sử $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ là họ các tập lồi. Cần chứng minh $A = \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ là một tập lồi.

+ Với mọi $x_1, x_2 \in A \Rightarrow x_1, x_2 \in A_\alpha (\forall \alpha \in I)$.

+ Với mọi $\alpha \in I$. Do A_α lồi nên $\forall \lambda \in [0; 1]$ ta có:

$$\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in A.$$

Theo định nghĩa $A = \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ là một tập lồi. □

Định nghĩa 1.17. Một tập $C \subset H$ được gọi là nón nếu

$$\forall x \in C, \forall \lambda > 0 \Rightarrow \lambda x \in C.$$

Một nón được gọi là nón lồi nếu nó là nón và là một tập lồi.

Định nghĩa 1.18. Cho $C \subseteq H, x^0 \in C$. Nón pháp tuyến (ngoài) của tập C tại x^0 là tập hợp

$$N_C(x^0) := \{w : \langle w, x - x^0 \rangle \leq 0, \forall x \in C\}.$$

Định nghĩa 1.19. Cho $D \subseteq H$ Là một tập lồi và $x^0 \in D$.

Tập

$$N_D(x^0) := \{w \in H : \langle w, x - x^0 \rangle \leq 0, \forall x \in D\},$$

được gọi là nón pháp tuyến ngoài của D tại x^0 và tập $-N_D(x^0)$ được gọi là nón pháp tuyến trong của D tại x^0 .

Tập

$$N_D^\varepsilon(x^0) := \{w \in H : \langle w, x - x^0 \rangle \leq \varepsilon, \forall x \in D\},$$

được gọi là nón pháp tuyến của ε của D tại x^0 .

Hiển nhiên $0 \in N_D(x^0)$ và dùng định nghĩa ta có $N_D(x^0)$ là một nón lồi đóng.

Trong chương 3 ta sẽ sử dụng các định lý tách tập lồi, đây cũng là những định lý cơ bản nhất của giải tích lồi.

Định nghĩa 1.20. Cho hai tập C và D , ta nói rằng siêu phẳng

$$H := \{x : \langle v, x \rangle = \lambda\}.$$

(i) tách hai tập C và D nếu:

$$\langle v, a \rangle \leq \lambda \leq \langle v, b \rangle, \forall a \in C, b \in D.$$

(ii) tách chặt C và D nếu:

$$\langle v, a \rangle < \lambda < \langle v, b \rangle, \forall a \in C, b \in D.$$

(iii) tách mạnh C và D nếu:

$$\sup_{x \in C} \langle v, x \rangle < \lambda < \inf_{y \in D} \langle v, y \rangle.$$

Định lý 1.18. (Định lý tách 1). Cho C và D là hai tập lồi khác rỗng trong H sao cho $C \cap D = \emptyset$. Khi đó có một siêu phẳng tách C và D .

Định lý 1.19. (Định lý tách 2). Cho C và D là hai tập lồi đóng khác rỗng trong H sao cho $C \cap D = \emptyset$. Giả sử có ít nhất một tập compac. Khi đó hai tập C và D có thể tách mạnh được bởi một siêu phẳng.

Áp dụng Định lý tách cho H là $\mathbb{R}^n$ ta được hệ quả sau:

Hệ quả 1.2. (Bổ đề Farkas). Cho $a \in \mathbb{R}^n$ và A là ma trận thực cấp $m \times n$. Khi đó $\langle a, x \rangle \geq 0$ với mọi x thỏa mãn $Ax \geq 0$, khi và chỉ khi tồn tại $y \geq 0$, và $\mathbb{R}^m$ sao cho $a = A^T y$.

Ý nghĩa hình học của bổ đề Farkas: Siêu phẳng đi qua gốc tọa độ $\langle a, x \rangle = 0$ để nón $Ax \geq 0$, về một phía của nó khi và chỉ khi vector pháp tuyến a của siêu phẳng nằm trong nón sinh bởi các hàng của ma trận A .

1.2.2. Hàm lồi

Định nghĩa 1.21. Cho D là một tập lồi và $f : D \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Hàm f được gọi là lồi trên D nếu

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y), \forall x, y \in D, 0 < \lambda < 1;$$

lồi chặt nếu

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y), \forall x, y \in D, 0 < \lambda < 1.$$

Hàm f lõm (lõm chặt) nếu $-f$ là lồi (lồi chặt).

Ví dụ 1.2.

1. *Hàm a -phân.* $f(x) := a^T x + \alpha$, trong đó $a \in H, \alpha \in \mathbb{R}$. Dễ dàng kiểm tra được f là một hàm vừa lồi vừa lõm trên toàn không gian. Khi $\alpha = 0$, thì hàm này được gọi là *hàm tuyến tính*.

Cho $C \neq \emptyset$ là một tập lồi.

2. *Hàm tựa.* Hàm dưới đây được gọi là *hàm tựa* của C .

$$s_C(y) := \sup_{x \in C} \langle y, x \rangle.$$

3. *Hàm khoảng cách.* Cho C lồi đóng, *hàm khoảng cách* đến tập C được định nghĩa bởi

$$d_C(x) := \min_{y \in C} \|x - y\|.$$

4. *Hàm chuẩn.* Giả sử $x = (x^1, \dots, x^n)$.

$$f(x) := \|x\|_1 := \max_i |x_i|,$$

hoặc

$$f(x) := \|x\| := (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}.$$

Định lí 1.20. Cho f và g là hai hàm lồi trên tập lồi và D tương ứng. Khi đó các hàm số $\alpha f + \beta g, (\forall \alpha, \beta \geq 0); \max\{f, g\}$ cũng lồi trên $C \cap D$.

Một hàm lồi có thể không liên tục tại một điểm trên biên miền xác định của nó, tuy nhiên nó liên tục tại mọi điểm trong của tập đó theo định lí sau:

Định lí 1.21. Một hàm lồi f xác định trên tập lồi D thì f liên tục tại mọi điểm trong của D .

Tính chất sau đây đặc trưng cho một hàm lồi khả vi, và thuận lợi để kiểm tra tính lồi của một hàm số. Ta kí hiệu $f'(a)$ hoặc $\nabla f(a)$ là đạo hàm của f tại a .

Định lí 1.22. Cho $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm khả vi trên tập lồi mở D . Điều kiện cần và đủ để f lồi trên D là

$$f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle \leq f(y), \quad \forall x, y \in D.$$

Nếu f khả vi hai lần thì điều kiện cần và đủ để f lồi trên D là với mọi $x \in D$ ma trận Hessian $H(x)$ của f tại x xác định không âm, tức là

$$y^T H(x) y \geq 0, \forall x \in D, y \in \mathbb{R}^n.$$

Như vậy, một dạng toàn phương $x^T Q x$ là một hàm lồi khi và chỉ khi Q xác định không âm. Một dạng toàn phương là một hàm lồi chặt khi và chỉ khi ma trận của nó xác định dương.

Tính khả vi của một hàm lồi giữ vai trò quan trọng trong các phương pháp tối ưu hóa. Lớp các hàm lồi có những tính chất khả vi rất đẹp mà các lớp khác không có. Giả sử $f : H \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ là hàm lồi. Ta có các khái niệm sau:

Định nghĩa 1.22. Cho hàm $f : H \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ được gọi là nửa liên tục dưới đối với E tại một điểm x , nếu như với mọi dãy $\{x^k\} \subset E$, $x^k \rightarrow x$ ta có: $\liminf f(x^k) \geq f(x)$. Hàm f được gọi là nửa liên tục trên, đối với E tại x nếu $-f$ nửa liên tục dưới, đối với E tại x . Hay là mọi dãy $\{x^k\} \subset E$, $x^k \rightarrow x$, thì

$\limsup f(x^k) \leq f(x)$. Hàm f được gọi là liên tục đối với E , tại x nếu như nó vừa nửa liên tục trên và nửa liên tục dưới, đối với E , tại x .

Hàm f được gọi là nửa liên tục dưới, đối với E trong tập A , nếu nó liên tục dưới đối với E , tại mọi điểm thuộc A . Tương tự, ta cũng nói như vậy đối với hàm nửa liên tục trên và hàm liên tục. Khi f liên tục (nửa liên tục) tại một điểm x , đối với toàn không gian, thì ta nói đơn giản f liên tục (nửa liên tục) tại x .

Định nghĩa 1.23. Cho $\varepsilon > 0$. Một vector $w \in H$ được gọi là một ε -dưới gradient của f tại $x^0 \in H$ nếu:

$$\langle w, x - x^0 \rangle \leq f(x) - f(x^0) + \varepsilon, \forall x \in H.$$

Tập hợp tất cả các ε -dưới gradient gọi là ε -dưới vi phân của hàm f tại x^0 , được kí hiệu là:

$$\partial_\varepsilon f(x^0) := \{w \in H : \langle w, x - x^0 \rangle \leq f(x) - f(x^0) + \varepsilon, \forall x \in H\}.$$

Định nghĩa 1.24. Vector $w \in H$ được gọi là dưới gradient của f tại $x^0 \in H$ nếu:

$$\langle w, x - x^0 \rangle \leq f(x) - f(x^0), \forall x \in H.$$

Tập hợp tất cả các dưới gradient của f tại x^0 được gọi là dưới vi phân của f tại x^0 , kí hiệu là:

$$\partial f(x^0) := \{w \in H : \langle w, x - x^0 \rangle \leq f(x) - f(x^0), \forall x \in H\}.$$

Hàm f được gọi là khả dưới vi phân tại x^0 nếu $\partial f(x^0) \neq \emptyset$.

Ví dụ 1.3. Cho D là một tập lồi, khác rỗng của không gian H . Xét hàm chỉ trên tập D

$$\delta_D(x) := \begin{cases} 0, & x \in D \\ +\infty, & x \notin D \end{cases}.$$

Với mọi $x^0 \in D$ ta có:

$$\begin{aligned} w \in \partial \delta_D(x^0) &\Leftrightarrow \delta_D(x) - \delta_D(x^0) \geq \langle w, x - x^0 \rangle, \forall x \in D \\ &\Leftrightarrow \langle w, x - x^0 \rangle \leq 0, \forall x \in D \Leftrightarrow w \in N_D(x^0). \end{aligned}$$

Chúng tỏ

$$\partial \delta_D(x^0) = N_D(x^0), \forall x^0 \in D.$$

Cũng có trường hợp tồn tại những điểm x^* tại đó f không có dưới vi phân, nghĩa là tập $\partial f(x^*)$ có thể là tập rỗng. Tuy nhiên, đối với hàm lồi ta có định lý sau:

Định lý 1.23. Cho f là hàm lồi hữu hạn trên tập lồi D . Lúc đó f có dưới vi phân tại mọi điểm thuộc $\text{ri}D$.

Định nghĩa 1.25. Ta gọi đạo hàm theo hướng d của một hàm số f (không nhất thiết là lồi) tại điểm x là đại lượng

$$f'(x, d) := \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{f(x + \lambda d) - f(x)}{\lambda}.$$

Nếu giới hạn này tồn tại.

Định lý 1.24. Nếu f là một hàm lồi trên tập lồi D thì với mọi $x \in D$ và mọi d sao cho $x + d \in D$, đạo hàm theo hướng d của f tại x luôn tồn tại và nghiệm đúng

$$f'(x, d) \leq f(x + d) - f(x).$$

Ngoài ra với mỗi điểm x cố định, $f'(x, \cdot)$ là một hàm lồi trên tập lồi

$$\{d : x + d \in D\}.$$

Định nghĩa 1.26. Cho $D \subseteq \mathbb{R}^n$ là tập lồi, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm lồi và $\varepsilon \geq 0$. Xét bài toán:

$$\min_{x \in D} f(x).$$

Một điểm $\bar{x} \in D$ được gọi là ε -nghiệm của bài toán (P) nếu:

$$f(\bar{x}) \leq \min_{x \in D} f(x) + \varepsilon.$$

Mệnh đề 1.6. Vector $\bar{x} \in D$ là ε -nghiệm của bài toán (P) khi và chỉ khi

$$0 \in \partial_\varepsilon f(\bar{x}).$$

Chứng minh.

Giả sử $\bar{x} \in D$ là ε -nghiệm của bài toán (P). Khi đó:

$$f(\bar{x}) \leq f(x) + \varepsilon, \forall x \in D.$$

Suy ra

$$\langle 0, x - \bar{x} \rangle \leq f(x) - f(\bar{x}) + \varepsilon, \forall x \in D \Leftrightarrow 0 \in \partial_\varepsilon(f(\bar{x})).$$

Ngược lại, nếu thì ta có:

$$\langle 0, x - \bar{x} \rangle \leq f(x) - f(\bar{x}) + \varepsilon, \forall x \in D.$$

Chúng tỏ $\bar{x}$ là ε -nghiệm của bài toán (P). $\square$

Mệnh đề 1.7. Cho D là tập lồi đóng khác rỗng. Khi đó p_x là ε -chiếu của x trên D khi và chỉ khi

$$\langle x - p_x, p_x - y \rangle \geq -\varepsilon, \forall y \in D. \quad (1.6)$$

Chứng minh:

Giả sử p_x là ε -chiếu của x trên D . Ta có:

$$\min_{y \in D} \frac{1}{2} \|x - y\|^2 \Leftrightarrow \min \left\{ \frac{1}{2} \|x - y\|^2 + \delta_D(y) \right\} \quad (1.7)$$

Trong đó $\delta_D(y)$ là hàm chỉ của y trên tập D . Đặt

$$f(y) := \frac{1}{2} \|x - y\|^2, x \in \mathbb{R}^n.$$

Theo Định nghĩa 1.23, p_x là ε -nghiệm của bài toán (1.7). Từ Mệnh đề 1.6 ta được

$$0 \in \partial_\varepsilon [f(p_x) + \delta_D(p_x)] = \partial_\varepsilon f(p_x) + \partial_\varepsilon \delta_D(p_x). \quad (1.8)$$

Theo ví dụ 1.2, ta có: $\partial_\varepsilon \delta_D(p_x) = N_D^\varepsilon(p_x)$ nên từ (1.8) ta được:

$$0 \in \{-x + p_x\} + N_D^\varepsilon(p_x).$$

Suy ra:

$$(x - p_x) \in N_D^\varepsilon(p_x) \Leftrightarrow \langle x - p_x, \omega - p_x \rangle \leq \varepsilon, \forall \omega \in D.$$

Ngược lại, giả sử có (1.6). Ta có:

$$\begin{aligned} \|x - P_D(x)\|^2 &= \|x - p_x\|^2 + 2\langle x - p_x, p_x - P_D(x) \rangle + \|p_x - P_D(x)\|^2 \\ &\geq \|x - p_x\|^2 + 2\langle x - p_x, p_x - P_D(x) \rangle. \end{aligned}$$

Suy ra

$$\|x - P_D(x)\|^2 \geq \|x - p_x\|^2 - 2\varepsilon.$$

Chúng tỏ p_x là 2ε -chiếu của x trên D . $\square$

Chương 2

PHÉP CHIẾU TRONG KHÔNG GIAN HILBERT

Trong chương này, ta nhắc lại số kiến thức quan trọng về toán tử chiếu trong không gian Hilbert, định nghĩa và các tính chất cơ bản về phép chiếu trong không gian Hilbert, phép chiếu khoảng cách xuống tập lồi đóng. Trong toán học có rất nhiều phương pháp giải dựa trên việc tìm hình chiếu của một điểm xuống một tập lồi. Trong trường hợp tổng quát đây là một bài toán khó. Tuy vậy nếu tập lồi có những cấu trúc riêng, như tập lồi đa diện thì bài toán này có thể được giải hiệu quả bởi những chương trình phần mềm hiện nay đã có. Bài toán về tìm hình chiếu xuống tập lồi đóng vai trò qua trọng trong tối ưu và nhiều lĩnh vực khác như bất đẳng thức tích phân, cân bằng, xấp xỉ, v.v... Các nội dung trình bày dưới đây được trích chủ yếu từ tài liệu tham khảo [1],[2] và [4].

2.1. Định nghĩa và ví dụ

Định nghĩa 2.1. Giả sử H là một không gian Hilbert và M là một không gian con đóng của H . Ta biết rằng, với mỗi $x \in H$ có thể biểu diễn một cách duy nhất dưới dạng

$$x = y + z, \text{ trong đó } y \in M, z \in M^\perp.$$

Xét toán tử

$P: H \rightarrow H$ được định nghĩa bằng cách với mọi x , ta lấy $Px=y$, trong đó: $x=y+z$

Như trên đã thấy P là một toán tử tuyến tính. Ta gọi P là *phép chiếu* hay *toán tử chiếu* từ không gian H lên không gian con đóng M .

Ký hiệu I là toán tử đồng nhất trên H , ta có

$$z=x-y=x-Px=(I-P)x,$$

nên $I-P$ là toán tử chiếu từ không gian H lên không gian con đóng $M^\perp$.

Với mọi $x \in H$ ta có $\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2$, do $y \perp z$. Như vậy $\|Px\| = \|y\| \leq \|x\|$ nghĩa là P liên tục và $\|P\| \leq 1$. Nếu $M \neq \{0\}$ ta lấy $y \in M$ thì $\|Py\| = \|y\|$ nên $\|P\| \geq 1$ tức là $\|P\| = 1$.

Mệnh đề 2.1. *Toán tử chiếu P từ không gian Hilbert H lên không gian con đóng M là tự liên hợp và thỏa mãn đẳng thức $P^2 = P$.*

Chứng minh:

Hiển nhiên $P^2 = P$ từ định nghĩa. Với mọi $x_1, x_2 \in H$ ta viết

$$x_1 = y_1 + z_1, x_2 = y_2 + z_2 \text{ trong đó } y_1, y_2 \in M; z_1, z_2 \in M^\perp.$$

Như vậy

$$\langle Px_1, x_2 \rangle = \langle y_1, y_2 + z_2 \rangle = \langle y_1, y_2 \rangle = \langle x_2, Px_1 \rangle. \quad \square$$

Mệnh đề 2.2. *Cho $P: H \rightarrow H$ là một toán tử liên hợp trong không gian Hilbert thỏa mãn điều kiện $P^2 = P$. Khi đó P là một toán tử chiếu.*

Chứng minh:

Kí hiệu $M = P(H)$. Ta chứng minh M là một không gian con đóng của H . Giả sử $M \ni y_n \rightarrow y_0$ thì tồn tại $x_n \in H$ để $Px_n = y_n$. Do P liên tục và từ giả thiết, ta có

$$Py_n = P^2x_n = Px_n = y_n \rightarrow y_0, Py_n \rightarrow Py_0.$$

Vậy $Py_0 = y_0$ hay $y_0 \in M$.

Bây giờ, với mọi $x \in H$, ta viết $x = Px + (x - Px)$. Để ý rằng

$$\forall y \in H, \langle Py, x - Px \rangle = \langle y, Px - Px \rangle = 0.$$

Nghĩa là $x - Px \in M^\perp$ và $H = M \oplus M^\perp$. $\square$

Định lý 2.1. *Giả sử M là một không gian con đóng của không gian Hilbert H . Khi đó mỗi phần tử $x \in H$ được biểu diễn một cách duy nhất dưới dạng $x = y + z$, trong đó $y \in M$ và $z \in M^\perp$ được gọi là hình chiếu trực giao của x lên M .*

Chứng minh.

Nếu $x \in M$ thì ta đặt $y = x, z = 0$.

Nếu $x \notin M$ thì M là lồi đóng nên tồn tại duy nhất $y \in M$ sao cho

$$\|x - y\| = d(x, M).$$

Đặt $z = x - y$, ta có $x = y + z$.

Ta phải chứng minh

$$z \in M^\perp.$$

Thật vậy, với mọi $\alpha \in K, u \in M$ ta có

$$\|z\| = \|x - y\| \leq \|x - (y + \alpha u)\| = \|z - \alpha u\|.$$

Từ đó ta suy ra

$$\|z\|^2 \leq \langle z - \alpha u, z - \alpha u \rangle = \|z\|^2 - \alpha \langle u, z \rangle - \bar{\alpha} \langle z, u \rangle + \alpha^2 \|u\|^2.$$

Chọn

$$\alpha = \langle z, u \rangle; \|u\| = 1.$$

Ta có

$$0 \leq -|\langle z, u \rangle|^2.$$

Suy ra

$$\langle z, u \rangle = 0, \forall u \in M, \|u\| = 1.$$

Vậy

$$z \in M^\perp.$$

Bây giờ ta chứng minh sự biểu diễn là duy nhất.

Giả sử:

$$x = y_1 + z_1, \forall y_1 \in M, z_1 \in M^\perp.$$

Khi đó:

$$y - y_1 = z_1 - z \text{ nên } y - y_1 \in M \text{ và } y - y_1 \in M^\perp.$$

Ta suy ra

$$\langle y - y_1, y - y_1 \rangle = 0.$$

Vậy

$$y = y_1 \Rightarrow z = z_1.$$

Từ tính duy nhất của biểu diễn ta có thể viết $X = M \oplus M^\perp$.

Định lý được chứng minh. $\square$

Định nghĩa 2.2. Cho $C \neq \emptyset$ là tập lồi đóng thuộc không gian Hilbert thực H và $y \in H$, đặt

$$d_C(y) := \inf_{x \in C} \|x - y\|.$$

Ta nói $d_C(y)$ là khoảng cách từ y đến C . Nếu tồn tại $\pi \in C$ sao cho $d_C(y) = \|x - y\|$, thì ta nói π là hình chiếu (khoảng cách) của y trên C .

Ta kí hiệu $\pi = p_C(y)$, hoặc đơn giản là $p(y)$ nếu không cần nhấn mạnh đến tập chiếu C . Chú ý rằng nếu $C \neq \emptyset$, thì $d_C(y)$ hữu hạn, vì

$$0 \leq d_C(y) \leq \|x - y\|, \forall x \in C.$$

Theo định nghĩa, ta thấy hình chiếu $p_C(y)$, của y trên C sẽ là nghiệm của bài toán tối ưu

$$\min_x \left\{ \frac{1}{2} \|x - y\|^2 \mid x \in C \right\}.$$

Nói cách khác, việc tìm hình chiếu của y trên C có thể đưa về việc tìm cực tiểu của hàm toàn phương $\|x - y\|^2$ trên C .

Ví dụ 2.1. Cho $K = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$. Với bất kì vector $x \in H$, hình chiếu khoảng cách $p_K(x)$ là nghiệm duy nhất của bài toán tối ưu sau:

$$\min_{y_1^2 + y_2^2 \leq 1, y_1 \geq 0, y_2 \geq 0} \left\{ \frac{1}{2} [(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2] \right\}.$$

Bằng cách cho $\lambda \geq 0$ là nhân tử của ràng buộc bậc hai. Chúng ta có hình chiếu của x là $p_K(x) = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ với

$$\bar{x}_1 = \max(0, \frac{1}{1-\lambda} x_1), \bar{x}_2 = \max(0, \frac{1}{1-\lambda} x_2).$$

Với λ phụ thuộc vào x .

Bằng cách chọn $x = (0, x_2)$ với $x_2 > 0$ từ biểu thức trên ta có được:

$$\bar{x}_1 = 0, \bar{x}_2 = \min(1, x_2).$$

Mệnh đề 2.3. Cho $C \in H$ là một tập lồi đóng khác rỗng. Khi đó với mọi $y \in H, \pi \in C$ hai tính chất sau là tương đương:

i) $\pi = p_C(y),$

ii) $y - \pi \in N_C(\pi).$

Chứng minh. Giả sử có i) tức là $\pi = p_C(y)$. Lấy $x \in C, \lambda \in (0, 1)$.

Đặt

$$x_\lambda := \lambda x + (1 - \lambda)\pi.$$

Do $x, \pi \in C$ và C lồi, nên $x_\lambda \in C$. Hơn nữa do π là hình chiếu của y , nên $\|\pi - y\| \leq \|y - x_\lambda\|$. Hay

$$\|\pi - y\|^2 \leq \|\lambda(x - \pi) + (\pi - y)\|^2.$$

Khai triển vế phải, ước lượng và chia hai vế cho $\lambda > 0$, ta có

$$\lambda \|x - \pi\|^2 + \langle x - \pi, \pi - y \rangle \geq 0.$$

Điều này đúng với mọi $x \in C, \lambda \in (0, 1)$. Do đó khi cho λ tiến tới 0, ta được

$$\langle \pi - y, x - \pi \rangle \geq 0, \forall x \in C.$$

Vậy

$$y - \pi \in N_C(\pi).$$

Ta giả sử có ii) hay $y - \pi \in N_C(\pi)$. Với mọi $x \in C$, ta có

$$\begin{aligned} (y - \pi)^T (x - \pi) &= (y - \pi)^T (x - y + y - \pi) \\ &= \|y - \pi\|^2 + (y - \pi)^T (x - y) \end{aligned}$$

Từ đây và ii), dùng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có:

$$\|y - \pi\|^2 \leq (y - \pi)^T (y - x) \leq \|y - \pi\| \|y - x\|.$$

Suy ra $\|y - \pi\| \leq \|y - x\|, \forall x \in C$, và do đó $\pi = p(y)$. □

Mệnh đề 2.4. Cho $C \subset H$ là một tập lồi đóng khác rỗng. Khi đó với mọi $y \in H$, hình chiếu $p_C(y)$ của y trên C luôn tồn tại và duy nhất.

Chứng minh. Do $d_C(y) = \inf_{x \in C} \|x - y\|$, nên theo định nghĩa của cận dưới đúng (infimum), tồn tại một dãy $x^k \in C$ sao cho

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|x^k - y\| = d_C(y) \geq 0.$$

Do $C \neq \emptyset$ nên $d_C(y) < +\infty$

Vậy dãy $\{x^k\}$ bị chặn, do đó nó có một dãy con $\{x^{k_j}\}$ hội tụ yếu đến một điểm π nào đó. Do C đóng suy ra C đóng yếu, nên $\pi \in C$. Vậy

$$\|\pi - y\| = \lim_{j \rightarrow \infty} \|x^{k_j} - y\| = \lim_k \|x^k - y\| = d_C(y).$$

Chúng tỏ π là hình chiếu của y trên C .

Bây giờ ta chỉ ra tính duy nhất của hình chiếu. Thật vậy giả sử nếu tồn tại hai điểm π và π^1 đều là hình chiếu của y trên C , thì

$$y - \pi \in N_C(\pi), y - \pi^1 \in N_C(\pi^1).$$

Tức là

$$\langle \pi - y, \pi^1 - \pi \rangle \geq 0.$$

Và

$$\langle \pi^1 - y, \pi - \pi^1 \rangle \geq 0.$$

Cộng hai bất đẳng thức này ta có $\|\pi - \pi^1\| \leq 0$, và do đó $\pi = \pi^1$. □

Mệnh đề 2.5. Cho $C \subset H$ là một tập lồi đóng khác rỗng. Khi đó nếu $y \notin C$, thì

$$\langle p_C(y) - y, x - p_C(y) \rangle \geq 0, \forall x \in C,$$

Và

$$\langle p_C(y) - y, y - p_C(y) \rangle < 0.$$

Chứng minh. Do $y - \pi \in N_C(\pi)$, nên

$$\langle \pi - y, x - \pi \rangle \geq 0, \forall x \in C.$$

Vậy $\langle \pi - y, x \rangle = \langle \pi - y, \pi \rangle$ là một siêu phẳng tựa của C tại π . Siêu phẳng này tách y khỏi C vì $y \neq \pi$, nên

$$\langle \pi - y, y - \pi \rangle = -\|x - y\|^2 < 0. \quad \square$$

Mệnh đề 2.6. Cho $C \in \mathcal{H}$ là một tập lồi đóng khác rỗng. Khi đó ánh xạ $y \mapsto p_C(y)$ có các tính chất sau:

$$i) \|p_C(x) - p_C(y)\| \leq \|x - y\| \quad \forall x, \forall y. \text{ (tính không giãn).}$$

$$ii) \langle p_C(x) - p_C(y), x - y \rangle \geq \|p_C(x) - p_C(y)\|^2, \text{ (tính đồng bậc).}$$

Chứng minh:

Theo Mệnh đề 2.4 ánh xạ $x \mapsto p(x)$ xác định khắp nơi. Do $z - p(z) \in N_C(p(z))$ với mọi z , nên áp dụng với $z = x$ và $z = y$, ta có:

$$\langle x - p(x), p(y) - p(x) \rangle \leq 0.$$

Và

$$\langle y - p(y), p(x) - p(y) \rangle \leq 0.$$

Cộng hai bất đẳng thức ta sẽ được

$$\langle p(y) - p(x), p(y) - p(x) + x - y \rangle \leq 0.$$

Kết hợp với bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta suy ra

$$\|p(x) - p(y)\| \leq \|x - y\|. \quad \square$$

ii) Để chứng minh tính đồng bậc, áp dụng tính chất ii) của Mệnh đề 2.3 lần lượt với $p(x)$ và $p(y)$, ta có

$$\langle p(x) - x, p(x) - p(y) \rangle \leq 0,$$

$$\langle y - p(y), p(x) - p(y) \rangle \leq 0.$$

Cộng hai bất đẳng thức ta thu được

$$\begin{aligned} & \langle p(x) - p(y) + y - x, p(x) - p(y) \rangle \\ &= \langle p(x) - p(y), y - x \rangle + \|p(x) - p(y)\|^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Chuyển về ta có

$$\langle p(x) - p(y), x - y \rangle \geq \|p(x) - p(y)\|^2.$$

Đây là tính chất đồng bức ta cần chứng minh. □

Chú ý. Phép chiếu vuông góc còn một tính chất mạnh hơn tính không giãn là

$$\|p(x) - p(y)\|^2 \leq \|x - y\|^2 - \|p(x) - p(y) - x + y\|^2, \forall x, y.$$

2.2. Các tính chất cơ bản

Định lý 2.2. Cho P_1, P_2 là hai toán tử chiếu từ không gian Hilbert H lên các không gian con đóng M_1, M_2 . Các mệnh đề sau đây là tương đương

- i) $M_1 \perp M_2$.
- ii) $P_1 P_2 = 0$ (hay $P_2 P_1 = 0$).
- iii) $P_1 + P_2$ là một toán tử chiếu.

Lúc đó $P_1 + P_2$ là toán tử chiếu lên không gian con $M_1 \oplus M_2$.

Chứng minh.

i) $\Rightarrow$ ii). Lấy bất kì $x \in H$ thì $P_1 x \in M_1$. Do $M_1 \perp M_2$ nên $P_2(P_1 x) = 0$ ($P_2 P_1 = 0$).

ii) $\Rightarrow$ i). Lấy $x_1 \in M_1, x_2 \in M_2$ ta có $x_1 = P_1 x_1, x_2 = P_2 x_2$.

Do $\langle x_1, x_2 \rangle = \langle P_1 x_1, P_2 x_2 \rangle = \langle x_1, P_1 P_2 x_2 \rangle = 0$, nên $x_1 \perp x_2$.

ii) $\Rightarrow$ iii). Ta có $(P_1 + P_2)^* = P_1^* + P_2^* = P_1 + P_2$. Ngoài ra

$$(P_1 + P_2)^2 = (P_1 + P_2)(P_1 + P_2) = P_1^2 + P_1 P_2 + P_2 P_1 + P_2^2 = P_1 + P_2.$$

Như vậy theo Mệnh đề 2.2 thì $P_1 + P_2$ là một toán tử chiếu.

Ta kí hiệu $M = M_1 \oplus M_2$ và gọi P là toán tử chiếu từ H lên M . Với mọi $x \in H$ ta viết $x = Px + (I - P)x$. Do $Px \in M$ nên $Px = u + v$ trong đó $u \in M_1, v \in M_2$ như thế $x = u + v + (I - P)x$. Vì $M_1 \perp M_2$ nên $v \perp M_1, (I - P)x \perp M_1$, suy ra $v + (I - P)x \perp M_1$ như thế $P_1 x = u$. tương tự $P_2 x = v$ nên

$Px = P_1 x + P_2 x = (P_1 + P_2)x$. Vậy $P = P_1 + P_2$ hay $P_1 + P_2$ là toán tử chiếu của H lên không gian con $M_1 \oplus M_2$.

iii) $\Rightarrow$ ii), Nếu $P_1 + P_2$ là toán tử chiếu thì việc khai triển đẳng thức

$(P_1 + P_2)^2 = P_1 + P_2$ ta có $P_1P_2 + P_2P_1 = 0$. Nhân P_1 lần lượt vào bên trái và bên phải đẳng thức này thì được

$$P_1P_2 + P_1P_2P_1 = 0, P_1P_2P_1 + P_2P_1 = 0.$$

Cộng hai đẳng thức này lại, vế theo vế ta nhận được $2P_1P_2P_1 = 0$.

Suy ra

$$P_1P_2 = P_2P_1 = 0. \quad \square$$

Định lí 2.3. Cho $C \subseteq H$ là một đa diện. Với mỗi $x \in H$, và lân cận U của x khi đó

$$P_C(y) = P_C(x) + P_K(y - x), \forall y \in U,$$

với

$$K = T_C(\bar{x}) \cap (\bar{x} - x)^\perp,$$

và $T_C(\bar{x})$ là nón tiếp xúc của C tại $\bar{x}$. Vì vậy

$$P'_C(x, d) = P_K(d), \forall d.$$

Chứng minh. Giả sử ngược lại không tồn tại lân cận của x . Khi đó tồn tại dãy $\{x^k\}$ hội tụ yếu tới x thỏa mãn

$$P_C(x^k) - P_C(x) \neq P_K(x^k - x), \forall k. \quad (2.1)$$

Do $\bar{x}^k = P_C(x^k)$, từ Định lý Kuhn-Tucker, tồn tại $\bar{\lambda}^k \in H$ sao cho

$$\bar{x}^k - x^k + \sum_{j=1}^m \bar{\lambda}_j^k (A_j)^T = 0$$

$$0 \leq \bar{\lambda}^k \perp b - A\bar{x}^k \geq 0.$$

Bằng cách chọn dãy con chúng ta có thể giả thiết tập chỉ số $\text{sup}(\bar{\lambda}^k) = J$ với mọi k . Rõ ràng $J \subseteq I(\bar{x})$.

Từ phương trình tuyến tính

$$\bar{x}^k - x^k + \sum_{j \in J} \bar{\lambda}_j^k (A_j)^T = 0.$$

$$A_i \bar{x}^k = b_i, \forall i \in J.$$

Ta có thể cho rằng vector

$$\{A_i | i \in \text{sup}(\bar{\lambda}^k)\} := \{j | \bar{\lambda}_j^k \neq 0\}.$$

Là độc lập tuyến tính. Cho B là ma trận hàng của hệ vector trên. Cho $\{\bar{\lambda}_i^k | i \in J\}$

và $\bar{x}^k$ là giới hạn duy nhất của x^k , ta có

$$\begin{aligned}\bar{\lambda}_j^k &= (BB^T)^{-1}(Bx^k - b_j) \\ \bar{x}^k &= [I - B^T(BB^T)^{-1}B]x^k + B^T(BB^T)^{-1}b_j\end{aligned}$$

Cho $k \rightarrow +\infty$ ta có

$$\begin{aligned}\bar{\lambda}_j^k &\rightarrow \bar{\lambda}_j \equiv (BB^T)^{-1}(Bx - b_j) \\ \bar{x} &= [I - B^T(BB^T)^{-1}B]x + B^T(BB^T)^{-1}b_j\end{aligned}$$

Do $(\bar{\lambda}) \subseteq J$ nên ta có

$$d^k \equiv \bar{x}^k - \bar{x} = [I - B^T(BB^T)^{-1}B](x^k - x).$$

Hay

$$\bar{\lambda}_j^k \equiv (BB^T)^{-1}B(x^k - x).$$

Ta thấy

$$d^k - (x^k - x) + \sum_{i \in J} \bar{\lambda}_i^k (A_i)^T = 0.$$

Và

$$A_i d^k = 0, \forall i \in J.$$

Với $i \in I(\bar{x}) \setminus J$ ta có

$$A_i d^k = A_i \bar{x}^k - A_i \bar{x} \leq 0.$$

Từ ba phương trình cuối dẫn đến $d^k = P_K(x^k - x)$ mâu thuẫn với (2.1). $\square$

2.3. Một số trường hợp cụ thể

Trong một số trường hợp thường gặp, tập chiều là hình hộp chữ nhật, hình cầu đóng hay không gian con thì điểm chiếu có thể tính được một cách tường minh.

2.3.1. Chiếu xuống hình hộp chữ nhật

Khi C là một hình hộp, định nghĩa bởi

$$C := \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n \mid a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, 2, \dots, n \right\},$$
$$a = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T, b = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T \in T.$$

Khi đó, hình chiếu của x lên C được xác định như sau:

$$(P_K(x))_i = \begin{cases} a_i, & \text{khi } x_i \leq a_i \\ x_i, & \text{khi } x_i \in [a_i, b_i] \\ b_i, & \text{khi } x_i \geq b_i \end{cases} \quad (2.2)$$

2.3.2. Chiếu xuống hình cầu đóng

Khi C là hình cầu bán kính R tâm $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T \in \mathbb{R}^n$ định nghĩa bởi

$$C := \left\{ z = (z_1, z_2, \dots, z_n)^T \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n (z_i - a_i)^2 \leq R^2 \right\}.$$

Khi đó, hình chiếu $y = P_C(x)$ của x lên C được xác định như sau:

Nếu $x \in C$ thì $y \equiv x$

Nếu $x \notin C$ thì hình chiếu của x lên C là giao điểm của đường thẳng nối x và tâm a của C , kí hiệu là Δ với mặt cầu

$$C := \left\{ z \in H \mid \sum_{i=1}^n (z_i - a_i)^2 = R^2 \right\}.$$

Ta có

$$\Delta = \left\{ z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n \mid z_i = a_i + t(x_i - a_i), i = 1, \dots, n, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Thay $z_i = a_i + t(x_i - a_i)$ ta được

$$t^2 \sum_{i=1}^n (x_i - a_i)^2 = R^2$$

Do đó

$$t = \frac{R}{\left(\sum_{i=1}^n (x_i - a_i)^2\right)^{1/2}}.$$

Vì vậy, y có tọa độ như sau

$$y_i = a_i + t(x_i - a_i) = a_i + \frac{R}{\left(\sum_{i=1}^n (x_i - a_i)^2\right)^{1/2}} (x_i - a_i).$$

2.3.3. Chiếu xuống không gian con

Khi $C \subseteq \mathbb{R}^n$ là không gian con k chiều với một cơ sở

$$B = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k\}.$$

Giả sử $x \in \mathbb{R}^n$ và $y = \sum_{j=1}^k y_j \eta_j \in C$ trong đó y_j là các hệ số thực sao cho

$w = x - y$ thỏa mãn $\langle w, \eta_j \rangle = 0, \forall j = 1, 2, \dots, k$ (ta sẽ tìm y thỏa mãn điều kiện này sau). Khi đó y là hình chiếu của x lên C . Thật vậy, vì w trực giao với mọi vector trong cơ sở của C nên nó cũng trực giao với mọi vector của C . Do đó với $z \in C$ ta có :

$$\begin{aligned} \|x - z\|^2 &= \langle x - y + y - z, x - y + y - z \rangle \\ &= \langle x - y, x - y \rangle + \langle y - z, y - z \rangle + 2\langle w, y - z \rangle \\ &= \|x - y\|^2 + \|y - z\|^2 \geq \|x - y\|^2. \end{aligned}$$

Vì vậy y là hình chiếu của x lên C .

Bây giờ ta tìm vector y như vậy. Với mọi $i = 1, 2, \dots, k$ ta có

$$\langle x - y, \eta_i \rangle = 0.$$

Hay

$$\sum_{j=1}^k \langle \eta_i, \eta_j \rangle y_j = \langle x, \eta_i \rangle. \quad (2.3)$$

Với $1 \leq i, j \leq k$ đặt

$$a_{ij} = \langle \eta_i, \eta_j \rangle,$$

và

$$b_i = \langle x, \eta_i \rangle.$$

Khi đó, từ (2.3) ta thu được một hệ tuyến tính k phương trình k ẩn

$$Ay^T = y.$$

Trong đó $A = (a_{ij})$ và $b = (b_1, b_2, \dots, b_k)^T$. Hơn nữa, theo định nghĩa A là ma trận xác định dương nghĩa là $\det(A) \neq 0$, do đó hệ này có đúng một nghiệm.

Vì

$$y = \sum_{j=1}^k y_j \eta_j.$$

Vậy khi biết y_j ta sẽ xác định được y .

Nếu B được chọn là một cơ sở trực chuẩn của C nghĩa là:

$$\langle \eta_i, \eta_j \rangle = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} \quad (2.4)$$

Thì A là ma trận đơn vị. Do đó ta tính được

$$y_i = b_i = \langle x, \eta_i \rangle, i = 1, 2, \dots, k$$

Mệnh đề 2.7. Cho C là không gian con trong H , $p_C(x)$ là hình chiếu của x nếu và chỉ nếu

$$\langle x - p_C(x), y \rangle = 0, \forall y \in C.$$

Chứng minh. Do C là không gian con và $y \in C, p_C(x) \in C$ nên $p_C(x) + y$ và $p_C(x) - y$ đều thuộc C với mọi $y \in C$. Từ Mệnh đề 2.5 ta có

$$\langle y, x - p_C(x) \rangle \geq 0, \forall y \in C,$$

và

$$\langle -y, x - p_C(x) \rangle \geq 0, \forall y \in C.$$

Từ trên ta suy ra: $\langle y, x - p_C(x) \rangle = 0, \forall y \in C$.

Từ đó ta suy ra điều phải chứng minh. □

Chương 3

ÁP DỤNG GIẢI BÀI TOÁN CÂN BẰNG

Trong chương này ta xét bài toán cân bằng, các trường hợp đặc biệt đưa về bài toán cân bằng như: Bài toán tối ưu, bất đẳng thức biến phân, điểm bất động Kakutani, bài toán điểm yên ngựa, cân bằng Nash trong trò chơi không hợp tác, các mô hình cân bằng. Đặc biệt là việc vận dụng thuật toán chiếu dưới gradient xấp xỉ để giải một lớp bài toán cân bằng. Đây là một chương quan trọng của luận văn. Các kiến thức trình bày trong chương được tham khảo chủ yếu từ các tài liệu [1],[2],[3],[5].

3.1. Bài toán cân bằng

3.1.1. Phát biểu bài toán cân bằng

Giả sử C là tập lồi đóng khác rỗng trong $\mathbb{R}^n$ và $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow (-\infty; +\infty]$ là một song hàm sao cho $f(x, x) = 0, \forall x \in C$. Giả sử $C \times C$ thuộc miền xác định của f . Ta xét bài toán cân bằng (EP)(f, C)

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho } f(x^*, y) \geq 0, \forall y \in C. \quad (\text{EP})$$

Ta kí hiệu tập nghiệm của bài toán (EP) là $S(f, C)$.

Bài toán đối ngẫu của bài toán (EP) là:

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho } f(y, x^*) \leq 0, \forall y \in C. \quad (\text{DEP})$$

Tập nghiệm của bài toán (DEP) được kí hiệu là $S_d(f, C)$.

Định nghĩa 3.1. Giả sử $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Ta nói:

(i) f đơn điệu mạnh trên C với hệ số $\beta > 0$, nếu

$$f(x, y) + f(y, x) \leq -\beta \|x - y\|^2 \quad \forall x, y \in C;$$

(ii) f đơn điệu chặt trên C , nếu

$$f(x, y) + f(y, x) < 0 \quad \forall x, y \in C, x \neq y;$$

(iii) f đơn điệu trên C , nếu

$$f(x, y) + f(y, x) \leq 0 \forall x, y \in C;$$

(iv) f giả đơn điệu trên C , nếu

$$f(x, y) \geq 0 \Rightarrow f(y, x) \leq 0 \forall x, y \in C;$$

(v) f tựa đơn điệu trên C , nếu

$$f(x, y) > 0 \Rightarrow f(y, x) \leq 0 \forall x, y \in C.$$

Định nghĩa 3.2. Giả sử A là một toán tử (đa trị) với $\text{dom}A$ chứa C . Ta nói:

(i) A đơn điệu mạnh trên C với hệ số $\beta > 0$, nếu với mọi

$x, y \in C, u \in A(x), v \in A(y)$, ta có

$$\langle u - v, x - y \rangle \geq \beta \|x - y\|^2;$$

(ii) A đơn điệu chặt trên C , nếu với mọi $x, y \in C, x \neq y, u \in A(x), v \in A(y)$, ta có

$$\langle u - v, x - y \rangle > 0;$$

(iii) A đơn điệu trên C , nếu với mọi $x, y \in C, u \in A(x), v \in A(y)$, ta có

$$\langle u - v, x - y \rangle \geq 0;$$

(iv) A giả đơn điệu trên C , nếu với mọi $x, y \in C, u \in A(x), v \in A(y)$, ta có

$$\langle u - v, x - y \rangle \geq 0 \Rightarrow \langle u, x - y \rangle \geq 0;$$

(v) A tựa đơn điệu trên C , nếu với mọi $x, y \in C, u \in A(x), v \in A(y)$, ta có

$$\langle u - v, x - y \rangle > 0 \Rightarrow \langle u, x - y \rangle \geq 0.$$

Từ định nghĩa ta có (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (v).

Một ví dụ quan trọng của toán tử đơn điệu là dưới vi phân của hàm lồi.

Nhận xét 3.1. Giả sử F là một toán tử có một trong các tính chất là đơn điệu mạnh, đơn điệu chặt, đơn điệu, giả đơn điệu hay tựa đơn điệu trên C và $F(x)$ compact với mọi $x \in C$. Khi đó song hàm

$$f(x, y) := \max_{u \in F(x)} \langle u, y - x \rangle,$$

sẽ tương ứng là đơn điệu mạnh, đơn điệu chặt, đơn điệu, giả đơn điệu hay tựa đơn điệu trên C .

Mệnh đề 3.1. Cho C là tập lồi, đóng khác rỗng và $\phi: C \times C \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ là song hàm cân bằng. Khi đó:

- (i) Nếu ϕ là đơn điệu chặt trên C , thì bài toán cân bằng (EP) có nhiều nhất một nghiệm;
- (ii) Nếu $\phi(., y)$ nửa liên tục trên với mỗi $y \in C$ và $\phi(x, .)$ lồi, nửa liên tục dưới với mỗi $x \in C$ và ϕ đơn điệu mạnh trên C , thì bài toán (EP) luôn có và có duy nhất nghiệm.

Bài toán cân bằng (EP) có mối liên quan chặt chẽ đến bài toán sau, được gọi là bài toán đối ngẫu của (EP).

$$\text{Tìm } y^* \in C : \phi(x, y^*) \leq 0 \forall x \in C. \quad (\text{DEP})$$

Ta sẽ kí hiệu tập nghiệm của bài toán (EP) là S và tập nghiệm của bài toán đối ngẫu là DS . Mối quan hệ giữa hai bài toán này được thể hiện theo mệnh đề dưới đây.

Mệnh đề 3.2. Giả sử $\phi: C \times C \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ là song hàm cân bằng. Khi đó:

- (i) Nếu $\phi(x, .)$ là lồi trên C với mỗi $x \in C$, thì tập nghiệm DS lồi;
- (ii) Nếu ϕ giả đơn điệu trên C , $\phi(., y)$ nửa liên tục trên theo mỗi tia (bán liên tục) với mỗi $y \in C$ và $\phi(x, .)$ lồi với mỗi $x \in C$, thì $DS = S$.

Nhận xét 3.2. Nếu f giả đơn điệu trên C (nghĩa là: nếu $x, y \in C$ và $f(x, y) \geq 0$ thì $f(y, x) \leq 0$ nên $S(f, C) = S_d(f, C)$).

Ví dụ 1.1.

Giả sử bài toán EP (f, C) xác định như sau

$$C = [-1; 1] \subseteq \mathbb{R}, \quad f(x, y) = 2y|x|(y-x) + xy|y-x|, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Rõ ràng: $S(f, C) = \{0\}$ và $f(y, x^*) = f(y, 0) = 0, \quad \forall y \in C$

$$S_d(f, C) = [-2; 1].$$

Suy ra: $S(f, C) \subset S_d(f, C).$

Nhưng f không giả đơn điệu trên C vì

$$f(-0.5, 0.5) = f(0.5, -0.5) = 0.25 > 0.$$

3.1.2. Những trường hợp đặc biệt của bài toán cân bằng

1, Bài toán tối ưu

Xét bài toán $\min \{ \varphi(x) : x \in C \}$.

Đặt: $f(x, y) = \varphi(y) - \varphi(x)$.

Hiển nhiên

$$\varphi(x) \leq \varphi(y), \quad \forall y \in C \Leftrightarrow f(x, y) \geq 0, \quad \forall y \in C$$

Vậy bài toán tối ưu trên là một trường hợp riêng của bài toán (EP).

2, Bất đẳng thức biến phân

Ta xét bài toán bất đẳng thức biến phân đa trị sau:

Cho C là một tập lồi đóng khác rỗng trong $\mathbb{R}^n$ và $F : C \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ là một ánh xạ đa trị (tức là với mỗi $x \in C$, giá trị $F(x)$ là một tập khác rỗng trong $\mathbb{R}^n$).

Xét bài toán

$$\text{Tìm } x^* \in C, v^* \in F(x^*) \text{ sao cho } \langle v^*, y - x^* \rangle \geq 0, \quad \forall y \in C \quad (\text{VI})$$

Ta có thể minh họa bất đẳng thức biến phân (VI) theo một mô hình kinh tế như sau: Giả sử C là tập hợp các chiến lược (tập ràng buộc) các phương án sản xuất có thể lựa chọn. Với mỗi phương án sản xuất $x \in C$, tập (ánh xạ giá) $F(x)$ là tập hợp các giá thành chi phí có thể, ứng với phương án x . Khi đó bài toán (VI) chính là bài toán tìm phương án sản xuất x^* trong tập chiến lược C và giá v^* ứng với x^* , sao cho chi phí là thấp nhất. Trong trường hợp, ánh xạ giá là đơn trị và không phụ thuộc vào phương án sản xuất, tức là $F(x) = c$, với mọi $x \in C$ bất đẳng thức biến phân (VI) trở thành bài toán quy hoạch quen thuộc

$$\min \{ c^T x : x \in C \} \quad (\text{LP})$$

Trong bài toán quy hoạch này, vector giá c không phụ thuộc vào phương án sản xuất.

Về mặt hình học, bất đẳng thức biến phân (VI) là bài toán tìm một điểm $x^* \in C$ sao cho trong tập $F(x^*)$ có một phần tử là vector pháp tuyến ngoài của tập C tại điểm x^* .

Giả sử với mỗi $x \in C$, tập $F(x)$ lồi, compact khác rỗng. Với mỗi $x, y \in C$, để mô tả bài toán (VI) về bài toán cân bằng, ta đặt

$$\phi(x, y) := \max_{v \in F(x)} \langle v, y - x \rangle.$$

Từ đây ta suy ra $\phi(x, y) \geq 0$, với mọi $y \in C$ khi và chỉ khi x là nghiệm của (VI). Một trường hợp riêng quan trọng của bài toán (VI) là khi $C = \square_+^n$ và F đơn trị. Khi đó bài toán (VI) tương đương với bài toán sau, được gọi là bài toán bù (CP):

$$\text{Tìm } x \geq 0, \text{ sao cho } F(x) \geq 0, x^T F(x) = 0 \quad (\text{CP})$$

Ta chỉ ra rằng bài toán (CP) này tương đương với bất đẳng thức biến phân

Tìm $x \geq 0$, sao cho

$$\langle F(x), y - x \rangle \geq 0, \forall y \geq 0.$$

Sự tương đương ở đây được hiểu theo nghĩa là tập nghiệm của hai bài toán này trùng nhau. Thật vậy, nếu x là nghiệm của bất đẳng thức biến phân thì

$$\langle F(x), y - x \rangle \geq 0, \forall y \geq 0.$$

Lần lượt chọn $y = x + e^i$ (vector đơn vị thứ i) ta có

$$F_i(x) = \langle F(x), x + e^i - x \rangle = \langle F(x), e^i \rangle \geq 0.$$

Vậy $F_i(x) \geq 0$, với mọi i . Suy ra $F(x) \in \square_+^n$.

Ngoài ra nếu chọn $y = 0$ ta có $0 \leq -\langle F(x), x \rangle \leq 0$. Suy ra $x^T F(x) = 0$. Điều ngược lại mọi nghiệm của bài toán bù (CP) đều là nghiệm của bất đẳng thức biến phân là hiển nhiên.

Bài toán quy hoạch lồi

$$\min \{ f(x) : x \in C \} \quad (\text{CO})$$

Trong đó f là một hàm lồi khả dưới vi phân trên tập lồi C , có thể mô tả dưới dạng bất đẳng thức biến phân (VI), với $F = \partial f$.

Thật vậy, khi $F = \partial f$, bài toán (VI) là:

$$\text{Tìm } x^* \in C, v^* \in \partial f(x^*) \text{ sao cho } \langle v^*, y - x^* \rangle \geq 0, \quad \forall y \in C$$

Nếu x^* là nghiệm của bất đẳng thức biến phân này, thì do $v^* \in \partial f(x^*)$, nên theo định nghĩa của dưới vi phân, ta có

$$\langle v^*, y - x^* \rangle + f(x^*) \leq f(y), \quad \forall y.$$

Thế nhưng do x^* là nghiệm của bất đẳng thức biến phân, nên

$$\langle v^*, y - x^* \rangle \geq 0, \quad \forall y \in C.$$

Từ đây suy ra $f(x^*) \leq f(y)$, với mọi $y \in C$. Vậy x^* là một nghiệm của bài toán (CO).

Ngược lại, nếu x^* là nghiệm của (CO), thì theo điều kiện cần và đủ tối ưu của quy hoạch lồi, ta có

$$0 \in \partial f(x^*) + N_C(x^*).$$

Theo định nghĩa của nón pháp tuyến của C tại x^* ta suy ra x^* là nghiệm của bất đẳng thức biến phân (VI) với $F = \partial f$.

3, Bài toán điểm bất động Kakutani

Cho $F : C \rightarrow 2^C$. Điểm x được gọi là điểm bất động của F nếu $x \in F(x)$. Giả sử với mọi $x \in C, F(x)$ lồi, compact, khác rỗng. Khi đó bài toán tìm một điểm bất động của F có thể mô tả dưới dạng bài toán cân bằng (EP). Để chứng tỏ điều này, với mỗi $x, y \in C$ ta đặt

$$\phi(x, y) := \max_{v \in F(x)} \langle x - v, y - x \rangle.$$

Thật vậy, hiển nhiên là nếu $x \in F(x)$, thì theo định nghĩa của $\phi(x, y)$ ta có $\phi(x, y) \geq 0$, với mọi $y \in C$. Ngược lại, giả sử x là nghiệm của bài toán (EP), tức là $x \in C$ và $\phi(x, y) \geq 0$ với mọi $y \in C$. Khi đó lấy y là hình chiếu của x lên tập lồi đóng $F(x)$, ta có:

$$\langle x - y, y - x \rangle = \max_{v \in F(x)} \langle x - v, v - x \rangle.$$

Do x là nghiệm của (EP), nên

$$0 \leq \phi(x, y) = \langle x - y, y - x \rangle = -\|x - y\|^2.$$

Suy ra $x = y \in F(x)$.

Vậy x là điểm bất động của F .

Sự tồn tại điểm bất động Kakutani dựa vào định lí điểm bất động Kakutani. Định lí này là cơ sở để chứng minh sự tồn tại nghiệm của bài toán cân bằng.

4, Bài toán điểm yên ngựa

Cho $A \subseteq \mathbb{R}^n, B \subseteq \mathbb{R}^m$ và $L: A \times B \rightarrow \mathbb{R}$. Bài toán điểm yên ngựa là bài toán tìm

$$(x^*, y^*) \in A \times B,$$

sao cho

$$L(x^*, y) \leq L(x^*, y^*) \leq L(x, y^*), \quad \forall (x, y) \in A \times B$$

Một điểm $(x^*, y^*) \in A \times B$ thỏa mãn bất đẳng thức trên được gọi là điểm yên ngựa của L trên $A \times B$. Ta sẽ chỉ ra rằng, bài toán điểm yên ngựa có thể mô tả dưới dạng bài toán cân bằng.

Thật vậy, với mỗi $u = (x, y)^T, v = (x', y')^T$, ta đặt

$$C = A \times B, \quad \phi(u, v) := L(x', y) - L(x, y').$$

Khi đó nếu u^* là nghiệm của bài toán cân bằng với C và ϕ , tức là

$$u^* \in C, \phi(u^*, v) \geq 0 \quad \forall v \in C,$$

thì

$$L(x', y^*) \geq L(x^*, y'), \quad \forall x' \in A, y' \in B$$

Với $x' = x^*$ và sau đó với $y' = y^*$, ta có

$$L(x^*, y') \leq L(x^*, y^*) \leq L(x', y^*), \quad \forall (x', y') \in A \times B$$

Vậy (x^*, y^*) là điểm yên ngựa. Điều ngược lại là nếu (x^*, y^*) là điểm yên ngựa của L trên $A \times B$, thì theo định nghĩa $u^* = (x^*, y^*)$ là lời giải của bài toán cân bằng.

5, Cân bằng Nash trong trò chơi không hợp tác

Xét một trò chơi có p người chơi (đấu thủ). Giả sử $C_j \subset \square^{P_j}$ là tập phương án mà đấu thủ thứ j có thể lựa chọn trong đó (gọi là tập chiến lược). Đặt $C := C_1 \times C_2 \times \dots \times C_p$ và gọi $\varphi_j : C \rightarrow \square$ là hàm lợi ích của đấu thủ j . Giả sử $\varphi_j(x_1, \dots, x_j, \dots, x_p)$ là lợi ích của đấu thủ j khi đấu thủ này chọn phương án chơi $x_j \in C_j$, còn các đấu thủ k khác chọn phương án chơi $x_k \in C_k$ với mọi k .

Định nghĩa 3.3. (điểm cân bằng Nash) *Ta gọi $x^* = (x_1^*, \dots, x_p^*)$ là điểm cân bằng của $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ trên tập $C := C_1 \times C_2 \times \dots \times C_p$ nếu với mọi j và mọi $y_j \in C_j$, ta có*

$$\varphi_j(x_1^*, \dots, x_{j-1}^*, y_j, x_{j+1}^*, \dots, x_p^*) \leq \varphi_j(x_1^*, \dots, x_{j-1}^*, x_j^*, x_{j+1}^*, \dots, x_p^*).$$

Định nghĩa này cho ta thấy rằng nếu đối thủ j nào đó rời khỏi phương án cân bằng, trong khi các đối thủ khác vẫn giữ phương án cân bằng, thì đối thủ j sẽ bị thua thiệt. Đây chính là lý do mà khái niệm cân bằng này được chấp nhận trong thực tế. Điểm cân bằng này được gọi là điểm cân bằng Nash vì khái niệm này do nhà kinh tế học F.Nash đưa ra đầu tiên. Dưới đây bài toán cân bằng sẽ được hiểu là bài toán tìm một điểm cân bằng (Nash) của φ trên C . Ta sẽ kí hiệu bài

toán này là $N(\varphi, C)$. Bài toán cân bằng Nash có thể mô tả dưới dạng bài toán cân bằng (EP). Thật vậy, hãy xây dựng hàm $\phi: C \times C \rightarrow \mathbb{R}$, bằng cách đặt

$$\phi(x, y) := \sum_{j=1}^p \left[\varphi_j(x) - \varphi_j(x_1, \dots, x_{j-1}, y_j, x_{j+1}, \dots, x_p) \right].$$

Hiển nhiên x^* là một điểm cân bằng Nash, thì $\phi(x^*, y) \geq 0 \forall y \in C$. Ngược lại, giả sử $x^* \in C$ là nghiệm của bài toán (EP), tức là $\phi(x^*, y) \geq 0 \forall y \in C$. Ta sẽ chứng tỏ $x^* = (x_1^*, \dots, x_p^*)$ với $x_j^* \in C_j$ là một điểm cân bằng Nash. Thật vậy, nếu trái lại, sẽ tồn tại j và một $y_j \in C_j$ sao cho

$$\varphi_j(x_1^*, \dots, x_{j-1}^*, y_j, x_{j+1}^*, \dots, x_p^*) < \varphi_j(x_1^*, \dots, x_{j-1}^*, x_j^*, x_{j+1}^*, \dots, x_p^*).$$

Khi đó với phương án $y = (x_1^*, \dots, x_{j-1}^*, y_j, x_{j+1}^*, \dots, x_p^*)$, theo định nghĩa hàm ϕ , ta có:

$$\phi(x^*, y) = \varphi_j(x_1^*, \dots, x_{j-1}^*, y_j, x_{j+1}^*, \dots, x_p^*) - \varphi_j(x^*) < 0.$$

Mâu thuẫn với việc x^* là nghiệm của (EP).

Nhận xét 3.3. Trong tất cả các trường hợp đặc biệt trên, song hàm ϕ đều có tính chất $\phi(y, y) = 0, \forall y \in C$. Như vậy ϕ là một song hàm cân bằng trên C .

6, Sự tồn tại nghiệm của bài toán cân bằng

Như trên ta thấy, bài toán điểm yên ngựa (hay là minimax) và bài toán điểm bất động Kakutani có thể mô tả dưới dạng bài toán cân bằng. Ngược lại ở mục này ta sẽ thấy rằng Định lý minimax cũng như Định lý điểm bất động Kakutani, có thể dùng để chứng minh sự tồn tại nghiệm của bài toán cân bằng.

Định lý 3.1. (Minimax) Cho $C \subseteq \mathbb{R}^n, D \subseteq \mathbb{R}^m$ là các tập lồi, đóng khác rỗng và $f: C \times D \rightarrow \mathbb{R}$.

Giả sử với mọi $y \in D$, hàm $f(., y)$ tựa lồi, nửa liên tục dưới trên C và với mọi $x \in C$, hàm $f(x, .)$ tựa lõm, nửa liên tục trên trên D . Khi đó nếu có một trong hai điều kiện sau:

(i) Có một tập hữu hạn $N_* \subset D$ và một số $\eta_* > \gamma$ sao cho tập

$$C(N_*) := \left\{ x \in C \mid \max_{y \in N_*} f(x, y) \leq \eta_* \right\},$$

compact.

(ii) Có một tập hữu hạn $M_* \subset C$ và một số $\gamma_* < \eta$ sao cho tập

$$D(M_*) := \left\{ y \in D \mid \min_{x \in M_*} f(x, y) \geq \gamma_* \right\},$$

compact. Khi đó

$$\sup_{y \in D} \inf_{x \in C} f(x, y) = \inf_{x \in C} \sup_{y \in D} f(x, y).$$

Cụ thể hơn, ta có

$$\sup_{y \in D} \inf_{x \in C(N_*)} f(x, y) = \inf_{x \in C} \sup_{y \in D} f(x, y).$$

Nếu có (i) và

$$\inf_{x \in C} \sup_{y \in D} f(x, y) = \max_{y \in D(M_*)} \inf_{x \in C} f(x, y),$$

nếu có (ii).

Mệnh đề 3.3. Cho C là một tập lồi đóng khác rỗng và song hàm cân bằng f có các tính chất: $\phi(x, \cdot)$ là hàm tựa lồi nửa liên tục dưới trên C . $\phi(\cdot, y)$ là hàm tựa lõm, nửa liên tục trên trên C . Giả sử

(i) Có một tập hữu hạn $N_* \subset C$ sao cho tập

$$C(N_*) := \left\{ x \in C \mid \min_{y \in N_*} \phi(x, y) \geq 0 \right\},$$

compact, hoặc

(ii) Có một tập hữu hạn $M_* \subset C$ sao cho tập

$$D(N_*) := \left\{ y \in C \mid \max_{x \in M_*} \phi(x, y) \leq 0 \right\},$$

compact. Khi đó bài toán (EP) có nghiệm.

Chứng minh. Đặt $f(x, y) := -\phi(x, y)$ và $D \equiv C$. Khi đó hàm φ thỏa mãn mọi điều kiện của Định lý 3.1. Theo Định lý 3.1 ta có

$$\sup_{y \in C} \inf_{x \in C} f(x, y) = \inf_{x \in C} \sup_{y \in C} f(x, y). \quad (3.1)$$

Ta sẽ chứng tỏ

$$\inf_{x \in C} \sup_{y \in C} f(x, y) = 0. \quad (3.2)$$

Thật vậy, ta có

$$\inf_{x \in C} \sup_{y \in C} f(x, y) \geq \inf_{x \in C} f(x, x) = 0;$$

đẳng thức cuối là do $f(x, x) = 0$.

Mặt khác

$$\sup_{y \in C} \inf_{x \in C} f(x, y) \leq \sup_{y \in C} f(y, y) = 0. \quad (3.3)$$

Từ (3.1), (3.2) và (3.3) ta suy ra

$$\sup_{y \in C} \inf_{x \in C} f(x, y) = \inf_{x \in C} \sup_{y \in C} f(x, y) = 0.$$

Giả sử điều kiện (i) thỏa mãn, theo Định lí 3.1 tồn tại $x \in C(N_*) \subset C$ sao cho

$$\min_{x \in C(N_*)} \sup_{y \in C} f(x, y) = 0.$$

Đặt $s(x) := \sup_{y \in C} f(x, y)$. Do $f(., y)$ nửa liên tục dưới trên C , nên s cũng nửa liên tục dưới trên C . Do $C(N_*)$ là tập compact, nên tồn tại $x^* \in C(N_*)$, sao cho

$$s(x^*) = \min_{x \in C(N_*)} s(x) = 0,$$

$$\text{hay} \quad s(x^*) = \sup_{y \in C} f(x^*, y) = 0,$$

$$\text{suy ra:} \quad f(x^*, y) \leq 0, \text{ với mọi } y \in C.$$

Vậy

$$\phi(x^*, y) := -f(x^*, y) \geq 0, \text{ với mọi } y \in C.$$

Chúng tỏ x^* là nghiệm của bài toán cân bằng (EP).

Trong mệnh đề trên, ta đòi hỏi tính tựa lõm trên C của hàm $\phi(., y)$ với mọi $y \in C$. Trên thực tế điều này có thể loại bỏ. Để chứng minh sự tồn tại nghiệm của bài toán cân bằng, khi song hàm cân bằng không cần tựa lõm theo biến thứ

nhất ta cần đến các Định lý điểm bất động quen thuộc trong giải tích hàm và Định lý Kakutani và một trường hợp riêng quan trọng của nó là Định lý Brower. Để tiện theo dõi, ta nhắc lại các định lý này trong không gian Euclidean hữu hạn chiều.

Định lý 3.2. (điểm bất động Kakutani). Cho C là một tập lồi compact trong không gian $\mathbb{R}^n$ và $F : C \rightarrow 2^C$ là một ánh xạ đa trị nửa liên tục trên và $F(x)$ lồi, đóng. Khác rỗng với mọi $x \in C$. Khi đó F là điểm bất động, tức là tồn tại $x^* \in C, x^* \in F(x^*)$.

Một trường hợp riêng quan trọng của định lý này là định lý điểm bất động Brower sau:

Định lý 3.3. (điểm bất động Brower). Cho C là một tập như Mệnh đề 3.1 và F là một ánh xạ (đơn trị) liên tục từ C vào C . Khi đó tồn tại $x^* \in C$ thỏa mãn $x^* \in F(x^*)$.

Ta cũng sẽ cần tới Định lý cực đại Berge (the Berge maximum theorem).

Định lý 3.4. Cho X, Y là các không gian tô-pô, $F : X \rightarrow 2^Y$ là ánh xạ nửa liên tục trên trên X sao cho $F(x)$ compact, hơn nữa $F(x)$ compact. Giả sử $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$,

là hàm số nửa liên tục trên trên X . Khi đó hàm giá trị tối ưu

$$g(x) := \max \{ f(x, y) : y \in F(x) \},$$

nửa liên tục trên và ánh xạ tập nghiệm tối ưu

$$S(x) := \{ y \in F(x) : f(x, y) = g(x) \},$$

nửa liên tục trên.

Dựa vào Định lý điểm bất động Kakutani và Định lý cực đại của Berge, ta có Mệnh đề sau nói về sự tồn tại nghiệm của bài toán cân bằng.

Mệnh đề 3.4. Cho C là một tập lồi, compact khác rỗng và song hàm cân bằng $\phi : C \times C \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ có các tính chất :

(i) $\phi(., y)$ nửa liên tục trên với mọi $y \in C$;

(ii) $f(x, \cdot)$ lồi, nửa liên tục dưới và khả dưới vi phân trên C với mọi $x \in C$.

Khi đó bài toán (EP) có nghiệm.

Hệ quả 3.1. Cho C là một tập lồi đóng (không cần compact) và song hàm cân bằng ϕ như ở mệnh đề trên. Giả sử điều kiện bức (C1) sau đây thỏa mãn

Tồn tại tập compact B sao cho

$$C \cap B \neq \emptyset, \forall x \in C \setminus B, \exists y \in C : \phi(x, y) < 0.$$

Khi đó bài toán (EP) có nghiệm.

Chứng minh. Theo Mệnh đề 3.5, bài toán cân bằng trên tập compact $C \cap B$ với hàm cân bằng ϕ có nghiệm, tức là tồn tại $x^* \in C \cap B$. Từ điều kiện bức (C1) và tính lồi của tập C , ta dễ dàng suy ra rằng nghiệm x^* cũng là nghiệm bài toán (EP).

Định lý 3.5. (Ky Fan). Cho $\phi: C \times C \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ là một song hàm cân bằng có các tính chất sau:

(i) $\phi(\cdot, y)$ nửa liên tục trên trên C với mọi $y \in C$;

(ii) $\phi(x, \cdot)$ tựa lồi trên C với mọi $x \in C$.

Khi đó bài toán cân bằng (EP) có nghiệm, nếu như C compact, hoặc điều kiện bức (C1) thỏa mãn.

Bây giờ ta xét đến tính duy nhất nghiệm của bài toán cân bằng. Trước hết ta giới thiệu các định nghĩa về tính đơn điệu của song hàm và ánh xạ.

Các dạng tương đương. Bài toán cân bằng theo bất đẳng thức Ky Fan nêu ở trên, có thể mô tả dưới các dạng tương đương. Các dạng tương đương này, là cơ sở để xây dựng các phương pháp giải.

Thông thường để xây dựng phương pháp giải, ta cần thêm các giả thiết sau đây đối với song hàm cân bằng $\phi: C \times C \rightarrow \mathbb{R}$:

(i) $\phi(\cdot, y)$ nửa liên tục trên trên tập C ;

(ii) $\phi(x, \cdot)$ lồi, nửa liên tục dưới và khả dưới vi phân trên C .

Mệnh đề dưới đây là cơ sở để xây dựng các phương pháp giải bài toán cân bằng

Mệnh đề 3.5. Giả sử $\phi: C \times C \rightarrow \mathbb{R}$ là song hàm cân bằng. Khi đó, với các giả thiết (i),(ii), thì các điểm sau đây là tương đương:

(a) x^* là nghiệm của bài toán cân bằng (EP);

(b) $\min\{g(x): x \in C\} = 0$ (dạng minimax), trong đó hàm g (hàm đánh giá) được cho bởi

$$g(x) := \sup\{\phi(x, y) : y \in C\};$$

(c) $x^* = \arg \min\{\phi(x^*, y) : y \in C\}$ (dạng biến động).

Chứng minh. (a) $\Rightarrow$ (b). Giả sử x^* là một nghiệm của (EP). Do $\phi(x, x) = 0$ với mọi $x \in C$, nên

$$\inf_{y \in C} \phi(x, y) \leq 0 \forall x \in C.$$

Do đó

$$\sup\left\{\inf_{y \in C} \phi(x, y)\right\} \leq 0.$$

Trong khi đó, do $x^* \in C$, nên

$$\sup\left\{\inf_{y \in C} \phi(x, y)\right\} \geq \inf_{y \in C} \phi(x^*, y).$$

Nhưng do x^* là nghiệm của (EP), nên $\phi(x^*, y) \geq 0$ với mọi $y \in C$. Vậy

$$\inf_{y \in C} \phi(x^*, y) \geq 0.$$

Suy ra

$$0 \leq \inf_{y \in C} \phi(x^*, y) \leq \sup\left\{\inf_{y \in C} \phi(x, y)\right\} \leq 0.$$

Vậy

$$\sup\left\{\inf_{y \in C} \phi(x, y)\right\} = \max_{x \in C} \left\{\inf_{y \in C} \phi(x, y)\right\} = \inf_{y \in C} \phi(x^*, y) = 0.$$

Ngược lại, giả sử có (b). Khi đó theo lập luận ở trên ta có

$$\sup\{-\phi(x^*, y)\} = \min_{x \in C} \sup_{y \in C} \{-\phi(x, y)\} = 0.$$

Chúng ta chứng tỏ $-\phi(x^*, y) \leq 0$ với mọi $y \in C$. Vậy x^* là nghiệm của (EP).

Bây giờ ta chứng tỏ (a) tương đương với (c). Thật vậy x^* là cực tiểu của $\phi(x^*, \cdot)$,

trên C khi và chỉ khi

$$\phi(x^*, y) \geq \phi(x^*, x^*) = 0 \forall y \in C. \quad \square$$

Mệnh đề 3.6. Giả sử $R: C \times C \rightarrow \mathbb{R}$ là một song hàm cân bằng, không âm và thỏa mãn các tính chất sau đây:

(a) R khả vi trên C và $\nabla_x R(x, x) = 0$ với mọi $x \in C$;

(b) $R(x, \cdot)$ lồi mạnh trên C , với mỗi $x \in C$.

Khi đó với các giả thiết (i) và (ii), ta có x^* là nghiệm của bài toán cân bằng (EP) khi và chỉ khi nó là nghiệm của bài toán sau (được gọi là bài toán hiệu chỉnh):

(AEP): Tìm $x^* \in C$ sao cho

$$f(x^*, y) := \rho \phi(x^*, y) + R(x^*, y) \forall y \in C,$$

trong đó $\rho > 0$ (tham số hiệu chỉnh).

Các phương pháp giải. Các dạng tương đương nêu ở mục trên gợi ý hai phương pháp giải bài toán (EP) thông qua bài toán (AEP). Đó là phương pháp giải theo tiếp cận điểm bất động và theo hàm đánh giá.

Cách tiếp cận điểm bất động. Sử dụng dạng điểm bất động, ta có thuật toán lặp tổng quát sau:

Tại mỗi bước lặp $k=0,1,\dots$, giả sử đã có $x^k \in C$, ta xây dựng dãy lặp theo quy tắc

$$x^{k+1} = s(x^k) := \arg \min \{ f(x^k, y) : y \in C \}, \quad (P_k)$$

trong đó, như đã nói,

$$f(x, y) := \rho \phi(x, y) + R(x, y),$$

với $\rho > 0$ là tham số hiệu chỉnh. Chú ý rằng cho C lồi, ϕ lồi, nửa liên tục dưới theo biến thứ hai và R lồi mạnh, khả vi theo biến thứ hai, nên bài toán (P_k) luôn có duy nhất nghiệm. Vậy x^{k+1} được xác định.

Như trên ta thấy nếu có $x^{k+1} = x^k$, thì x^k là nghiệm của bài toán (AEP), và do đó cũng là nghiệm của bài toán (EP). Nếu trường hợp này không bao giờ xảy ra, thì quá trình lặp sẽ kéo dài vô hạn và nó sẽ tạo ra một dãy vô hạn $\{x^k\}$ thuộc tập C . Câu hỏi đặt ra là với những điều kiện nào, thì dãy vô hạn này sẽ hội tụ đến lời giải của bài toán (AEP) ?

Trong mệnh đề dưới đây, ta lấy $R(x, y) := \frac{1}{2} \|y - x\|^2$. Hiển nhiên hàm này thỏa mãn các tính chất cho hàm hiệu chỉnh R , nêu ở trên.

Mệnh đề 3.7. *Giả sử ϕ đơn điệu mạnh trên C với hệ số τ và thỏa mãn điều kiện kiểu Lipschitz, theo định nghĩa sau:*

$$(M) \left\{ \begin{array}{l} \exists L_1 > 0, L_2 > 0 : \forall x, y, z \in C, \text{ ta có} \\ \phi(x, y) + \phi(y, z) \geq \phi(x, z) - L_1 \|x - y\|^2 - L_2 \|y - z\|^2 \end{array} \right.$$

Khi đó với bất kì $x^0 \in C$, dãy $\{x^k\}$ được xác định theo công thức (P_k)

$$x^{k+1} := s(x^k) := \arg \min_{y \in C} \left\{ \rho \phi(x^k, y) + \frac{1}{2} \|y - x^k\|^2 \right\},$$

có tính chất

$$\|x^{k+1} - x^*\|^2 \leq \alpha \|x^k - x^*\|^2, \forall k \geq 0,$$

nếu như $0 < \rho \leq \frac{1}{2L_2}$, trong đó x^* là nghiệm duy nhất của bài toán (EP) và

$$\alpha := 1 - 2\rho(\tau - L_1).$$

Hệ quả 3.2. Cho $L_1 < \tau$ và $0 < \rho \leq \frac{1}{2L_2}$. Khi đó

$$\|x^{k+1} - x^*\|^2 \leq \tau \|x^k - x^*\|^2, \forall k \geq 0,$$

trong đó $0 < \tau := \sqrt{1 - 2\rho(\tau - L_1)} < 1$.

Nhận xét 3.4. Do $\tau \leq L_1 + L_2$ và $0 < \rho \leq \frac{1}{2L_2}$, nên ta có $2\rho(\tau - L_1) < 1$. Vậy τ

đạt giá trị nhỏ nhất tại $\rho = \frac{1}{2L_2}$.

Dựa vào mệnh đề và hệ quả trên, ta có thuật toán sau giải bài toán (EP) khi ϕ đơn điệu mạnh và thỏa mãn điều kiện Lipschitz (M).

Như đã thấy, nếu $x^k = x^{k+1}$, thì x^k là nghiệm, do đó ta gọi điểm $x \in C$ là một nghiệm ε -xấp xỉ của (EP) nếu $\|x - x^*\| \leq \varepsilon$, trong đó x^* là một nghiệm chính xác của (EP).

3.2. Phương pháp chiếu giải bài toán cân bằng

Trong mục này, ta xét đến một *fg* phép chiếu dưới đạo hàm xấp xỉ để giải một lớp bài toán cân bằng đơn điệu. Nội dung các mục này được lấy từ bài báo [5].

Định nghĩa 3.4. Giả sử $\xi > 0$ và $x \in \mathbb{R}^n$. Điểm $p_x \in C$ được gọi là ξ -chiếu của x vào C nếu p_x là ξ -nghiệm của bài toán

$$\min_{y \in C} \left\{ \frac{1}{2} \|x - y\|^2 \right\},$$

nghĩa là
$$\frac{1}{2} \|x - p_x\|^2 \leq \frac{1}{2} \|x - P_C(x)\|^2 + \xi,$$

trong đó $P_C(x)$ là hình chiếu khoảng cách của x lên C .

Nhận xét 3.5. Từ định nghĩa ta thấy, $p_x \in C$ là ξ -chiếu của x vào C tương đương với $\langle x - p_x, p_x - y \rangle \geq -\xi, \quad \forall y \in C$.

Định nghĩa 3.5. ε - chéo dưới vi phân $\partial_2^\varepsilon f(x, x)$ của song hàm f tại $x \in C$ là

$$\begin{aligned}\partial_2^\varepsilon f(x, x) &:= \{g \in \square^n : f(x, y) + \varepsilon \geq f(x, x) + \langle g, y - x \rangle, \forall y \in \square^n\} \\ &= \{g \in \square^n : f(x, y) + \varepsilon \geq \langle g, y - x \rangle, \forall y \in \square^n\}.\end{aligned}$$

Bổ đề 3.1. Giả sử $\{v_k\}$ và $\{\delta_k\}$ là các dãy số thực không âm thỏa mãn

$$v_{k+1} \leq v_k + \delta_k \text{ với } \sum_{k=1}^{+\infty} \delta_k < +\infty. \text{ Khi đó dãy } \{v_k\} \text{ hội tụ.}$$

Cho $\rho, \bar{\rho}$ là các tham số dương và các dãy số thực $\{\rho_k\}, \{\beta_k\}, \{\bar{\rho}_k\}, \{\xi_k\}$ thỏa mãn các điều kiện sau

$$\rho_k > \rho, \beta_k > 0, \bar{\rho}_k \geq 0, \xi_k \geq 0, \forall k \in \mathbb{N}; \quad (3.4)$$

$$\sum \frac{\beta_k}{\rho_k} = +\infty, \sum \beta_k^2 < +\infty; \quad (3.5)$$

$$\sum \frac{\beta_k \bar{\rho}_k}{\rho_k} < +\infty, \sum \xi_k < +\infty. \quad (3.6)$$

Chẳng hạn có thể lấy

$$\beta_k = \frac{1}{k}, \rho_k = 1, \bar{\rho}_k = \frac{1}{k}, \xi_k = \frac{1}{k(k+1)}.$$

Thuật toán chiếu dưới gradient xấp xỉ. Chọn $x^0 \in C$. Tại mỗi bước lặp $k = 0, 1, \dots$ có x^k .

Bước 1: Giả sử $x^k \in C$. Lấy $g^k \in \partial_{\bar{\rho}_k} f(x^k, x^k)$. Ta định nghĩa:

$$\alpha_k = \frac{\beta_k}{\gamma_k} \text{ trong đó } \gamma_k = \max\{\rho_k, \|g^k\|\}.$$

Nếu $g^k = 0$ thì x^k là $\bar{\rho}_k$ -nghiệm của bài toán (EP) và dừng thuật toán nếu $\bar{\rho}_k \leq \bar{\rho}$. Trái lại chuyển sang Bước 2.

Bước 2: Tính $x^{k+1} \in C$

$$\langle \alpha_k g^k + x^{k+1} - x^k, x - x^{k+1} \rangle \geq -\xi_k, \forall x \in D \quad (3.7)$$

x^{k+1} là ξ_k -chiều của $(x^k - \alpha_k g^k)$ vào C.

Đặc biệt nếu $\xi_k = 0$ thì $x^{k+1} = P_C(x^k - \alpha_k g^k)$.

Nếu $\|x^{k+1} - x^k\| \leq 0$ thì dừng và ta được một nghiệm xấp xỉ.

Ngược lại quay về Bước 1.

Bổ đề 3.2. Với mọi k , ta có các bất đẳng thức sau:

$$(i) \alpha_k \|g^k\| \leq \beta_k;$$

$$(ii) \beta_k \|x^{k+1} - x^k\| \leq \beta_k^2 + \xi_k.$$

Chứng minh.

(i) Theo định nghĩa α_k ta có:

$$\alpha_k \|g^k\| = \frac{\beta_k \|g^k\|}{\max\{\rho_k, \|g^k\|\}} \leq \beta_k.$$

(ii) Thay $x = x^k$ vào (3.7) ta có:

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - x^k\| &\leq \langle \alpha_k g^k, x^k - x^{k+1} \rangle + \xi_k \\ &\leq \alpha_k \|g^k\| \cdot \|x^{k+1} - x^k\| + \xi_k \quad (\text{Theo Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz}) \\ &\leq \beta_k \|x^{k+1} - x^k\| + \xi_k \quad (\text{Theo chứng minh (i)}). \end{aligned}$$

$$\text{Hay} \quad \|x^{k+1} - x^k\|^2 - \beta_k \|x^{k+1} - x^k\| + \xi_k \leq 0 \quad (3.8)$$

Xét phương trình bậc hai $f(\theta) = \theta^2 - \beta\theta - \xi$ với $\theta \geq 0$. Khi đó $f(\theta) \leq 0$ kéo theo

$$\theta \leq \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 + 4\xi}}{2}. \quad (3.9)$$

Nhân cả hai vế của bất đẳng thức (3.9) với β và sử dụng bất đẳng thức Cauchy

cho hai số dương a và b , $ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$ ta có:

$$\beta\theta \leq 2^{-1} \left(\beta^2 + \beta\sqrt{\beta^2 + 4\xi} \right) \leq 2^{-1} \left(\beta^2 + \frac{\beta^2 + \beta^2 + 4\xi}{2} \right) = \beta^2 + \xi.$$

Thay vào (3.8) với $\theta = \|x^{k+1} - x^k\|$, $\beta = \beta_k$, $\xi = \xi_k$ ta được:

$$\beta_k \|x^{k+1} - x^k\| \leq \beta_k^2 + \xi_k. \quad \square$$

Mệnh đề 3.8. Giả sử bài toán (EP) có tập nghiệm $S(f, C)$ khác rỗng. Khi đó với mọi $x^* \in S(f, C)$ và với mọi k , ta có khẳng định sau:

$$\|x^{k+1} - x^*\| \leq \|x^k - x^*\|^2 + 2\alpha_k f(x^k, x^*) + \delta_k, \quad (3.10)$$

trong đó

$$\delta_k = 2\alpha_k \beta_k + 2\beta_k^2 + 4\xi_k.$$

Chứng minh

Ta có:

$$\|x^k - x^*\|^2 = \|x^{k+1} - x^k\|^2 - 2\langle x^k - x^{k+1}, x^* - x^{k+1} \rangle + \|x^{k+1} - x^*\|^2.$$

Nên

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - x^*\|^2 &= \|x^k - x^*\|^2 - \|x^{k+1} - x^k\|^2 + 2\langle x^k - x^{k+1}, x^* - x^{k+1} \rangle \\ &\leq \|x^k - x^*\|^2 + 2\langle x^k - x^{k+1}, x^* - x^{k+1} \rangle. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Thay $x = x^*$ vào (3.7) ta có:

$$\langle \alpha_k g^k + x^{k+1} - x^k, x^* - x^{k+1} \rangle \geq -\xi_k.$$

Suy ra

$$2\langle x^k - x^{k+1}, x^* - x^{k+1} \rangle \leq 2\langle \alpha_k g^k, x^* - x^{k+1} \rangle + 2\xi_k. \quad (3.12)$$

Thay (3.12) vào (3.11) ta được:

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - x^*\|^2 &\leq \|x^k - x^*\|^2 + 2\langle \alpha_k g^k, x^* - x^{k+1} \rangle + 2\xi_k \\ &= \|x^k - x^*\|^2 + 2\langle \alpha_k g^k, x^* - x^k \rangle + 2\langle \alpha_k g^k, x^k - x^{k+1} \rangle + 2\xi_k. \end{aligned}$$

Áp dụng Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz và Bổ đề 3.2 (i) ta có bất đẳng thức sau:

$$\begin{aligned}\|x^{k+1} - x^*\|^2 &\leq \|x^k - x^*\|^2 + 2\alpha_k \langle g^k, x^* - x^k \rangle + 2\beta_k \|x^k - x^{k+1}\| + 2\xi_k \\ &\leq \|x^k - x^*\|^2 + 2\alpha_k \langle g^k, x^* - x^k \rangle + 2\beta^2 + 4\xi_k.\end{aligned}\quad (3.13)$$

Mặt khác, $g^k \in \partial_2^{\dot{\alpha}_k} f(x^k, x^k)$ nên ta có:

$$\langle g^k, x^* - x^k \rangle \leq f(x^k, x^*) + \dot{\alpha}_k,$$

Do $\alpha_k > 0$ nhân cả hai vế của bất đẳng thức trên với $2\alpha_k$ ta được:

$$2\alpha_k \langle g^k, x^* - x^k \rangle \leq 2\alpha_k f(x^k, x^*) + 2\alpha_k \dot{\alpha}_k. \quad (3.14)$$

Thay (3.14) vào (3.13) ta được điều phải chứng minh.

Định lý 3.6. *Giả sử bài toán (EP) có tập nghiệm $S(f, C)$ khác rỗng và $S(f, C) \subset S_d(f, C)$. Khi đó ta có:*

- (i) *Dãy $\{\|x^k - x^*\|^2\}$ hội tụ với mọi $x^* \in S(f, C)$;*
- (ii) *Dãy $\{x^k\}$ bị chặn.*

Chứng minh

(i) Do $x^* \in S(f, C)$ nên $x^* \in S_d(f, C)$ suy ra $f(x^k, x^*) \leq 0$ thay vào (3.10) ta được:

$$\|x^{k+1} - x^*\|^2 \leq \|x^k - x^*\|^2 + \delta_k, \quad (3.15)$$

trong đó

$$\delta_k = 2\alpha_k \dot{\alpha}_k + 2\beta_k^2 + 4\xi_k.$$

Theo (3.5), (3.6), (3.7) thì

$$\delta_k > 0 \text{ và } \sum_{k=0}^{+\infty} \delta_k < +\infty. \quad (3.16)$$

Từ (3.15) và (3.16) ta được dãy $\{\|x^k - x^*\|^2\}$ hội tụ.

(ii) Do dãy $\left\{\left\|x^k - x^*\right\|^2\right\}$ hội tụ suy ra dãy $\{x^k\}$ bị chặn.

Định lí 3.7. Giả sử tập $S(f, C)$ khác rỗng, $S(f, C) \subset S_d(f, C)$ và dãy $\{g^k\}$ bị chặn. Khi đó

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} f(x^k, x^*) = 0, \quad \forall x^* \in S(f, C).$$

Chứng minh

Giả sử $x^* \in S(f, C)$. Vì $S(f, C) \subset S_d(f, C)$ nên theo Mệnh đề 3.8 ta có:

$$0 \leq 2\alpha_k(-f(x^k, x^*)) \leq \|x^k - x^*\|^2 - \|x^{k+1} - x^*\|^2 + \delta_k,$$

trong đó: $\delta_k = 2\alpha_k\alpha_k + 2\beta_k^2 + 4\xi_k > 0$ và $\sum_{k=0}^{+\infty} \delta_k < +\infty$ theo (3.5),

(3.6), (3.7).

Lấy tổng các bất đẳng thức trên với $k=0, 1, \dots, m$ ta có:

$$0 \leq 2 \sum_{k=0}^m \alpha_k(-f(x^k, x^*)) \leq \|x^0 - x^*\|^2 - \|x^{m+1} - x^*\|^2 + \sum_{k=0}^m \delta_k \leq \|x^0 - x^*\|^2 + \sum_{k=0}^m \delta_k.$$

Cho $m \rightarrow +\infty$ ta được:

$$0 \leq 2 \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k(-f(x^k, x^*)) + \sum_{k=0}^{+\infty} \delta_k.$$

$$\text{Vì } \sum_{k=0}^{+\infty} \delta_k < +\infty \text{ nên } 0 \leq 2 \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k(-f(x^k, x^*)) < +\infty. \quad (3.17)$$

Theo giả thiết $\{g^k\}$ bị chặn, từ (3.4) và (3.7) ta có tồn tại $L \geq \rho$ sao cho

$\|g^k\| \leq L$ với mọi $k \in \mathbb{N}$. Do đó:

$$\frac{\gamma_k}{\rho_k} = \max\{1, \rho_k^{-1} \|g^k\|\} \geq \frac{L}{\rho}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Khi đó, theo (3.4) thì:

$$\alpha_k = \frac{\beta_k}{\gamma_k} \geq \frac{\rho}{L} \frac{\beta_k}{\rho_k}, \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (3.18)$$

Từ (3.14) và (3.15) ta có:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\beta_k}{\rho_k} (-f(x^k, x^*)) < +\infty.$$

Do $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\beta_k}{\rho_k} = +\infty$ nên từ đây suy ra:

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} f(x^k, x^*) = 0, \quad \forall x^* \in S(f, C).$$

□

Nhận xét 3.6. Ta có thể thay điều kiện dãy $\{g^k\}$ bị chặn trong Định lý 3.7 bởi điều kiện tập ε -chéo dưới vì phân bị chặn trong một tập bị chặn của C .

Định lý 3.12. Giả sử tập $S(f, C)$ khác rỗng, $S(f, C) \subset S_d(f, C)$ và dãy $\{g^k\}$ bị chặn. Song hàm f thỏa mãn các điều kiện sau:

(i) Giả sử $x^* \in S(f, C)$ và $\bar{x} \in C$. Nếu $f(\bar{x}, x^*) = f(x^*, \bar{x}) = 0$ thì

$$\bar{x} \in S(f, C);$$

(ii) $f(., y)$ nửa liên tục trên với $\forall y \in C$.

Khi đó dãy $\{x^k\}$ hội tụ đến nghiệm của bài toán EP (f, C) .

Chứng minh

Giả sử $x^* \in S(f, C)$. Theo định nghĩa của $\limsup$ tồn tại một dãy con $\{x^{k_j}\}$ của $\{x^k\}$ sao cho:

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} f(x^k, x^*) = \lim_{j \rightarrow +\infty} f(x^{k_j}, x^*).$$

Theo Định lý 3.6, dãy $\{x^{k_j}\}$ bị chặn. Vì vậy, không mất tính tổng quát ta giả sử

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} x^{k_j} = \bar{x}. \quad (3.19)$$

Theo giả thiết (ii) song hàm f nửa liên tục trên trên tập C và từ Định lý 3.7 ta có:

$$\begin{aligned} f(\bar{x}, x^*) &\geq \limsup_{j \rightarrow +\infty} f(x^{k_j}, x^*) = \lim_{j \rightarrow +\infty} f(x^{k_j}, x^*) \\ &= \limsup_{k \rightarrow +\infty} f(x^k, x^*) = 0. \end{aligned}$$

Do $x^* \in S_d(f, C)$ nên $f(\bar{x}, x^*) \leq 0$ cho nên ta có:

$$f(\bar{x}, x^*) = 0.$$

Theo giả thiết (i) thì $\bar{x} \in S(f, C)$.

Khi đó theo Định lý 3.6 (ii) dãy $\left\{\|x^k - \bar{x}\|^2\right\}$ hội tụ, kết hợp với (3.19) ta được:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x^k = \bar{x}, \quad \bar{x} \in S(f, C). \quad \square$$

KẾT LUẬN

Luận văn nghiên cứu về phép chiếu khoảng cách xuống một tập lồi đóng trong không gian Hilbert và ứng dụng của nó trong việc giải bài toán cân bằng. Cụ thể luận văn đề cập đến các vấn đề sau:

1. Chứng minh sự tồn tại và tính duy nhất của phép chiếu xuống tập lồi đóng trong không gian Hilbert thực. Khảo sát các tính chất cơ bản của toán tử chiếu và xét toán tử chiếu trong các trường hợp đặc biệt.
2. Áp dụng phép chiếu khoảng cách để chứng minh sự tồn tại nghiệm và phương pháp giải bài toán cân bằng trong không gian hữu hạn chiều.
3. Giới thiệu bài toán cân bằng, các trường hợp đặc biệt của bài toán cân bằng, sự tồn tại nghiệm của bài toán cân bằng, các dạng tương đương và phương pháp giải bài toán cân bằng,..v..v...
4. Trình bày và sử dụng thuật toán chiếu dưới gradient xấp xỉ để giải một lớp bài toán cân bằng.

Tài liệu tham khảo

Tài liệu tiếng Việt

- [1] Đỗ Văn Lưu và Phan Huy Khải, *Giải tích lồi*, Nhà xuất bản Khoa học và kỹ thuật Hà nội, 2000.
- [2] Lê Dũng Mưu và Nguyễn Văn Hiền, *Nhập môn giải tích ứng dụng*, Nhà xuất bản Khoa học tự nhiên và công nghệ (sẽ ra).
- [3] Hoàng Tuy, *Lý thuyết tối ưu*, Viện toán học, 2006.

Tài liệu tiếng Anh

- [4] Heinz H. Bauschke and Patrick L. Combettes, *Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces*, Springer, 2011.
- [5] Paulo Santos and Susana Scheimberge, *An innexact subgradient algorithm for Equilibrium Problems*, volume 30, N. 1, pp 91-107, 2011.